

# Etude numérique de la résolution par équations intégrales de la diffraction multiple par des disques

Xavier Antoine, Karim Ramdani, Bertrand Thierry

► **To cite this version:**

Xavier Antoine, Karim Ramdani, Bertrand Thierry. Etude numérique de la résolution par équations intégrales de la diffraction multiple par des disques. 10ème Congrès Français d'Acoustique, Apr 2010, Lyon, France. hal-00533171

**HAL Id: hal-00533171**

**<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00533171>**

Submitted on 5 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Étude numérique de la résolution par équations intégrales de la diffraction multiple par des disques

Xavier Antoine<sup>1,2</sup>, Karim Ramdani<sup>2,1</sup>, Bertrand Thierry<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> IECN, Université Henri Poincaré, BP 239, 54506, Vandœuvre-lès-Nancy, France, {Xavier.Antoine,Bertrand.Thierry}@iecn.u-nancy.fr

<sup>2</sup> INRIA Nancy (Equipe CORIDA), 615 rue du Jardin Botanique, 54600 Villers-lès-Nancy, France, Karim.Ramdani@inria.fr

Dans cet exposé, nous présenterons une nouvelle méthode de résolution du problème de diffraction multiple par des cylindres circulaires, en particulier dans le cas où la longueur d'ondes est petite devant la taille caractéristique des cylindres. En effet, il est bien connu que ce régime induit d'importantes difficultés numériques, notamment parce qu'il conduit à la résolution de systèmes linéaires de grande taille. Dans l'approche proposée, le champ diffracté est obtenu en résolvant une équation intégrale via une projection dans une base de Fourier. Nous proposerons une méthode de résolution robuste et efficace, obtenue en combinant une troncature judicieuse des séries de Fourier et un solveur itératif avec préconditionneur de type Krylov (GMRES). Notre méthode exploite certaines propriétés remarquables de la matrice du système (matrice Toeplitz). Enfin, nous présenterons des exemples de simulation numérique pour la diffraction multiple à haute fréquence par des configurations aléatoires de disques.

### 1 Introduction

Les problèmes de diffraction multiple, notamment par des sphères ou des disques, apparaît dans un grand nombre d'applications : la télédétection [1], l'interaction des ultrasons et des tissus biologiques [2], la modélisation photonique et phononique [3, 4], l'optique de champ proche en présence de micro-sphères diélectriques pour les jets photoniques [5, 6], la plasmonique en présence de nano-particules métalliques [7, 8, 9],... Par conséquent, la conception de méthodes de résolution numériques efficaces et robustes pour la diffraction multiple par un grand nombre de sphères et pour une large bande de fréquences revêt une grande importance.

Concernant ces méthodes numériques, la littérature existante traite essentiellement des basses fréquences (see e.g. [4, 10]). Le régime de moyennes ou hautes fréquences [11, 12, 13] a nettement moins été étudié car il conduit à des difficultés numériques très spécifiques, liées d'une part aux effets de fort couplage entre les obstacles et, d'autre part, au caractère non défini de la matrice complexe du système linéaire. En général, les méthodes numériques classiquement utilisées en basse-fréquence deviennent inopérantes lorsqu'elles sont utilisées dans des régimes plus "raides". On propose ici d'étudier le cas de la diffraction multiple par des cylindres circulaires et nous proposerons des solutions permettant de traiter à la fois un nombre élevé d'obstacles et une large bande de fréquence.

### 2 Le modèle mathématique

On s'intéresse à la diffraction acoustique d'une onde plane par  $M$  cylindres circulaires parfaitement mous (le cas parfaitement rigide pouvant être traité par la même

approche). On désigne par  $\Omega_1^-, \Omega_2^-, \dots, \Omega_M^-$  les disques représentant les sections transverses des cylindres et par  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_M$  leurs bords. Soit  $\Omega^- = \bigcup_{p=1}^M \Omega_p^-$ ,  $\Gamma = \bigcup_{p=1}^M \Gamma_p$  et  $\Omega^+ = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega^-}$  le domaine de propagation extérieur. Ce dernier est supposé homogène, non absorbant et caractérisé par une vitesse de propagation  $c$ . On considère une onde plane incidente  $u^{inc}(\mathbf{x}) = e^{ik\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{x}}$  de direction  $\boldsymbol{\beta} = (\cos(\beta), \sin(\beta))$  par les disques  $\Omega^-$  (la dépendance temporelle est supposée de la forme  $e^{-i\omega t}$ ). On souhaite calculer numériquement le champ diffracté  $u$  solution du problème aux limites extérieur

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & (\Omega^+) \\ u = -u^{inc} & (\Gamma) \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}|^{1/2} \left( \nabla u \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - iku \right) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde du problème.

