CSMA 2011
10e Colloque National en Calcul des Structures
9-13 Mai 2011, Presqu'île de Giens (Var)

Méthode multipôle rapide multi-niveaux en visco-élastodynamique 3D

E. Grasso[1,2], S.Chaillat[3], J.-F. Semblat[1], M.Bonnet[2]

[1] *LCPC Paris, Groupe "Séismes et Vibrations", semblat@lcpc.fr*
[2] *LMS (UMR CNRS 7649), Ecole Polytechnique, {grasso,bonnet}@lms.polytechnique.fr*
[3] *College of Computing, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA, stephanie.chaillat@cc.gatech.edu*

Mots clés — Méthode Multipôle Rapide, Eléments de Frontière, visco-élastodynamique 3D

Contexte et enjeu La méthode des eléments de frontière accéléré par multipôles rapides (*fast multipole boundary element method*, FMBEM) et sa variante multi-niveaux (ML-FMBEM) sont connus pour être des outils puissants en calcul de propagation d'ondes, notamment pour des domaines non bornés, faisant intervenir des modèles de grande taille N [1]. Cette formulation, limitée à des comportements linéaires, prend implicitement en compte les conditions de radiation. La présente étude concerne une extension de la ML-FMBEM, sous sa forme récemment développée pour l'élastodynamique 3D dans le domaine fréquentiel [2], à la visco-élastodynamique. La dissipation du matériau est introduite dans la formulation en considérant des nombres d'ondes et des vitesses complexes. On cherche ainsi des solutions sous la forme :

$$u(x,\omega) = u_0(\omega)e^{ik^*(\omega)x}, \qquad k^*(\omega) = k(\omega)[1+i\beta(\omega)] \tag{1}$$

où k^* est le nombre d'onde complexe, $k = \omega/c(\omega)$ est le nombre d'onde réel et le paramètre $\beta(\omega)$ exprime la dissipation intrinsèque du matériau. La FM-BEM utilisée repose sur un développement de la fonction de Green $G(|\mathbf{r}|;k^*) = e^{ik^*|\mathbf{r}|}/(4\pi|\mathbf{r}|)$ pour l'équation de Helmholtz dite *diagonale* qui a la forme :

$$G(|\mathbf{r}|;k^*) = \lim_{L\to+\infty}\int_{S} e^{ik^*\hat{\mathbf{s}}.\mathbf{r}'}\,\mathcal{G}_L(\hat{\mathbf{s}};|\mathbf{r}_0|,k^*)d\hat{\mathbf{s}}\,, \quad \mathcal{G}_L(\hat{\mathbf{s}};\mathbf{r}_0,k^*) = \frac{ik^*}{16\pi^2}\sum_{0\le l\le L}(2\ell+1)i^l h_\ell^{(1)}(k^*|\mathbf{r}_0|)P_\ell(\hat{\mathbf{s}}.\hat{\mathbf{r}}_0) \tag{2}$$

où $\mathcal{S} = \left\{\hat{\mathbf{s}}\in\mathbb{R}^3,\ \|\hat{\mathbf{s}}\|=1\right\}$ est la sphère unité, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{r}'$ et $\mathcal{G}_L(\hat{\mathbf{s}};\mathbf{r}_0;k^*)$ est la fonction de transfert (exprimée en termes des fonctions de Hankel sphériques de première espèce $h_l^{(1)}$ et des polynômes de Legendre P_l). La convergence de la décomposition (2) pour $L\to+\infty$ (étudiée par Darve [3]), entraîne la convergence des noyaux élastodynamiques, qui sont des combinaisons linéaires des dérivées de $G(|\mathbf{r}|;k^*)$.

Cette décomposition étant fondamentale pour la ML-FMBEM, son évaluation numérique doit être précise. En particulier, le paramètre L de troncature de la série (2) joue un rôle crucial. Dans le cas de nombres d'onde réels, l'erreur de troncature introduite par cette approximation a été largement étudiée d'un point de vue mathématique et numérique [3, 4]. Le paramètre L dépend du niveau selon une relation du type $L = L(kd)$, d étant la taille linéaire d'une cellule cubique au niveau considéré.

Résultats. L'introduction du nombre d'onde complexe $k^*(\omega)$ influence notablement le comportement numérique du développement (2). La FMBEM pour les matériaux amortissants, et notamment l'ajustement de paramètres tels que L, sont peu abordés [5, 6]. Le choix de L résulte d'un compromis entre l'évaluation précise de $G(|\mathbf{r}|;k^*)$ et de ses dérivées (L doit être suffisamment grand) et la nécessité d'éviter la croissance $O\big((l/z)^l\big)$ de $h_l^{(1)}$ pour $l \gg z$. Dans la présente étude on ajuste empiriquement (au moyen d'expériences numériques basées sur l'évaluation de $G(|\mathbf{r}|;k^*)$ pour différentes combinaisons de nuages de points à l'intérieur de cellules situées sur une même liste d'interaction) une relation $L(|k^*d|,\beta)$ de forme inspirée par le cas du nombre d'onde réel :

$$L(|k^*d|,\beta) = \sqrt{3}|k^*d| + (7.5+C\beta)Log_{10}(\sqrt{3}|k^*d|+\pi) \tag{3}$$

