

## Segmentation en arcs discrets en temps linéaire

Thanh Phuong Nguyen, Isabelle Debled-Rennesson

► **To cite this version:**

Thanh Phuong Nguyen, Isabelle Debled-Rennesson. Segmentation en arcs discrets en temps linéaire. Reconnaissance de formes et Intelligence artificielle, Jan 2010, Caen, France. hal-00437315

**HAL Id: hal-00437315**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00437315>**

Submitted on 30 Nov 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Segmentation en arcs discrets en temps linéaire\*

Thanh Phuong NGUYEN

Isabelle DEBLED-RENNESON

<sup>1</sup> LORIA Nancy

Campus Scientifique - BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France

{nguyentp,debled}@loria.fr

## Résumé

Nous proposons un algorithme linéaire reposant sur une approche de géométrie discrète pour segmenter une courbe en arcs et cercles discrets. Cette méthode utilise une représentation originale des arcs et cercles discrets. En utilisant cette représentation, nous transformons le problème de reconnaissance d'arcs discrets en un problème de reconnaissance de droites discrètes et nous en déduisons un algorithme de segmentation.

## Mots clés

Cercle discret, arc discret, segmentation, segment flou, droite discrète, géométrie discrète.

## 1 Introduction

La reconnaissance de primitives est un sujet important dans l'analyse d'images et la géométrie discrète. C'est la première étape pour la décomposition d'un contour d'images en primitives telles que les droites, les cercles, . . . De très nombreux auteurs se sont intéressés au problème de la reconnaissance de segments de droites discrètes en utilisant différentes approches (cf. [1] pour un état de l'art des différents algorithmes).

La reconnaissance des arcs de cercles et des cercles discrets est aussi un sujet intéressant dans l'analyse d'images et la géométrie discrète mais pour lequel il y a eu moins de travaux que pour les segments de droites. Kim [2, 3] a proposé des résultats sur la détection de disques discrets. Le premier résultat [2] détecte si un ensemble de points dans une image  $N \times N$  est un disque discret en temps  $O(n^3)$ . Le second article [3] améliore la complexité de la méthode proposée à  $O(n^2)$ . En se basant sur le problème classique de séparation des arcs de la géométrie algorithmique, Fisk [4] a aussi proposé un algorithme pour la reconnaissance d'un disque discret en temps  $O(n^2)$ . En utilisant la même approche, Kovalevsky [5] a proposé une méthode pour la reconnaissance d'un cercle discret en temps  $O(n^2 \log n)$ . Coeurjolly [6] a transformé le problème de la reconnaissance d'un cercle en un problème de recherche d'un point 2D qui appartient à l'intersection de  $n^2$  demi-plans. Il a utilisé une étape de prétraitement en utilisant des propriétés

arithmétiques des courbes discrètes afin de réduire la complexité à  $O(n^{4/3} \log n)$ . Sauer [7] a présenté une méthode linéaire pour décider si une courbe discrète est un cercle discret. Pourtant, sa méthode ne permet pas de travailler avec des arcs. Ensuite, Damaschke [8] a présenté un algorithme linéaire pour reconnaître un arc discret en se basant sur une approche de programmation linéaire. Il a montré que ce problème est équivalent à la résolution d'un système de  $n$  inégalités en dimension 3 de complexité linéaire en utilisant l'algorithme de Megiddo [9]. Worring [10] a proposé une méthode de segmentation d'un cercle discret en utilisant un processus de fenêtre de taille fixe. Récemment, Roussillon [11] a proposé un algorithme linéaire pour la reconnaissance des arcs discrets qui respectent une des 3 conditions suivantes : les rayons sont fixés, ou les contours touchent un point fixe, ou bien les centres appartiennent à une droite fixe. Pourtant ces restrictions ne permettent pas à cette méthode de travailler efficacement dans le cas général.

Nous présenterons dans cet article une méthode linéaire pour la reconnaissance d'un cercle discret ou d'un arc discret reposant sur une approche de géométrie discrète. Premièrement, une polygonalisation est appliquée en temps linéaire sur la courbe à analyser. Ensuite, nous utilisons une transformation, proposée par Latecki [12], pour représenter le polygone obtenu dans ce nouvel espace, appelé espace des tangentes. Nous avons démontré qu'une suite de cordes d'un cercle correspond à une suite de points colinéaires dans cet espace. Le problème de la reconnaissance d'un cercle ou d'un arc de cercle peut donc être transformé en un problème de reconnaissance de droite discrète. Comme le processus de discrétisation d'un cercle discret cause des distorsions dans cet espace, nous utilisons l'algorithme de reconnaissance de segment flou [13] pour détecter les segments de droites discrètes dans cet espace.

La section 2 rappelle les définitions de droite discrète et de segment flou. La section suivante présente comment transformer un polygone dans l'espace des tangentes et propose certaines propriétés d'un arc de cercle dans cette représentation. La section 4 propose une méthode linéaire pour reconnaître un arc/cercle discret. La section 5 considère l'erreur d'approximation effectuée par cette méthode. Enfin l'algorithme de segmentation et des expérimentations sont présentés dans la section 6.

\*Ce travail est parrainé par l'ANR dans le cadre du projet GEODIB, ANR-FI-071215-01-01

## 2 Cercle discret et segment flou

### 2.1 Cercle discret

Nous présentons ci-dessous une définition formelle d'un cercle discret (d'autres définitions de cercle discret figurent dans [14]).

**Définition 1** Un cercle discret  $\mathbb{C}(O, R, \omega)$  de centre  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , de rayon  $R \in \mathbb{R}^+$  et d'épaisseur arithmétique  $\omega \in \mathbb{R}^+$ , est l'ensemble des points de  $\mathbb{Z}^2$  déterminé par

$$\mathbb{C}(O, R, \omega) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (R - \frac{\omega}{2})^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < (R + \frac{\omega}{2})^2\}$$

**Définition 2** Un cercle discret  $\mathbb{C}(O, R, \omega)$  est dit **régulier** si  $\omega = 1$ .

### 2.2 Droite discrète et segment flou

Nous rappelons ci-après quelques notions concernant les droites discrètes [15] et les segments flous [13] que nous utilisons dans la suite de cet article.

