Développement asymptotique et approximation de la solution des équations de Maxwell dans un polygone

Simon Labrunie, Boniface Nkemzi

Développement asymptotique et approximation de la solution des équations de Maxwell dans un polygone

Asymptotic expansion and approximation of the solution to Maxwell's equations in a polygon

Simon Labrunie [a] , Boniface Nkemzi [b]

[a] *Institut Élie Cartan (Mathématiques), Université Henri Poincaré et INRIA (projet CALVI), 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France*

[b] *Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Buea, Cameroon*

Abstract

We present an improved version of the Singular Complement Method (SCM) for Maxwell's equations, which relies on an asymptotic expansion of the solution near non-regular points. This method allows to recover an optimal error estimate when used with $\mathbb{P}_1$ Lagrange finite elements; extension to higher-degree elements is possible. It can be applied to static, harmonic, or time-dependent problems. *To cite this article: S. Labrunie, B. Nkemzi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 33x (2005).*

Résumé

Nous présentons une version améliorée de la méthode du complément singulier (MCS) pour les équations de Maxwell, qui repose sur un développement asymptotique de la solution au voisinage des points non-réguliers. Cette méthode permet d'obtenir une estimation d'erreur optimale, lorsqu'elle est utilisée avec les éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange ; l'extension aux éléments de degré plus élevé est possible. Elle peut être appliquée aux équations statiques, harmoniques ou instationnaires. *Pour citer cet article : S. Labrunie, B. Nkemzi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 33x (2005).*

Abridged English version

The bracketed numbers refer to the French version. Let ω be an open, bounded and simply connected polygonal subset of $\mathbb{R}^2$ with boundary γ. We are concerned with the solution $\boldsymbol{u}^d$, resp. $\boldsymbol{u}^n$, of the static

Email addresses: `labrunie@iecn.u-nancy.fr` (Simon Labrunie), `nkemzi@yahoo.com` (Boniface Nkemzi).

Maxwell equations, see (1):

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = f, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = g \quad \text{in } \omega; \quad \boldsymbol{u}^d \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \text{ resp. } \boldsymbol{u}^n \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{on } \gamma,$$

where $\boldsymbol{\nu}$ and $\boldsymbol{\tau}$ denote the unit outward normal and the unit tangent vector on the boundary γ. This problem is well-posed in $\mathbf{X}^d = \mathbf{H}_0(\mathrm{rot}, \omega) \cap \mathbf{H}(\mathrm{div}, \omega)$, resp. $\mathbf{X}^n = \mathbf{H}(\mathrm{rot}, \omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathrm{div}, \omega)$, when $f,\ g \in L^2(\omega)$ and satisfy suitable compatibility conditions. If ω is not convex, the solution $\boldsymbol{u}$ does not belong to $\mathbf{H}^1(\omega)$, but it can be decomposed as a sum of a *regular* part belonging to $\mathbf{H}^1(\omega)$ and a *singular* part belonging to a finite-dimensional space. This splitting is the basis of the different approaches of the *singular complement method* (SCM) [1,4,5, etc.]. Roughly speaking, the SCM consists in computing the regular part by nodal finite elements, and the singular part by a suitable representation formula.

The rate of convergence of the SCM is limited by the regularity of the regular part, and is therefore quite low [4,5]. The main objective of this Note is to present a method of improving this rate under the assumption $f,\ g \in H^k(\omega),\ k \geq 1$, by taking into consideration the direct approximation of weaker singularities contained in $\mathbf{H}^1(\omega)$, which were omitted in earlier works. The method proposed here relies on an asymptotic expansion of the solution to the equivalent problem (3), which was obtained in [8]. For the electric boundary condition (a similar result holds for the magnetic case), there holds:

$$\boldsymbol{u}^d = \tilde{\boldsymbol{u}}^d + \sum_c \sum_{1 \leq i \leq M_c} \lambda_{i,c}\, \mathbf{S}^d_{i,c}, \quad \tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{H}^2(\omega), \quad \mathbf{S}^d_{i,c} = -(i/\pi)^{1/2}\, \alpha_c\, r_c^{i\alpha_c - 1}\, [\sin i\alpha_c\theta_c\, \mathbf{e}_r + \cos i\alpha_c\theta_c\, \mathbf{e}_\theta]\,,$$

where: the index c runs over the corners of γ; (r_c, θ_c) are local polar coordinates; π/α_c is the opening of the corner c; and M_c, the dimension of the local singular space, is equal to the integer part of $2/\alpha_c$, hence $0 \leq M_c \leq 3$. For the sake of simplicity, we assume that $M_c = 0$ except for just one corner, and we omit the index c.