On se propose de résoudre ce problème à l'aide d'une méthode d'équation intégrales (BIE). Afin de simplifier la présentation, on se restreindra à l'étude d'une seule équation intégrale, à savoir l'EFIE (Electric Field Integral Equation). On renvoie à Colton et Kress [14] pour plus détails sur les méthodes intégrales et nous rappellerons simplement ici comment est obtenue cette équation intégrale. Elle est basée sur une représentation du champ diffracté via un potentiel de simple couche associée à une densité  $\rho$  (à déterminer) :

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega^+, \quad u(\mathbf{x}) = \mathcal{L}\rho(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \, d\Gamma(\mathbf{y}),$$

où  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  est la fonction de Green sortante de l'opérateur de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^2$ . Il est bien connu [14] que le potentiel de simple couche  $\mathcal{L}\rho$  satisfait la condition de radiation de Sommerfeld à l'infini et

l'équation de Helmholtz dans  $\Omega^+$  (et dans  $\Omega^-$ ). Il s'en suit que la résolution de (2.1) se réduit à l'écriture de la condition aux limites de Dirichlet sur  $\Gamma$ . Ceci conduit à l'EFIE, équation intégrale obtenue en prenant la valeur au bord de l'opérateur de simple couche  $\mathcal{L}\rho$  :

$$(\mathcal{L}\rho)|_{\Gamma} := L\rho = -u^{inc}|_{\Gamma}, \quad \text{in } H^{1/2}(\Gamma), \quad (2.2)$$

où  $L$  est l'opérateur de simple couche frontière

$$L\rho(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) \, d\Gamma(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

On rappelle le résultat suivant concernant le caractère bien posé de l'EFIE (les fréquences irrégulières sont les valeurs de  $k$  pour lesquelles  $k^2$  est valeur propre du Laplacien Dirichlet sur  $\Omega^-$ ) :

**Théorème 1** *Si  $k$  n'est pas fréquence irrégulière du problème, alors  $u = \mathcal{L}\rho$  résout (2.1) si et seulement si  $\rho$  résout l'EFIE (2.2).*

Dorénavant, nous supposons que  $k$  n'est pas fréquence irrégulière du problème. Afin de résoudre numériquement l'EFIE (2.2), on écrit sa formulation faible dans  $L^2(\Gamma)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \rho \in L^2(\Gamma) \text{ tel que } \forall \Phi \in L^2(\Gamma) : \\ \langle L\rho, \Phi \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle -u^{inc}|_{\Gamma}, \Phi \rangle_{L^2(\Gamma)}. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

En introduisant une base orthonormée  $(\Psi_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\Gamma)$ , la formulation faible ci-dessus s'écrit de manière équivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \rho \in L^2(\Gamma) \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{Z} : \\ \langle L\rho, \Psi_m \rangle_{L^2(\Gamma)} = \langle -u^{inc}|_{\Gamma}, \Psi_m \rangle_{L^2(\Gamma)}. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Compte tenu de la forme circulaire des frontières  $\Gamma_p$ , le choix de bases de Fourier s'impose naturellement. Plus précisément, l'approximation spectrale proposée ici est obtenue en rassemblant les  $M$  bases de Fourier associées à chaque disque pour former une base orthonormée de  $L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times \dots \times L^2(\Gamma_M)$ . Chaque obstacle  $\Omega_p^-$ ,  $p = 1, \dots, M$  est un disque centré en  $\mathbf{O}_p$  et de rayon  $a_p$ . Un point  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  est décrit par ses coordonnées polaires locales associées à  $\Omega_p^-$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_p(\mathbf{x}) &= \mathbf{O}_p \mathbf{x}, & r_p(\mathbf{x}) &= |\mathbf{r}_p(\mathbf{x})|, \\ \theta_p(\mathbf{x}) &= \text{Angle}(\overrightarrow{Ox_1}, \mathbf{r}_p(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

On introduit également pour tout  $1 \leq p \leq M$  :

$$\mathbf{b}_p = \mathbf{O} \mathbf{O}_p \quad b_p = |\mathbf{b}_p| \quad \alpha_p = \text{Angle}(\overrightarrow{Ox_1}, \mathbf{b}_p)$$

et pour tous  $1 \leq p \neq q \leq M$  :

$$\mathbf{b}_{pq} = \mathbf{O}_q \mathbf{O}_p \quad b_{pq} = |\mathbf{b}_{pq}| \quad \alpha_{pq} = \text{Angle}(\overrightarrow{Ox_1}, \mathbf{b}_{pq}).$$

On introduit pour chaque disque  $\Omega_p^-$ ,  $p = 1, \dots, M$ , la base de Fourier  $(\varphi_m^p)_{m \in \mathbb{Z}}$  définie par

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_p, \quad \varphi_m^p(\mathbf{x}) = \frac{e^{im\theta_p(\mathbf{x})}}{\sqrt{2\pi a_p}}.$$