**Définition 3** Une **droite discrète**  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$ , de vecteur directeur  $(b, a)$ , de borne inférieure  $\mu$  et d'épaisseur  $\omega$  (avec  $a, b, \mu$  et  $\omega$  des nombres entiers tels que  $\gcd(a, b) = 1$ ) est l'ensemble des points entiers  $(x, y)$  vérifiant  $\mu \leq ax - by < \mu + \omega$ .

Pour des simplifications d'écriture, nous supposons par la suite que  $0 < a < b$ .

Considérons  $\mathcal{S}_f$  une suite de points entiers.

**Définition 4** Une droite discrète  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  est dite **englobante** pour  $\mathcal{S}_f$  si tous les points de  $\mathcal{S}_f$  appartiennent à  $\mathcal{D}$ .

**Définition 5** Une droite englobante  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  de  $\mathcal{S}_f$  est dite **optimale** si son épaisseur verticale est minimale. L'épaisseur verticale minimale d'une droite englobante correspond à l'épaisseur verticale de l'enveloppe convexe de  $\mathcal{S}_f$ . L'épaisseur verticale de  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  est définie par l'équation suivante :  $\frac{\omega-1}{b}$  et l'épaisseur horizontale par :  $\frac{\omega-1}{a}$ .

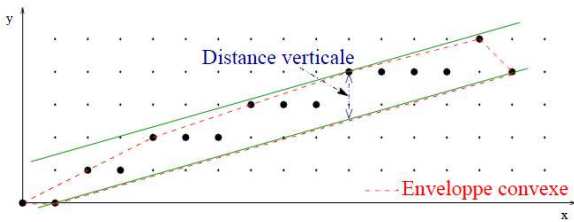


FIG. 1 –  $\mathcal{D}(2, 7, -8, 11)$ , la droite englobante optimale de la suite de points (distance verticale =  $\frac{10}{7} = 1,42$ )

Cette définition est illustrée dans la figure 1 et conduit à la définition des segments flous.

**Définition 6** Une suite de points entiers  $\mathcal{S}_f$  est appelée **segment flou d'épaisseur  $\nu$**  si et seulement si sa droite englobante a une épaisseur verticale inférieure ou égale à  $\nu$ .

Un algorithme linéaire et incrémental a été proposé dans [13] pour reconnaître si une suite de points est un segment flou d'épaisseur fixée. De plus, cet algorithme fournit les caractéristiques de la droite englobante optimale de cette suite de points. D'une part, il repose sur le calcul incrémental et linéaire de l'enveloppe convexe du segment parcouru. D'autre part, il utilise les propriétés arithmétiques et géométriques des droites discrètes. La figure 1 représente l'ensemble de points reconnu comme un segment flou d'épaisseur 2 et  $\mathcal{D}(2, 7, -8, 11)$  est sa droite englobante optimale.

Cet algorithme est utilisé dans notre méthode pour reconnaître les segments flous dans l'espace des tangentes où un arc de cercle peut y être perçu comme un ensemble de points linéaire (cf. section suivante).

## 3 Représentation des arcs dans l'espace des tangentes

Latecki [12] a proposé une représentation de l'espace des tangentes comme outil de mesure de similarité pour la reconnaissance des formes. En s'inspirant de ce travail, nous proposons une représentation modifiée de l'espace des tangentes afin de représenter un polygone. La différence entre les 2 représentations est que nous ne normalisons pas sur l'axe Ox. Nous allons montrer dans la prochaine section qu'un arc ou un cercle possèdent des propriétés importantes dans notre représentation modifiée de l'espace des tangentes. Pour une meilleure compréhension, nous rappelons dans cette section les notions relatives à la construction de l'espace des tangentes d'un polygone.

### 3.1 Représentation modifiée de l'espace des tangentes

Supposons que  $C = \{C_i\}_{i=0}^n$  est une courbe polygonale avec  $\alpha_i = \angle(\overrightarrow{C_{i-1}C_i}, \overrightarrow{C_iC_{i+1}})$  et  $l_i$  la longueur du segment  $C_iC_{i+1}$ . Nous avons  $\alpha_i > 0$  si  $C_{i+1}$  est à droite de  $\overrightarrow{C_{i-1}C_i}$ ,  $\alpha_i < 0$  sinon.

On considère la transformation qui associe au polygone  $C$  de  $\mathbb{Z}^2$  le polygone de  $\mathbb{R}^2$  formé des segments  $T_{i2}T_{(i+1)1}, T_{(i+1)1}T_{(i+1)2}$  pour  $i$  de 0 à  $n-1$  avec  $T_{02} = (0, 0)$ ,

$$T_{i1} = (T_{(i-1)2}.x + l_{i-1}, T_{(i-1)2}.y), \text{ pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n,$$

$$T_{i2} = (T_{i1}.x, T_{i1}.y + \alpha_i), \text{ pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n-1.$$

La figure 2 montre comment transférer une courbe polygonale vers sa représentation dans l'espace des tangentes.

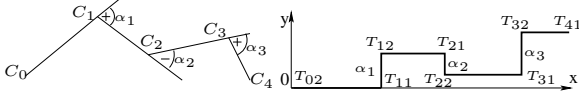


FIG. 2 – De gauche à droite : a. Courbe polygonale donnée en entrée, b. Représentation de cette courbe polygonale dans l'espace des tangentes.

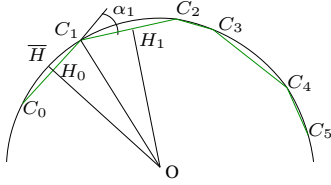


FIG. 3 –

### 3.2 Propriétés d'un arc dans la représentation modifiée de l'espace des tangentes

Les théorèmes ci-dessous permettent d'exhiber les propriétés de la représentation d'un polygone correspondant à un arc de cercle dans l'espace modifié des tangentes.

