

## Retinal filtering and image reconstruction

Adrien Wohrer, Pierre Kornprobst, Marc Antonini

► **To cite this version:**

Adrien Wohrer, Pierre Kornprobst, Marc Antonini. Retinal filtering and image reconstruction. [Rapport de recherche] RR-6960, INRIA. 2009, pp.25. inria-00394547v2

**HAL Id: inria-00394547**

**<https://hal.inria.fr/inria-00394547v2>**

Submitted on 8 Jul 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

## *Filtrage rétinien et reconstruction d'image*

Adrien Wohrer — Pierre Kornprobst — Marc Antonini

N° 6960

June 2009

Domaine 5



*R*apport  
*de recherche*



## Filtrage rétinien et reconstruction d'image

Adrien Wohrer<sup>\*</sup>, Pierre Kornprobst<sup>†</sup>, Marc Antonini<sup>‡</sup>

Domaine 5 — STIC pour les sciences de la vie et de l'environnement  
Équipe-Projet NeuroMathComp

Rapport de recherche n° 6960 — June 2009 — 21 pages

**Résumé :** Lors d'un précédent travail, nous avons élaboré un modèle bio-plausible du traitement rétinien, inspiré par la littérature neuro-biologique [4]. Une caractéristique forte de ce modèle est de reproduire le retard temporel de la composante *surround* du filtrage, ainsi qu'observé dans les rétines biologiques. Dans ce rapport, nous étudions les possibilités de *reconstruction d'image*, à partir de la réponse d'un tel modèle de rétine à l'apparition soudaine d'une image statique.

Ce rapport se concentre principalement sur la partie du modèle réalisant un *filtrage spatio-temporel linéaire* de l'image en entrée, et qui peut être vue comme une application linéaire d'un espace 2D (l'image) vers un espace 2D+T (réponse temporelle de la rétine). Nous introduisons la pseudo-inverse de Moore-Penrose de cette application linéaire, qui constitue une reconstruction linéaire optimale en termes de robustesse au bruit. Nous étudions la structure particulière de cette pseudo-inverse, due à la nature du filtre rétinien avec retard temporel de la composante *surround*. Du fait de ce retard temporel, la reconstruction basée sur la pseudo-inverse fait passer en premier lieu les *basses fréquences spatiales* de l'image, une propriété qui pourrait avoir des corrélats perceptuels.

**Mots-clés :** Modèle de rétine, filtrage spatio-temporel, reconstruction d'image

\* ENS, INRIA, I3S

† INRIA, EPI NeuroMathComp

‡ I3S

## Retinal filtering and image reconstruction

**Abstract:** In previous work, we have proposed a bio-plausible model of retinal processing, based on the physiological literature [4]. A strong characteristic of this model was to reproduce the temporal delay of the *surround* component of filtering, as observed in real retinas. In this report, we study the possibilities of *image reconstruction* based on the response of such a model to the sudden appearance of a static image.

In this report, we mostly focus on the first stage of the model, which performs *linear spatio-temporal filtering* on the input image. We view this stage as a linear application from a 2D space (the image) to a 2D+T space (the temporal response of the retina), which bears an optimal inverse transformation in terms of robustness to noise: the pseudo-inverse of Moore-Penrose. We study the particular structure of this pseudo-inverse, due to the structure of retinal filtering with a delayed *surround* component. As a result, the pseudo-inverse-based image reconstruction reconstructs low spatial frequencies *before* high spatial frequencies. This property could have psychophysical correlates, for example during perception of very short image presentations.

**Key-words:** Retina model, spatio-temporal filtering, image reconstruction

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Le filtre linéaire rétinien</b>	<b>4</b>
2.1	Forme générale du filtre . . . . .	4
2.2	Notations : Briques élémentaires de filtrage . . . . .	5
2.3	Le filtre rétinien . . . . .	6
2.4	Réponse à une image statique . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Reconstruction par la méthode de la pseudo-inverse</b>	<b>9</b>
3.1	Pseudo-inverse de Moore-Penrose . . . . .	9
3.2	La pseudo-inverse rétinienne . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Perspectives futures</b>	<b>16</b>
4.1	Spikes rétiniens et reconstruction d'image . . . . .	16
4.1.1	L'émission de spikes . . . . .	16
4.1.2	Des spikes au signal analogique reconstruit . . . . .	18
4.1.3	Spikes et compression d'image . . . . .	18
4.2	Corrélat perceptuels . . . . .	19

## 1 Introduction

Comment notre cerveau exploite-t-il le signal de la rétine ? Y a-t-il des conséquences perceptuelles liées à la structure particulière *center-surround* du filtrage ? Et peut-on s'inspirer de ses propriétés dans une optique plus 'computer vision', typiquement pour des algorithmes de codage ? Pour commencer à étudier ces questions, une première étape est de comprendre les possibilités de *reconstruction* de l'image originale, à partir de la sortie rétinienne. C'est ce que nous faisons ici, en prenant pour base un modèle simple de filtrage rétinien.

Le modèle de rétine considéré ici est un modèle 'minimal', qui peut se décomposer en deux étapes successives de filtrage<sup>1</sup> :

1. Filtrage linéaire spatio-temporel d'un input visuel  $I(x, y, t)$  pour obtenir une 'activité' de sortie  $A(x, y, t)$ , par convolution avec un noyau spatio-temporel  $K(x, y, t)$ .
2. Génération de *spikes* (ou *potentiels d'action*) à partir de  $A(x, y, t)$ , par un tableau discret de 'cellules' (typiquement, une par pixel).

Ce rapport se focalise principalement sur le premier point, celui du filtrage linéaire rétinien : nous cherchons à caractériser la reconstruction 'optimale' de l'entrée visuelle à partir de l'activité rétinienne  $A(x, y, t)$ , dans le cas où l'entrée est constituée d'une image fixe apparaissant au temps  $t = 0$  :

$$I(x, y, t) = I(x, y)\mathbb{1}_{t>0}.$$

La nature particulière du filtre rétinien  $K(x, y, t)$  est rappelée en Section 2. Les propriétés de la reconstruction linéaire par pseudo-inverse sont présentées en Section 3. Enfin, en Section 4, nous évoquons de possibles pistes de travail futur : incorporation des spikes dans le processus de reconstruction (Section 4.1), applications à la compression d'images et/ou de video (Section 4.1.3), validation psychophysique de la pertinence de la pseudo-inverse en termes de perception (Section 4.2).

## 2 Le filtre linéaire rétinien

### 2.1 Forme générale du filtre

Dans notre modèle de rétine, un filtre spatio-temporel *linéaire*  $K(x, y, t)$  emmène de l'input visuel  $I(x, y, t)$  à une 'activité' analogique  $A(x, y, t)$  de la rétine, par la relation de convolution

$$A(x, y, t) = K * I(x, y, t).$$

Spatialement, le filtre  $K$  a toujours une symétrie circulaire en  $(x, y)$  (typiquement, il s'exprime à l'aide de Gaussiennes...). Pour avoir des équations un peu plus concises, je noterai par la suite une unique variable spatiale  $x$  dans les équations qui suivent :

$$A(x, t) = K * I(x, t).$$

Le filtre  $K(x, t)$  a une forme générale bien spécifique, celle d'une différence de Gaussiennes (DOG) dont la Gaussienne extérieure (le '*surround*') possède un retard temporel sur la Gaussienne intérieure (le '*center*') :

$$K(x, t) = C(x, t) - S(x, t), \tag{1}$$

<sup>1</sup>Ce modèle 'minimal' est une version simplifiée du modèle bio-plausible proposé dans [4], et implémenté sous forme d'un simulateur à grande échelle.

où  $C$  et  $S$  sont des filtres

1. spatialement passe-bas (typiquement, des Gaussiennes),
2. temporellement, tels que  $S$  présente un retard par rapport à  $C$ .

Plusieurs variantes formelles sont possibles pour implémenter un tel filtre, suivant la complexité qu'on s'autorise dans le choix des noyaux spatiaux et temporels qui vont servir de 'briques' pour construire les filtres  $C$  et  $S$ , et suivant qu'on désire utiliser un formalisme discret ou plutôt continu pour l'espace et le temps... Pour fixer les idées, nous considérons dans ce rapport une expression particulière du filtre  $K$ , exprimée dans un formalisme continu. D'autres expressions alternatives sont évoquées en appendice, ainsi que les liens entre formalismes continu et discret.

Avant de présenter le filtre  $K$  lui-même, nous présentons nos notations pour les filtres élémentaires, passe-bas, qui seront composés pour construire le filtre  $K$ .