Cette famille constitue une base orthonormée de  $L^2(\Gamma_p)$ . Ces  $M$  familles sont rassemblées via les fonctions  $(\Phi_m^p)_{m \in \mathbb{Z}, p=1, \dots, M}$  définies par

$$\forall p, q \in \{1, \dots, M\}, \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \Phi_m^p|_{\Gamma_q} = \delta_{pq} \varphi_m^p \quad (2.5)$$

où  $\delta_{pq}$  désigne le symbole de Kronecker. Enfin,  $\mathcal{B} = (\Phi_m^p)_{m \in \mathbb{Z}, p=1, \dots, M}$  forme une base orthonormée de  $L^2(\Gamma)$ , que l'on appellera par commodité la base de Fourier. En décomposant la densité inconnue  $\rho$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$\rho = \sum_{p=1}^M \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho_m^p \Phi_m^p. \quad (2.6)$$

la formulation faible (2.4) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver les coefficients } (\rho_n^q)_{1 \leq q \leq M, n \in \mathbb{Z}} \text{ tels que} \\ \forall 1 \leq p \leq M, \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{q=1}^M \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{L}_{m,n}^{p,q} \rho_n^q = f_m^p, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où les coefficients  $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$  et  $f_m^p$  sont donnés par

$$\mathbb{L}_{m,n}^{p,q} = \langle L\Phi_n^q, \Phi_m^p \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad f_m^p = \langle -u^{inc}|_{\Gamma}, \Phi_m^p \rangle_{L^2(\Gamma)}.$$

Pour une onde plane, les coefficients  $f_m^p$  de l'onde incidente sont connus explicitement [10, p.125] :

$$\forall 1 \leq p \leq M, \forall m \in \mathbb{Z} : f_m^p = -\sqrt{2\pi a_p} e^{im(\frac{\pi}{2}-\beta)} J_m(ka_p).$$

Concernant les coefficients  $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$  du système infini-dimensionnel (2.7), on considère tout d'abord le cas des blocs diagonaux ( $p = q$ ) et on rappelle le résultat suivant [15].

**Théorème 2** *Pour tout  $p = 1, \dots, M$  et tous  $m, n \in \mathbb{Z}$ , on a les relations*

$$\mathbb{L}_{m,n}^{p,p} = \delta_{mn} \frac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H_m^{(1)}(ka_p).$$

Pour les blocs extra-diagonaux ( $p \neq q$ ), on doit décomposer la fonction de Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Pour ce faire, on utilise le Théorème suivant ("two-centre expansion", voir [10, Theorem 2.14]).

**Théorème 3 (Two-centre expansion)** *On se donne  $1 \leq p \neq q \leq M$ . Alors, pour  $\mathbf{x} \in \Gamma_p$  et  $\mathbf{y} \in \Gamma_q$ , on a*

$$H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = 2\pi \sqrt{a_p a_q} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m(ka_p) S_{nm}(b_{pq}) J_n(ka_q) \overline{\varphi_n^q(\mathbf{y})} \varphi_m^p(\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

où la fonctions de séparation  $S_{nm}$  sont données pour tous  $m, n \in \mathbb{Z}$  par

$$S_{nm}(\mathbf{b}_{pq}) = H_{n-m}^{(1)}(kb_{pq}) e^{i(n-m)\alpha_{pq}}.$$

L'expression des coefficients  $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$  s'en déduit alors aisément :

**Proposition 1** *For all  $1 \leq p, q \leq M$ , and for all  $m, n$  in  $\mathbb{Z}$ , we have*

$$\mathbb{L}_{m,n}^{p,q} = \begin{cases} \delta_{mn} \frac{i\pi a_p}{2} J_m(ka_p) H_m^{(1)}(ka_p), & \text{si } p = q, \\ \frac{i\pi \sqrt{a_p a_q}}{2} J_m(ka_p) S_{nm}(b_{pq}) J_n(ka_q), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.9)$$

En vue de sa résolution numérique, on notera que l'on peut récrire (2.7) comme un système linéaire infini-dimensionnel :

$$\tilde{\mathbb{L}} \tilde{\rho} = \tilde{\mathbf{f}}, \quad (2.10)$$

avec la structure par blocs suivante

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{L}}^{1,1} & \tilde{\mathbb{L}}^{1,2} & \dots & \tilde{\mathbb{L}}^{1,M} \\ \tilde{\mathbb{L}}^{2,1} & \tilde{\mathbb{L}}^{2,2} & \dots & \tilde{\mathbb{L}}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbb{L}}^{M,1} & \tilde{\mathbb{L}}^{M,2} & \dots & \tilde{\mathbb{L}}^{M,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\rho}}^1 \\ \tilde{\boldsymbol{\rho}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\rho}}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}^1 \\ \tilde{\mathbf{f}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{f}}^M \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

où

- Les blocs  $\tilde{\mathbb{L}}^{p,q} = (\mathbb{L}_{m,n}^{p,q})_{m,n \in \mathbb{Z}}$ ,  $1 \leq p, q \leq M$ , sont donnés par

