



Sur l'application de quelques méthodes d'éléments finis à la résolution d'un problème d'élasticité incompressible non linéaire

Vitoriano Ruas

► To cite this version:

Vitoriano Ruas. Sur l'application de quelques méthodes d'éléments finis à la résolution d'un problème d'élasticité incompressible non linéaire. [Rapport de recherche] RR-0024, INRIA. 1980. inria-00076537

HAL Id: inria-00076537

<https://hal.inria.fr/inria-00076537>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

Rapports de Recherche

Collection Bf

N° 24

**SUR L'APPLICATION
DE QUELQUES MÉTHODES
D'ÉLÉMENTS FINIS
À LA RÉOLUTION D'UN
PROBLÈME D'ÉLASTICITÉ
INCOMPRESSIBLE
NON LINÉAIRE**

Vitoriano RUAS

Juillet 1980

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105 78150 Le Chesnay
France
Tél.: 954 90 20

IRIA

Rapports de Recherche

Collection Rf

N° 24

**SUR L'APPLICATION
DE QUELQUES MÉTHODES
D'ÉLÉMENTS FINIS
À LA RÉOLUTION D'UN
PROBLÈME D'ÉLASTICITÉ
INCOMPRESSIBLE
NON LINÉAIRE**

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105 - 78150 Le Chesnay
France
Tél. 954 90 20

Vitoriano RUAS

Juillet 1980

SUR L'APPLICATION DE QUELQUES METHODES
D'ELEMENTS FINIS A LA RESOLUTION D'UN
PROBLEME D'ELASTICITE INCOMPRESSIBLE NON-LINEAIRE

par Vitoriano RUAS

Résumé :

Dans ce rapport on introduit quelques méthodes d'éléments finis que nous avons appliquées à la résolution numérique de problèmes d'élasticité finie incompressible.

Un accent particulier est donné au cas bidimensionnel, pour lequel nous discutons la possibilité d'utilisation de ces méthodes sur le plan théorique ou sur le plan numérique.

Summary :

In this work we present some finite element methods aimed at solving finite incompressible elasticity problems.

Emphasis is given to the two-dimensional case, for which we discuss the applicability of the proposed methods either from a theoretical or a numerical point of view.

I - INTRODUCTION

Le but de ce rapport est de présenter un compte rendu de quelques essais sur des méthodes d'éléments finis, en vue de la résolution numérique d'un problème d'élasticité non-linéaire incompressible pour les matériaux de Mooney-Rivlin, dont le caoutchouc est un cas typique.

Nous nous sommes appliqués tout particulièrement, à l'étude du cas bidimensionnel, où le problème à résoudre peut être formulé de la manière suivante :

Trouver un champs de déplacements $\underline{u} = (u_1, u_2)$ du corps élastique, représenté dans sa configuration initiale par un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^2 de frontière Γ , qui appartienne à un certain ensemble X et qui minimise l'énergie, soit

$$(1) \quad W(\underline{u}) \leq W(\underline{v}) = \frac{C}{2} \int_{\Omega} (\delta_{ij} + v_{i,j})^2 dx - \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} dx - \int_{\Gamma} \underline{g} \cdot \underline{v} ds \quad \forall \underline{v} \in X$$

Ici δ_{ij} est le delta de Kronecker, $\underline{x} = (x_1, x_2)$, $v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2$ et $\underline{x} \cdot \underline{y}$ dénote le produit scalaire de deux vecteurs \underline{x} et \underline{y} de \mathbb{R}^2 . C est une constante représentant des propriétés physiques du matériau, Γ^* est une partie de Γ sur laquelle on applique des charges \underline{g} et \underline{f} représente les charges mortes.

X est défini comme étant le sous-ensemble d'un espace V , lui-même défini par

$$V = \{ \underline{v} / \underline{v} \in (H^1(\Omega))^2, \underline{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \Gamma_0 \subset \Gamma, \Gamma_0 \cap \Gamma^* = \emptyset \},$$

des champs de déplacement \underline{v} qui satisfont à la condition d'incompressibilité suivante :

$$(2) \quad J(\underline{v}(\underline{x})) = \det (I + \underline{\nabla} \underline{v}(\underline{x})) = 1 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

où $\underline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^T$ et I est la matrice identité 2×2 .

La condition (2) traduit mathématiquement le fait que l'aire de chaque élément de surface de Ω doit rester invariante pour tout état déformé du corps. Par ailleurs, si l'on considère les petites déformations, on peut

négliger les produits de dérivées dans (2) qui devient alors la condition d'incompressibilité linéaire

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0$$

intervenant en élasticité infinitésimale où en Mécaniques des Fluides.

La difficulté essentielle du problème à résoudre, que l'on appellera désormais (1) - (2), consiste à traiter de façon adéquate la condition d'incompressibilité non linéaire (2). Peut-être la manière la plus naturelle de le faire est de reformuler le problème en tant que limite d'une suite de problèmes plus simples où cette contrainte est éliminée en quelque sorte. Dans ce cadre, il y a deux genres de méthodes efficaces, tout au moins à notre connaissance :

I.1. Méthode Lagrangienne due à Oden [5]

On introduit un multiplicateur de Lagrange $p \in L^\infty(\Omega)$ et l'expression lagrangienne de l'énergie sur $V \times L^\infty(\Omega)$.

$$(3) \quad \mathcal{L}(\underline{v}, q) = W(\underline{v}) + \langle J(\underline{v}) - 1, q \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote la dualité $L^1(\Omega) - L^\infty(\Omega)$.

On cherche ensuite un point-selle (\underline{u}, p) de \mathcal{L} tel que \underline{u} soit une solution de (1) - (2) et p la pression associée. Ce problème est résolu itérativement à l'aide de la méthode de Newton-Raphson combinée avec une méthode de charges incrémentales (pour plus de détails voir [5]).

I.2. Méthode de Lagrangien augmenté due à Glowinski & Le Tallec [2]

On introduit deux tenseurs F et λ de $(L^2(\Omega))^4$, où F est destiné à approcher $u_{i,j} + \delta_{ij}$ et λ est un multiplicateur de Lagrange. Dans ces conditions, il est clair que F doit appartenir à l'ensemble \mathfrak{F} des $G \in (L^2(\Omega))^4$ qui vérifient :

$$(4) \quad G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = 1 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

Maintenant on se donne un paramètre réel $r, r > 0$ et l'expression lagrangienne augmentée de l'énergie pour $\mu, G \in (L^2(\Omega))^4$:

$$(5) \quad \mathcal{L}_r((\underline{v}, G), \mu) = W(\underline{v}) + \sum_{i,j=1}^2 \left[\frac{r}{2} \| v_{i,j} + \delta_{i,j} - G_{i,j} \|^2 + \mu_{ij} (v_{i,j} + \delta_{ij} - G_{ij}) \right]$$

où (\cdot, \cdot) dénote le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $\| \cdot \|$ la norme associée.

On cherchera ainsi un point selle $((\underline{u}, F), \lambda)$ de \mathcal{L}_R sur l'ensemble $((V \times \mathfrak{F}) \times (L^2(\Omega))^4)$ qui nous mènerait à une solution \underline{u} de (1) - (2), à l'aide de l'algorithme suivant, qui en génère une suite d'approximation $\{((\underline{u}^m, F^m), \lambda^m)\}_m$:

On se donne $\lambda^0 = 0$, $\underline{u}_0^1 = 0$ et un paramètre réel $\rho > 0$.

Pour $m=1, 2, \dots$, on calcule λ^m et (\underline{u}^m, F^m) par

$$(6) \quad \begin{cases} a) \lambda_{i,j}^m = \lambda_{i,j}^{m-1} + \rho (\underline{u}_{i,j}^m + \delta_{ij} - F_{ij}^m) & i, j = 1, 2 \\ b) \underline{u}^m = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \underline{u}_\ell^m & \text{et } F^m = \lim_{\ell \rightarrow \infty} F_\ell^m \end{cases}$$

Pour chaque m , les suites $\{\underline{u}_\ell^m\}_\ell$ et $\{F_\ell^m\}_\ell$ sont définies pour $\ell = 1, 2, \dots$, par :

$$(7) \quad \begin{cases} a) F_\ell^m \in \mathfrak{F} \text{ est tel que } \mathcal{L}_R((\underline{u}_{\ell-1}^m, F_\ell^m), \lambda^m) \leq \mathcal{L}_R((\underline{u}_{\ell-1}^m, G), \lambda^m) \quad \forall G \in \mathfrak{F} \\ b) \underline{u}_\ell^m \in V \text{ est tel que } \mathcal{L}_R((\underline{u}_\ell^m, F_\ell^m), \lambda^m) \leq \mathcal{L}_R((\underline{v}, F_\ell^m), \lambda^m) \quad \forall \underline{v} \in V \end{cases}$$

Compte tenu des faits suivants, on peut dire que la résolution des problèmes implicites dans (6) et (7) ne présentent pas de difficultés majeures.

En effet, (7b) correspond à la minimisation sans contraintes d'une fonctionnelle quadratique définie sur un espace de Hilbert. D'autre part, en pratique, les limites (6b) seront substituées par des valeurs qui satisfont un test d'arrêt classique dans les calculs numériques. Enfin, le problème de minimisation non-convexe (7a) peut être résolu point par point, puisqu'il n'y a pas de dérivées y intervenant. Par ailleurs, dans [2] il a été montré que (7a) peut être réduit à la résolution d'une équation algébrique simple pour chaque point (ce qui dans une méthode d'éléments finis se traduit par chaque noeud associé à la contrainte (2)).