## 2.2 Notations : Briques élémentaires de filtrage

Temporellement, la brique élémentaire est le noyau exponentiel :

$$E_\tau(t) = \mathbb{1}_{t>0} \frac{\exp(-t/\tau)}{\tau}$$

dont la réponse intégrée est croissante de 0 à 1 (filtre normalisé) :

$$\int_{u=0}^t E_\tau(u) du = 1 - \exp(-t/\tau).$$

Sa transformée de Fourier est quant à elle

$$E_\tau(\xi_t) = \frac{1}{1 + j\tau\xi_t}.$$

Nous considérerons aussi un noyau plus général, abusivement appelé 'fonction Gamma' par les biologistes, qui est obtenu en cascadiant  $n + 1$  noyaux exponentiels de paramètre  $\tau$  :

$$E_{n,\tau}(t) = \mathbb{1}_{t>0} \frac{t^n \exp(-t/\tau)}{\tau^{n+1}}$$

dont la réponse intégrée est aussi croissante de 0 à 1 (sans expression simple). Sa transformée de Fourier est simple, vu que c'est juste la convolution (=multiplication dans Fourier) de  $n + 1$  noyaux exponentiels :

$$E_{n,\tau}(\xi_t) = \frac{1}{(1 + j\tau\xi_t)^{n+1}}.$$

Ce filtre, également passe-bas, reproduit mieux la cascade de filtrages passe-bas qui ont lieu dans les premières couches de la rétine, principalement d'Ã>s au mécanisme de phototransduction.

Spatialement, notre brique élémentaire sera le noyau Gaussien :

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

où  $n$  est la dimension de l'espace (ici,  $n = 1$  ou  $2$ ), et la notation  $x^2$  représente le carré de la norme du vecteur  $x$  (soit  $x^2 + y^2$ , en dimension 2). L'intégrale spatiale de  $G_\sigma$  est 1 (filtre normalisé), et sa transformée de Fourier est

$$G_\sigma(\xi_x) = \exp\left(-\frac{(\sigma\xi_x)^2}{2}\right).$$

Remarquons qu'ici comme plus loin, nous utilisons une notation très simple pour la transformée de Fourier : la transformée de Fourier de  $f(x)$  est simplement notée  $f(\xi_x)$  (et de même pour les transformées de Fourier temporelles, mais ces dernières ne nous serviront pas).

### 2.3 Le filtre rétinien

Dans ce rapport, nous nous concentrerons sur l'expression suivante de filtrage rétinien :

$$X(x, t) = \delta_0(x, t) - w_S G_{\sigma_S}(x) E_{\tau_S}(t), \quad (2)$$

$$T(t) = E_{n_P, \tau_P} \overset{t}{*} (\delta_0 - w_A E_{\tau_A})(t), \quad (3)$$

$$K(x, t) = T \overset{t}{*} X(x, t), \quad (4)$$

où les convolutions sont appliquées de droite à gauche. Avant tout, remarquons que nous sommes bien dans le cadre d'une opposition *center-surround*  $K(x, t) = C(x, t) - S(x, t)$  comme expliqué plus haut, avec

$$C(x, t) = \delta_0(x) T(t), \quad \text{et} \quad (5)$$

$$S(x, t) = w_S G_{\sigma_S}(x) (T \overset{t}{*} E_{\tau_S})(t). \quad (6)$$

Expliquons le choix de cette forme particulière.

Le filtre  $X(x, t)$  défini en (2) décrit l'opposition '*center-surround*' typique de la rétine, dans une version la plus épurée possible. Le signal *center* est une simple copie non filtrée de l'entrée lumineuse, symbolisée par le Dirac  $\delta_0(x, t)$ . On retranche à ce signal *center* un signal *surround*, obtenu comme une moyenne spatio-temporelle du *center* (filtrage passe-bas), d'étendue spatiale  $\sigma_S$  et avec un délai temporel  $\tau_S$ . Le poids relatif des deux signaux est fixé par  $w_S \in [0, 1]$ , typiquement très proche de 1.

Le filtre  $T(t)$  défini en (3) modélise le reste du filtrage *temporel* ayant lieu dans la rétine. Il se décompose en deux parties distinctes : tout d'abord, un filtrage passe-bas  $E_{n_P, \tau_P}(t)$  modélise les délais de transmission successifs dans la rétine, dont la principale cause biologique est la cascade de phototransduction dans les photorécepteurs.

Ensuite, le filtre passe-haut  $\delta_0(t) - w_A E_{\tau_A}(t)$  contrôle la balance temporelle de la rétine entre un comportement 'soutenu' (lorsque  $w_A = 0$ ) et un comportement totalitaire 'transitoire' (lorsque  $w_A = 1$ ). Les origines biologiques de ces comportements transitoires sont de natures diverses : ils naissent en partie de l'inhibition produite par les cellules amacrines de la rétine, et en partie de phénomènes plus généralisés d'adaptation neuronale<sup>2</sup>. Typiquement,  $w_A$  est assez proche de 1 (comportement transitoire).

<sup>2</sup>En réalité, ces multiples comportements transitoires ont lieu à des échelles temporelles distinctes, et ne sont pas forcément de nature très linéaire [3]. La formule de filtrage linéaire passe-haut à deux paramètres  $(w_A, \tau_A)$  retenue ici est donc une modélisation très minimale.

Un exemple de noyau  $T(t)$  est représenté en Figure 1-B.

Le filtre rétinien est alors défini par (4) comme la composition des deux effets de filtrage : opposition *center-surround*  $X$ , et ensemble du filtrage temporel  $T$ . Tout le filtrage spatial a lieu au niveau du filtre  $X$ . Cependant,  $X$  n'est pas qu'un filtre spatial, mais bien un filtre spatio-temporel non séparable, puisque le *surround* est associé à un délai temporel  $\tau_S$ , qui est au centre de nos préoccupations dans ce rapport.

## 2.4 Réponse à une image statique

Le filtre  $K$  défini en (2)-(4) peut s'appliquer de manière générale à une *séquence* visuelle  $I(x, t)$ <sup>3</sup>. Cependant, ce rapport se concentre sur les propriétés de réponse à une image *statique*  $I(x)$ .

On suppose donc que la rétine était 'au repos' ( $A(x, t) = 0$ ) pour  $t \leq 0$ , et que soudain apparaît une image statique  $I(x, t) = I(x)\mathbb{1}_{t>0}$ . Dans ce cas, en utilisant (5)-(6), la réponse rétinienne  $A = K * I$  s'écrit :

$$A(x, t) = I(x)R_C(t) - w_S(G_{\sigma_S}^x * I)(x)R_S(t), \quad (7)$$

où

$$R_C(t) = \int_{u=0}^t T(u)du \quad (8)$$

$$R_S(t) = \int_{u=0}^t (T * E_{\tau_S})(u)du \quad (9)$$

sont les réponses temporelles intégrées respectives du *center* et du *surround*.

De plus, le retard temporel  $\tau_S$  du *surround* par rapport au *center* implique que

$$\begin{aligned} R_C(t) \gg R_S(t) & \quad \text{si } t \text{ est petit, proche de } 0 \\ & \quad \text{('retard à l'allumage' du } \textit{surround}) \\ R_C(t) \simeq R_S(t) & \quad \text{si } t \text{ est grand, proche de } +\infty \\ & \quad \text{(le } \textit{surround} \text{ 'rattrape' le } \textit{center}), \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} A(x, t) \simeq I(x)R_C(t) & \quad \text{si } t \text{ est petit, proche de } 0 \\ & \quad \text{(pas de filtrage spatial)} \\ A(x, t) \simeq ((\delta_0 - G_{\sigma_S})^x * I)(x)R_C(t) & \quad \text{si } t \text{ est grand, proche de } +\infty \\ & \quad \text{(filtrage passe-haut spatial).} \end{aligned}$$

Les noyaux rétinien sont représentés en Figure 1, dans deux cas distincts. Dans le premier cas (panneau A), le filtrage temporel supplémentaire  $T(t)$  est absent (soit  $K(x, y, t) = X(x, y, t)$ ), ce qui permet de visualiser les effets 'purs' d'un retard du *surround*. Dans le second cas (panneau B), le filtrage supplémentaire  $T(t)$  est également pris en compte, avec des valeurs typiques de la rétine des mammifères.

Dans les deux cas, le retard du *surround* se traduit par la transition, au cours du temps, d'une réponse spatialement 'complète' (toutes les fréquences passent) à une réponse spatialement passe-haut. Notre but dans ce rapport est de mieux comprendre les implications de cette propriété en termes de reconstruction d'image.

<sup>3</sup>Ce filtre a d'ailleurs des propriétés intéressantes en termes de détection de mouvement [4].