$$\tilde{\mathbb{L}}^{p,q} = \begin{cases} \frac{i\pi a_p}{2} \tilde{\mathbb{J}}^p \tilde{\mathbb{H}}^p, & \text{si } p = q, \\ \frac{i\pi \sqrt{a_p a_q}}{2} \tilde{\mathbb{J}}^p (\tilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T \tilde{\mathbb{J}}^q, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $\tilde{\mathbb{J}}^p$  et  $\tilde{\mathbb{H}}^p$  désignent les matrices diagonales de coefficients respectifs  $J_m(ka_p)$  et  $H_m^{(1)}(ka_p)$ . La matrice (infinie)  $(\tilde{\mathbb{S}}^{p,q})^T$  est la transposée de  $\tilde{\mathbb{S}}^{p,q}$  définie par  $\tilde{\mathbb{S}} = (\tilde{\mathbb{S}}_{m,n}^{p,q})_{m,n \in \mathbb{Z}}$  avec  $\tilde{\mathbb{S}}_{m,n}^{p,q} = S_{mn}(\mathbf{b}_{pq})$ .

- Le vecteur infini  $\tilde{\boldsymbol{\rho}}^p = (\rho_m^p)_{m \in \mathbb{Z}}$  contient les coefficients de l'inconnue  $\rho$  dans la base de Fourier de  $L^2(\Gamma_p)$ .
- Le second membre  $\tilde{\mathbf{f}}^p = (f_m^p)_{m \in \mathbb{Z}}$  est le vecteur des coefficients de Fourier  $-u|_{\Gamma_p}^{inc}$ .

Les blocs diagonaux  $\tilde{\mathbb{L}}^{p,p}$  représentent la diffraction simple par le disque  $p$  alors que les blocs extra-diagonaux  $\tilde{\mathbb{L}}^{p,q}$ ,  $1 \leq p \neq q \leq M$ , représentent le couplage induit par la diffraction multiple entre les disques  $p$  et  $q$ . On notera de plus que les blocs extra-diagonaux sont pleins alors que les blocs diagonaux sont diagonaux.

**Remarque 1** Une fois déterminée la densité  $\rho$ , il est possible d'en déduire d'autres grandeurs physiques utiles telles que le champ diffracté en tout point  $\mathbf{x} \in \Omega^+$ , sa dérivée normale sur  $\Gamma$  ou encore le champ lointain associé. Par exemple, ce dernier est donné par la relation :

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^M \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho_m^p \frac{i\pi a_p}{2\sqrt{2\pi a_p}} J_m(ka_p) H_m^{(1)}(kr_p(\mathbf{x})) e^{im\theta_p(\mathbf{x})}. \quad (2.13)$$

### 3 Résolution numérique à basse fréquence

On s'intéresse ici au régime basse-fréquence correspondant à  $ka_p \ll 1$ , pour tout  $1 \leq p \leq M$ . La première question qui se pose lors de la résolution numérique du système linéaire infini (2.10) est celle de sa troncature. Autrement dit, il s'agit de déterminer le nombre de modes de Fourier significatifs à conserver pour chaque obstacle. On notera ce nombre  $2N_p + 1$  pour l'obstacle  $p$ , en ne conservant que les modes  $-N_p \leq m \leq N_p$ . Evidemment, les paramètres de troncature  $(N_p)_{p=1,\dots,M}$  peuvent être choisis indépendamment, en fonction du rayon  $a_p$  de l'obstacle  $\Omega_p^-$  et de la fréquence  $k$ . En tronquant la série de Fourier à  $N_p$  et en projetant sur la le sous-espace de dimension finie correspondant, on aboutit au système linéaire

$$\mathbb{L}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{f}, \quad (3.1)$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \mathbb{L}^{1,1} & \mathbb{L}^{1,2} & \dots & \mathbb{L}^{1,M} \\ \mathbb{L}^{2,1} & \mathbb{L}^{2,2} & \dots & \mathbb{L}^{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{L}^{M,1} & \mathbb{L}^{M,2} & \dots & \mathbb{L}^{M,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}^1 \\ \boldsymbol{\rho}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\rho}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}^M \end{pmatrix},$$

où

- le bloc  $\mathbb{L}^{p,q} = (\mathbb{L}_{m,n}^{p,q})_{-N_p \leq m \leq N_p, -N_q \leq n \leq N_q}$  est la matrice  $(2N_p + 1) \times (2N_q + 1)$ , de coefficients  $\mathbb{L}_{m,n}^{p,q}$  donnés par (2.9). Comme pour le système de dimension infinie, ces blocs peuvent être écrits sous la forme plus compacte

$$\mathbb{L}^{p,q} = \begin{cases} \frac{i\pi a_p}{2} \mathbb{J}^p \mathbb{H}^p, & \text{si } p = q, \\ \frac{i\pi \sqrt{a_p a_q}}{2} \mathbb{J}^p (\mathbb{S}^{p,q})^T \mathbb{J}^q, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la notation sans tilde est utilisée pour désigner des approximations de dimensions finies. du système (2.10).