Thanks to a Hodge decomposition of $\boldsymbol{u}$ (§3), one expresses the singularity coefficients as: $\lambda_i = \langle p_i^d, g\rangle + \langle p_i^n, f\rangle$, where p_i^d and p_i^n are *dual singular functions* of the Laplacian, defined by (8–9).

The dual singular functions are the sum of a *principal part*, which is analytically known, and a *remainder*, which belongs to $H^1(\omega)$ and hence can be computed by finite elements, using a "singular lifting" method [2]. This splitting is used for the computation of the λ_i; the terms corresponding to the principal parts must be computed by an accurate enough quadrature formula. Then, the regular part $\tilde{\boldsymbol{u}}$ is computed by the standard finite element method, e.g. by using a lifting of the non-homogeneous boundary condition $\boldsymbol{u}^d \cdot \boldsymbol{\tau} = -\sum \lambda_i\, \mathbf{S}_i^d \cdot \boldsymbol{\tau}$, cf. Eqs. (12) and (14).

Theorem 0.1 *Let $\boldsymbol{u} \in \mathbf{X}$ be the solution to* (1) *with $f,\ g \in H^1(\omega)$ such that $f/r,\ g/r \in L^2(\omega)$. Let $\boldsymbol{u}_h$ and λ_i^h be computed as described in §4.2 of the French version. Then, the estimates*

$$|\lambda_i - \gamma_i^h| \lesssim C\, h^{2\alpha_0} (\|f\|_1 + \|g\|_1), \quad \|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_{\mathbf{X}} \lesssim C\, h (\|f\|_1 + \|g\|_1), \quad \|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_0 \lesssim C\, h^2 (\|f\|_1 + \|g\|_1)$$

hold, with $1/2 < \alpha_0 < \alpha$ if $\alpha < 1$ and $\alpha_0 = 1$ if $1 < \alpha \leq 2$. The norm of $\mathbf{X}$ is $\|\boldsymbol{v}\|^2_{\mathbf{X}} = \|\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\|_0^2 + \|\operatorname{div} \boldsymbol{v}\|_0^2$.

Finally, the method can be extended without difficulty to time-harmonic and time-dependent problems, as in [1]. The rate of convergence can be made arbitrarily high — provided the data are regular enough — by using sufficiently many singular functions, and finite elements of sufficient degree.

1. Position du problème

Soit ω un ouvert polygonal, borné et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontière γ. Les vecteurs unitaires $\boldsymbol{\nu}$ et $\boldsymbol{\tau}$ sont respectivement normal et tangent à γ. On s'intéresse à la solution $\boldsymbol{u}^d$, respectivement $\boldsymbol{u}^n$, du problème div–rot avec condition aux limites de Dirichlet (électrique), resp. Neumann (magnétique) :

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = f, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u} = g \quad \text{dans } \omega\,; \quad \boldsymbol{u}^d\cdot\boldsymbol{\tau} = 0, \text{ resp. } \boldsymbol{u}^n\cdot\boldsymbol{\nu} = 0 \quad \text{sur } \gamma. \tag{1}$$

Dans tout le texte, on omettra l'exposant d ou n dans les assertions valables pour les deux problèmes. Lorsque $(f,g) \in L^2(\omega)^2$ et satisfont aux conditions de compatibilité $\int_\omega f = 0$, resp. $\int_\omega g = 0$, le problème (1) admet une solution unique dans $\mathbf{X}^d = \mathbf{H}_0(\mathrm{rot};\omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div};\omega)$ resp. $\mathbf{X}^n = \mathbf{H}(\mathrm{rot};\omega)\cap\mathbf{H}_0(\mathrm{div};\omega)$. Cette solution s'interprète comme l'unique solution de la formulation variationnelle

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) := (\operatorname{rot}\boldsymbol{u} \mid \operatorname{rot}\boldsymbol{v}) + (\operatorname{div}\boldsymbol{u} \mid \operatorname{div}\boldsymbol{v}) = (f \mid \operatorname{rot}\boldsymbol{v}) + (g \mid \operatorname{div}\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{X}. \tag{2}$$