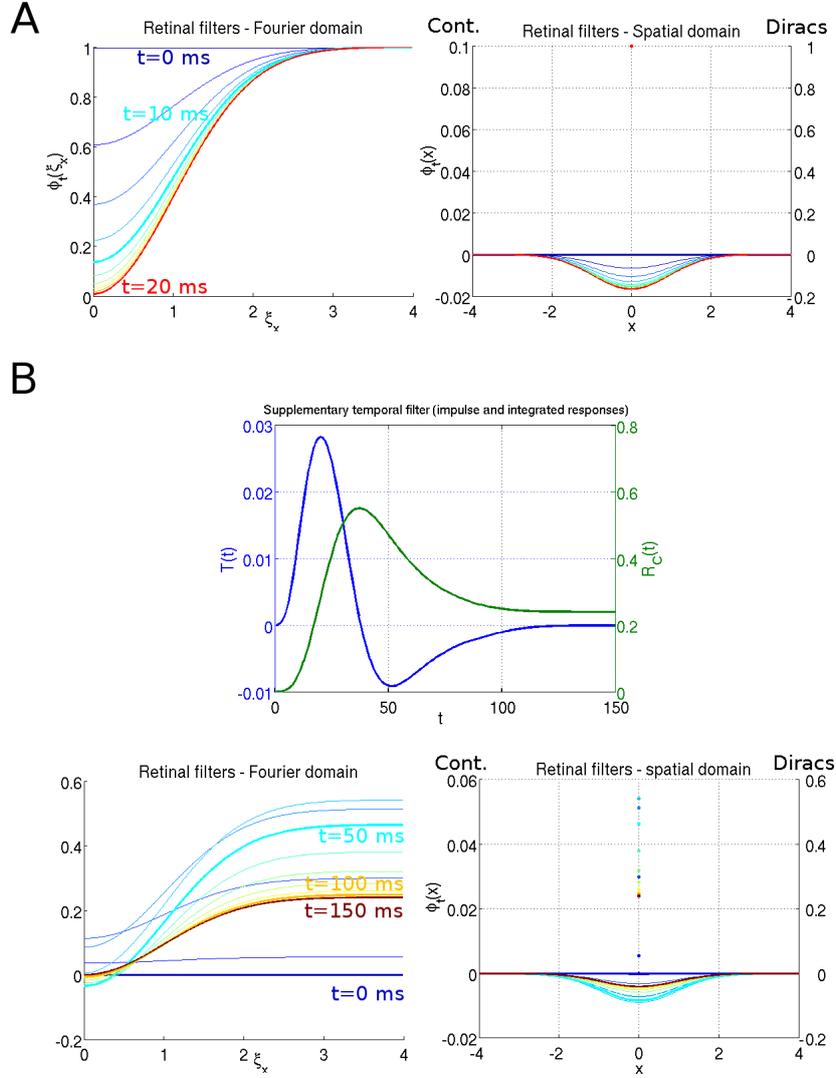


FIG. 1 – Réponse rétinienne à une image statique. Evolution au cours du temps du noyau spatial  $\phi_t$  donnant l'activité rétinienne au temps  $t$ , en réponse à l'apparition d'une image statique (au temps  $t = 0$ ). Paramètres biologiques typiques. Dans le plan spatial, les Diracs (en  $x = 0$ ) sont symbolisés par des cercles et leur intensité se lit sur l'échelle de droite. En **A**, seule la pure opposition *center-surround* est prise en compte, avec délai du *surround* (noyau  $X$  de l'équation (2)). Paramètres  $\sigma_S = 1$ ,  $\tau_S = 4$  ms,  $w_S = 1$ . En **B**, le filtrage temporel supplémentaire  $T(t)$  est également pris en compte (équation (3)). Paramètres  $\tau_P = 5$  ms,  $n_P = 5$ ,  $\tau_A = 20$  ms,  $w_A = 0.75$ . Il en découle une évolution temporelle beaucoup plus lente. Cependant, dans les deux cas, le retard du *surround* (toujours 4 ms) a des effets notables.

### 3 Reconstruction par la méthode de la pseudo-inverse

Comme énoncé dans l'introduction, nous cherchons à 'inverser' la transformée rétinienne, comme première étape vers une meilleure compréhension du codage rétinien. Dans le cas simplifié qui nous concerne ici, il s'agit de reconstruire l'image en entrée  $I(x)$  à partir de la sortie analogique de la rétine  $A(x, t)$ , définie en (7).

Sans contrainte supplémentaire, cette reconstruction peut s'effectuer d'une infinité de manières différentes, en exploitant l'équation (7). On peut par exemple considérer seulement les tous premiers instants de la réponse rétinienne, puisque  $I(x) \simeq A(x, \epsilon)/R_C(\epsilon)$  pour  $\epsilon$  assez petit. Sinon, on peut reconstruire  $I(x)$  à partir d'une paire quelconque d'instant de la réponse rétinienne :

$$\forall (t_1, t_2) > 0, \quad I(x) = \frac{R_S(t_2)A(x, t_1) - R_S(t_1)A(x, t_2)}{R_S(t_2)R_C(t_1) - R_S(t_1)R_C(t_2)}. \quad (10)$$

Cette infinité de reconstructions possibles est intuitive, puisque l'espace d'arrivée est de dimension 2D+T tandis que l'espace de départ est 2D. Cependant, nous allons pouvoir caractériser une reconstruction particulière, unique et optimale en un sens à définir : la pseudo-inverse de Moore-Penrose.

#### 3.1 Pseudo-inverse de Moore-Penrose

**Formalisme linéaire.** Considérons donc l'application linéaire  $\Phi$  qui envoie toute image  $I(x) \in \mathcal{I}$ , vers l'activité rétinienne correspondante 2D+T,  $A(x, t) \in \mathcal{O}$ , donnée par (7). On notera simplement :

$$A = \Phi I. \quad (11)$$

Nous ne définirons pas rigoureusement la nature des espaces fonctionnels de départ et d'arrivée,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{O}$ . Nous supposons leur régularité suffisante pour effectuer nos calculs<sup>4</sup>. En particulier, nous supposons  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{O}$  munis du produit scalaire canonique sur les fonctions intégrables :

$$\begin{aligned} \langle I_1, I_2 \rangle_{\mathcal{I}} &= \int_x I_1(x)I_2(x) dx = \int_{\xi_x} I_1(\xi_x)\overline{I_2(\xi_x)} d\xi_x, \\ \langle Z_1, Z_2 \rangle_{\mathcal{O}} &= \int_{t=0}^{T_{\max}} \int_x Z_1(x, t)Z_2(x, t) dx dt \\ &= \int_{t=0}^{T_{\max}} \int_{\xi_x} Z_1(\xi_x, t)\overline{Z_2(\xi_x, t)} d\xi_x dt. \end{aligned}$$

Les secondes égalités, concernant les transformées de Fourier spatiales des fonctions, sont d'ailleurs à l'égalité de Plancherel-Parseval. De fait, l'espace de Fourier spatial va offrir une description beaucoup plus simple de notre problème.

Remarquons qu'on a imposé à l'espace d'arrivée  $\mathcal{O}$  d'être borné en temps :  $t \in [0, T_{\max}]$ . Cette condition, nécessaire à la bonne définition des équations futures, revient à reconstruire l'image à partir d'une durée *finie et pré-déterminée* de réponse rétinienne<sup>5</sup>. Enfin, un élément  $Z$  de  $\mathcal{O}$  sera noté indifféremment  $Z(x, t)$  ou  $Z_t(x)$ , suivant les cas.

<sup>4</sup>Par exemple,  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{O}$  sont supposés assez réguliers pour que  $\Phi$  et sa pseudo-inverse puissent être entièrement caractérisées par des transformées de Fourier (voir la suite).

<sup>5</sup>Cette condition pourra être étendue à  $T_{\max} = +\infty$  dans certains cas particuliers, voir la suite.

**Banc de filtres.** La transformée  $\Phi$  peut être vue comme un filtrage de l'image par un *banc de filtres spatiaux* indexés par le temps,  $\{\phi_t\}_{t \in [0, T_{\max}]}$ , où chaque filtre  $\phi_t$  est donné par l'équation (7) :

$$\phi_t(x) = \delta_0(x)R_C(t) - w_S G_{\sigma_S}(x)R_S(t), \quad (12)$$

$$\phi_t(\xi_x) = R_C(t) - w_S \exp(-(\xi_x \sigma_S)^2/2)R_S(t). \quad (13)$$

On a également indiqué l'expression des filtres  $\{\phi_t\}$  dans l'espace de Fourier spatial.

Notre problème équivaut alors à reconstruire au mieux l'image  $I(x)$  à partir des 'cartes d'activité' successives  $\{A_t(x)\}_{t \in [0, T_{\max}]}$  données par

$$A_t(x) = \phi_t \ast I(x). \quad (14)$$

**Remarque :** La notion de banc de filtres est classique en traitement d'image. En général, ces bancs sont indexés de manière discrète, alors qu'ici nous avons une indexation continue par le temps  $t$ . Du point de vue peu rigoureux de ce rapport, il s'agit là uniquement d'une différence formelle d'écriture.