- $\boldsymbol{\rho}^p = (\rho_m^p)_{-N_p \leq m \leq N_p}$  est le vecteur contenant les  $2N_p + 1$  approximations des coefficients de Fourier de  $\rho$  dans la base associée à  $\Gamma_p$ .
- $\mathbf{f}^p = (f_m^p)_{-N_p \leq m \leq N_p}$  est le vecteur contenant les  $2N_p + 1$  premiers coefficients de Fourier de l'onde incidente dans la base associée à  $\Gamma_p$ .

En basse fréquence, on peut s'attendre à ce que seuls les premiers modes soient significatifs et permettent d'obtenir une bonne approximation de la solution. Pour confirmer cette assertion, on considère la configuration décrite dans la Figure 1. Elle est constituée de  $M = 200$  disques de rayon unitaires aléatoirement distribués dans le carré  $[-25; 25]^2$  pour une fréquence  $k = 0.1$  (de sorte que  $ka_p = 0.1$ ). On se place en champ lointain et définit la RCS (Radar Cross Section) par :

$$\text{RCS}(\theta) = 10 \log_{10}(2\pi |A(\theta)|^2) \quad (\text{dB}).$$

Pour la configuration considérée, on calcule une RCS de référence  $\text{RCS}^{ref}$  obtenue avec  $N_p = 15$  modes par obstacles et on analyse l'erreur relative pour la norme  $L^\infty$  ( $\|f(\theta)\|_\infty = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(\theta)|$ ) :

$$\Delta \text{RCS} = \frac{\|\text{RCS}^{ref} - \text{RCS}^{N_p}\|_\infty}{\|\text{RCS}^{ref}\|_\infty}.$$

Les résultats, reportés sur la Figure 2 (Courbe "Direct solution"), montrent la décroissance de cette erreur relative en fonction de  $N_p$ . Les résultats numériques suggèrent qu'une approximation précise de la RCS peut être obtenue avec  $N_p = 2$ , conduisant à une erreur relative de l'ordre  $10^{-4}$ .

Passons maintenant à l'analyse des effets de la diffraction multiple en basse fréquence. La Figure 3 montre le module de chaque mode de Fourier  $|\rho_m^p|$  pour  $-N_p \leq m \leq N_p = 15$ ,  $1 \leq p \leq M$  (Courbe "Multiple scattering"). Bien évidemment, seuls les modes correspondant à quelques disques sont représentés. Le système linéaire est résolu par une méthode directe (solveur de Gauss). Par comparaison, on représente également les modules des coefficients de Fourier correspondant à la diffraction par un seul disque. On voit que les modes propagatifs du problème de la diffraction multiple sont toujours

d'amplitude inférieure à ceux de la diffraction simple. Ceci traduit l'absorption par multi-diffusion dans le milieu. De plus, on remarque que des modes d'ordre élevé sont excités par les effets de la diffraction multiple et sont plus importants que pour la diffraction simple. En champ proche, ces modes doivent être pris en compte pour obtenir une bonne approximation de la solution.

Pour conclure cette analyse en basse-fréquence, examinons plus en détail la résolution numérique du système linéaire obtenu après troncature. On a représenté à cet effet sur la Figure 4 ( $k = 0.1$ ) le temps CPU nécessaire à la résolution du système linéaire lorsque le nombre de disques  $M$  augmente (the filling box is  $[-65; 65]^2$ ), en utilisant un solveur direct (élimination de Gauss) ou un solveur itératif GMRES [16] avec un paramètre de restart de 50 et une tolérance  $\varepsilon = 10^{-4}$  (noté dans la suite GMRES(50,  $10^{-4}$ )). Pour le calcul de RCS, cette tolérance est suffisante pour  $N_p = 2$  comme on peut le voir sur la Figure 2. Pour une plus grande précision, il suffit de réduire la valeur de  $\varepsilon$ . Ainsi, la méthode itérative permet de réduire le temps de calcul de 50% par rapport au solveur direct (pour  $N_p = 2$ ). Cette approche devient donc particulièrement adaptée lorsque le milieu de propagation est dense ( $M$  grand).