**Théorème 1** *Supposons que  $C = \{C_i\}_{i=0}^n$  est un polygone,  $\alpha_i = \angle(C_{i-1}C_i, C_iC_{i+1})$  et tel que  $\sin \alpha_i \simeq \alpha_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . La longueur de  $C_iC_{i+1}$  est  $l_i$ , pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Alors,  $C$  est un polygone qui approxime un cercle ou un arc de cercle si et seulement si la séquence d'équations ci-dessous est satisfaite.*

$$\frac{l_1 + l_2}{\alpha_1} \simeq \frac{l_2 + l_3}{\alpha_2} \simeq \dots \simeq \frac{l_{n-1} + l_n}{\alpha_{n-1}}$$

**Preuve :** Considérons la figure 3.

- ① **Supposons que  $C$  est un polygone qui approxime un arc de cercle.**

Soient  $H_0, H_1$  les projections orthogonales du centre  $O$  respectivement sur les segments  $C_0C_1$  et  $C_1C_2$  (cf. Fig. 3). Alors, nous avons :  $\alpha_1 = \angle H_0OC_1 + \angle C_1OH_1$ . D'autre part,  $\sin(\angle H_0OC_1) = \frac{l_0}{2R}$ ,  $\angle C_1OH_1 = \sin(\angle C_1OH_1) = \frac{l_1}{2R}$ . Alors, comme :  $\alpha_1 = \angle H_0OC_1 + \angle C_1OH_1 \simeq \frac{l_0 + l_1}{2R}$ , nous en déduisons  $2R \simeq \frac{l_0 + l_1}{\alpha_1}$ . En considérant les segments successifs de  $C$ , l'implication est prouvée.

- ② **Si  $\frac{l_1 + l_2}{\alpha_1} \simeq \frac{l_2 + l_3}{\alpha_2} \simeq \dots \simeq \frac{l_{n-1} + l_n}{\alpha_{n-1}}$  est satisfait.**

On considère  $O_1$  (respectivement  $O_2$ ) l'intersection entre 2 lignes bissectrices de  $C_0C_1$  et  $C_1C_2$  (respectivement  $C_1C_2$  et  $C_2C_3$ ). En utilisant l'hypothèse ci-dessus, nous avons  $2 * O_1C_2 = \frac{l_0 + l_1}{\sin \alpha_1}$ . Similairement,  $2 * O_2C_2 = \frac{l_1 + l_2}{\sin \alpha_2}$ . Donc, nous avons  $O_1C_2 \simeq O_2C_2$ . Alors,  $O_1 \equiv O_2$ . Nous en déduisons donc que  $C$  est un polygone dont les sommets sont sur un arc de cercle.

**Théorème 2** *Supposons que  $C$  est une courbe polygonale. On considère le polygone  $T(C)$ , correspondant à sa représentation dans l'espace modifié des tangentes, constitué des segments  $T_{i2}T_{(i+1)1}, T_{(i+1)1}T_{(i+1)2}$  pour  $i$  de 0 à  $n-1$ .  $\{M_i\}_{i=1}^{n-1}$  est l'ensemble des points centraux de  $\{T_{i2}T_{(i+1)1}\}_{i=1}^{n-1}$ . Alors  $\frac{l_1 + l_2}{\alpha_1} = \frac{l_2 + l_3}{\alpha_2} = \dots = \frac{l_{n-1} + l_n}{\alpha_{n-1}}$  si et seulement si  $\{M_i\}_{i=0}^{n-1}$  est un ensemble de points colinéaires.*

**Preuve :** Considérons la figure 4. Soit  $I = \{I_i\}_{i=1}^{n-1}$  avec  $I_i$  l'intersection entre  $T_{(i-1)2}T_{(i+1)1}$  et  $T_{i1}T_{i2}$ .

Par le théorème de Thalès nous avons :  $\frac{T_{(i-1)2}T_{i1}}{T_{i2}T_{(i+1)1}} = \frac{T_{i1}I_i}{I_iT_{i2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}T_{(i-1)2}T_{i1}}{\frac{1}{2}T_{i2}T_{(i+1)1}} = \frac{T_{i1}I_i}{I_iT_{i2}} \Leftrightarrow \frac{M_{i-1}T_{i1}}{T_{i2}M_i} = \frac{T_{i1}I_i}{I_iT_{i2}}$$

De plus (théorème de Thalès),  $M_{i-1}M_i$  passe par  $I_i$  pour tout  $i$  de 1 à  $n-1$  (\*)

D'autre part, nous avons :  $\frac{T_{(i-1)2}T_{i1}}{T_{i2}T_{(i+1)1}} = \frac{T_{i1}I_i}{I_iT_{i2}} \Leftrightarrow \frac{l_i}{l_{i+1}} =$

$$\frac{T_{i1}I_i}{I_iT_{i2}} \Leftrightarrow \frac{l_i + l_{i+1}}{T_{i2}T_{(i+1)1}} = \frac{T_{i1}I_i + I_iT_{i2}}{I_iT_{i2}} \Leftrightarrow \frac{l_i + l_{i+1}}{T_{i2}T_{(i+1)1}} = \frac{\alpha_i}{I_iT_{i2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_i + l_{i+1}}{\alpha_i} = \frac{T_{i2}T_{(i+1)1}}{I_iT_{i2}} \forall i \in \{1, \dots, n-1\} (**)$$

- ① **Si cette condition  $\frac{l_1 + l_2}{\alpha_1} = \frac{l_2 + l_3}{\alpha_2} = \dots = \frac{l_{n-1} + l_n}{\alpha_{n-1}}$  est satisfaite.**

Grâce à (\*\*), nous avons :  $\frac{T_{12}T_{21}}{I_1T_{12}} = \dots = \frac{T_{i2}T_{(i+1)1}}{I_iT_{i2}} = \dots = \frac{T_{(n-1)2}T_{n1}}{I_{(n-1)2}T_{(n-1)1}}$  Les triangles rectangles suivants sont donc semblables :

$\Delta T_{12}T_{21}I_1, \dots, \Delta T_{i2}T_{(i+1)1}I_i, \dots, \Delta T_{(n-1)2}T_{n1}I_{(n-1)}$ . Par conséquent :

$$- \frac{T_{12}T_{21}}{I_1T_{21}} = \dots = \frac{T_{i2}T_{(i+1)1}}{I_iT_{(i+1)1}} = \dots = \frac{T_{(n-1)2}T_{n1}}{I_{(n-1)2}T_{n1}}$$

$$- \angle T_{12}T_{21}I_1 = \dots = \angle T_{i2}T_{(i+1)1}I_i = \dots = \angle T_{(n-1)2}T_{n1}I_{n-1}$$

Alors, ces triangles ci-dessous sont semblables :

$\Delta T_{12}T_{21}I_1, \dots, \Delta T_{i2}T_{(i+1)1}I_i, \dots, \Delta T_{(n-1)2}T_{n1}I_{n-1}$

en raison de la définition de point central de  $M_i, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Alors, nous avons :  $\angle I_1M_1T_{21} = \dots = \angle I_iM_iT_{(i+1)1} = \dots = \angle I_{n-1}M_{n-1}T_{n1}$ . Donc, grâce à (\*), et théorème de Thalès,  $\{M_i\}_1^{n-1}$  est un ensemble des points colinéaires.