**Pseudo-inverse de Moore-Penrose.** L'application linéaire  $\Phi$  n'est pas inversible, puisque les espaces de départ  $\mathcal{I}$  et d'arrivée  $\mathcal{O}$  n'ont pas la même dimension. La dimension d'arrivée étant beaucoup plus grande,  $\Phi$  n'est pas surjective, et admet une infinité d'inverses à gauche  $\Phi^{-1}$  vérifiant

$$\Phi^{-1}\Phi = \text{Id}_{\mathcal{I}}. \quad (15)$$

Remarquons que de tels inverses à gauche existent uniquement parce que  $\Phi$  est injective. Pour le filtre rétinien étudié ici, cette injectivité est garantie puisque (10) fournit trivialement une (infinité) d'inverses linéaires<sup>6</sup>.

Cependant, parmi cette infinité d'inverses à gauche, on peut en caractériser une de façon unique : la *pseudo-inverse de Moore-Penrose*  $\Phi^+$ , qui seule vérifie la propriété suivante, plus contraignante que (15) :

$$\Phi\Phi^+ \text{ est le projecteur orthogonal sur } \text{Im}(\Phi). \quad (16)$$

Parmi toutes les inverses à gauche possibles  $\Phi^{-1}$ ,  $\Phi^+$  est celle minimisant la norme  $\sup \|\Phi^{-1}\| = \max_{x \in \mathcal{O}^*} (|\Phi^{-1}x|/|x|)$  (avec la norme  $L^2$  définie plus haut). Cette propriété découle de la définition (16).

**Robustesse au bruit.** Supposons qu'un bruit blanc  $W(x, y, t)$  soit ajouté à l'activité rétinienne  $A(x, y, t)$ . Pour toute inverse à gauche  $\Phi^{-1}$ , la reconstruction bruitée sera alors

$$\Phi^{-1}(A + W) = I + \Phi^{-1}W.$$

<sup>6</sup>Plus précisément, une définition rigoureuse des espaces  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{O}$  serait nécessaire pour réellement définir quelles sont les transformées linéaires 'acceptables' entre  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{O}$ , avant de pouvoir affirmer leur injectivité ou surjectivité. Par ailleurs, la formule d'inversion triviale (10) fonctionne uniquement parce que nous avons choisi un signal *center* ne réalisant aucun filtrage spatial : c'est un Dirac, dont la transformée de Fourier est partout égale à un. Si le *center* est lui aussi associé à un filtrage spatial Gaussien, comme c'est généralement le cas dans les modèles traditionnels de rétine, l'injectivité de  $\Phi$  n'est plus garantie : elle dépend du choix précis des espaces  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{O}$ . On évoque rapidement cette question en appendice.

Alors,  $\Phi^+$  est l'inverse à gauche qui minimise la variance du bruit reconstruit  $\Phi^{-1}W$ . Nous ne démontrerons pas cette propriété dans le formalisme linéaire de ce rapport<sup>7</sup>. A la place, nous proposons une justification intuitive, en prouvant les vertus de la pseudo-inverse dans le cas d'un espace beaucoup plus simple.

Considérons l'exemple le plus simple de transformée linéaire non surjective, où  $\Phi$  envoie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , avec  $\Phi(1) = (x_0, y_0)$ . Ses inverses à gauche sont donc les formes linéaires  $\Phi^{-1}(x, y) = ax + by$  telles que  $ax_0 + by_0 = 1$ . Ajoutons alors un bruit  $W = (W_x, W_y)$  tel que  $W_x$  et  $W_y$  soient indépendants, de même loi et de variance  $\sigma^2$ . La reconstruction bruitée de la valeur 1 sera alors  $\Phi^{-1}(\Phi(1) + W) = 1 + aW_x + bW_y$ , de variance  $(a^2 + b^2)\sigma^2 = \|\Phi^{-1}\|^2\sigma^2$ . La pseudo-inverse  $\Phi^+$ , qui minimise  $\|\Phi^{-1}\|$ , est donc bien celle qui minimise la variance de la reconstruction bruitée.

La pseudo-inverse est donc l'inversion *optimale*, en un sens de robustesse au bruit. Par conséquent, il est justifié : (1) de s'intéresser à cette inverse en particulier à des fins de reconstruction, (2) de s'intéresser à d'éventuels liens entre la pseudo-inverse et la *perception* humaine des images.

**Noyaux duaux.** Dans le cas du filtrage rétinien,  $\Phi$  possède une propriété d'*invariance par translation spatiale*, puisque découlant de convolutions spatiales avec les noyaux  $\phi_t$ . Par symétrie et unicité, la pseudo-inverse  $\Phi^+$  est donc elle aussi invariante par translation spatiale.

Il existe donc<sup>8</sup> des *noyaux duaux*  $\{\phi_t^+\}_{t=0..T_{\max}}$  qui 'implémentent'  $\Phi^+$  par convolution spatiale. Soit, pour tout ensemble de cartes d'activité  $Z = \{Z_t(x)\} \in \mathcal{O}$  :

$$\Phi^+ Z(x) = \int_{t=0}^{T_{\max}} [\phi_t^+ * Z_t](x) dt \quad (17)$$

$$\Phi^+ Z(\xi_x) = \int_{t=0}^{T_{\max}} \phi_t^+(\xi_x) Z_t(\xi_x) dt, \quad (18)$$

en utilisant, pour la seconde ligne, le fait que la convolution équivaut à une multiplication dans le domaine de Fourier. Calculer la pseudo-inverse revient donc simplement à calculer les noyaux duaux  $\{\phi_t^+\}_{t=0..T_{\max}}$ .

**Remarque :** D'un point de vue 'traitement d'image', le fait que  $\Phi$  ne soit pas surjective rappelle le cadre des *frames*, où la pseudo-inverse est également un outil fondamental, et où les noyaux  $\{\phi_t^+\}_{t=0..T_{\max}}$  constituent le *frame dual* du *frame*  $\{\phi_t\}_{t=0..T_{\max}}$ . Voir par exemple Mallat 99 [2].

**Caractérisation dans l'espace de Fourier.** Comment calculer la pseudo-inverse  $\Phi^+$  ? Une première méthode est purement numérique : Discrétiser le temps et l'espace, pour créer une version matricielle  $M$  de l'application  $\Phi$ . Cette matrice est de grandes dimensions, puisque ses deux dimensions sont indexées respectivement par des espaces 2D et 2D+T. On peut alors calculer sa matrice pseudo-inverse  $M^+$  avec un logiciel quelconque de calcul matriciel, et en retirer les noyaux duaux  $\{\phi_t^+\}_{t=0..T_{\max}}$ , en réorganisant les coefficients de  $M^+$ <sup>9</sup>.

<sup>7</sup>Cela nécessiterait, encore une fois, une meilleure formalisation des espaces  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{O}$ .

<sup>8</sup>En admettant que  $\Phi^+$  est suffisamment régulière, i.e., qu'elle peut s'exprimer *via* des distributions ponctuelles et des intégrales spatio-temporelles.

<sup>9</sup>Plus précisément,  $M$  et  $M^+$  possèdent une invariance par translation spatiale en dehors de leurs 'bords spatiaux' (qui ne sont pas les bords 'physiques' de la matrice, du fait de la ré-indexation de chaque espace

Cependant, une méthode plus belle et rapide est de passer dans le domaine de Fourier spatial, où les noyaux duaux possèdent une expression analytique simple. D'après (16),  $\Phi^+$  est défini de manière univoque par le fait que  $\Phi\Phi^+$  est le projecteur orthogonal sur  $\text{Im}(\Phi)$ . Soit :

$$\begin{aligned} \forall I \in \mathcal{I}, Z \in \mathcal{O}, \langle Z, \Phi I \rangle &= \langle \Phi \Phi^+ Z, \Phi I \rangle \\ \int_t \int_{\xi_x} Z_t(\xi_x) \overline{\phi_t(\xi_x) I(\xi_x)} &= \int_t \int_{\xi_x} \phi_t(\xi_x) \left( \int_u \phi_u^+(\xi_x) Z_u(\xi_x) \right) \overline{\phi_t(\xi_x) I(\xi_x)} \\ \int_t \int_{\xi_x} Z_t(\xi_x) \bar{I}(\xi_x) \overline{\phi_t(\xi_x)} &= \int_t \int_{\xi_x} Z_t(\xi_x) \bar{I}(\xi_x) \phi_t^+(\xi_x) \int_u |\phi_u(\xi_x)|^2. \end{aligned}$$

A la deuxième ligne, on a utilisé l'expression (18) de  $\Phi^+ Z(\xi_x)$ . A la troisième ligne, on a inversé les variables temporelles muettes  $u$  et  $t$ . Par souci de concision, on a omis le domaine d'intégration temporelle  $[0, T_{\max}]$ , ainsi que les densités  $d\xi_x$ ,  $dt$ , et  $du$ .