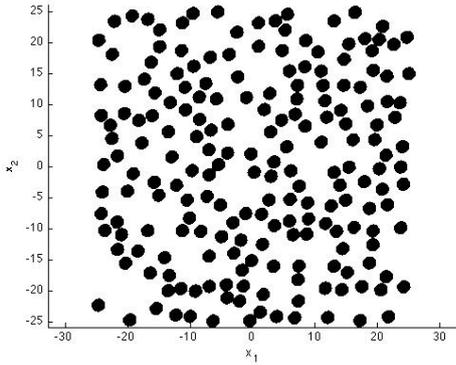


FIGURE 1 – Configuration type

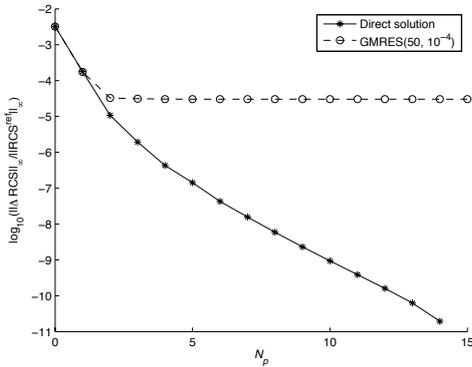


FIGURE 2 – Précision de l'approximation RCS

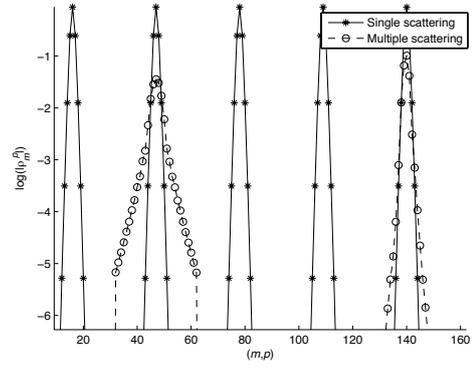


FIGURE 3 – Représentation des modes

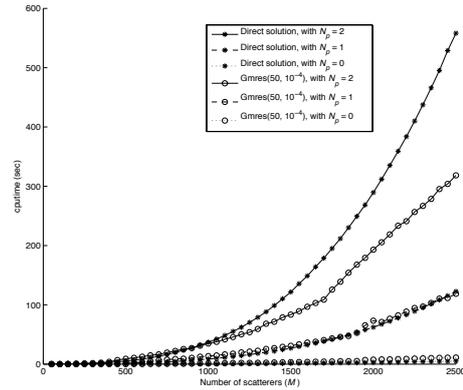


FIGURE 4 – Résolution numérique du système linéaire

## 4 Résolution numérique à moyenne et haute fréquences

L'approche directe développée en basse-fréquence n'est plus envisageable à haute-fréquence ( $ka_p \gg 1$ ). En effet, le nombre de modes à conserver dans la solution s'avère être de l'ordre de [13] :

$$N_p = \left\lceil ka_p + \left( \frac{\ln(2\sqrt{2}\pi ka_p \varepsilon^{-1})}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}} (ka_p)^{1/3} + 1 \right\rceil, \quad (4.1)$$

où  $\varepsilon$  est le seuil souhaité pour les coefficients de Fourier (et qui sera également le paramètre d'erreur du GMRES dans la suite). On peut vérifier que le solveur direct nécessite un stockage mémoire en  $\mathcal{O}([ka]^2 M^2)$  et la que résolution du système linéaire requiert  $\mathcal{O}([ka]^3 M^3)$  opérations (on suppose ici que  $a_p \approx a$ , pour tout  $1 \leq p \leq M$ ). Par conséquent, l'utilisation d'un tel solveur devient vite impossible.

Toutefois, ces deux coûts peuvent être réduits de la manière suivante. Soit  $N = \sum_{p=1}^M (2N_p + 1)$  le nombre total de modes considéré. Bien que la matrice complexe  $L$  soit pleine, il s'avère qu'elle présente une structure creuse par blocs. En effet, chaque bloc diagonal  $L^{p,p}$  est obtenu comme le produit de deux matrices diagonales  $J^p \in \mathbb{C}^{2N_p+1, 2N_p+1}$  et  $H^p \in \mathbb{C}^{2N_p+1, 2N_p+1}$ . Par ailleurs, chaque bloc extra-diagonal  $L^{p,q}$  s'exprime comme le produit de 2 matrices diagonales  $J^p$  et  $J^q$ ,

et de la matrice  $(\mathbb{S}^{p,q})^T \in \mathbb{C}^{2N_p+1, 2N_q+1}$  qui présente la particularité d'être Toeplitz. En effet, ses coefficients  $\mathbb{S}_{m,n}^{p,q} = H_{m-n}^{(1)}(kb_{pq})e^{i(m-n)\alpha_{pq}}$  ne dépendent que de la différence  $(m-n)$ . Par suite, un stockage creux de la matrice  $(\mathbb{S}^{p,q})^T$  est donné par le vecteur racine  $\gamma^{pq}$  (construit à partir de la première ligne et de la première colonne de  $(\mathbb{S}^{p,q})^T$ )

$$\gamma^{pq} = (S_{N_q, -N_p}^{pq}, \dots, S_{-N_q+1, -N_p}^{pq}, \\ S_{-N_q, -N_p}^{pq}, \dots, S_{-N_q, N_p}^{pq})^T.$$

Le nombre total de coefficients à stocker pour la matrice complète est donc en fait  $2N(2M-1)$  coefficients, à comparer aux  $N^2$  coefficients pour un stockage plein. Les Figures 5 ( $ka_p = 200$ ,  $1 \leq p \leq M$ ) et 6 ( $M = 100$ ,  $a_p = 1$ ,  $1 \leq p \leq M$ ) indiquent la dépendance du nombre de coefficients stockés pour le stockage plein et compressé respectivement vis à vis de  $M$  et  $k$  (avec  $\varepsilon = 10^{-4}$  dans le GMRES et dans (4.1)). On notera que dans les deux cas, le stockage creux autorise le traitement de configurations bien plus complexe pour  $k$  grand et pour un grand nombre de disques  $M$ .