Notre travail a donc consisté à chercher des méthodes de discrétisation de type, éléments finis, pour les problèmes continus ainsi générés, susceptibles de fournir de bonnes approximations, souvent selon le critère des observations de convergence dans quelques exemples concrets. Ceci dit, nous précisons que nous avons travaillé le plus souvent avec la méthode 1.2. qui nous a parue très stable et performante du point de vue numérique.

2. DES METHODES A CONCEPTION CLASSIQUE

Avant de passer aux types d'éléments finis que nous avons considérés, il convient de faire quelques remarques au sujet des conditions que devrait remplir au préalable une telle méthode.

Comme il s'agit d'un problème avec contraintes, il faut que, à priori, le nombre de degrés de liberté (NDL)* à calculer dépasse raisonnablement le nombre de contraintes (NC) à vérifier, dans le problème approché. En fait, on peut dire qu'il a de bonnes chances d'obtenir une suite d'approximations qui converge vers une solution du problème continu lorsque $h \rightarrow 0$ où h paramètre la famille de maillages réguliers utilisés, si le rapport asymptotique

$$\theta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{NC}{NDL}$$

est strictement inférieur à 1. D'autre part, si ce rapport asymptotique est supérieur ou égal à 1, la méthode en question ne peut pas être recommandée, même si pour quelques valeurs finies de h on ait $NC/NDL < 1$

Pour ce qui est des conditions pour l'existence et convergence des solutions approchées d'une classe de problèmes avec contraintes, nous nous référons au travail de Bercovier & Pironneau [1].

On remarque que pour notre problème, NDL sera simplement deux fois le nombre de noeuds du maillage auxquels on va calculer les vecteurs déplacements. Pour fixer les idées, prenons des éléments finis de Lagrange construits sur la triangulation d'un domaine carré avec deux côtés opposés fixes, paramétrés par $h=1/n$, où n est le nombre de divisions de chaque côté de Ω , suivant l'illustration donnée à la Figure 1.

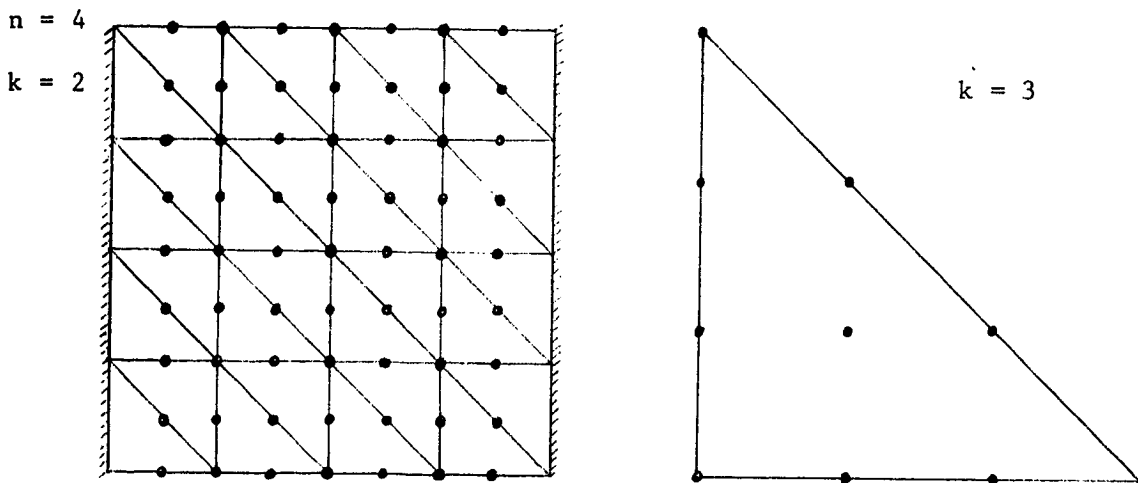


FIGURE 1

* Il est important de souligner que dans ce texte on se servira du terme degrés de liberté pour désigner les déplacements des noeuds non fixés à priori.

Si la restriction des fonctions-test à chaque triangle est un polynôme de degré k complet, on aura $2(kn+1) - (kn-1)$ degrés de liberté au total. D'autre part, dans ce cas, $J(\underline{u})$ sera un polynôme de degré $2(k-1)$ sur chaque triangle. Par conséquent, (2) serait satisfaite presque partout dans le problème approché, si elle était satisfaite en $2k^2 - k$ points par triangle. On aurait donc $NC = 4n^2 k^2 - 2kn^2$, d'où :

$$\Theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4k^2 n^2 - 2kn^2}{2kn^2 - 2} = 2 - \frac{1}{k},$$

soit, $\Theta \leq 1 \quad \forall k, k=1,2,\dots$, ce qui exclut immédiatement la manière ci-dessus de traiter le problème approché.

Cependant, si on se contente de vérifier (2) dans un sens plus faible, par exemple, en un nombre réduit de points sur chaque triangle (pour $k > 1$), on pourrait effectivement obtenir $\Theta > 1$. Par exemple, si l'on considère $J(\underline{u})$ comme appartenant à un espace de dérivées d'un polynôme de degré k sur un triangle, on aurait donc : $NC = 4n^2 k^2 - 2kn^2$, d'où :

$$\Theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 k(k+1)}{2k^2 n^2 - 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k},$$

soit, $\Theta < 1$ pour $k > 1$ (cela correspond en fait à une linéarisation de $J(\underline{u})$). On remarque qu'une méthode semblable à celle-ci est celle qui consiste à utiliser des éléments rectangulaires de type Q_1 , en vérifiant la contrainte (2) au barycentre de chaque élément. Plusieurs tests effectués par Le Tallec [3], indiquent que cette approche est très viable, d'autant plus qu'on vérifie que la solution présente la propriété souhaitable, que le rapport entre les aires d'un rectangle en état déformé et de ce même rectangle en configuration initiale est unitaire. Cependant, on remarque que même si cette propriété reste encore vérifiée dans le cas des quadrilatères quelconques avec des éléments Q_1 isoparamétriques, la situation devient plus complexe, ce qui incite à la recherche d'une solution avec des polynômes de degré k par triangle.

En bref, tout cela indique qu'on ne saurait choisir n'importe comment la manière de vérifier (2) dans le problème discret, de façon à ce que les solutions obtenues satisfassent de façon raisonnable à la condition d'invariance des aires, soit, l'incompressibilité.

Ce raisonnement nous a amené à la recherche de méthodes pas très éloignées des éléments finis linéaires par triangles (P1). En effet, dans le cas de ceux-ci, il suffit de vérifier (2) en un point d'un triangle pour que celui-ci se déforme en un triangle droit ayant la même aire que lui. Malheureusement, de l'analyse faite précédemment, on voit que pour les éléments finis de type P_1 conformes, on a $\Theta = 1$. C'est pour cela que dans un premier

temps, nous avons considéré les éléments finis P_1 , non conformes, comme cela a été fait pour les problèmes d'écoulement de fluides incompressibles [7], puisque pour notre problème aussi, on aurait $\theta = 1/3$. Cependant, on remarque que, comme maintenant on n'a plus la continuité des déplacements aux sommets des triangles, la vérification exacte de (2) par élément n'implique nullement l'invariance de l'aire du domaine déformé, notamment lorsque l'on est dans un régime de grands déplacements, ce qui est souvent le cas de notre problème.

Quelques tests numériques simples ont suffi à confirmer la non viabilité de cet élément non-conforme pour la résolution du problème (1)-(2). On a donc considéré d'autres éléments finis qui, tout en gardant la souhaitable propriété de la continuité des déplacements aux sommets des éléments, éviteraient les complications de mise en oeuvre propres aux polynômes de haut degré. On en est par ailleurs resté aux triangles, à cause de leur flexibilité par rapport aux rectangles (resp. quadrilatères).

Une première idée a été d'introduire un triangle avec quatre degrés de liberté, à savoir, les valeurs fonctionnelles aux 3 sommets et au barycentre. On y associe l'espace des polynômes de degré 2 réduits par la suppression de deux degrés de liberté, de façon à ce que le polynôme réduit soit linéarisé en quelque sorte. La condition que nous avons imposée, c'est que les dérivées premières au barycentre coïncident avec celles de la fonction linéaire affine qui l'interpole aux sommets de chaque triangle. Pour cette raison, nous appelons ce triangle l'élément quasi-linéaire symétrique.

On a vérifié que les fonctions de base qui satisfont à la condition ci-dessus sont celles données (réf. Figure 2) comme suit :

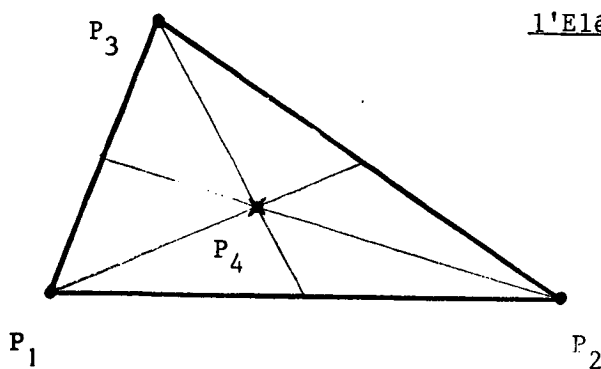


FIGURE 2

l'Elément Quasi-Linéaire Symétrique

Points de calcul	Degrés de Liberté	Contraintes
Fonctions de base -	•	×
Barycentre :	$p_4 = 3(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3)$	
Sommets :	$p_i = \lambda_i - p_4/3, i=1,2,3$	

les λ_i étant les coordonnées barycentriques relatives aux 3 sommets du triangle. Pour les détails nous nous référons à l'Appendice I.