- ② **Si  $M = \{M_i\}_{i=1}^{n-1}$  est un ensemble des points colinéaires.**

Grâce à (\*),  $M = \{M_i\}_{i=1}^{n-1}$  et  $I = \{I_i\}_{i=1}^{n-1}$  est un ensemble des points colinéaires.

$\Rightarrow$  En appliquant le théorème de Thalès, nous avons :

$$\angle T_{12}M_1I_1 = \dots = \angle T_{i2}M_iI_i = \dots = \angle T_{(n-1)2}M_{n-1}I_{n-1}$$

$\Rightarrow$  Ces triangles rectangulaires sont semblables :

$$\Delta T_{12}M_1I_1, \dots, \Delta T_{i2}M_iI_i, \dots, \Delta T_{(n-1)2}M_{n-1}I_{n-1}$$

$\Rightarrow$  Nous avons :  $\frac{T_{12}M_1}{T_{12}I_1} = \dots = \frac{T_{i2}M_i}{T_{i2}I_i} = \dots = \frac{T_{(n-1)2}M_{n-1}}{T_{(n-1)2}I_{n-1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{T_{12}T_{21}}{I_1T_{12}} = \dots = \frac{T_{i2}T_{(i+1)1}}{I_iT_{i2}} = \dots = \frac{T_{(n-1)2}T_{n1}}{I_{(n-1)2}T_{(n-1)1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_1 + l_2}{\alpha_1} = \frac{l_2 + l_3}{\alpha_2} = \dots = \frac{l_{n-1} + l_n}{\alpha_{n-1}}$$

Grâce aux théorèmes 1 et 2, nous en déduisons le théorème 3 ci-dessous.

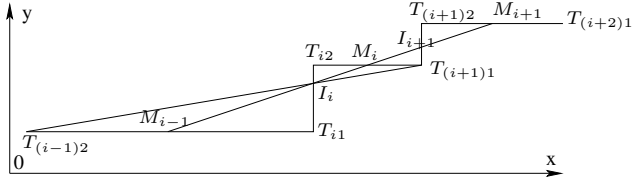


FIG. 4 – Représentation d'un polygone dans l'espace modifié des tangentes (voir le théorème 3).

**Théorème 3** *Supposons que  $C = \{C_i\}_{i=0}^n$  est un polygone,  $\alpha_i = \angle(\overrightarrow{C_{i-1}C_i}, \overrightarrow{C_iC_{i+1}})$  tel que  $\sin \alpha_i \simeq \alpha_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . On considère le polygone  $T(C)$ , correspondant à sa représentation dans l'espace modifié des tangentes, constitué des segments  $T_{i2}T_{(i+1)1}, T_{(i+1)1}T_{(i+1)2}$  pour  $i$  de 0 à  $n-1$ .  $\{M_i\}_{i=0}^{n-1}$  est un ensemble des points centraux de  $\{T_{i2}T_{(i+1)1}\}_{i=1}^{n-1}$ . Alors,  $C$  est un polygone qui approxime un cercle ou un arc de cercle si et seulement si  $\{M_i\}_{i=0}^{n-1}$  est un ensemble des points colinéaires.*

Nous utilisons ce théorème afin de reconnaître un cercle ou un arc de cercle discret en appliquant dans l'espace modifié des tangentes l'algorithme de reconnaissance de segments flous évoqué dans la section 2.2. Dans la section 4, nous proposons une méthode linéaire, issue de ce cadre théorique, pour la reconnaissance d'un cercle ou un arc de cercle discret.

## 4 Reconnaissance d'arcs/cercles

### 4.1 Algorithme proposé

L'idée principale est de travailler sur la représentation de la courbe discrète à analyser dans l'espace modifié des tangentes. Dans cette représentation, l'ensemble des points centraux  $M = \{M_i\}_{i=1}^{n-1}$  (voir la section 3) sera construit. Ensuite, nous utilisons une procédure linéaire ([13]) pour tester la colinéarité de ces points. Si la réponse est positive, la courbe polygonale d'entrée est un arc discret. Afin de pouvoir reconnaître des cercles discrets, nous remarquons que  $\sum_1^n \alpha_i$  est la somme des angles au centre de ce cercle qui correspondent aux segments du polygone approximé. Par conséquent, un arc discret est un cercle si et seulement si  $\sum_1^n \alpha_i = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Nous allons utiliser cette propriété pour vérifier si un arc discret est un cercle discret ou non.

En reliant les points d'une courbe discrète, nous obtenons un polygone. Cependant nous ne pouvons pas appliquer directement sur ce polygone les résultats de la section 3 car le changement d'angle d'un point au point suivant est toujours un multiple de  $\frac{\pi}{4}$  et parfois, ce changement ( $\frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{4}$ ) est trop grand et les hypothèses du théorème 1 ne sont plus respectées (l'approximation  $\sin x \simeq x$  n'est pas valable). Donc, afin d'éviter cet inconvénient, une étape de prétraitement est nécessaire avant la transformation vers la représentation dans l'espace des tangentes. D'abord, nous

faisons une polygonalisation de la courbe donnée en entrée. Ensuite, en appliquant les résultats de la section 3, nous allons vérifier si ce polygone est l'approximation de l'ensemble des cordes consécutives d'un cercle discret.

Le paramètre  $\alpha$  donné en entrée de l'algorithme permet de gérer l'erreur d'approximation effectuée en considérant que  $\sin \alpha_i \simeq \alpha_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  (cf. la section suivante où nous étudions les erreurs d'approximation effectuées). Le paramètre  $\nu$  est utilisé comme l'épaisseur dans l'algorithme de reconnaissance d'un segment flou [13] pour vérifier la colinéarité des points centraux dans la représentation de l'espace des tangentes. Nous remarquons que la représentation d'un arc ou d'un cercle dans l'espace des tangentes se trouve toujours dans une zone dont les ordonnées varient entre 0 et  $2\pi$  (c'est toujours  $2\pi$  pour une courbe fermée). Donc, le paramètre  $\nu$  doit être assez petit par rapport à  $2\pi$ . En pratique, nous choisissons  $\nu$  entre 0.2 et 0.5.