Mais la dernière équation est vraie pour toutes fonctions  $Z$  et  $I$ . Elle implique donc une égalité en tout point des deux noyaux servant à calculer respectivement les intégrales de droite et de gauche. D'où,  $\forall t \in [0, T_{\max}]$  et  $\forall \xi_x$  :

$$\phi_t^+(\xi_x) = \frac{\overline{\phi_t(\xi_x)}}{\int_{u=0}^{T_{\max}} |\phi_u(\xi_x)|^2 du}. \quad (19)$$

On obtient donc une caractérisation analytique simple, dans l'espace de Fourier, des noyaux duaux  $\phi_t^+$ . Cette formule est générale : elle ne dépend pas du choix des noyaux  $\{\phi_t\}$ , dans la mesure où ceux-ci admettent effectivement une pseudo-inverse.

Une condition nécessaire, par exemple, est que  $\int_{u=0}^{T_{\max}} |\phi_u(\xi_x)|^2 du$  soit bien défini pour tout  $\xi_x$ . Cette propriété est assurée dès lors que  $T_{\max} < +\infty$ . Remarquons de plus que la forme des noyaux pseudo-inverses dépend du temps  $T_{\max}$ , qui est donc un paramètre du système<sup>10, 11</sup>.

### 3.2 La pseudo-inverse rétinienne

**Filtres duaux.** On peut à présent appliquer la méthode de la pseudo-inverse au filtre rétinien décrit en Section 2. Dans le cas où les filtres  $\phi_t$  sont donnés par (13), une application directe de la formule (19) mène aux noyaux duaux :

$$\phi_t^+(\xi_x) = \frac{R_C(t) - w_S e^{-\frac{(\xi_x \sigma_S)^2}{2}} R_S(t)}{\left( \int_0^{T_{\max}} R_C^2 \right) - 2w_S \left( \int_0^{T_{\max}} R_C R_S \right) e^{-\frac{(\xi_x \sigma_S)^2}{2}} + w_S^2 \left( \int_0^{T_{\max}} R_S^2 \right) e^{-(\xi_x \sigma_S)^2}}.$$

Ces noyaux duaux sont représentés en Figures 2 et 3 (deuxième ligne), dans l'espace de Fourier ainsi que dans l'espace réel où ils sont typiquement obtenus comme la somme d'un Dirac et d'un noyau passe-bas (type Gaussienne) ou passe-bande (type différence de Gaussiennes). On remarquera que l'étendue spatiale de ces noyaux est bien supérieure à l'étendue des noyaux rétinien directs  $\phi_t$ .

sur une seule dimension). Il suffit donc de considérer un 'patch' spatial de taille suffisante pour que les effets de bords soient absents du 'centre spatial' (pas le centre physique) des matrices. Les coefficients de  $M^+$ , pris au 'centre spatial', redonnent alors tous les noyaux duaux, sans effets de bords.

<sup>10</sup>Perceptuellement, il s'agirait du 'temps caractéristique' nécessaire à la perception d'une image statique. Mais il est peu probable qu'une telle grandeur puisse être définie avec exactitude dans le cas de la perception cérébrale.

<sup>11</sup>Ce paramètre peut être supprimé, au profit de  $T_{\max} = +\infty$ , dans le cas particulier d'un filtre  $T(t)$  totalement transitoire (soit  $w_A = 1$  dans l'équation (3)), dont la réponse intégrée retombe à 0 pour  $t \rightarrow +\infty$ .

**Reconstructions partielles.** Comment s'implémenterait 'physiquement' la reconstruction (17), appliquée à l'activité rétinienne  $A(x, t)$  ? Comme le temps intervient dans la reconstruction sous forme d'un indice d'intégration, une idée intuitive est d'introduire la 'reconstruction spectrale partielle' de l'image au temps  $t \in [0, T_{\max}]$ , comme :

$$\begin{aligned} R_t(x) &= \int_{u=0}^t [\phi_u^+ \overset{x}{*} \phi_u](x) du \\ R_t(\xi_x) &= \int_{u=0}^t \phi_u^+(\xi_x) \phi_u(\xi_x) du \\ &= \frac{\int_{u=0}^t |\phi_u(\xi_x)|^2 du}{\int_{u=0}^{T_{\max}} |\phi_u(\xi_x)|^2 du}. \end{aligned}$$

Quelle que soit la fréquence spatiale  $\xi_x$  considérée,  $R(\xi_x, t)$  vérifie  $R(\xi_x, 0) = 0$  et  $R(\xi_x, T_{\max}) = 1$ , ce qui traduit le fait que la reconstruction est totale une fois au temps  $T_{\max}$ .  $R_t$  permet de définir une 'reconstruction partielle' de l'image  $I$  en entrée, donnée simplement par  $\text{Rec}_t(x) = R_t \overset{x}{*} I(x)$ , et qui vérifie naturellement  $\text{Rec}_{T_{\max}} = I$ .

**Profils temporels de transmission.** Les Figures 2 et 3 résument les propriétés des filtres rétinien, et de la reconstruction par la pseudo-inverse. La Figure 2 correspond au cas où le filtrage temporel supplémentaire  $T(t)$  est absent (seule reste l'opposition *center-surround* minimale par le noyau  $X$ ). La Figure 3 correspond au noyau rétinien complet. Le point capital est que les courbes successives  $R_t$ , dans l'espace de Fourier, *ne sont pas parallèles* : on observe des 'profils' temporels de transmission différents selon la fréquence spatiale.

Plus précisément, que le filtrage temporel supplémentaire  $T(t)$  soit présent ou non, les *basses fréquences* spatiales sont transmises *plus tôt* par le processus de reconstruction partielle. Intuitivement, cette propriété est due au fait que les filtres  $\{\phi_t\}$ , pour  $t$  proche de  $T_{\max}$ , ne transmettent presque plus les basses fréquences. Pour optimiser la robustesse au bruit, une reconstruction optimale devra donc baser son information de basses fréquences principalement dans les premiers instants de l'activité rétinienne ( $t$  proche de 0).

Par opposition, l'information de hautes fréquences reste présente, avec la même force, du début à la fin de l'activité rétinienne. En l'absence de filtrage temporel supplémentaire, la reconstruction optimale reconstruit donc l'information de hautes fréquences à une vitesse *constante* (Figure 2, en bas à gauche).

Enfin, l'introduction du filtrage rétinien supplémentaire  $T(t)$  modifie encore la force donnée par la reconstruction aux différents instants de l'activité rétinienne, en mettant le plus grand poids de reconstruction sur les instants où cette activité est la plus forte. Visuellement, la 'vitesse' de reconstruction n'est alors plus constante, même pour les hautes fréquences (Figure 3, en bas à gauche).

Pour conclure cette présentation de la reconstruction linéaire, une application visuelle est proposée en Figure 4. On y présente la réponse  $A_t(x, y)$  de la rétine, et les reconstructions partielles  $\text{Rec}_t(x, y)$ , à des instants correspondants (Figure 4-C). On observe bien une reconstruction exacte de l'image ( $T_{\max} = 100$  ms, différence en norme  $L^1$  entre  $I$  et  $\text{Rec}_{T_{\max}}$  : 0.87/255 par pixel). On retrouve également, de façon visuelle, la prépondérance des basses fréquences spatiales dans les premiers instants de la reconstruction partielle.