Evidemment, il s'agit de vérifier la contrainte (2) - où $J(u)$ est en réalité un polynôme de degré 2 sur un triangle - seulement au barycentre de celui-ci. La motivation en est le fait qu'on aurait ainsi $\theta = 1/3$.

On remarque que cet élément est non conforme puisque la continuité des traces des polynômes de degré 2 sur un côté commun à deux éléments voisins n'est

assurée qu'aux extrémités de celui-ci. Aussi, on remarque que quelques généralisations aux N-simplexas gardant les propriétés fondamentales de cet élément sont envisageables, dont la plus simple nous semble être celle qui consiste à prendre encore les valeurs au barycentre P_{N+2} et au sommets $P_i, i = 1, 2, \dots, N+1$, comme degrés de liberté et à y associer les fonctions de base

$$P_{N+2} = (N+1) \sum_{\substack{i,j=1 \\ i > j}}^{N+1} \lambda_i \lambda_j \quad \text{et } P_i = \lambda_i - P_{N+2}/(N+1) \quad i=1, 2, \dots, N+1,$$

Nous avons démontré que pour des problèmes d'ordre 2 de la forme générale ci-dessous :

$$(8) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{V} \text{ tel que} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \end{cases}$$

où

$$a(u, v) = (A \nabla u, \nabla v) + (b, \nabla u, v) + c(u, v)$$

et

$$L(v) = (f, v) + (d, \nabla v) + \int_{\Gamma^*} g v ds$$

où A est une matrice $N \times N$, $b \in \mathbb{R}^N$, c est un scalaire, $d = (d_1, d_2, \dots, d_N)$ est constante (par élément pour le problème discret), $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma^*)$, de sorte que $\exists \alpha > 0$ tel que \underline{a} soit coercive sur \mathcal{V} , soit

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad \text{où}$$

$$\mathcal{V} = \{v/v \in H^1(\Omega), \quad v=0 \text{ sur } \Gamma_0\}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \text{ ouvert borné,}$$

une suite de solutions approchées $\{u_h\}_h$ obtenues avec cet élément est convergente d'ordre h dans $H^1(\Omega)$ (Voir Appendice I).

Cependant, lorsque $f=0$, $c=0$ et $b=0$, on vérifie que le problème qui approche (8) avec cet élément est équivalent au problème approché correspondant avec des éléments de type P_1 conformes et pour ceci, nous nous référons encore une fois à l'Appendice I. Or, il se trouve que dans nombre de problèmes concrets on est effectivement amené à considérer des charges mortes nulles, outre le fait que la résolution de (1)-(2) avec les algorithmes 1.1. ou 1.2. impliquent la résolution d'une suite de problèmes de type (8) vectoriels (pour l'algorithmes 1.1. sans la coercivité) avec b et c nuls.

On remarque néanmoins que ceci ne serait pas forcément le cas du problème tridimensionnel puisque, vraisemblablement, celui-ci implique la résolution d'une suite de problèmes d'un type différent de (8). Par ailleurs, une étude du cas

tridimensionnel est en cours à l'INRIA et nous avons l'intention d'analyser prochainement l'applicabilité de notre tétraèdre non conforme à ce genre de problèmes. Mais, pour le cas bidimensionnel, cet élément ne saurait en définitif servir à résoudre (1)- (2).

Enfin, après quelques tentatives avec d'autres éléments de degré 2 non-conformes complets et réduits, où nous nous sommes heurtés à des difficultés tantôt d'ordre théorique, tantôt d'ordre numérique, nous avons introduit plus récemment ce que nous appelons l'élément quasi-linéaire asymétrique.

Comme le précédent, il est de degré 2 réduit à 4 degrés de liberté, mais cette fois-ci placés de façon non symétrique par rapport au barycentre du triangle de façon à ce qu'il reste conforme. Nous avons pu obtenir de très bons résultats numériques avec cet élément, qui semblent se justifier par une de ses propriétés fondamentales que l'on présentera ci-après.

On considère l'espace \mathcal{P} de polynômes de degré 2 tels que leurs traces sur deux côtés donnés d'un triangle soient des polynômes de degré 1 à une variable. Etant donné l'ensemble de degrés de liberté suivants :

- valeurs fonctionnelles aux trois sommets P_i , $i=1,2,3$ et
- valeur fonctionnelle au milieu P_4 du côté $P_1 P_2$ sur lequel la trace n'est pas nécessairement un polynôme de degré 1.

on prouve qu'il est \mathcal{P} -unisolvant en exhibant les 4 fonctions de base, à savoir :

$$(9) \quad P_i = \lambda_i - 2\lambda_1\lambda_2 \quad i=1,2$$

$$P_3 = \lambda_3$$

$$P_4 = 4\lambda_1\lambda_2$$

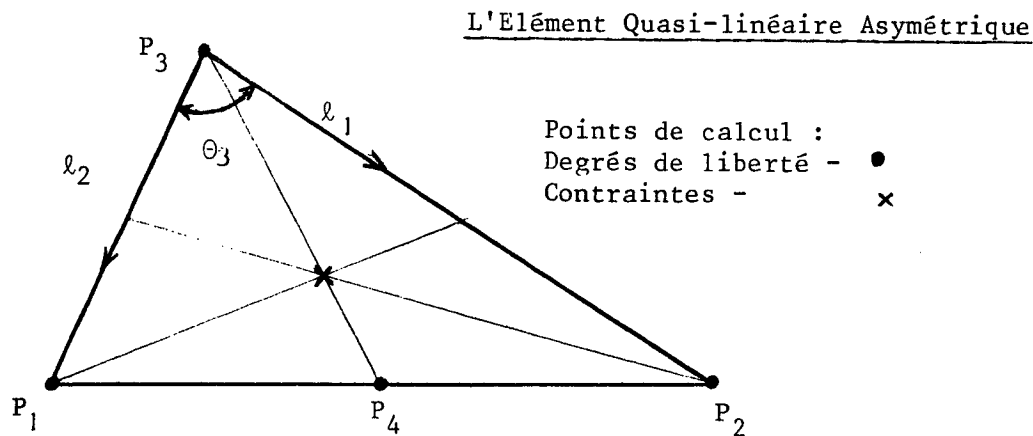


FIGURE 3

Dû la structure non symétrique de cet élément il est clair que la compatibilité habituelle pour les éléments finis impose quelques restrictions quant aux triangulations auxquelles il peut être associé. Nous proposons donc le procédé suivant très peu restrictif :

On construit d'abord une partition arbitraire du domaine en quadrilatères convexes. En suite chaque quadrilatère est subdivisé en deux triangles par une quelconque de ses diagonales. De telles diagonales seront les seuls côtés de la triangulation sur lesquels la trace des polynômes sera le degré 2. A la figure 4 on donne une illustration de l'idée avec un exemple de triangulation d'un domaine irrégulier.

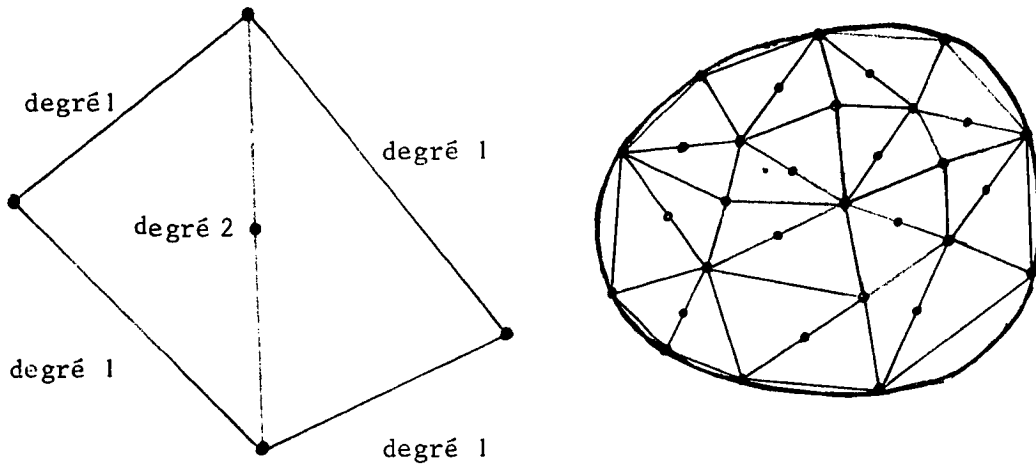


FIGURE 4

Une propriété très intéressante de cet élément est le fait que $J(\underline{v})$ est une fonction linéaire affine par triangle et non pas un polynôme de degré 2 comme dans le cas général. En effet, si l'on considère les directions λ_1 et λ_2 des deux côtés P_3P_1 et P_3P_2 , on peut vérifier aisément que $J(\underline{v})$ s'exprime sur le triangle en question par (ref. Figure 3)

$$J(\underline{v}) = 1 + \sin \Theta_3 \left[\frac{\partial v_1}{\partial \lambda_1} \frac{\partial v_2}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial v_1}{\partial \lambda_2} \frac{\partial v_2}{\partial \lambda_1} \right]$$

D'autre part, d'après (9) on peut écrire v_1 et v_2 sous la forme suivante

$$v_i = \sum_{j=1}^2 \alpha_j^i \lambda_j + \beta^i \lambda_1 \lambda_2 \quad i = 1, 2,$$

où α_j^i et β^i sont des coefficients constants. Comme le terme quadratique de $J(\underline{v})$ est donné par

$$\beta_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\lambda_1 \lambda_2) \beta_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\lambda_2 \lambda_1) - \beta_1 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\lambda_1 \lambda_2) \beta_2 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\lambda_1 \lambda_2) \equiv 0$$

la propriété est vérifiée.