La méthode proposée proposée pour reconnaître un arc ou un cercle discret est décrite dans l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1** : *RECONNAISSANCE\_ARC* : Reconnaissance des arcs/cercles discrets

---

**Données** :  $C = \{C_i\}_{i=0}^n$  courbe discrète,  $\alpha$  l'angle maximal admis dans l'espace des tangentes,  $\nu$  l'épaisseur de reconnaissance des segments flous.

**Résultat** : ARC si  $C$  est un arc discret, CERCLE si  $C$  est un cercle discret, NON sinon.

**début**

Utiliser l'algorithme [13] pour faire la polygonalisation de  $C$  :  $P = \{P_i\}_{i=0}^m$ ;  
 Représenter  $P$  dans l'espace modifié des tangentes par  $T(P)$  (cf. section 3.1);  
**si** il existe  $i$  tel que  $T_{i2}.y - T_{i1}.y > \alpha$  **alors**  
 | retourner NON;  
 Déterminer l'ensemble des points centraux  
 $I = \{M_i\}_{i=1}^{n-1}$  de  $\{T_{i2}T_{(i+1)1}\}_{i=1}^{n-1}$ ;  
 Utiliser la méthode [13] pour vérifier si  $I$  est un segment flou d'épaisseur  $\nu$ ;  
**si**  $I$  est un segment flou d'épaisseur  $\nu$  **alors**  
 | **si**  $T_{m1} \simeq 2 * \pi$  **alors** retourner CIRCLE;  
 | **sinon** retourner ARC;  
**sinon**  
 | retourner NON;

**fin**

---

### 4.2 Complexité

Les algorithmes de polygonalisation et de reconnaissance de segments flous sont linéaires [13]. La complexité pour transformer un polygone vers sa représentation dans l'espace modifié des tangentes est en  $O(m)$  et la construction de l'ensemble des points centraux  $M = \{M_i\}_{i=1}^{m-1}$  est en  $O(m)$ . Puisque  $m \ll n$ , la complexité totale de notre méthode de reconnaissance est donc  $O(n)$ .

## 5 Approximation de l'erreur

Supposons que  $\alpha = \max\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ . Deux étapes dans la méthode que nous proposons (cf. algorithme 1) peuvent engendrer des erreurs d'approximation. Nous devons donc déterminer les bornes maximales sur les erreurs effectuées. La première source d'erreur d'approximation vient de l'hypothèse  $\sin \alpha_i \simeq \alpha_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  dans le théorème 3. La deuxième source d'erreur d'approximation provient de l'épaisseur fixée dans l'utilisation de l'algorithme de reconnaissance de segment flou pour extraire un ensemble des points colinéaires dans la représentation de l'espace des tangentes.

### 5.1 Approximation d'un ensemble de cordes par une droite dans l'espace des tangentes

Après la transformation du polygone  $P$  dans l'espace des tangentes, supposons que l'ensemble des points centraux  $\{M_i\}_{i=0}^{n-1}$ , issu de  $T(P)$ , est un ensemble de points colinéaires. Grâce au théorème 2, nous avons :  $\frac{l_1+l_2}{\alpha_1} = \frac{l_2+l_3}{\alpha_2} = \dots = \frac{l_{n-1}+l_n}{\alpha_{n-1}} = K$  Posons  $K = 2 * \bar{R}$ , on peut alors considérer  $\bar{R}$  comme le rayon du cercle approximé. Supposons que  $R_i$  est le rayon du cercle passant par les 3 points  $C_{i-1}, C_i, C_{i+1}$ ;  $\alpha_{i1} = \angle H_{i-1}OC_i$ ,  $\alpha_{i2} = \angle H_iOC_i$  (voir la figure 3). Les différences entre  $R_i, i \in \{1, \dots, n-1\}$  et  $\bar{R}$  causent une erreur d'approximation. Nous introduisons alors une borne d'erreur à cette étape.

**Définition 7** La borne d'erreur lorsque nous utilisons le théorème 3 pour vérifier si un polygone est un ensemble de cordes d'un cercle est définie comme suit

$$EB = \left| \frac{\bar{R} - \max\{R_i\}_{i=1}^n}{\bar{R}} \right|$$

Nous avons :  $l_i + l_{i+1} = 2\bar{R} * \alpha_i = 2\bar{R} * (\alpha_{i1} + \alpha_{i2}) = 2R_i * (\sin \alpha_{i1} + \sin \alpha_{i2})$ . Alors,  $\frac{\bar{R}}{R_i} = \frac{\sin \alpha_{i1} + \sin \alpha_{i2}}{\alpha_i} > \frac{\sin(\alpha_{i1} + \alpha_{i2})}{\alpha_i} = \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i}$ . Grâce à la propriété décroissante de la fonction  $\frac{\sin x}{x}$ , nous avons  $\frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \geq \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ . Donc,

$$EB < 1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

La figure 5 présente la majoration de l'erreur quand  $\alpha$  varie entre 0 et  $\frac{\pi}{4}$ . En pratique nous choisissons  $\frac{\pi}{4}$  comme la valeur seuil de  $\alpha$  pour assurer la circularité des arcs et des cercles que nous segmentons avec notre algorithme. Dans cette condition, nous obtenons une majoration de l'erreur qui est inférieure à 0.1 (voir figure 5).

### 5.2 Test de colinéarité par l'algorithme de reconnaissance de segments flous à une épaisseur $\nu$

Considérons la figure 6. L'ensemble des points centraux  $\{M_i\}_{i=0}^{n-1}$  est reconnu comme un segment flou d'épaisseur  $\nu$  et sa droite englobante optimale est  $D(a, b, \mu, \omega)$ .