Il est bien connu [6,3,1,4, etc.] que la forme bilinéaire $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ est coercitive tant dans $\mathbf{X}$ que dans $\mathbf{X}_R := \mathbf{X}\cap\mathbf{H}^1(\omega)$; que cet espace est donc fermé dans $\mathbf{X}$; et qu'il admet un supplémentaire de dimension finie, égale au nombre de coins rentrants de γ. On peut alors décomposer la solution $\boldsymbol{u}$ en somme d'une partie *régulière* dans $\mathbf{H}^1(\omega)$ et d'une partie *singulière* appartenant à un espace de dimension finie : c'est le fondement de la *méthode du complément singulier* ou MCS [1,4,5, etc.]. Cette méthode consiste à approcher la partie régulière par éléments finis nodaux, et la partie singulière à l'aide d'une formule de représentation bien choisie. Il existe en deux principales variantes. Dans la *c-approche*, les espaces régulier et singulier sont inclus dans $\mathbf{X}$; en contrepartie, il est nécessaire de calculer numériquement une base de l'espace singulier. La λ-*approche* consiste à utiliser des bases singulières exactement connues, mais ne satisfaisant pas à la condition aux limites, ce qui conduit à la résolution de problèmes aux limites non homogènes. On sait [5] que ces deux approches sont en fait équivalentes.

Le taux de convergence de la MCS habituelle est limité par la régularité des parties régulières, qui est assez faible [3,5] au voisinage des coins rentrants et de certains coins saillants, même lorsque les données sont très régulières. L'objectif de cette Note est d'améliorer ce taux, sous l'hypothèse $f,\ g \in H^k(\omega),\ k \geq 1$. Dans la suite, on s'intéresse au problème de Dirichlet ; le problème de Neumann se traite de la même façon, en intervertissant les conditions aux limites et de compatibilité, ainsi que les indices d et n. La présentation retenue est la λ-approche.

2. Développement asymptotique de $\boldsymbol{u}$

On convient des notations suivantes. La norme $\|\cdot\|_s$ est celle de $H^s(\omega)$, et $(\cdot \mid \cdot)$ est le produit scalaire de $L^2(\omega)$. Pour chaque coin $\boldsymbol{c}$, on note π/α_c son ouverture, avec $\alpha_c \neq 1/2$ et 1. Les coordonnées polaires locales sont notées (r_c,θ_c).

On rappelle ici le résultat principal de [8], adapté à la λ-approche :
Théorème 2.1 *Soient* $(\boldsymbol{f},g) \in \mathbf{L}^2(\omega)\times H^1(\omega)$ *; l'unique solution dans* $\mathbf{X}^d$ *au problème*

$$-\Delta\boldsymbol{u}^d = \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u}^d = g \quad \textit{dans } \omega\,; \quad \boldsymbol{u}^d\cdot\boldsymbol{\tau} = 0, \quad \textit{sur } \gamma, \tag{3}$$

admet la décomposition suivante, où $\tilde{\boldsymbol{u}}^d \in \mathbf{H}^2(\omega)$ *:*

$$\boldsymbol{u}^d = \tilde{\boldsymbol{u}}^d + \sum_c \sum_{1\leq i\leq M_c} \lambda_{i,c}\,\mathbf{S}^d_{i,c} \quad \mathbf{S}^d_{i,c} = -(i/\pi)^{1/2}\,\alpha_c\,r_c^{i\alpha_c-1}\,[\sin i\alpha_c\theta_c\,\mathbf{e}_{r_c} + \cos i\alpha_c\theta_c\,\mathbf{e}_{\theta_c}]\,. \tag{4}$$

La dimension locale de l'espace singulier vaut : $M_c = 0$ *si* $\alpha_c > 2$ *(angle saillant aigu),* $M_c = 1$ *si* $1 < \alpha_c \leq 2$ *(angle saillant obtus),* $M_c = 2$ *si* $2/3 < \alpha_c < 1$*, 3 si* $M_c = 1/2 < \alpha_c \leq 2/3$.
Le problème (3) est équivalent à (1) par la décomposition de Hodge $\boldsymbol{f} = -\,\mathbf{grad}\,g + \mathbf{rot}\,f$, cf. [3]. Dans la suite, nous supposerons pour simplifier que tous les coins sauf un sont saillants et aigus : il n'y a qu'un seul coin non-régulier. Toutes les coordonnées polaires, les paramètres α et M, les fonctions singulières et coefficients de singularité s'y rapportent, et nous omettrons, sauf exception, l'indice de coin c.