Cela implique donc que si $J(\underline{v}) = 1$ au barycentre du triangle K on a

$$\Delta_{K'} = \int_K J(\underline{v}) = \int_K 1 = \Delta_K, \quad \Delta_S \text{ dénotant l'aire d'une figure plane } S$$

L'aire du triangle K reste donc invariante en état déformé K' (évidemment la contrainte n'est pas nécessairement vérifiée partout dans K) Par ailleurs, si d'une part un triangle déformé aura deux côtés droits et un côté parabolique chaque quadrilatère déformé aura les quatre côtés droits (réf. Figure 5)

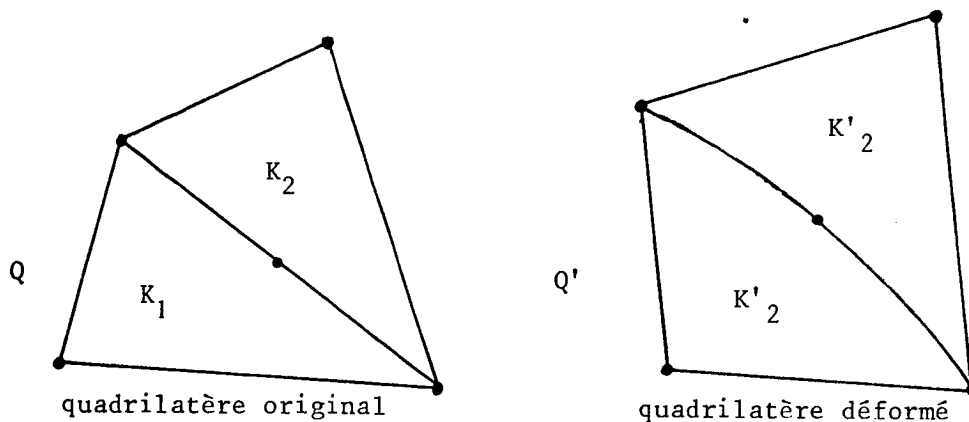


FIGURE 5

Si l'on tient compte du fait que à chaque triangle correspond une seule contrainte, on aura maintenant le rapport asymptotique $\Theta = 1/2$ (voir figure 6)

$$\Theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{4n^2 - 2} = \frac{1}{2}$$

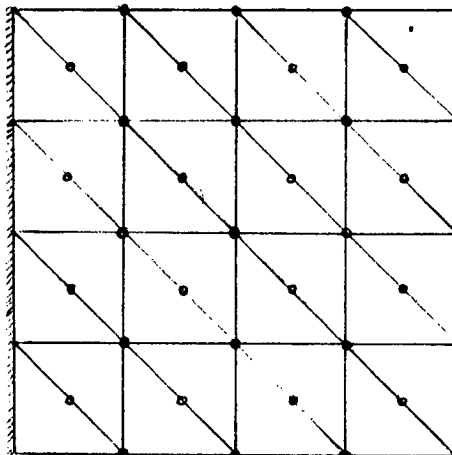


FIGURE 6

Nous avons considéré aussi une généralisation de cet élément à la dimension 3 : On prend un tétraèdre et on considère l'espace de polynômes de degré 2 dont la trace sur toutes les arêtes du tétraèdre sauf une, soit un polynôme de degré 1 à une variable. Soit P_1, P_2 l'arête sur laquelle la trace n'est pas nécessairement un polynôme de degré 1 et P_5 son milieu. Les fonctions de base associées aux 5 degrés de liberté, à savoir, valeurs fonctionnelles en P_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, sont données par (réf. Figure 7)

$$\begin{aligned} p_i &= \lambda_i - 2 \lambda_1 \lambda_2 & i &= 1, 2 \\ p_i &= \lambda_i & i &= 3, 4 \\ p_5 &= 4 \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

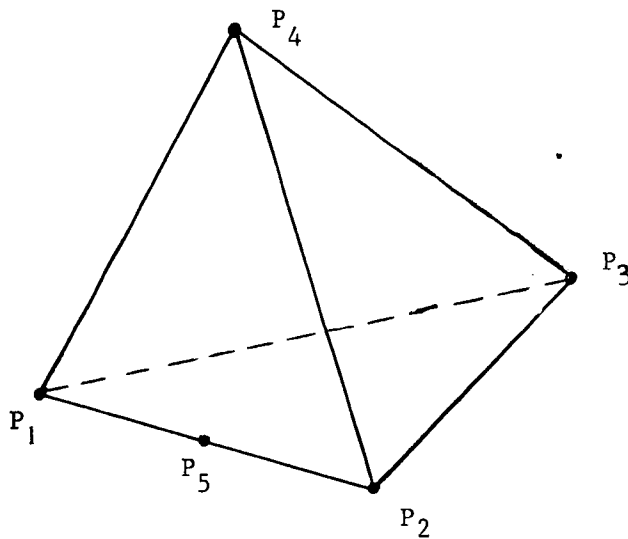


FIGURE 7

Maintenant, la partition du domaine en tétraèdres que nous proposons est celle obtenue à partir d'une première partition en octaèdres (par exemple, ceux obtenus en reliant un point interne aux sommets d' hexaèdres juxtaposés, s'intersectant par un sommet ou une face comme esquissé à la figure 8). Les tétraèdres sont obtenus par la subdivision de chaque octaèdre en 4 tétraèdres à l'aide de l'une quelconque de ses diagonales d (voir Figure 8)

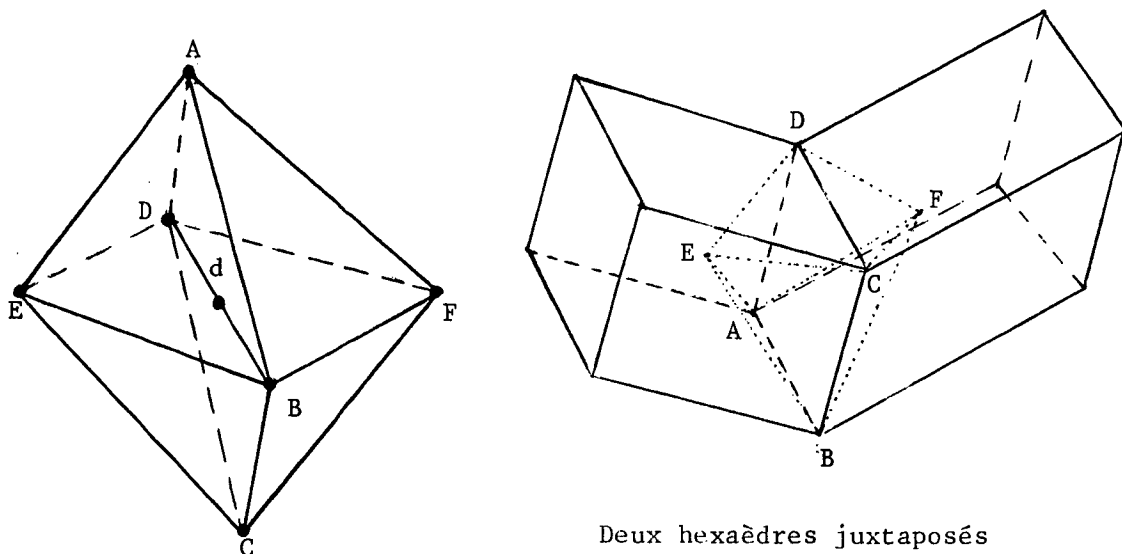


FIGURE 8

Par une généralisation du procédé mené dans le cas bidimensionnel, on prouve que l'expression $J(\underline{v}) = \det (I + \nabla \underline{v}) \equiv P.P.$ dans Ω , $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T$, est linéaire par tétraèdre. Comme précédemment, ceci permettrait de satisfaire exactement la condition d'incompressibilité, tout en vérifiant la contrainte ci-dessus seulement au barycentre de chaque tétraèdre. Cependant on remarque que maintenant on n'a que $\Theta=4/5$, soit une perte considérable par rapport au cas bidimensionnel qui incite à la prudente utilisation de ce tétraèdre.

3. METHODES AVEC AJUSTEMENT DE MAILLAGE

Avant d'introduire un genre de technique que nous avons utilisé avec succès, il convient de remarquer que le calcul à priori du rapport NC/NDL tel que nous l'avons fait précédemment, ne tient pas en compte le fait que les relations d'interdépendance entre les contraintes peuvent s'établir de façon spontanée dans des problèmes discrets particuliers. On pourrait avoir alors une réduction du rapport asymptotique Θ suffisante pour entraîner la convergence pour des méthodes qui ne sauraient être appliquées dans le cas général. On trouve un exemple significatif de ce phénomène dans l'article de Mercier [4] où il remarque que lorsqu'on résoud des problèmes d'élasticité linéaire incompressible (soit avec $\text{div } \underline{v} = 0$), avec des éléments finis ρ_1 conformes construits sur une

triangulation particulière du domaine, on peut avoir des problèmes bien posés et convergence, alors que, comme on a vu, pour cette méthode on a, en général $\Theta = 1$. La triangulation en question est celle que l'on obtient à partir d'une quadrangulation arbitraire de Ω , en subdivisant chaque quadrilatère en 4 triangles par ses deux diagonales. L'argument utilisé, c'est que, au niveau de chaque quadrilatère, il suffit d'avoir $\text{div } \underline{v} = 0$ sur trois triangles pour que l'on ait $\text{div } \underline{v} = 0$ sur le quatrième, \underline{v} étant une paire arbitraire de fonctions test du sous espace d'éléments finis ainsi généré. Autrement dit, les 4 contraintes attachées à un quadrilatère ne sont pas indépendantes et dans ce cas on a en fait $\Theta = 3/4$.