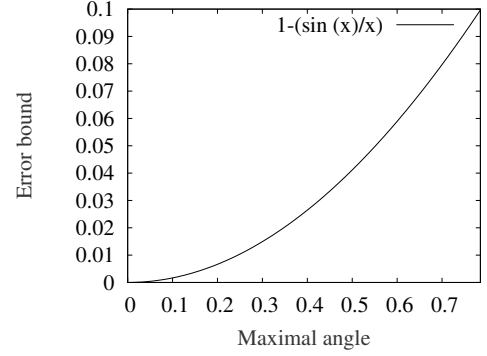


FIG. 5 – Erreur d'approximation quand l'angle maximal varie de 0 à  $\pi/4$

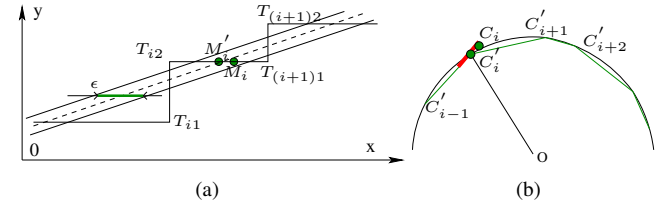


FIG. 6 – Erreur d'approximation lorsqu'on utilise l'algorithme de reconnaissance de segments flous [13] pour tester la colinéarité de l'ensemble des points centraux dans l'espace des tangentes.

Comme l'épaisseur horizontale de ce segment flou  $\epsilon$  est égale à  $\frac{\omega-1}{a}$  et que l'épaisseur verticale est égale à  $\frac{\omega-1}{b}$  et est inférieure ou égale à  $\nu$  alors, nous avons la relation  $\epsilon \leq \frac{b}{a}\nu$ . Supposons que la droite réelle centrale de ce segment flou contient l'ensemble des points  $\{M'_i\}_{i=0}^{n-1}$  tel que  $M'_i.y = M_i.y$  (voir la figure 6.a). Cet ensemble correspond à la suite de points  $\{C'_i\}_{i=0}^n$  sur un cercle réel. Grâce à la règle de transformation vers l'espace des tangentes, nous avons  $C'_iC_i = M'_iM_i$  (voir aussi la figure 6.a et 6.b). Parce que  $M_i, \forall i \in \{0, \dots, n\}$  appartient à ce segment flou dont l'épaisseur horizontale est  $\epsilon$ , donc  $C'_iC_i = M'_iM_i \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Donc, nous avons  $OC'_i - C'_iC_i < OC_i < OC'_i + C'_iC_i \Leftrightarrow R - \frac{\epsilon}{2} < OC_i < R + \frac{\epsilon}{2}$ . C'est à dire que l'ensemble des extrémités des cordes  $\{C'_i\}_{i=0}^n$  appartient à un cercle discret  $\mathbb{C}(O, R, \epsilon)$ .

Nous obtenons donc le résultat suivant.

**Théorème 4** Si les points centraux dans l'espace des tangentes forment un segment flou d'épaisseur  $\nu$  [13], avec  $D(a, b, \nu, \omega)$  comme droite discrète englobante alors, le cercle discret reconnu est  $\mathbb{C}(O, R, \frac{b}{a}\nu)$ .

## 6 Segmentation et expérimentations

### 6.1 Segmentation

**Algorithme.** Nous obtenons une méthode de segmentation en arcs discrets, utilisant le principe de l'algorithme 1, en appliquant une segmentation en segments flous

d'épaisseur  $\nu$  [13] sur la courbe des points centraux dans l'espace des tangentes. Cette méthode est présentée dans l'algorithme 2.

**Algorithme 2** : Segmentation d'une courbe en arcs discrets reposant sur l'algorithme 1

**Données** :  $C = \{C_i\}_{i=0}^n$  courbe discrète,  $\alpha$  l'angle maximal admis dans l'espace des tangentes,  $\nu$  l'épaisseur de reconnaissance des segments flous.

**Résultat** : ARC- séquence des arcs

**début**

```

ARC = ∅;
Utiliser l'algorithme [13] pour faire la
polygonalisation de C en segments flous d'épaisseur
1 : P = {P}_i=0^m;
Représenter P dans l'espace modifié des tangentes par
T(P) (cf. section 3.1);
Déterminer l'ensemble des points centraux
M = {M}_i=1^n (cf. section 3.1);
Utiliser l'algorithme [13] pour faire la
polygonalisation de M en segments flous d'épaisseur
ν : S = {S}_i=0^k;
pour i=0 à k-1 faire
    {M_b, ..., M_e} : suite de points de M qui
    correspond à S_i S_{i+1};
    C' : partie de la courbe C qui correspond à
    S_i S_{i+1};
    isArc = VRAI;
    pour i=b à e-1 faire
        si M_{i+1}.y - M_i.y > α alors
            | isArc = FAUX
        si isArc == VRAI alors
            | Ajouter C' à ARC

```

**fin**

**Complexité.** La polygonalisation en segments flous est effectuée en temps linéaire. La phase de test des arcs est aussi réalisée en temps linéaire car chaque point  $M_i$  de l'ensemble  $M$  est visité une fois en temps constant. La complexité de cette méthode est donc linéaire.

## 7 Expérimentations

### 7.1 Résultats expérimentaux

Nous avons programmé cette méthode linéaire de segmentation en arcs discrets et en cercles discrets. La figure 7 présente un exemple de segmentation en arcs. Dans un premier temps, le polygone approximé (voir la figure 7.b) est construit à partir de la courbe donnée en entrée à la figure 7.a. Puis, nous le transformons pour obtenir sa représentation dans l'espace des tangentes (voir la figure 7.d). Puis, la figure 7.e présente la courbe des points centraux obtenus dans l'espace des tangentes. La figure 7.c montre les arcs extraits en vérifiant la colinéarité des points

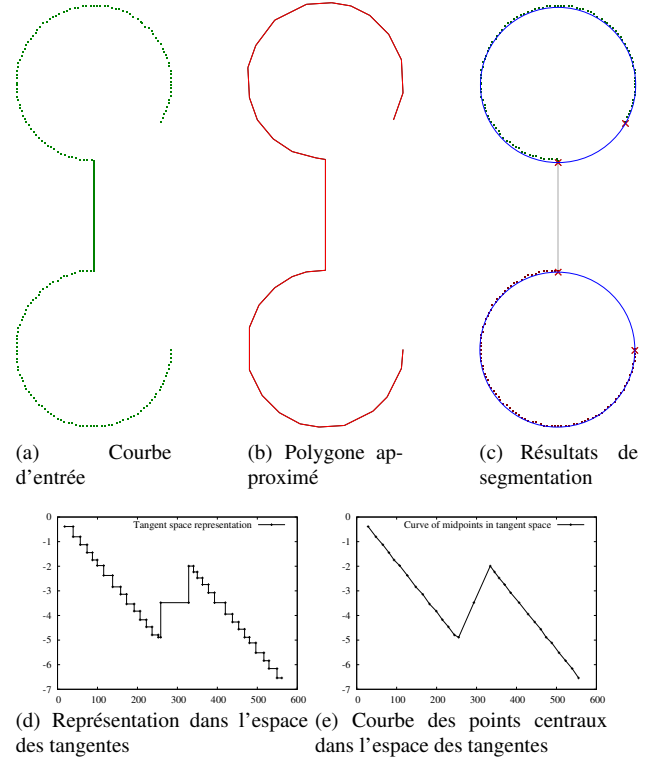


FIG. 7 – Résultats de segmentation en arcs sur une courbe discrète

centraux dans cet espace. Afin d'obtenir une méthode robuste, nous appliquons la méthode de reconnaissance des segments flous [13] pour vérifier si l'ensemble des points est colinéaire.