Quand $\beta = 0$, la relation (3) se réduit à celle utilisée pour l'élastodynamique [2]. La constante C est positive, la valeur de L utilisée dans (2) devant croître avec l'amortissement afin de maintenir une précision fixée au calcul, un comportement déjà constaté en électromagnétisme [5]. Notre présentation détaillera l'effet du choix de la constante C dans 3, un exemple en étant donné en Fig. 1 sur un exemple à solution

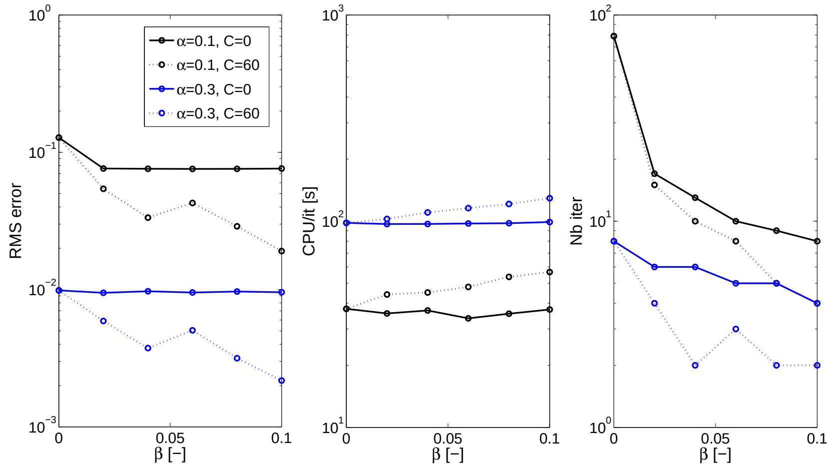

FIG. 1: *Cavité pressurisée ($N = 122886$, fréquence normalisée $\eta_P = k_P R/\pi = 3$) : effet de l'augmentation de L (à travers C) et de l'ajout d'un niveau (par réduction du paramètre d'arrêt de subdivision α).*

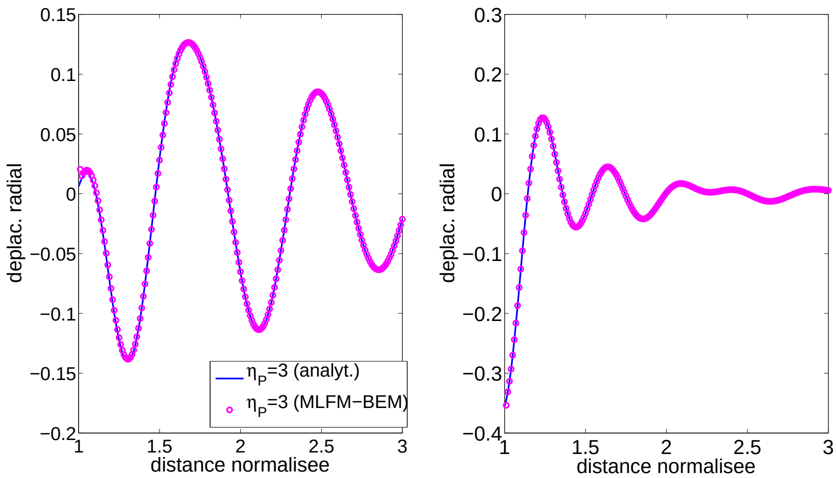

FIG. 2: *Diffraction d'une onde plane P par une cavité sphérique ($\theta = \pi$ (gauche) et $\theta = \pi/2$ (droite) par rapport à la direction de l'onde incidente.), avec $N = 122886$, $\beta = 0.1$, $C = 60$, $\alpha = 0.1$ (6 niveaux).*

analytique connue (cavité sphérique de rayon R dans un milieu infini soumise à pression interne harmonique). On y examinera par ailleurs la possibilité d'ajouter (par rapport au cas élastodynamique $\beta = 0$) des niveaux à la structure multi-niveaux en réglant le paramètre d'arrêt de subdivision α ($d_{min} = \alpha\lambda_S$ et $d^{(\bar{\ell})} \leq d_{min} \leq d^{(\bar{\ell}-1)}$ selon β (Fig. 1), $\bar{\ell} \in \mathbb{N}$ étant le numéro du niveau de subdivision le plus profond. L'étude de la propagation des ondes dans les sols étant l'application visée (propagation d'ondes sismiques ou de vibrations induites par le trafic ferroviaire), l'étude est restreinte à la plage $0 \leq \beta \leq 0.1$.

Références

[1] W.C. Chew, H.Y. Chao, T.J. Cui, S.Ohnuki, Y.C. Pan, J.M. Song, S.Velamparambil, J.S. Zhao. Fast integral equation solvers in computational electromagnetics of complex structures. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 27 :803–823, 2003.

[2] S.Chaillat, M.Bonnet, and J.-F. Semblat. A multi-level fast multipole BEM for 3-D elastodynamics in the frequency domain. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, 197 :4233–4249, 2008.

[3] E. Darve. The fast multipole method I : Error analysis and asymptotic complexity. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 38 :98–128, 2000.

[4] J. Song and WC Chew. Error analysis for the truncation of multipole expansion of vector green's functions. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 11 :311–313, 2001.

[5] N. Geng, A. Sullivan, and L. Carin. Fast multipole method for scattering from an arbitrary PEC target above or buried in a lossy half space. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 49 :740–748, 2001.

[6] Y. Yasuda and T. Sakuma. Analysis of sound fields in porour materials using the fast multipole bem. In *37th International Congress and Exposition on Noise Control Engineering, Shanghai, China*, 26-29 October.