Or ceci n'est nullement le cas de notre contrainte non linéaire pour ce genre de triangulations. Cependant, suivant ce principe, on a essayé de résoudre (1) -(2) avec des éléments finis de type \mathcal{P}_1 conformes, soit, en cherchant à établir des liens entre les contraintes par le biais d'une triangulation bien choisie, en vue de réduire la valeur de Θ . Par ailleurs, le fait qu'en général ici $\Theta = 1$, c'est à dire la plus petite valeur pour des éléments finis de Lagrange complets, constitue justement l'attrait de ce genre d'éléments finis pour notre problème, outre bien évidemment les arguments de continuité et de simplicité déjà avancés :

- La continuité des déplacements aux sommets entraîne l'invariance de l'aire du domaine.
- Si la contrainte est vérifiée en un point du triangle elle l'est partout et celui-ci se déforme en un triangle droit de même aire.

Dans ce contexte, une idée qui nous a paru d'abord bien simple, a été l'utilisation d'une triangulation obtenue, cette fois aussi, à partir d'une autre arbitrairement construite. A l'intérieur de chaque triangle de celle-ci, appelé un supertriangle, on choisit un point P_4 afin de le subdiviser en trois sous-triangle, (réf. Figure 9). La position du noeud interne P_4 changerait progressivement au cours des itérations de la méthode de relaxation, de façon à satisfaire à la condition ci-dessous.

$$(10) \quad \frac{\text{aire}(T_1)}{\text{aire}(T'_1)} = \frac{\text{aire}(T_2)}{\text{aire}(T'_2)} = \frac{\text{aire}(T_3)}{\text{aire}(T'_3)}$$

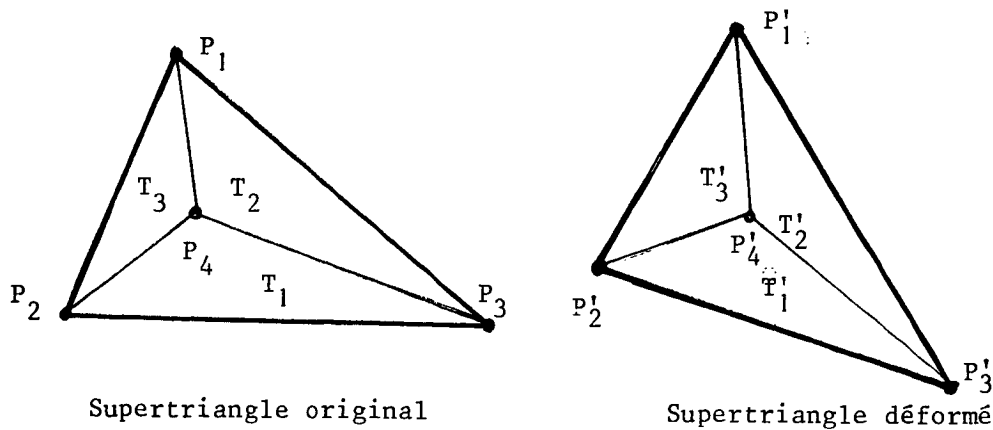


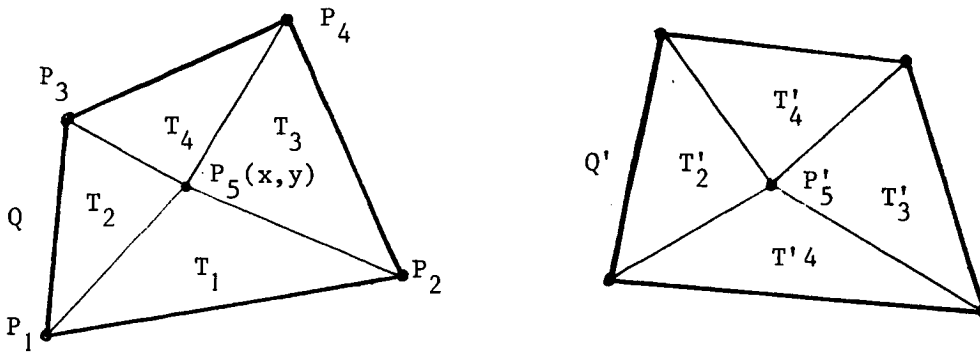
FIGURE 9

Pour chaque triangle où (10) se vérifierait à chaque itération, on aurait effectivement une seule contrainte au lieu de 3.

Cependant cette idée pour cet élément n'a pas abouti puisqu'ici encore la résolution d'un problème de type (8) avec f, b et c nuls, équivaut à la résolution avec les éléments finis P_1 conformes pour les supertriangles. Une démonstration de ce fait est donnée à l'Appendice II, d'où l'on déduirait sans difficultés que cela implique que (10) sera toujours trivialement satisfaite pour n'importe quel noeud interne choisi au départ, dès qu'on initialise l'algorithme I.2 par zéro (ce qui est d'ailleurs la pratique courante). Autrement dit le procédé n'ajoute absolument rien à la réduction du nombre de contraintes recherchées.

Nous avons alors envisagé une méthode de résolution basée sur ce même principe, mais cette fois-ci avec une triangulation construite à partir d'une quadrangulation de Ω qui, mise à part la convexité des quadrilatères, est entièrement arbitraire. Le maillage final est obtenu en subdivisant chaque quadrilatère en 4 triangles à l'aide d'un point interne dont la position est ajusté itérativement. Le principe de cet ajustement est semblable au précédent, à savoir, on cherchera les coordonnées x, y des points internes de façon à égaliser les rapports entre les aires des soustriangles en configuration originale et en configuration déformée. En se référant à la Figure 10 ci-dessous, on pourrait, par exemple, chercher des P_5 tels que

$$(11) \quad \frac{\text{aire}(T_1)}{\text{aire}(T_4)} = \frac{\text{aire}(T'_1)}{\text{aire}(T'_4)} \quad \text{et} \quad \frac{\text{aire}(T_2)}{\text{aire}(T_3)} = \frac{\text{aire}(T'_2)}{\text{aire}(T'_3)}$$



Configuration initiale du quadrilatère Configuration du quadrilatère déformé

FIGURE 10

soit vérifiée à chaque itération de l'algorithme de relaxation.

Le problème de déterminer ces coordonnées x,y est en fait non linéaire, raison pour laquelle on a préféré de le résoudre itérativement. Par ailleurs, nous n'avons pas beaucoup à dire à présent, au sujet de l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème, à part le fait que dans les régions à fort gradient de u , notamment celles proches de Γ_0 , il est très possible que pour les premières itérations de l'algorithme lagrangien, des solutions se trouvent en dehors du quadrilatère, ce qui doit être de toute évidence exclu. Nous reviendrons sur ce point par la suite. D'autre part, si le gradient est petit, on s'avoisine du cas linéaire où l'on sait que la réduction recherchée peut être obtenue.

Compte tenu de ces faits, on s'est contenté de proposer une méthode itérative de recherche de noeuds internes vérifiant (11), qui n'est peut-être pas la meilleure sur le plan de la convergence, mais qui a l'avantage d'être très simple à mettre en oeuvre. Elle est définie comme suit :

On prend pour approximation initiale x^0, y^0 des coordonnées du noeud interne P_5 d'un quadrilatère Q , les dernières obtenues à l'itération précédente de l'algorithme de relaxation. Ensuite pour $i = 1, 2, 3, \dots$, on calcule les coordonnées x^i, y^i de P_5 qui résolvent le système :

$$(12) \quad \frac{\text{aire}(T_1^i)}{\text{aire}(T_4^i)} = r^{i-1} \quad \text{où} \quad r^{i-1} = \frac{\text{aire}((T_1^{i-1})')}{\text{aire}((T_4^{i-1})')}$$

$$\frac{\text{aire}(T_2^i)}{\text{aire}(T_3^i)} = q^{i-1} \quad \text{où} \quad q^{i-1} = \frac{\text{aire}((T_2^{i-1})')}{\text{aire}((T_3^{i-1})')}$$

T_j^i étant les triangles définis par la subdivision de Q avec le noeud (x^i, y^i) et $(T_j^i)'$ étant le triangle déformé obtenu par la résolution de (7b) avec les noeuds (x^i, y^i) , $j = 1, 2, 3, 4$.