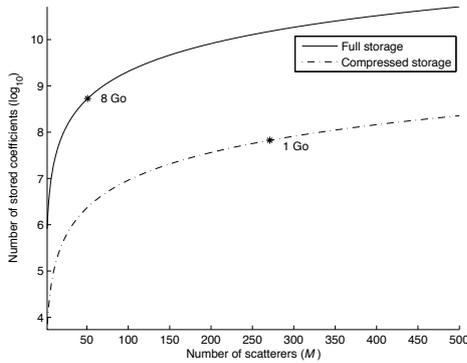


FIGURE 5 – Stockage en fonction de  $M$

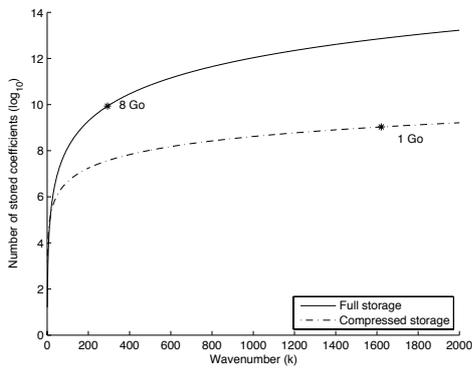


FIGURE 6 – Stockage en fonction de  $k$

La contrepartie de ce stockage compressé est qu'il rend l'utilisation d'un solveur itératif nécessaire. Ici, on a utilisé un GMRES(50,  $10^{-4}$ ) dont nous allons maintenant étudier le coût global. Celui-ci est égal au coût d'un produit Matrice-Vecteur (MVP) multiplié par le nombre d'itérations  $n^{iter}$ . Chaque MVP

peut être calculé de manière rapide et précise en utilisant un algorithme de type FFT pour la partie du MVP liée aux blocs Toeplitz de  $\mathbb{L}$ . Le coût global d'un MVP est alors en  $\mathcal{O}(60(M-1)^2 ka \log_2(4ka))$ . Il est à comparer au coût  $\mathcal{O}(4(M-1)^2(ka)^2)$  d'un MVP plein. Concernant l'accélération de la convergence (i.e. la réduction de  $n^{iter}$ ), nous proposons deux préconditionneurs. Le premier préconditionneur, noté P1, consiste à préconditionner le système linéaire par sa partie diagonale correspondant aux effets de la diffraction simple. Ce préconditionneur conduit au système dont la matrice est de la forme  $\widehat{\mathbb{L}} = \mathbb{I} + \widehat{\mathbb{F}}$ , où  $\mathbb{I}$  est la matrice identité et  $\widehat{\mathbb{F}}$  contient les blocs extra-diagonaux de  $\widehat{\mathbb{L}}$  préconditionnés par la diffraction simple. Un second préconditionneur, noté P2, est obtenu par deux approximations successives. Dans un premier temps, on approche  $\widehat{\mathbb{L}}^{-1}$  par les deux premiers termes de sa série de Neumann :  $\widehat{\mathbb{L}}^{-1} \sim \mathbb{I} - \widehat{\mathbb{F}} = \mathbb{P}$ . A ce stade, le préconditionneur est une matrice pleine (en raison du terme  $\widehat{\mathbb{F}}$ ). Pour "creuser" cette matrice, on ne conserve dans un second temps que les blocs correspondant aux interactions proches. On obtient ainsi le préconditionneur P2. On renvoie à [13] où une stratégie similaire est décrite plus en détail.

On a reporté la dépendance du temps CPU nécessaire à la construction du système linéaire et à sa résolution en fonction de  $M$  (Figure 7) et de  $k$  (Figure 8) pour différents algorithmes de résolution du système linéaire. Sur la Figure 7, on fixe  $ka = 200$  et on accroît le nombre  $M$  de disques dans le domaine de calcul  $[-25; 25]^2$ , avec un GMRES(50,  $10^{-4}$ ). La distance minimale entre deux disques est de 0.5 (on rappelle que les disques sont de rayon 1).

Sur la Figure 8, on représente pour  $M = 50$  disques le temps CPU pour des valeurs croissantes de  $ka$  et une distance minimale de 0.5 entre les obstacles dans le domaine  $[-15; 15]^2$  avec un GMRES(50,  $10^{-4}$ ). On observe que comparé à notre algorithme, l'approche directe est fortement limitée. Concernant la solution GMRES, le préconditionneur est nécessaire pour assurer la convergence de l'algorithme. Le préconditionneur P1-P2 peut conduire à une amélioration de la convergence, notamment lorsque les disques sont assez éloignés ou pour une structure en réseau. Lorsque les obstacles sont proches, le préconditionneur P1 semble plus robuste. Toutefois, il apparaît que la construction d'un préconditionneur relativement général et robuste pour ce type de problèmes demeure une question encore ouverte.