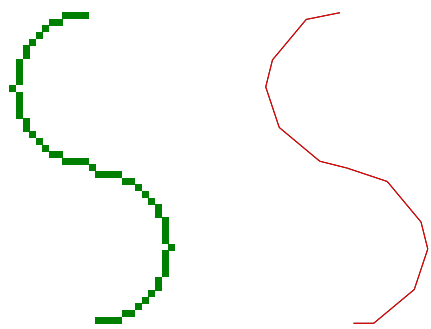
La figure 8 montre les arcs que nous détectons en comparaison avec la méthode de Coeurjolly. La figure 8.d montre le résultat de la segmentation qui est obtenue avec la méthode de Coeurjolly. Notre méthode fournit une qualité de segmentation équivalente à celle obtenue avec la méthode de Coeurjolly.

De plus, la figure 9 présente le résultat obtenu par notre méthode sur une partie d'ellipse en comparaison avec le résultat obtenu par celle de Roussillon [11] qui utilise un rayon fixé comme paramètre. Elle montre que notre méthode peut segmenter une courbe discrète en arcs significatifs dont les rayons sont détectés automatiquement au lieu de plusieurs arcs de rayon fixé [11]. Donc, notre méthode est aussi robuste au niveau de la qualité de segmentation.

### 7.2 Comparaison avec d'autres méthodes

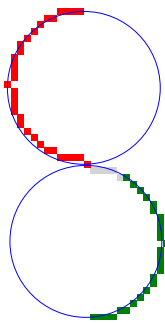
Grâce à la complexité linéaire, notre méthode est plus efficace que plusieurs méthodes de reconnaissance d'arcs et de cercles telles que la méthode de Kovalevsky [5] (en temps  $O(n^2 \log n)$  ou celle de Coeurjolly [6] (en temps  $O(n^{4/3} \log n)$ ). Récemment, Roussillon [11] a proposé une méthode linéaire pour la segmentation en cercles dans un contexte de 3 sous-problèmes (voir section 1). Ces



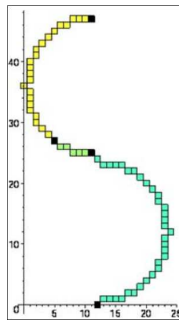


(a) Courbe en entrée

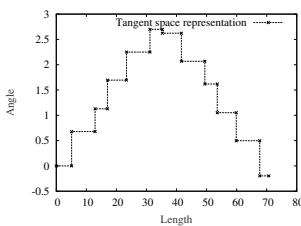
(b) Polygone approximé



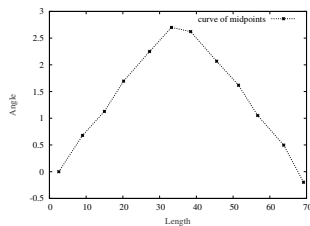
(c) Résultat de la segmentation avec notre méthode



(d) Résultat de la segmentation avec la méthode de Coeurjolly [6]

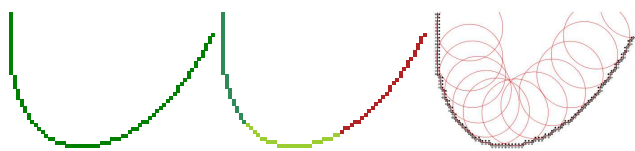


(e) Représentation dans l'espace des tangentes



(f) Courbe des points centraux dans l'espace des tangentes

FIG. 8 – Segmentation en arcs discrets d'une courbe issue du travail de Coeurjolly [6].



(a) Courbe en entrée

(b) Résultat de la segmentation avec notre méthode

(c) Résultat de la segmentation avec la méthode de Rousillon [11] avec rayon fixé  $r=10$

FIG. 9 – Segmentation en arcs discrets sur une partie d'ellipse issue du travail de Rousillon [11].

contraintes ne mènent pas à une méthode efficace dans le cas général par rapport à la nôtre. Dans la littérature, il y a seulement 2 méthodes linéaires pour la reconnaissance d'arcs/cercles. Ce sont la méthode de Sauer [7] et celle de Damaschke [8]. Pourtant, ils ont utilisé des outils sophistiqués de programmation linéaire [9] et d'autre part, la méthode de Sauer ne peut pas travailler avec des arcs.

### 7.3 Application aux images de document technique

Nous avons testé notre méthode sur les contours des objets qui sont extraits à partir des images réelles. La figure 10 présente quelques images dont les contours seront extraits. Nous appliquons cette méthode sur ces contours pour détecter des arcs. La figure 11 présente les arcs extraits qui sont obtenus en utilisant notre méthode.

La figure 12 montre une expérimentation sur des images de document technique qui sont utilisées dans une compétition de segmentation en arcs [16]. Les figures 12.a, 12.d, 12.g sont les images données en entrée. Les figures 12.c, 12.f, 12.i présentent les arcs extraits sur les contours qui sont présentés dans les figures 12.b, 12.e, 12.h. Notre méthode donne de bons résultats sur ce type d'images qui contiennent souvent des primitives de l'arc et de cercle.