On remarquera que (12) donne lieu à deux équations linéaires à deux inconnues x^i et y^i . Sur les questions de l'existence de (x^i, y^i) et de savoir si ce point sera effectivement un point interne du quadrilatère pour tout i , on remarque d'abord qu si (x^{i-1}, y^{i-1}) se trouve assez éloigné de la frontière de Q et si h est suffisamment petit, on peut espérer que le Jacobien de u_h ne sera pas négatif quelque soit le genre de charges appliquées. Dans ce cas, P_5' restera à l'intérieur de Q' (voir Figure 10) et les rapports entre les aires r^{i-1} et q^{i-1} seront positifs. Or, si Q est un quadrilatère convexe, chacune des équations (12) représente une droite qui joint deux points situés sur deux côtés opposés de Q (voir Figure 11). Par conséquent, elles s'intersectent à l'intérieur de Q .

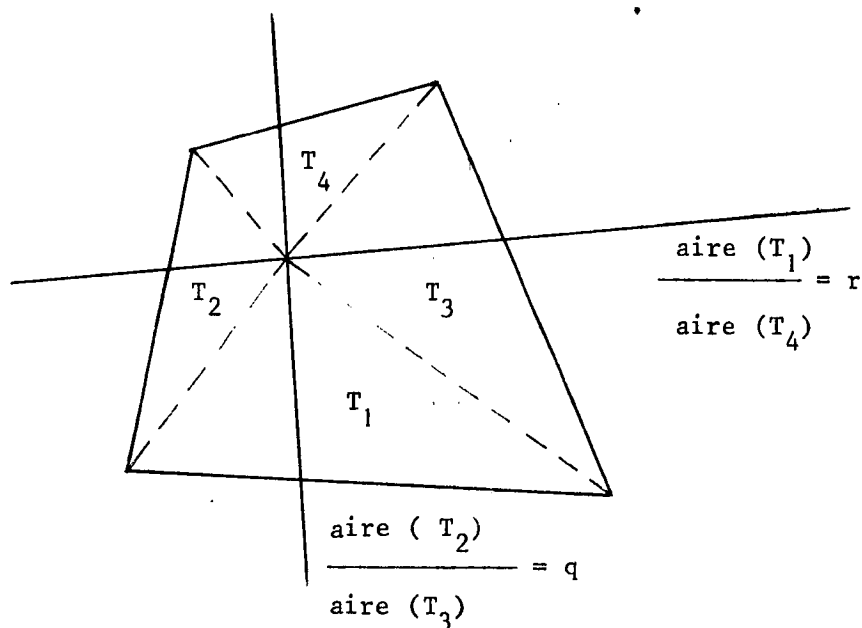


FIGURE 11

Enfin sur la question d'éviter la génération d'une suite de points internes convergeant vers la frontière de Q : On introduit d'abord des bornes supérieures et inférieures pour $r/(r+1)$ et $q/(q+1)$ de type $1/2 + \delta$, ou δ est convenablement choisi dans $]0, 1/2[$. A partir du moment où celles-ci sont dépassées pour l'un des rapports r^i et q^i , on fixe le noeud en question pour tout le reste du processus, ce qui équivaut à renoncer à établir des relations d'interdépendance entre contraintes au niveau de ce quadrilatère.

Pour plus de détails sur cette méthode qui a donné des résultats satisfaisants tantôt sur le plan de l'incompressibilité, tantôt sur le plan de la convergence lorsque h tend vers zéro, nous nous référons à l'article [6], dans lequel nous présentons plusieurs exemples calculés sur ordinateur. On voudrait néanmoins conclure avec une remarque particulièrement importante sur la façon de compenser dans les calculs, la perte de la possibilité offerte par l'algorithme de Glowinski & le Tallec de factorisation de la matrice de discrétisation de (7b) une fois pour toutes à la toute première itération, qui clairement n'a un sens que si le maillage est fixe tout au long des itérations. On note en effet que dans la pratique, l'ajustement de maillage ne perturbe pas beaucoup les coefficients des matrices de discrétisation de (7b), qui maintenant varient progressivement. C'est pour cela que les méthodes de type gradient conjugué avec préconditionnement offrent une bonne alternative, en particulier si l'on utilise pour le conditionnement une matrice obtenue par la factorisation de la matrice générée par un maillage fixe judicieusement choisi, par exemple, le maillage initial, faute de mieux.

+

REFERENCES

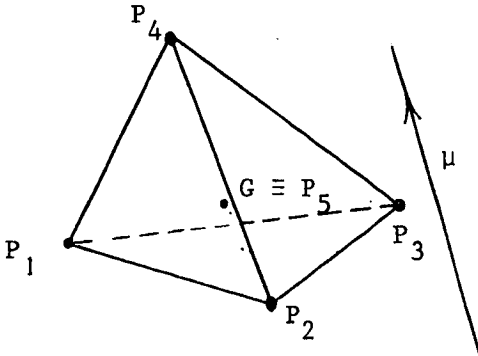
- [1] Bercovier, M. et Pironneau, O. Error Estimates for Finite Element Method Solution of the Stokes Problem in Primitive Variables, *Numerische Mathematik* 33, pp. 211-224 (1979)
- [2] Glowinski, R. & Le Tallec, P. - Une méthode de Résolution Numérique d'un Problème d'Elasticité Non-Linéaire Incompressible, *CRAS de Paris, Série B*, t. 290, pp. 23-26 (1980)
- [3] Le Tallec, P. - Numerical Analysis of Incompressible Finite Elasticity, Ph.D. Thesis, University of Texas, Austin (1980)
- [4] Mercier, B. - A Conforming Finite Element Method for Two-Dimensional Incompressible Elasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 6, pp. 942-945 (1979)
- [5] Oden, J.T. - Finite Element of Non Linear continua, Mc Graw-Hill, New York (1971)
- [6] Ruas, V. - An Adaptive Finite Element Method for Solving Two-Dimensional Finite Incompressible Elasticity Problems (à paraître dans les Proceedings of the Conference on Numerical Methods for Nonlinear Problems, Swansea, Septembre 1980)

- [7] Thomasset, F. - Finite Element Methods for Navier Stokes Equations, VKI lecture series, Computational Fluid Dynamics, Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Rhode St. Genèse, Belgique, (1980).

APPENDICE I

Sur l'élément quasi-linéaire symétrique

I.1. On va d'abord prouver que pour l'élément simplicial de degré 2 à N+2 degrés de liberté, dont les fonctions de base sont données par :



$i^{\text{ème}}$ sommet : $p_i = \lambda_i - \frac{p_{N+2}}{N+1}$, $i = 1, 2, \dots, N+1$

barycentre G : $p_{N+2} = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N+1} \lambda_i \lambda_j (N+1) / N$

vaut la propriété suivante : Si $v = \sum_{i=1}^{N+2} \alpha_i p_i$ on a

(I) $\frac{\partial v}{\partial \mu}(G) = \frac{\partial \pi v}{\partial \mu}(G)$

où μ représente une direction quelconque de \mathbb{R}^N et $\pi v = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \lambda_i$.

Compte-tenu de l'expression des fonctions de base données ci-dessus, il suffit de vérifier que le gradient de p_{N+2} est nul en G. Prenons donc N directions n'appartenant pas au même hyperplan de dimension N-1, par exemple, celles de N arêtes issues d'un même sommet P_1 du N-simplexe. Soit donc α_k la direction de l'arête qui relie P_1 à un sommet quelconque P_k , $k = 2, 3, \dots, N+1$ orientée dans le sens P_1 à P_k . On pose

$\tilde{p}_{N+2} = 2p_{N+2} / (N+1)N$ et on a

$$\tilde{p}_{N+2} = \lambda_1 \sum_{j=2}^{N+1} \lambda_j + \sum_{\substack{2 \leq i \leq N \\ i \leq j \leq N+1}} \lambda_i \lambda_j \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_{N+2}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_k} \sum_{j=2}^{N+1} \lambda_j + \lambda_1 \sum_{j=2}^{N+1} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \alpha_k} + \sum_{\substack{2 \leq i \leq j \\ j \leq N+1}} \left[\frac{\partial \lambda_i}{\partial \alpha_k} \lambda_j + \frac{\partial \lambda_j}{\partial \alpha_k} \lambda_i \right]$$

D'autre part on a :

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \alpha_k} = 0 \quad \text{si } j \neq k \quad \text{et} \quad \frac{\partial \lambda_k}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{\ell_k} \quad \text{si } j = k,$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_k} = -\frac{1}{\ell_k}, \quad \text{où } \ell_k \text{ est la longueur de } \overline{P_1 P_k}.$$

Donc

$$\frac{\partial \tilde{p}_{N+2}}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{\ell_k} (\lambda_1 - \sum_{j=2}^{N+1} \lambda_j) + \frac{1}{\ell_k} \sum_{j=k+1}^{N+1} \lambda_j + \frac{1}{\ell_k} \sum_{2 \leq i < k} \lambda_i$$

Soit

$$\frac{\partial \tilde{p}_{N+2}}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{\ell_k} (\lambda_1 - \lambda_k)$$

Ce qui donne enfin
$$\frac{\partial \tilde{p}_{N+2}^{(G)}}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{\ell_k} \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+1} \right) = 0$$

I.2 On va prouver maintenant que si l'on approche le problème (8) avec cet élément, on a convergence d'ordre h en norme $H^1(\Omega)$ discrète, dès que $u \in H^2(\Omega)$. Par simplicité on suppose que Ω est un polygône ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$).