3. Décomposition de Hodge et développement asymptotique

Pour obtenir des formules d'extraction des coefficients de singularité λ_i utilisables en pratique, on se ramène à la théorie des singularités du laplacien. Pour cela, on procède à une décomposition de Hodge : $\boldsymbol{u}^d = -\operatorname{\mathbf{grad}} \varphi^d + \operatorname{\mathbf{rot}} \psi^n$. Les potentiels φ^d et ψ^n sont solution dans $H^1(\omega)$ des problèmes de Poisson :

$$-\Delta\varphi^d = g \quad \text{dans } \omega, \quad \varphi^d = 0 \quad \text{sur } \gamma\,; \qquad -\Delta\psi^n = f \quad \text{dans } \omega, \quad \partial_\nu\psi^n = 0 \quad \text{sur } \gamma, \quad \int_\omega \psi^n = 0. \quad (5)$$

On introduit [7, etc.] les espaces de Sobolev à poids $K^s_\beta(\omega)$, définis pour $s \in \mathbb{N}$ par :

$$K^s_\beta(\omega) = \left\{ w \in L^2_{\mathrm{loc}}(\omega) : r^{|\boldsymbol{\alpha}|-s+\beta}\, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} w \in L^2(\omega),\ \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^2 \text{ t.q. } |\boldsymbol{\alpha}| \le s \right\},$$

et par interpolation pour $s \notin \mathbb{N}$. Les théorèmes 3.4 et 4.4 de [7] donnent, dans le cadre de la λ-approche :
Théorème 3.1 *Soient $\ell \ge 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Supposons que, pour le coin non-régulier, $(\ell+1-\beta)/\alpha_c \in\,]m, m+1[$, avec $m \in \mathbb{N}$, et que cette quantité est < 1 pour les autres coins. Alors, si $f,\ g \in K^\ell_\beta(\omega)$:*

$$\varphi^d = \varphi^d_{[\ell+2]} + \sum \sum_{1 \le i \le m} \lambda^\varphi_i\, S^d_i, \quad \psi^n = \psi^n_{[\ell+2]} + \sum \sum_{1 \le i \le m} \lambda^\psi_i\, S^n_i, \tag{6}$$

avec : $\left\{S^d_i, S^n_i\right\} := (i\pi)^{-1/2}\, r^{i\alpha}\, \{\sin i\alpha\theta, \cos i\alpha\theta\}$ et $\varphi^d_{[\ell+2]},\ \psi^n_{[\ell+2]} \in K^{\ell+2}_\beta(\omega)$. Les coefficients $\lambda^\varphi_i,\ \lambda^\psi_i$ sont donnés par les formules suivantes :

$$\lambda^\varphi_i = \langle p^d_i, g\rangle_{K^\ell_\beta(\omega)', K^\ell_\beta(\omega)}\ , \quad \lambda^\psi_i = \langle p^n_i, f\rangle_{K^\ell_\beta(\omega)', K^\ell_\beta(\omega)}. \tag{7}$$

Les singularités duales $p^d_i,\ p^n_i$ *admettent la caractérisation suivante :*

$$\Delta p_i = 0 \quad \textit{dans } \omega, \quad p^d_i = 0, \ \textit{resp. } \partial_\nu p^n_i = 0 \quad \textit{sur chaque côté de } \gamma\,; \tag{8}$$

$$p_i = U_i + \tilde{p}_i, \quad \tilde{p}_i \in H^1(\omega), \quad \{U^d_i, U^n_i\} = (i\pi)^{-1/2}\, r^{-i\alpha}\, \{\sin i\alpha\theta, \cos i\alpha\theta\}. \tag{9}$$

Lorsque $(\ell+1)/\alpha \notin \mathbb{N}$, on peut se ramener à l'échelle de Sobolev ordinaire à l'aide des injections $K^s_0(\omega) \subset H^s(\omega) \subset K^s_\beta(\omega)$, $\forall\beta > 0$ — cette dernière découlant de l'inégalité de Hardy. Lorsque $\ell = 1$, les cas limites sont les angles droits ($\alpha = 2$ ou $2/3$). En l'absence d'angles droits, on a $\varphi^d_{[3]},\ \psi^n_{[3]} \in H^3(\omega)$ et $m = M$; sachant que $\mathbf{S}^d_i = -\operatorname{\mathbf{grad}} S^d_i = \operatorname{\mathbf{rot}} S^n_i$, on en déduit :