## Remerciements

Les auteurs ont été en partie soutenus par le programme blanc de l'ANR via le projet de recherche "Micro-Wave" (<http://microwave.math.cnrs.fr/>) et par l'INRIA Nancy Grand-Est (Equipe-Projet CORIDA).

## Références

- [1] Tsang L., Kong J., Ding K., Ao C., "Scattering of Electromagnetic Waves, Numerical Simulation", Wiley Series in Remote Sensing J.A. Kong, Series Editor, New York (2001)

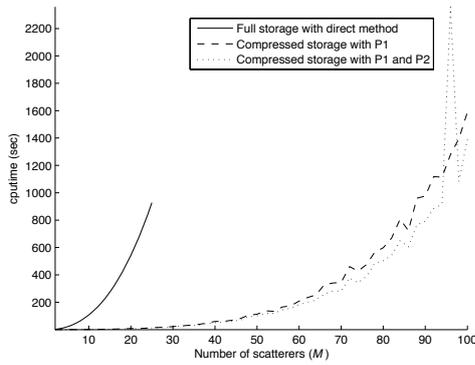


FIGURE 7 – Temps CPU en fonction de  $M$

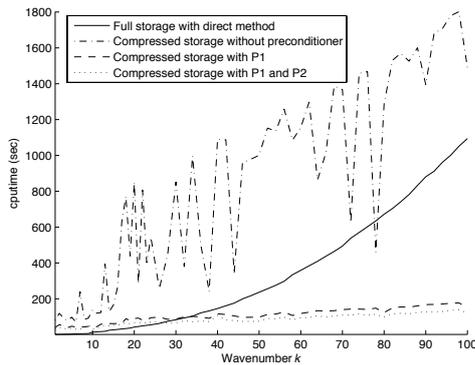


FIGURE 8 – Temps CPU en fonction  $k$

- [2] Doyle T., Tew A., Warnick K., Carruth B., "Simulation of elastic wave scattering in cells and tissues at the microscopic level", *Journal of the Acoustical Society of America* 125, 1751-1767 (2009)
- [3] Joannopoulos J., Li E., "Photonic Crystals : Molding the Flow of Light", Princeton University Press, New York (1995)
- [4] Zhang Y., Tew A., Warnick K., Carruth B., "Fast multipole accelerated scattering matrix method for multiple scattering of a large number of cylinders", *Progress in electromagnetics research-PIER* 72, 105-126 (2007)
- [5] Devilez A., Stout B., Bonod N., Popov E., "Spectral analysis of three-dimensional photonic jets", *Optics Express* 16, 14200-14212 (2008)
- [6] Ferrand P., Wenger J., Devilez A., Pianta M., Stout B., Bonod N., Popov E., Rigneault H., "Direct imaging of photonic nanojets", *Optics Express* 16, 6930-6940 (2008)
- [7] Hewageegana P., Apalkov V., "Second harmonic generation in disordered media : Random resonators", *Physical Review B* 77, 075132 (2008)
- [8] Bidault S., de Abajo F., Polman A., "Plasmon-based nanolenses assembled on a well-defined DNA template", *Journal of the American Chemical Society* 130, 2750-2751 (2008)
- [9] Mertens H., Koenderink A., Polman A., "Plasmon-enhanced luminescence near noble-metal nanos-

pheres : Comparison of exact theory and an improved Gersten and Nitzan model", *Phys. Rev. B* 76, 115123 (2007)

- [10] Martin P., "Multiple scattering", *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 107, Cambridge University Press, Cambridge (2006)
- [11] Antoine X., Geuzaine C., Ramdani K., "Computational methods for multiple scattering at high frequency with applications to periodic structure calculations", in *Wave Propagation in Periodic Media. Analysis, Numerical Techniques and Practical Applications*, Progress in Computational Physics (PiCP) 1, Bentham Sci. Publ., Cambridge (2010)
- [12] Bruno O., Reitich F., Geuzaine C., "On the  $\mathcal{O}(1)$  solution of multiple-scattering problems", *IEEE Trans. Magn.* 41, 1488-1491 (2005)
- [13] Antoine X., Chniti C., Ramdani K., "On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders", *J. Comp. Phys.* 227, 1754-1771 (2008)
- [14] Colton D., Kress R., "Integral equation methods in scattering theory", *Pure and Applied Mathematics* John Wiley & Sons Inc., New York (1983)
- [15] Kress R., "Minimizing the condition number of boundary integral operators in acoustic and electromagnetic scattering", *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 38, 323-341 (1985)
- [16] Saad Y., Schultz M., "GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 7, 856-869 (1986)