On définit d'abord ce problème approché par

$$(8)_h \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

où V_h est l'espace engendré par les fonctions dont la restriction à chaque simplexe K , appartient à l'espace P_2 réduit comme défini dans le texte, et qui s'annulent aux noeuds placés sur Γ_0 , tout ceci pour une " triangulation " \mathcal{T}_h donnée. Les formes a_h et L_h sont définies par :

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (A \nabla u_h \cdot \nabla v_h + b \cdot \nabla u_h v_h + c u_h v_h) dx$$

$$L_h(v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \int_K (f v_h + d \cdot \nabla v_h) dx + \int_{\Gamma^*} g v_h ds$$

Il est facile de vérifier que la semi-norme H^1 -discrète $\| \cdot \|_h$ définie par

$$\|v_h\|_h = \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla v_h \cdot \nabla v_h \right]^{1/2}$$

est une norme sur l'espace V_h .

On rappelle d'abord l'inégalité de Strang [III] pour les méthodes non conformes :

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left[\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|E_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right]$$

où

$$E_h(u, w_h) = a_h(u, w_h) - L_h(w_h).$$

Le premier terme du second membre de cette inégalité peut être majoré de façon tout à fait classique dans la théorie de l'approximation, par $Ch \|u\|_{H^2(\Omega)}$. Il reste à estimer le second terme.

Pour chaque $v_h \in V_h$ on définit $\pi_h v_h$ comme étant la fonction dont la restriction à chaque simplex K est le P_1 interpolé $\pi_K v_h$ de v_h aux sommets de K ; il est évident que $\pi_h v_h \in V$. D'autre part on va supposer que l'on utilise la formule des trapèzes pour l'intégration numérique sur Γ^* . On a :

$$a(u, \pi_h v_h) - L(\pi_h v_h) = a_h(u, \pi_h v_h) - L_h(\pi_h v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

On peut donc écrire :

$$E_h(u, w_h) = a_h(u, w_h - \pi_h w_h) - L_h(w_h - \pi_h w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\int_K (A \nabla u \cdot \nabla (w_h - \pi_K w_h)) - d \cdot \nabla (w_h - \pi_K w_h) \right] dx + \int_K (b \cdot \nabla u + cu - f) (w_h - \pi_K w_h) dx$$

Maintenant, si l'on considère un élément de référence \hat{K} et si l'on fait un changement de variable, avec les notations habituelles [II] on obtient :

$$\left| \int_K \nabla u \cdot \nabla (w_h - \pi_K w_h) dx \right| \leq C \left| \int_{\hat{K}} A_K \hat{\nabla} \hat{u} \cdot (\hat{\nabla} \hat{u} - \hat{\nabla} \hat{\pi}_K \hat{w}) dx \right| \quad \text{et}$$

$$\left| \int_K d \cdot \nabla (w_h - \pi_K w_h) dx \right| \leq Ch \left| \int_{\hat{K}} d_K \cdot (\hat{\nabla} \hat{w} - \hat{\nabla} \hat{\pi}_K \hat{w}) dx \right|$$

où $w_h(x) = \hat{w}(\hat{x})$, $u(x) = \hat{u}(\hat{x})$ et les matrices A_K et les vecteurs d_K

sont tels qu'il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|A_K\| + \|d_K\| \leq C \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Soit maintenant la forme bilinéaire \hat{a} définie sur $H^2(\hat{K}) \times \mathcal{P}$ où $\mathcal{P}, \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_2$ est notre espace \mathcal{P}_2 réduit sur \hat{K} :

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) = \int_{\hat{K}} A_K \nabla \hat{u} \cdot (\nabla \hat{v} - \nabla \pi_K \hat{v}) d\hat{x}$$

Maintenant, \hat{G} étant le barycentre \hat{K} , on a :

$$\int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_i} = \text{aire}(\hat{K}) \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_i}(\hat{G}) \quad \text{et donc :}$$

$$\int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}_i} - \frac{\partial \pi_K \hat{v}}{\partial \hat{x}_i} \right) d\hat{x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

On a donc :

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) = 0 \quad \text{si } \hat{u} \in \mathcal{P}_1 \quad \text{et } \hat{v} \in \mathcal{P}$$

$$\hat{a}(\hat{u}, \hat{v}) = 0 \quad \text{si } \hat{u} \in H^2(\hat{K}) \quad \text{et } \hat{v} \in \mathcal{P}_0$$

En appliquant le Lemme de Ciarlet [I] pour les formes bilinéaires, on a :

$$|\hat{a}(\hat{u}, \hat{v})| \leq C |\hat{u}|_{2, \hat{K}} |v|_{1, \hat{K}}$$

Enfin, par passage à l'élément courant et sommation sur \mathcal{T}_h on obtient :

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K A \cdot \nabla u \cdot \nabla (w_h - \pi_K w_h) dx \right| \leq Ch |u|_{2, \Omega} \|w_h\|_h.$$

Avec un développement analogue et en appliquant le Lemme de Bramble-Hilbert

[II] pour les formes linéaires, on obtient :

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K d \cdot (\nabla w_h - \nabla \pi_h w_h) d\hat{x} \right| \leq Ch \|w_h\|_h$$

Enfin, compte-tenu du fait que

$$\|w_h - \pi_h w_h\|_{0, K} \leq Ch \|w_h\|_{1, K} \quad \text{on a}$$

$$\int_{\Omega} e(w_h - \pi_h w_h) \leq \|e\|_{0, \Omega} \|w_h - \pi_h w_h\|_{0, \Omega} \leq Ch \|e\|_{0, \Omega} \|w_h\|_h$$

avec $e = b \cdot \nabla u + cu - f$, et on a le résultat recherché.

I.3. Maintenant on va vérifier que si f , b et c sont nuls, le problème approché équivaut au problème

$$(8)'_h \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h^* \in W_h \quad \text{tel que} \\ a(u_h^*, w_h) = L(w_h) \quad \forall w_h \in W_h \end{array} \right.$$

où W_h est le sous-espace de V des fonctions linéaires affines par N -simplexe. Tout d'abord on remarque que, comme $W_h \subset V_h$, u_h étant la solution

$$a_h(u_h, w_h) = L_h(w_h) = L(w_h) \quad \forall w_h \in W_h$$

D'autre part, d'après la forme des fonctions de base de \mathcal{P} on peut écrire :

$$u_h = \tilde{u}_h + \bar{u}_h \quad \text{où } u_h \in W_h \quad \text{et } \bar{u}_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \alpha^K p_{N+2}^K,$$

les α^K étant des coefficients constants et p_{N+2}^K étant la fonction de base associée au barycentre de K .

Il est clair que pour tout sommet P_i de \mathcal{T}_h on a $u_h(P_i) = \bar{u}_h(P_i)$

On en déduit que

$$a(\tilde{u}_h, w_h) + a_h(\bar{u}_h, w_h) = L(w_h) \quad \forall w_h \in W_h, \quad \text{où}$$

$$a_h(\bar{u}_h, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \alpha^K \nabla p_{N+2}^K \nabla w_h \, dx$$

Comme ∇w_h est constant sur K , l'intégrale ci-dessus se réduit au calcul d'une somme de la forme :

$$\sum_{i=1}^N c_i \int_K \frac{\partial p_{N+2}}{\partial x_i} \, dx, \quad \text{d'où}$$

$$(II) \quad \int_K \frac{\partial p_{N+2}}{\partial x_i} \, dx = \frac{\partial \pi_K p_{N+2}}{\partial x_i} \Delta_K = 0 \quad (\Delta_K \text{ dénote l'aire de l'élément } K)$$

On peut donc calculer les composantes de u_h aux sommets de \mathcal{T}_h , non seulement de façon indépendante des valeurs aux barycentres mais par la résolution pure et simple du problème $(8)'_h$, soit, avec des éléments \mathcal{P}_1 conformes.

Il reste à prouver qu'en fait

$$u_{N+2}^K = u_h(G^K) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N+1} u_k^K \quad \text{avec } u_k^K = u_h(P_k^K), \quad P_k^K \quad \text{et } G^K$$

étant respectivement les sommets et le barycentre d'un simplexe K .

Pour cela, il suffit de rappeler que u_{N+2}^K est donné par :

$$\left[L(p_{N+2}^K) - \sum_{k=1}^{N+1} u_k^K \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_K \frac{\partial p_k^K}{\partial x_i} \frac{\partial p_{N+2}^K}{\partial x_j} dx \right] \Bigg/ \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int_K \frac{\partial p_{N+2}^K}{\partial x_i} \frac{\partial p_{N+2}^K}{\partial x_j} dx$$

Compte-tenu des faits que $p_k^K = \lambda_k^K - p_{N+2}^K / (N+1)$ et de (II), on déduit que

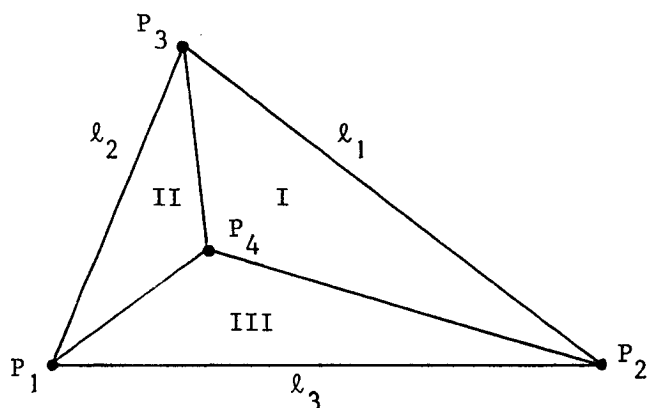
$$L(p_{N+2}^K) = \int \frac{\partial \lambda_k^K}{\partial x_i} \frac{\partial p_{N+2}^K}{\partial x_j} dx = 0, \text{ d'où le résultat.}$$

Remarque. Pour être rigoureux, l'équivalence qu'on vient de prouver ne se produit que pour quelques schémas simples d'intégration numérique sur Γ^* . Cependant, la différence entre les solutions obtenues est dans tous les cas négligeable.