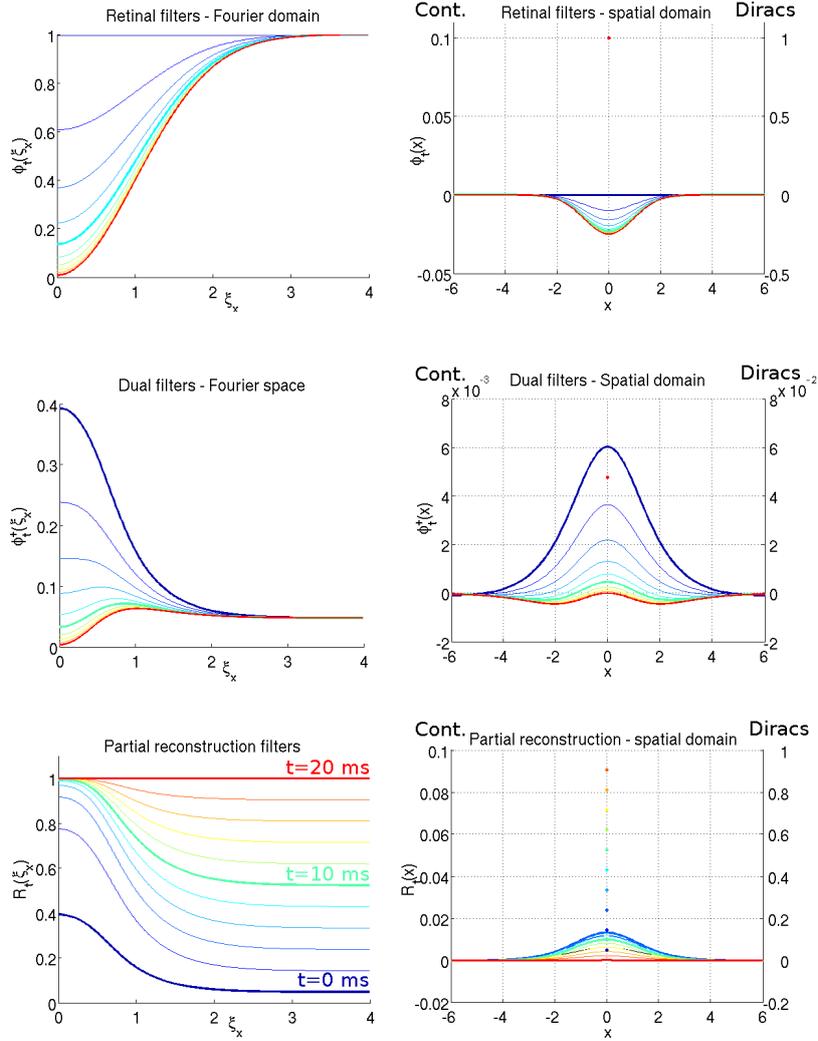


FIG. 2 – *Reconstruction par la pseudo-inverse*. Evolutions au cours du temps des noyaux rétiniens  $\phi_t$ , de leurs noyaux duaux  $\phi_t^+$ , et de la reconstruction partielle  $R_t = \int_{u=0}^t \phi_u \ast \phi_u^+$ , dans le cas où seule l'opposition *center-surround*  $X(x, y, t)$  est considérée. La reconstruction partielle fait passer les basses fréquences spatiales avant les hautes fréquences, d'« $\tilde{A}$ » au retard du *surround*. Mêmes paramètres qu'en Figure 1-A, et  $T_{\max} = 20$  ms.

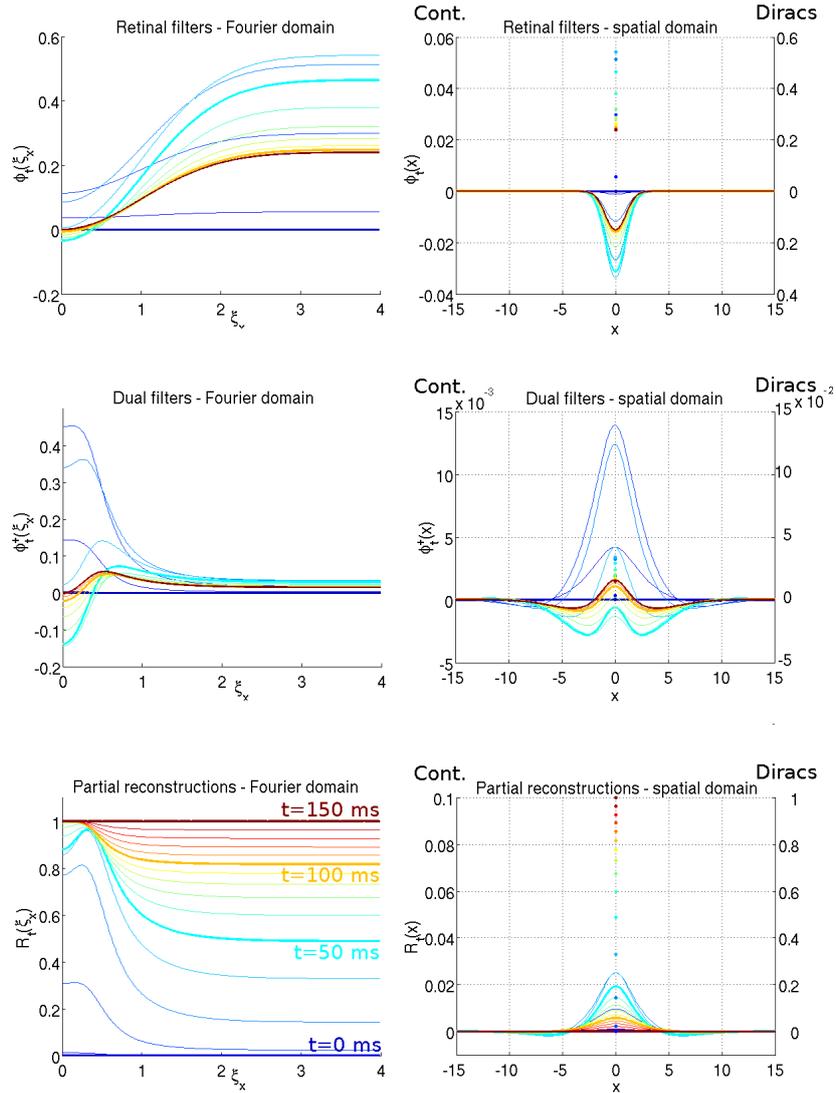


FIG. 3 – *Reconstruction par la pseudo-inverse*. Comme en Figure 2, mais avec le noyau rétinien complet ( $X$  et filtrage temporel supplémentaire  $T(t)$ ). Ici encore, la reconstruction partielle fait passer les basses fréquences spatiales avant les hautes fréquences,  $d\tilde{A}$  au retard du *surround*. Mêmes paramètres qu’en Figure 1-B, et  $T_{\max} = 150$  ms.

Par ailleurs, on vérifie la robustesse de la reconstruction par la pseudo-inverse lorsque la réponse rétinienne est bruitée par un bruit blanc (Figure 4-D). Ici, un bruit blanc  $W \sim \mathcal{N}(0, \sigma_W)$  est ajouté à  $A(x, y, t)$  en chaque pixel et à chaque milliseconde, avec une puissance  $\sigma_W$  égale à 2 fois l'écart-type global des voxels de  $A$ . La reconstruction reste visuellement très bonne ( $T_{\max} = 100$  ms, différence en norme  $L^1$  entre  $I$  et  $\text{Rec}_{T_{\max}}$  : 4.15/255 par pixel).

## 4 Perspectives futures

Dans les sections précédentes, on a mis en évidence une reconstruction linéaire optimale de l'image en entrée à partir de l'activité continue rétinienne. Dans cette dernière section, on discute des perspectives futures en matière de codage et compression par spikes, et en matière de perception visuelle.

### 4.1 Spikes rétiens et reconstruction d'image

Le modèle simplifié de rétine présenté dans l'Introduction était constitué de deux étapes successives. La première un filtrage linéaire, et la seconde une génération de spikes. Puisque ce modèle se décompose en deux étapes, la reconstruction la plus simple à envisager se ferait également en deux étapes. D'où le schéma de codage/décodage suivant :

$$I(x, t) \rightarrow A(x, t) \rightarrow \text{spikes} \rightarrow \tilde{A}(x, t) \rightarrow \tilde{I}(x, t).$$

Les première et dernière flèches de ce schéma ont fait l'objet des sections précédentes. Ici, nous évoquons les deux flèches du milieu : comment les spikes sont-ils générés à partir de l'activité  $A(x, t)$ , et comment effectuer la reconstruction de  $A(x, t)$  à partir de ces spikes ?

#### 4.1.1 L'émission de spikes

Pour générer les spikes, il est nécessaire de discrétiser l'espace pour y installer des 'cellules ganglionnaires', les unités discrètes qui vont générer les spikes. Pour le moment, supposons par exemple qu'on a exactement une cellule par pixel.

Une cellule située au pixel  $x_0$  génère ses spikes à partir de la sortie linéaire  $A(x_0, t)$ , obtenue après filtrage par le noyau  $K$ , selon la procédure suivante :

1. **Rectification** du signal pour obtenir une sortie positive :

$$G(t) = N(A(x_0, t)),$$

où  $N$  est une fonction croissante et positive, telle que  $N(-\infty) = 0$ . Exponentielle, 'partie positive', sigmoïde, sont autant de possibilités d'implémentation pour  $N$ . Le but est d'avoir un courant générateur  $G(t)$  positif pour générer les spikes. C'est à ce stade qu'on peut aussi introduire, de façon complémentaire, des cellules 'OFF' pour lesquelles  $G(t) = N(-A(x_0, t))$ .