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^d = -\operatorname{\mathbf{grad}} \varphi^d_{[3]} + \operatorname{\mathbf{rot}} \psi^n_{[3]} \quad \text{et} \quad \lambda_i = \lambda^\varphi_i + \lambda^\psi_i. \tag{10}$$

4. Méthode numérique : MCS améliorée

On suppose que le coin non-régulier n'est pas un angle droit ($\alpha \ne 2$ et $\alpha \ne 2/3$), et que $f,\ g \in K^1_0(\omega)$, éventuellement $K^1_0(\omega) \oplus \mathbb{R}$. En présence d'un angle droit, l'analyse ci-dessous n'est pas valable dans l'échelle $H^s(\omega)$, la singularité duale la plus forte (respectivement p_1 et p_3) n'étant pas dans $H^1(\omega)'$ ou $H^{-1}(\omega)$; mais elle peut se généraliser au cadre des $K^s_\beta(\omega)$.

4.1. *Principe*

On détermine d'abord une base des singularités duales $p^d_i,\ p^n_i$. Puis on calcule successivement les coefficients de singularité λ_i et la partie régulière $\tilde{\boldsymbol{u}}^d$. Le calcul des singularités duales se fonde sur (9) ; le reste $\tilde{p}_i$ est solution de

$$-\Delta\tilde{p}_i = \Delta U_i = 0 \quad \text{dans } \omega, \quad \tilde{p}^d_i = -U^d_i, \ \text{resp. } \partial_\nu\tilde{p}^n_i = -\partial_\nu U^n_i \quad \text{sur } \gamma. \tag{11}$$

Le calcul des coefficients de singularité se fait alors en utilisant les formules (9), (7) et (10). Les intégrales $\langle p_i, w\rangle$ sont décomposées en trois termes :

$$\int_\omega p_i\, w = \int_{\omega_C} U_i\, w + \int_{\omega_E} U_i\, w + \int_\omega \tilde{p}_i\, w := \langle UC_i, w\rangle + \big(UE_i \mid w\big) + \big(\tilde{p}_i \mid w\big),$$

où $\omega_C = \omega \cap \{r < R\}$ est un voisinage en forme de «camembert» du coin non-régulier, et ω_E son complémentaire. Lorsque $w \in K_0^1(\omega)$, on a $w = r\, w'$ avec $w' \in L^2(\omega)$, et le premier terme se réécrit $\int_0^R \int_0^{\pi/\alpha} w'(r,\theta)\, r^{2-i\alpha} \sin i\alpha\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. La puissance de r étant positive, on peut obtenir une valeur approchée $\langle UC_i, w\rangle_\epsilon$ de cette intégrale avec une précision ϵ quelconque. Lorsque $w - k \in K_0^1(\omega)$, avec $k =$ constante, il suffit de rajouter le terme $k \int_{\omega_C} U_i$, avec : $\int_{\omega_C} U_i^d = (1-(-1)^i)\, R^{2-i\alpha}/(i\alpha\,(2-i\alpha))$, et $\int_{\omega_C} U_i^n = 0$.

Enfin, puisque $\operatorname{div} \mathbf{S}_i^d = \operatorname{rot} \mathbf{S}_i^d = 0$, la partie régulière $\tilde{\boldsymbol{u}}^d$ vérifie :

$$a(\tilde{\boldsymbol{u}}^d, \boldsymbol{v}) = (f \mid \operatorname{rot} \boldsymbol{v}) + (g \mid \operatorname{div} \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{X}^d\,; \quad \tilde{\boldsymbol{u}}^d \cdot \boldsymbol{\tau} = -\sum \lambda_i\, \mathbf{S}_i^d \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{sur } \gamma.$$