A P P E N D I C E I I

Sur le supérélément linéaire par morceaux

Soient d'abord λ_1, λ_2 et λ_3 les coordonnées barycentriques du noeud interne P_4 , par rapport aux sommets P_1, P_2 et P_3 d'un super triangle K et p_i la fonction de base associée au noeud P_i , $i = 1, 2, 3, 4$.



Pour prouver que les composantes de u_h aux sommets des triangles peuvent être calculées indépendamment des composantes aux noeuds internes et en tant que celles de la solution d'un problème approché avec des éléments finis de type \mathcal{P}_1 conformes pour la triangulation composée des super triangles, comme dans l'Appendice I.3, il suffit de vérifier que sur un élément K on a :

$$\int_K A \nabla \lambda_i \cdot \nabla p_4 = 0 \quad 1 \leq i \leq 3 \quad \text{et}$$

$$\int_K A \nabla \lambda_i \cdot \nabla p_j = \int_K A \nabla \lambda_i \cdot \nabla \lambda_j \quad 1 \leq i, j \leq 3 ,$$

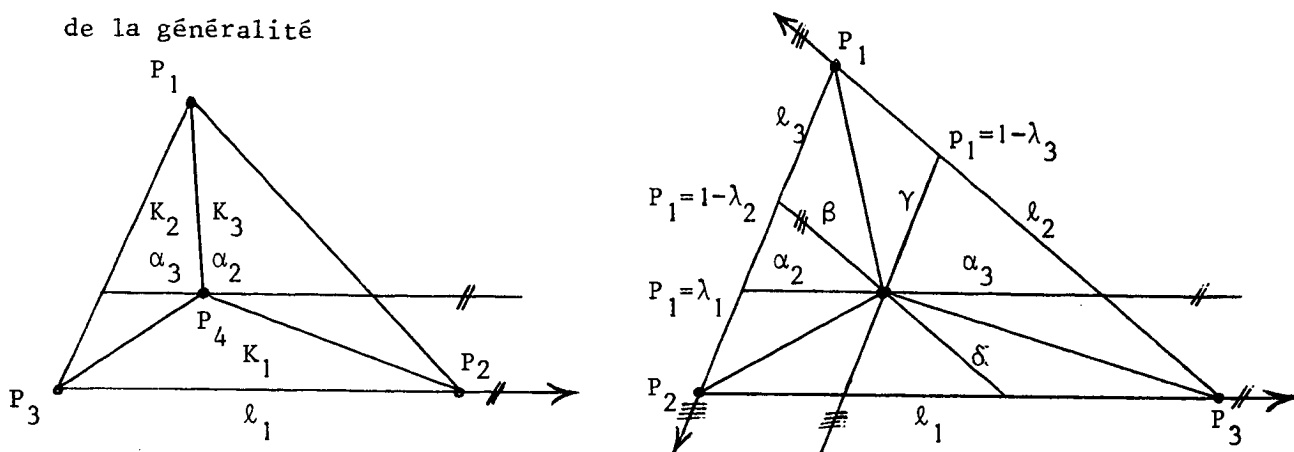
ou encore que

$$\int_K \frac{\partial p_4}{\partial \ell_k} = 0 \quad \text{et}$$

$$\int_K \frac{\partial p_j}{\partial \ell_k} = \int_K \frac{\partial \lambda_j}{\partial \ell_k}$$

ℓ_k étant la direction d'un côté quelconque de K . On pose $\bar{\ell}_k = \text{longueur}(\ell_k)$ et en observant la figure de gauche ci-dessous on peut écrire sans perte

de la généralité



$$\int_K \frac{\partial p_4}{\partial \ell_1} = \frac{\Delta_2}{\alpha_3} - \frac{\Delta_3}{\alpha_2} = \frac{\Delta_2}{\lambda_2 \bar{\ell}_1} - \frac{\Delta_3}{\lambda_3 \bar{\ell}_1} = 0 \text{ puisque } \Delta_i = \lambda_i \Delta_K$$

ce qui prouve la première égalité. Pour la deuxième on a deux cas à considérer (se référer à la figure de droite ci-dessus).

$$\int_K \frac{\partial p_1}{\partial \ell_1} dx = \frac{\lambda_1 \Delta_2}{\alpha_2} + \frac{\lambda_1 \Delta_3}{\alpha_3} = \int_K \frac{\partial \lambda_1}{\partial \ell_1} dx = 0$$

et

$$\int_K \frac{\partial p_1}{\partial \ell_2} dx = \frac{\Delta_2}{\bar{\ell}_2} + \frac{\Delta_3(1-\lambda_2)}{\beta}$$

Cependant $\beta = \lambda_3 \bar{\ell}_2$ d'où $\int_K \frac{\partial p_1}{\partial \ell_2} dx = \frac{\Delta}{\bar{\ell}_2} \int_K \frac{\partial \lambda_1}{\partial \ell_2} dx$

Maintenant on va prouver qu'en fait on a :

$$u_4 = u_h(P_4) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i u_i \text{ où } u_i = u_h(P_i) \quad i = 1, 2, 3.$$

D'abord des calculs précédents on déduit que $L(p_4) = 0$. Or, en prenant $v_h = p_4$, on voit que u_4 est une combinaison linéaire des u_i . Pour avoir le résultat désiré il suffit donc de montrer que

$$\int_K \frac{\partial p_4}{\partial \ell_i} \frac{\partial p_k}{\partial \ell_j} dx = -\lambda_k \int_K \frac{\partial p_4}{\partial \ell_j} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_i} dx \quad 1 \leq i, j \leq 3 \text{ pour } k = 1, 2, 3,$$

ou encore, sans perte de la généralité, que

$$\int_K \frac{\partial p_4}{\partial \ell_i} \frac{\partial p_1}{\partial \ell_j} dx = -\lambda_1 \int_K \frac{\partial p_4}{\partial \ell_i} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_j} dx \quad i, j = 2, 3$$

Mais

$$\int_K \frac{\partial p_4}{\partial \ell_i} \frac{\partial p_1}{\partial \ell_j} dx = \int_{K_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_i} \frac{\partial p_1}{\partial \ell_j} dx + \int_{K_3} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_i} \frac{\partial p_1}{\partial \ell_j} dx = i, j = 2, 3$$

Pour K_2 on a :

$$\int_{K_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_2} \frac{\partial p_1}{\partial \ell_2} dx = 0, \quad \int_{K_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} \frac{\partial p_1}{\partial \ell_2} dx = -\frac{\Delta_2}{\gamma} \frac{1}{\ell_2} = -\frac{\Delta_K}{\ell_2 \ell_3}$$

$$\int_{K_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} \frac{\partial p_1}{\partial \ell_3} dx = \frac{-\Delta_2}{\gamma} \frac{1-\lambda_3}{\gamma} = -\frac{(1-\lambda_3)\Delta_K}{\lambda_2 \ell_3^2} \quad \text{et} \quad \int_{K_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_2} \frac{\partial p_1}{\partial \ell_3} dx = 0$$

D'autre part

$$\int_{K_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} dx = \int_{K_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_2} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{K_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} dx = \frac{\Delta_K}{\lambda_2 \ell_3^2},$$

Pour K_1 on a :

$$\int_{K_1} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_2} dx = \frac{\Delta_1}{\delta^2} = \frac{\Delta_K}{\lambda_1 \ell_2^2}, \quad \int_{K_1} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} dx = \frac{\Delta_K}{\lambda_1 \ell_3^2} \quad \text{et}$$

$$\int_{K_1} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} dx = \frac{\Delta_K}{\lambda_1 \ell_2 \ell_3}.$$

Enfin pour K_3 on permute dans les résultats pour K_2 les indices 2 et 3.

En recollant tous les morceaux on trouve enfin :

$$\int_K \frac{\partial p_1}{\partial \ell_3} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} dx = -\frac{1-\lambda_3}{\lambda_2 \ell_3^2} \Delta_K = -\lambda_1 \int_K \left(\frac{\partial p_4}{\partial \ell_3}\right)^2 dx, \quad \text{soit}$$

$$\int_K \frac{\partial p_1}{\partial \ell_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_2} dx = \lambda_1 \int_K \left(\frac{\partial p_4}{\partial \ell_2}\right)^2 dx \quad \text{et}$$

$$\int_K \frac{\partial p_1}{\partial \ell_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} dx = -\frac{\Delta_K}{\ell_2 \ell_3} = -\lambda_1 \int_K \frac{\partial p_4}{\partial \ell_2} \frac{\partial p_4}{\partial \ell_3} dx. \quad \blacksquare$$

REFERENCES POUR LES APPENDICES

- [I] CIARLET Ph.G., Quelques méthodes d'éléments finis pour le problème d'une plaque encadrée. Comptes-rendus du colloque International sur les méthodes de Calcul Scientifique et technique, IRIA (Déc. 1973).
- [II] CIARLET Ph.G. et RAVIART P.A., General Lagrange and Hermite interpolation in \mathbb{R}^N with applications to the Finite Element Methods, Arch. Rat.Mech. Anal. 46, pp 177-199 (1972).
- [III] STRANG G. et FIX G.J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice Hall. Englewood Cliffs, N.J. (1973).