2. **Génération** des spikes par un processus leaky-integrate-and-fire (LIF) :

$$\frac{dV}{dt} = G(t) - g^L V(t) \quad (20)$$

Spike quand  $V(t_{spk}) = 1$ ,

Réinitialisation :  $V(t_{spk}^+) = 0$ , puis (20) à nouveau.

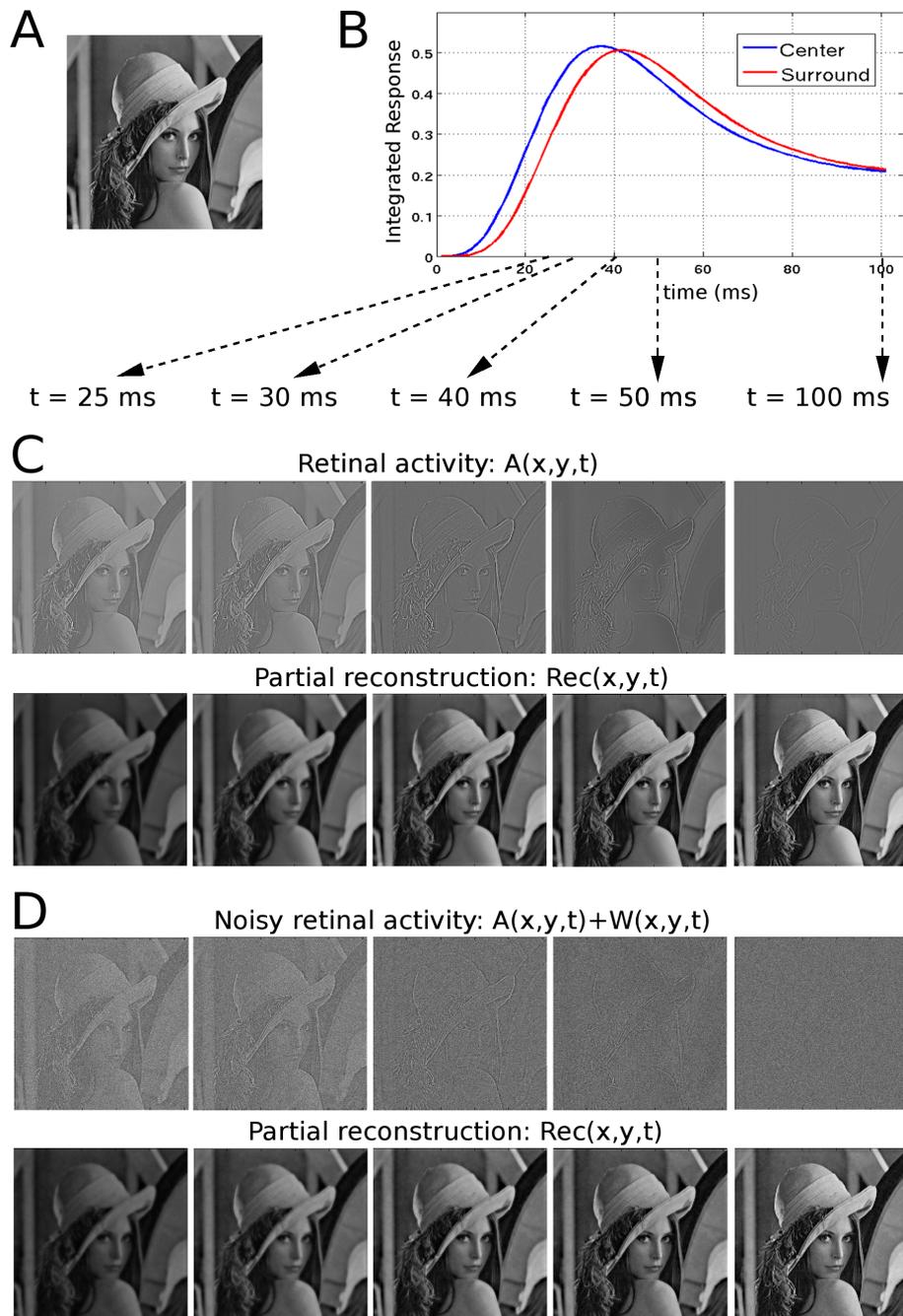


FIG. 4 – Filtrage rétinien d'une image statique, et reconstruction. *A* : Image de départ. *B* : réponses temporelles  $R_C(t)$  et  $R_S(t)$ , illustrant le léger retard du *surround* (4 ms). *C,D* : voir le corps du texte.

Eventuellement,  $V(t)$  peut être maintenu à 0 pendant une durée  $\tau_{\text{refr}}$  après chaque spike. On parle alors de *période réfractaire absolue*.

#### 4.1.2 Des spikes au signal analogique reconstruit

Comment reconstruire l'activité continue  $A(x, t)$ , à partir de la simple donnée des spikes générés par le processus ? Pour commencer, remarquons que si le signal générateur  $G(t) = G_0$  est *constant* (et supérieur au seuil  $g^L$ ), alors le processus (20) génère des spikes à intervalles temporels réguliers, avec l'expression analytique suivante :

$$t_{n+1} - t_n = F(G_0) = \frac{1}{g^L} \log \left( \frac{G_0}{G_0 - g^L} \right) (+\tau_{\text{refr}}), \quad (21)$$

où  $\tau_{\text{refr}}$  est la période réfractaire absolue, optionnelle.

Réciproquement, on peut donc 'inverser' avec exactitude le processus (20) dans ce cas très simple, c'est-à-dire retrouver l'intensité génératrice  $G_0$  à partir de deux spikes successifs. De façon plus générale, étant donné un train de spikes  $\{t_i\}$ , on sait qu'il *aurait pu* être généré *exactement* par le signal

$$G_{\text{rec}}(t) = F^{-1}(t_{i+1} - t_i) \text{ si } t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Il existe donc un processus de reconstruction simple (mais approximatif) d'un train de spikes vers une fonction génératrice  $G_{\text{rec}}(t)$  constante par morceaux. A partir de celle-ci, on peut reconstruire une 'activité'  $\tilde{A}(x, t)$ , en considérant  $N^{-1}(G_{\text{rec}}(t))$  et en combinant l'information des cellules ON et OFF.

Peut-on caractériser l'erreur que cette procédure 'constante par morceaux' induit entre  $A(x, t)$  et  $\tilde{A}(x, t)$  ? Cela revient à caractériser la différence (par exemple, en norme  $L_2$ ) entre un vrai signal générateur  $G$  et sa reconstruction constante par morceaux  $G_{\text{rec}}$ . Par exemple, si on montrait que le 'bruit' introduit par ce procédé est proche d'un bruit blanc, alors la pseudo-inverse resterait la reconstruction linéaire optimale à partir de  $\tilde{A}(x, t)$ , et on pourrait estimer l'erreur totale du processus de codage/décodage.

Une autre piste serait de s'interroger sur un autre espace de fonctions  $\mathcal{F}$ , plus régulières que les fonctions constantes par morceaux, dans lequel on puisse aussi inverser avec exactitude un train de spikes.

#### 4.1.3 Spikes et compression d'image

Le processus de codage/décodage qu'on a décrit fournit une nouvelle représentation de l'image  $I(x)$ , dans l'espace des spikes rétiniens. Telle qu'elle, cette représentation est redondante, puisque composée en chaque pixel d'un jeu de nombres réels (les temps de spikes), au lieu d'un simple nombre (l'intensité lumineuse) pour l'espace de départ.

Cependant, il n'est pas impossible que ce nouvel espace de représentation offre des possibilités intéressantes en terme de compression d'image. Par exemple, quelle est l'influence sur l'image reconstruite de la déletion d'un spike dans la représentation rétinienne ? Est-il possible de 'réorganiser' le codage par spikes, en un codage contenant moins de spikes ? Même s'il n'est pas certain au final que cette représentation a du potentiel en termes de compression d'image, le problème mérite définitivement réflexion.

## 4.2 Corrélats perceptuels

Pour conclure ce rapport, remarquons que la reconstruction par la pseudo-inverse offre une prédiction en termes de *perception psychophysique des images* : la reconstruction linéaire optimale de l'activité rétinienne reconstruit les basses fréquences spatiales 'en premier'. Et en effet, d'un point de vue (très) intuitif, on peut remarquer une certaine similarité entre la reconstruction partielle de notre modèle en ses premiers instants (Figure 4-C) et la façon dont nous percevons une image lorsqu'elle est présentée pour un temps très court.

Y aurait-il un lien entre ces travaux et la perception psychophysique des images ? Existe-t'il des courbes psychophysiques donnant la sensibilité spectrale d'observateurs en réponse à des présentations d'images très courtes, en fonction du temps de présentation ? Et si oui, ces courbes se comparent-elles favorablement aux prédictions de la reconstruction par pseudo-inverse ? Il s'agirait là d'un résultat intéressant, car il dénoterait un principe d'optimalité perceptuelle de notre système visuel en réponse au bruit interne du traitement rétinien.