La trace $\mathbf{S}_i^d \cdot \boldsymbol{\tau}$ est nulle au voisinage du coin non-régulier, et régulière ailleurs : il en existe un relèvement régulier $\boldsymbol{s}_i^d \in \mathbf{H}^2(\omega)$. La variable $\boldsymbol{u}^\circ := \tilde{\boldsymbol{u}}^d + \sum \lambda_i\, \boldsymbol{s}_i^d \in \mathbf{X}^d \cap \mathbf{H}^2(\omega)$, et est solution du problème :
Trouver $\boldsymbol{u}^\circ \in \mathbf{X}_R^d$ tel que :

$$a(\boldsymbol{u}^\circ, \boldsymbol{v}) = (f \mid \operatorname{rot} \boldsymbol{v}) + (g \mid \operatorname{div} \boldsymbol{v}) + \sum \lambda_i\, a(\boldsymbol{s}_i^d, \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{X}_R^d. \tag{12}$$

4.2. *Discrétisation et analyse numérique*

Le domaine ω est discrétisé par une triangulation quasi-uniforme de pas h. On utilise des éléments finis nodaux $\mathbb{P}_1$; on note $\mathbf{X}_h^d$ le sous-espace de $\mathbf{X}^d$ engendré par les fonctions de base des éléments finis. Bien entendu, on a $\mathbf{X}_h^d \subset \mathbf{X}_R^d$. L'opérateur d'interpolation de Lagrange est noté Π_h ; les constantes génériques notées C ne dépendent que de la géométrie du domaine ω.

L'équation (11) est résolue numériquement de manière classique, la condition aux limites étant prise en compte par un «relèvement singulier» [2]. On note $p_i^{d;h},\ p_i^{n;h}$ les solutions numériques. Le coefficient λ_i est approché par

$$\lambda_i^h = \langle UC_i^d, g\rangle_\epsilon + \big(UE_i^d \mid g\big)_h + \big(\tilde{p}_i^{d;h} \mid g\big)_h + \langle UC_i^n, f\rangle_\epsilon + \big(UE_i^n \mid f\big)_h + \big(\tilde{p}_i^{n;h} \mid f\big)_h. \tag{13}$$

Le symbole $(\cdot \mid \cdot)_h$ représente une approximation du produit scalaire par une formule de quadrature de Gauss d'ordre élevé sur chaque triangle. Comme UE_i et $\tilde{p}_i$ sont réguliers, on peut supposer que :

$$\forall w \in H^1(\omega), \quad \big|\langle UE_i + \tilde{p}_i^h, w\rangle_h - \langle UE_i + \tilde{p}_i, w\rangle\big| \le C\, h^{\mathsf{q}}\, \|w\|_1, \quad \text{pour } \mathsf{q} \ge 1.$$

On prend alors $\epsilon = C\, h^{\mathsf{q}}\ (\|f\|_1 + \|g\|_1)$ pour l'approximation de $\langle UC_i^d, g\rangle$ et $\langle UC_i^n, f\rangle$.

Nous proposons l'approximation suivante de $\boldsymbol{u}^d$: $\boldsymbol{u}_h^d = \boldsymbol{u}_h^\circ + \lambda_i^h\,(\mathbf{S}_i^d - \Pi_h \boldsymbol{s}_i^d)$, où $\boldsymbol{u}_h^\circ \in \mathbf{X}_h^d$ résout le problème variationnel discret :

$$a(\boldsymbol{u}_h^\circ, \boldsymbol{v}_h) = (f \mid \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_h) + (g \mid \operatorname{div} \boldsymbol{v}_h) + \sum \lambda_i^h\, a(\Pi_h \boldsymbol{s}_i^d, \boldsymbol{v}_h), \quad \forall \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{X}_h^d. \tag{14}$$

Proposition 4.1 *On a les estimations suivantes :*

$$\big|\lambda_i - \lambda_i^h\big| \le C\, h^{2\alpha_0}\ (\|f\|_1 + \|g\|_1) \quad \textit{si } \mathsf{q} \ge 2, \qquad \big|\lambda_i - \lambda_i^h\big| \le C\, h\ (\|f\|_1 + \|g\|_1) \quad \textit{sinon}\,; \tag{15}$$

$$\big\|\boldsymbol{u}_h^d - \boldsymbol{u}^d\big\|_{\mathbf{X}} \le C\, h\ (\|f\|_1 + \|g\|_1)\ ; \quad \big\|\boldsymbol{u}_h^d - \boldsymbol{u}^d\big\|_0 \le C\, h^2\ (\|f\|_1 + \|g\|_1)\ . \tag{16}$$

Ici, α_0 est un nombre fixé entre $1/2$ et α dans le cas d'un coin rentrant ($\alpha < 1$) ; $\alpha_0 = 1$ pour un coin saillant obtus ($1 < \alpha \le 2$). La norme $\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbf{X}}$ vaut $a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})^{1/2}$.