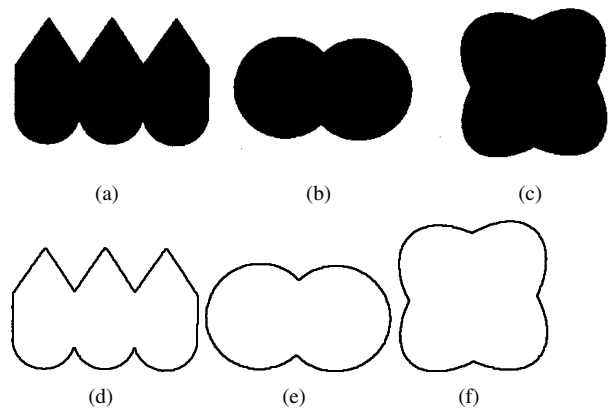


FIG. 10 – a,b,c : Les images d'entrée ; d,e,f : Leur contours extraits

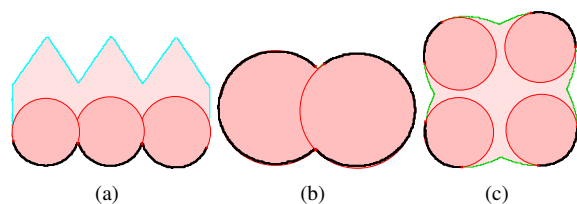


FIG. 11 – Résultats extraits sur les images dans la figure 10

## 8 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une méthode linéaire de reconnaissance d'arcs discrets, et de cercles discrets à partir de laquelle nous avons déduit un algorithme



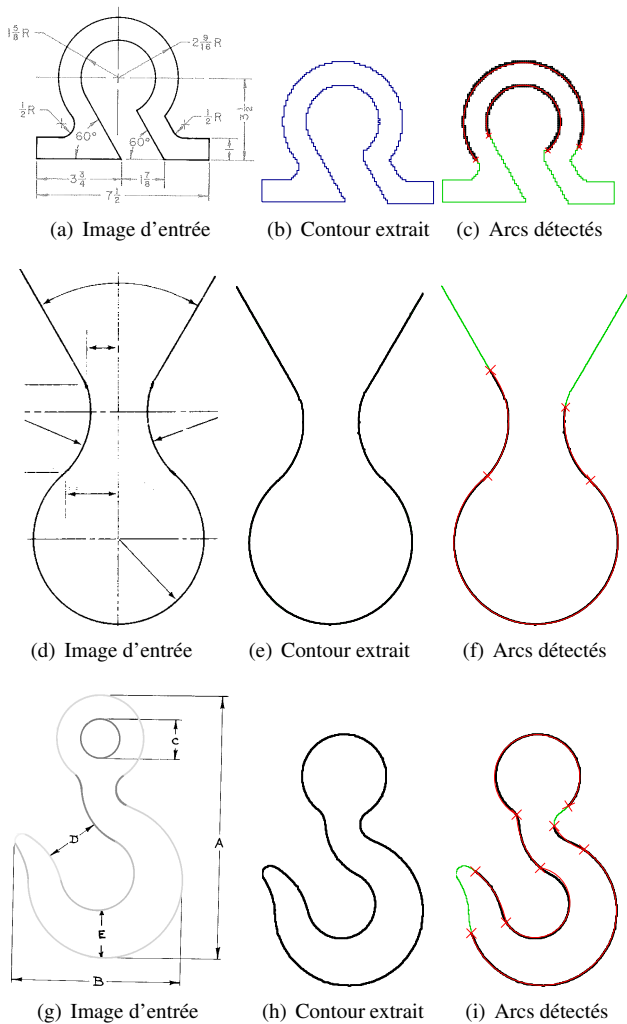


FIG. 12 – Expérimentation sur les images de document technique [16]. Les arcs extraits sont présentés dans des zones épaisses.

de segmentation de courbes discrètes en arcs et cercles discrets. Cette méthode repose sur une approche de géométrie discrète. Elle est simple, facile et robuste à implémenter. Grâce à sa complexité linéaire, elle est plus efficace que les méthodes récentes [5, 6, 11] de segmentation en arcs, et cercles de géométrie discrète. Nous souhaitons utiliser cette méthode pour l'extraction d'arcs de cercles dans des images de documents techniques.

## Remerciements

Nous tenons à remercier Eric Domenjoud pour ses précieux commentaires.

## Références

[1] Klette, R., Rosenfeld, A. : Digital straightness - a review. *Discrete Applied Mathematics* **139** (2004) 197–230

[2] Kim, C.E. : Digital disks. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on PAMI-6* (1984) 372–374

[3] Kim, C.E., Anderson, T.A. : Digital disks and a digital compactness measure. (1984) 117–124

[4] Fisk, S. : Separating point sets by circles, and the recognition of digital disks. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on PAMI-8* (1986) 554–556

[5] Kovalevsky, V. : New definition and fast recognition of digital straight segments and arcs. *Pattern Recognition, 1990. Proceedings., 10th International Conference on ii* (1990) 31–34 vol.2

[6] Coeurjolly, D., Gérard, Y., Reveillès, J.P., Tougne, L. : An elementary algorithm for digital arc segmentation. *Discrete Applied Mathematics* **139** (2004) 31–50

[7] Sauer, P. : On the recognition of digital circles in linear time. *Comput. Geom. Theory Appl.* **2** (1993) 287–302

[8] Damaschke, P. : The linear time recognition of digital arcs. *Pattern Recognition Letters* **16** (1995) 543–548

[9] Megiddo, N. : Linear programming in linear time when the dimension is fixed. *J. ACM* **31** (1984) 114–127

[10] Worring, M., Smeulders, A. : Digitized circular arcs : characterization and parameter estimation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on* **17** (1995) 587–598

[11] Roussillon, T., Sivignon, I., Tougne, L. : On-line recognition of digital circular arcs. In : *15-th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*. LNCS, Springer (2009) <http://liris.cnrs.fr/publis/?id=4167>.

[12] Latecki, L., Lakamper, R. : Shape similarity measure based on correspondence of visual parts. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on* **22** (2000) 1185–1190

[13] Debled-Rennesson, I., Feschet, F., Rouyer-Degli, J. : Optimal blurred segments decomposition of noisy shapes in linear time. *Computers & Graphics* **30** (2006)

[14] Fiorio, C., Jamet, D., Toutant, J.L. : Discrete circles : an arithmetical approach with non-constant thickness. In : *Vision Geometry XIV, Electronic Imaging, SPIE*. Volume 6066. (2006)

[15] Reveillès, J.P. : Géométrie discrète, calculs en nombre entiers et algorithmique (1991) Thèse d'état. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

[16] GREC09 : Arc segmentation contest (2009) <http://www.cs.usm.my/arcseg2009/>.