## Appendice : variantes pour le noyau K

Nous faisons ici quelques remarques techniques, décrivant des variantes du formalisme présenté dans le corps du rapport pour décrire le filtre rétinien  $K(x, y, t)$ .

### Center avec noyau Gaussien

Les modèles biologiques classiques diffèrent de notre modèle de filtrage par le fait qu'ils associent également le signal *center* à un filtrage passe-bas Gaussien, là où nous considérons un simple Dirac (équation (5)). Et en effet, il existe un couplage intrinsèque entre photorécepteurs, puis dans l'ensemble de la connectique rétinienne, qui se traduit par un certain 'floutage' du signal *center*. Typiquement, on pourrait donc remplacer le terme  $\delta_0(x, t)$  des équations (2) et (5) par un noyau Gaussien spatial  $G_{\sigma_C}(x)\delta_0(t)$  (avec, naturellement,  $\sigma_C < \sigma_S$ ).

Comment un tel modèle rentrerait-il dans le cadre de nos travaux ? Nous avons déjà évoqué que notre application  $\Phi$  est trivialement injective, *justement* du fait que le signal *center* reproduit l'image originale, sans floutage. Pour étendre nos résultats au cas où le *center* présente un floutage, deux possibilités s'offrent à nous.

Une première possibilité, la plus prudente, est de considérer que le floutage par  $G_{\sigma_C}(x)$  est une première étape de filtrage inéluctable. En d'autres termes, toute la procédure de reconstruction qui s'ensuit ne peut viser qu'à reconstruire avec exactitude l'image du *center*  $G_{\sigma_C} \overset{x}{*} I$ .

Une seconde possibilité, plus ambitieuse, est de réellement incorporer  $G_{\sigma_C}$  dans le formalisme pseudo-inverse. Très probablement,  $\Phi$  ne sera plus injective en général. Intuitivement, inverser un floutage Gaussien nécessiterait de multiplier la transformée de Fourier par l'opérateur  $\exp((\sigma_C \xi_x)^2/2)$ , qui n'est pas borné. Cependant, on peut imaginer de 'réhausser' partiellement le spectre spatial, en appliquant une version 'tronquée' de l'opérateur précédent (un peu comme effectuer une équation de la chaleur inverse).

Si  $\Phi$  n'est pas injective, on définit ses pseudo-inverses à gauche comme les fonctions vérifiant  $\Phi \Phi^{-1} \Phi = \Phi$ . Pour être unique, la pseudo-inverse de Moore-Penrose

doit, en plus de (16), vérifier une seconde propriété :  $\Phi^+ \Phi$  est le projecteur orthogonal sur  $\text{Ker}(\Phi)^\perp$ . Ici encore, comprendre les implications d'une telle propriété nécessiterait d'avoir détaillé la structure des espaces  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{O}$ .

### Formalisme discret

Pour avoir un formalisme mathématique rigoureux, il peut être plus simple d'exprimer le filtrage temporel avec un temps *explicitement discret*, mesuré frame par frame. Voici juste un petit rappel pour la conversion formelle du temps continu vers le temps discret.

Pour un signal temporel discret  $f[n]$  échantillonné tous les  $\Delta t$ , le filtre  $E_\tau(t)$  s'implémente via le filtre discret

$$E_a[n] = (1 - a)a^n,$$

où  $0 < a < 1$  est le taux de décroissance entre deux frames successifs, qu'on peut obtenir à partir du modèle continu sous-jacent par

$$a = \exp(-\Delta t/\tau) \simeq 1 - \Delta t/\tau.$$

L'avantage de ce filtre est qu'il s'implémente bien récursivement : La sortie  $g = f * E_a$  se calcule avec :

$$g[n] = (1 - a)f[n] + ag[n - 1].$$

On déduit facilement de cette expression la transformée de Fourier de  $E_a$ , en se rappelant qu'un décalage temporel de  $\Delta t$  correspond à multiplier la transformée de Fourier par  $e^{-j\Delta t\xi_t}$  :

$$E_a(\xi_t) = \frac{1 - a}{1 - ae^{-j\Delta t\xi_t}} = \frac{1 - e^{-\Delta t/\tau}}{1 - e^{-\Delta t/\tau(1 + j\tau\xi_t)}},$$

qui tend bien vers la transformée  $E_\tau(\xi_t)$  du noyau continu (Section 2.2), lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Les filtres  $E_{n,\tau}$  présentés plus haut dans le formalisme continu ont aussi une expression discrète, et une transformée de Fourier correspondante.

### Un noyau alternatif, non séparable

Dans le corps de ce rapport, nous avons utilisé pour notre signal *surround* une 'brique spatio-temporelle passe-bas' séparable :

$$B(x, t) = G_\sigma(x)E_\tau(t). \quad (22)$$

Au niveau des modèles de rétine en silicone (voir aussi les travaux de Jeanny Hérault [1]), cette brique passe-bas est remplacée par un atome non-séparable, mais d'implémentation très facile lorsqu'on a une discrétisation spatiale. Soit un formalisme discret en espace :  $I[x](t)$  (on peut aussi faire une version discrète en temps), échantillonné tous les  $\Delta x$ .

Alors, l'équation de filtrage suivante :

$$\tau \frac{dY[x]}{dt} = I[x](t) - Y[x](t) + G(Y[x - 1](t) + Y[x + 1](t) - 2Y[x](t)) \quad (23)$$

est stable, et implémente un filtrage  $Y = B_2 * I$  avec

$$B_2(\xi_x, \xi_t) = \frac{1}{1 + j\tau\xi_t + 2\kappa(\cos(\xi_x\Delta x) - 1)},$$

(cela s'obtient directement depuis (23)). Le filtre  $B_2[x](t)$  n'a pas d'expression directe dans le domaine spatial.

De plus, ce filtre admet une limite simple lorsqu'on passe à un espace continu. Supposons que le pas spatial  $\Delta x$  tende vers 0 avec la relation d'échelle

$$\sqrt{2\kappa}\Delta x = cte. \triangleq \sigma.$$

Alors on a :

$$B_2(\xi_x, \xi_t) = \frac{1}{1 + j\tau\xi_t + \sigma\xi_x^2/2},$$

et  $\sigma$  est donc l'étendue caractéristique du couplage spatial induit par (23). Ce filtre –la version à espace continu– admet enfin une expression simple dans le domaine spatial :

$$B_2(x, t) = G_{\sigma\sqrt{t/\tau}}(x)E_\tau(t). \quad (24)$$

L'équation (24) définit une 'brique spatio-temporelle passe-bas' qui ressemble beaucoup à celle qu'on a utilisée précédemment (équation (22)), mais celle-ci n'est pas séparable (car le temps  $t$  intervient dans l'étendue spatiale de la Gaussienne, comme dans l'équation de la chaleur). Si on travaille dans un formalisme discret en espace, ce filtre a une implémentation à la fois *exacte* et *simple* avec l'équation (23). Autant donc le garder à l'esprit : peut-être offre-t-il une simplicité mathématique intéressante.

Enfin, lorsqu'on utilise la brique spatio-temporelle non séparable (24) pour implémenter le signal *surround*, on obtient des résultats (filtres duaux, reconstructions partielles) très proches de ceux avec la brique séparable (présentés dans le corps du texte).

## Références

- [1] J. Hérault, editor. *Vision : Signals, Images and Neural Networks*. World Scientific Publications, 2008.
- [2] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1999.
- [3] A. Wohrer. The vertebrate retina : a functional review. *INRIA Research Report 6532*, 2008.
- [4] A. Wohrer and P. Kornprobst. Virtual retina : A biological retina model and simulator, with contrast gain control. *J Comput Neurosci*, 2008.



---

Centre de recherche INRIA Sophia Antipolis – Méditerranée  
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Centre de recherche INRIA Bordeaux – Sud Ouest : Domaine Universitaire - 351, cours de la Libération - 33405 Talence Cedex  
Centre de recherche INRIA Grenoble – Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier  
Centre de recherche INRIA Lille – Nord Europe : Parc Scientifique de la Haute Borne - 40, avenue Halley - 59650 Villeneuve d'Ascq  
Centre de recherche INRIA Nancy – Grand Est : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex  
Centre de recherche INRIA Paris – Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex  
Centre de recherche INRIA Rennes – Bretagne Atlantique : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex  
Centre de recherche INRIA Saclay – Île-de-France : Parc Orsay Université - ZAC des Vignes : 4, rue Jacques Monod - 91893 Orsay Cedex

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399