Preuve : Les données au bord dans (11) s'annulent sur les deux côtés qui touchent le coin non-régulier, et ailleurs elles s'identifient à la trace de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. Par localisation, on montre à l'aide de la formule (6) que $\tilde{p}_i \in H^{1+\alpha_0}(\omega)$; en raisonnant comme dans [2] on trouve : $\left\|\tilde{p}_i - \tilde{p}_i^h\right\|_0 \leq C\, h^{2\alpha_0}$. Avec les erreurs dues aux quadratures, on obtient donc (15).

La théorie habituelle des éléments finis, combinée avec (15), donne alors : $|\boldsymbol{u}_h^\circ - \boldsymbol{u}^\circ|_1 \leq C\, h\ (\|f\|_1 + \|g\|_1)$, et finalement l'estimation en norme $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ dans (16). Enfin, l'estimation en norme L^2 se démontre à l'aide de l'astuce de Nitsche. $\diamond$

5. Remarques

Bien entendu, la MCS améliorée s'applique au problème (3). Sous des hypothèses comparables : $f,\ g \in K_0^1(\omega)$, d'où $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^2(\omega)$, on arrive à un meilleur taux de convergence que [4], grâce à la prise en compte des «singularités faibles» comprises entre $\mathbf{H}^1(\omega)$ et $\mathbf{H}^2(\omega)$. La méthode est également utilisable pour des problèmes harmoniques ou instationnaires, cf. [1], la décomposition (4) étant valable pour *tout* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{X}$.

La formule (6) permet d'écrire des développements asymptotiques de $\boldsymbol{u}$ à n'importe quel ordre, les coefficients de singularité étant obtenus comme au §3. Si les données sont assez régulières, on peut donc augmenter à volonté le taux de convergence, à condition d'utiliser suffisamment de fonctions singulières, et des éléments finis de degré assez élevé.

Remerciements.

B. Nkemzi remercie l'INRIA (projet CALVI) et le Ministère de l'Enseignement Supérieur du Cameroun (MINESUP, programme «Mobilité Académique») pour leur soutien financier, ainsi que le personnel de l'INRIA pour son hospitalité. Les deux auteurs remercient Patrick Ciarlet pour ses conseils.

Références

[1] **F. Assous, P. Ciarlet Jr., E. Garcia.** Résolution des équations de Maxwell instationnaires avec charges dans un domaine singulier bidimensionnel. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I **330** (2000), 391–396.

[2] **P. Ciarlet Jr., B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, J. Zou.** The Fourier Singular Complement Method for the Poisson problem. Part I : prismatic domains. À paraître dans *Numer. Math.*

[3] **M. Costabel, M. Dauge.** Singularities of Maxwell's equations on polyhedral domains, in M. Bach, C. Constanda, G. C. Hsiao *et al.* (eds), *Analysis, Numerics and applications of differential and integral equations.* Pitman Research Notes in Mathematics Series **379**, Addison-Wesley, Londres, 1998, pp. 69–76.

[4] **C. Hazard, S. Lohrengel.** A singular field method for Maxwell's equations : numerical aspects for 2D magnetostatics. *SIAM J. Numer. Anal.* **40** (2002) 1021–1040.

[5] **E. Jamelot.** Éléments finis nodaux pour les équations de Maxwell. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I **339** (2004) 809–814. Voir aussi : `http://www.ensta.fr/~jamelot/`

[6] **M. Moussaoui.** Espaces $H(\mathrm{div},\ \mathrm{rot},\ \Omega)$ dans un polygone plan. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I **322** (1996) 225–229.

[7] **S.A. Nazarov, B.A. Plamenevsky.** Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries, *De Gruyter expositions in Mathematics* **13**, Walter de Gruyter, Berlin/New York, 1994.

[8] **B. Nkemzi.** Asymptotic expansion of the solution of Maxwell's equations in polygonal plane domains. *Rapport de recherche INRIA* n° **00000170** (2005). En ligne : `http://hal.inria.fr/inria-00000170`