



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

**El Teorema de Brouwer y el Teorema del Ángulo  
agudo de Lions: aplicaciones**

**TESIS**

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática  
Aplicada con mención en Matemática Computacional

**AUTOR**

Luis Enrique QUISPE GALLEGOS

**ASESOR**

Dr. Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2022



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Quispe, L. (2022). *El teorema de Brouwer y el teorema del ángulo agudo de Lions: Aplicaciones*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---

## Metadatos complementarios

<b>Datos de autor</b>	
Nombres y apellidos	<b>Luis Enrique Quispe Gallegos</b>
Tipo de documento de identidad	<b>DNI</b>
Número de documento de identidad	<b>10464737</b>
URL de ORCID	<a href="https://orcid.org/0000-0003-4165-1371">https://orcid.org/0000-0003-4165-1371</a>
<b>Datos de asesor</b>	
Nombres y apellidos	<b>Eugenio Cabanillas Lapa</b>
Tipo de documento de identidad	<b>DNI</b>
Número de documento de identidad	<b>06445518</b>
URL de ORCID	<a href="https://orcid.org/0000-0002-8941-4394">https://orcid.org/0000-0002-8941-4394</a>
<b>Datos del jurado</b>	
<b>Presidente del jurado</b>	
Nombres y apellidos	<b>Paulo Nicanor Seminario Huertas</b>
Tipo de documento	<b>DNI</b>
Número de documento de identidad	<b>45480452</b>
<b>Miembro del jurado 1</b>	
Nombres y apellidos	<b>Willy David Barahona Martínez</b>
Tipo de documento	<b>DNI</b>
Número de documento de identidad	<b>40110856</b>
<b>Miembro del jurado 2</b>	
Nombres y apellidos	<b>Eduardo Valdemar Trujillo Flores</b>
Tipo de documento	<b>DNI</b>
Número de documento de identidad	<b>08660272</b>
<b>Datos de investigación</b>	

Línea de investigación	No aplica.
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: San Juan de Lurigancho –Chosica  Latitud: -12.16979 Longitud: -76.96222
Año o rango de años en que se realizó la investigación	<b>2021 - 2022</b>
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas aplicadas <a href="https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02">https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02</a>



# UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

## FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO UNIDAD DE POSGRADO

### ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICA APLICADA CON MENCION MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Siendo las, 10:00 horas del día Viernes cuatro de Febrero de dos mil veintidos, en las salas virtuales: Google Meet ([meet.google.com/yky-beeq-eyc](https://meet.google.com/yky-beeq-eyc)) y Zoom (<https://us02web.zoom.us/j/2865627590?pwd=MnNaRHhLcGw4bUJhQldsSUVJRWRQQT09>), el Jurado de Tesis conformado por los siguientes docentes:

PRESIDENTE	:	Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas
MIEMBRO	:	Mg. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO EXTERN	:	Mg. Eduardo Valdemar Trujillo Flores
MIEMBRO ASESOR	:	Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «**EL TEOREMA DE BROUWER Y EL TEOREMA DEL ANGULO AGUDO DE LIONS: APLICACIONES**» presentada por el Señor Bachiller **Luis Enrique Quispe Gallegos**, para optar al Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Señor Bachiller **Luis Enrique Quispe Gallegos**, el calificativo de diecisiete (17).

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional** al **Bachiller Luis Enrique Quispe Gallegos**.

Siendo las 12:05 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas  
**PRESIDENTE**

Mg. Willy David Barahona Martínez  
**MIEMBRO**

Mg. Eduardo Valdemar Trujillo Flores  
**MIEMBRO EXTERNO**

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa  
**MIEMBRO ASESOR**



UNMSM

Firmado digitalmente por  
CABANILLAS LAPA Eugenio FAU  
20148092282 soft  
Motivo: Soy el autor del documento  
Fecha: 23.02.2022 21:03:24 -05:00

El teorema de Brouwer y el teorema del ángulo agudo de Lions: Aplicaciones

Luis Enrique Quispe Gallegos

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Grado de Magister en Matemática Aplicada con mención en Matemática computacional.

Aprobada por:

.....  
Dr. Paulo Nicanor Seminario Huertas  
Presidente

.....  
Mg. Willy David Barahona Martinez  
Miembro

.....  
Mg. Eduardo Valdemar Trujillo Flores  
Miembro Externo

.....  
Dr. Eugenio Cabanillas Lapa  
Miembro Asesor

Lima - Perú  
Febrero - 2022

## FICHA CATALOGRÁFICA

QUISPE GALLEGOS, LUIS ENRIQUE

El teorema de Brouwer y el teorema del ángulo agudo de Lions: Aplicaciones, (Lima) 2022.

vii, 39 p., 29,7 cm, (UNMSM, Magister, Matemática Aplicada con mención en matemática computacional, 2022).

Tesis de Maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas. Matemática Aplicada. UNMSM/FdeCM. Título (Serie).



*Dedicatoria:*

*Este trabajo esta dedicado a Celestina,  
Esperanza, Orlando y Marcelo.*

# Agradecimientos

Agradezco las sugerencias y comentarios del Dr. Eugenio Cabanillas Lapa.

*Luis Enrique Quispe Gallegos*

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Resultados preliminares</b>	<b>4</b>
<b>3. El Teorema del Punto Fijo de Brouwer y el Teorema del Ángulo Agudo</b>	<b>13</b>
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>23</b>
<b>5. Un algoritmo numérico</b>	<b>33</b>
<b>6. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>38</b>

## RESUMEN

### EL TEOREMA DE BROUWER Y EL TEOREMA DEL ÁGUDO DE LIONS: APLICACIONES

LUIS ENRIQUE QUISPE GALLEGOS

FEBRERO - 2022

Orientador: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa  
Título obtenido: Magister en Matemática Aplicada

.....  
La teoría de los teoremas de punto fijo es una herramienta sumamente importante en matemática y sus aplicaciones. En ese contexto, el Teorema del punto fijo de Brouwer es uno de los resultados más relevantes por la simplicidad de su enunciado y su amplia aplicabilidad, sin embargo las demostraciones conocidas de este teorema son bastante complicadas. En este trabajo, realizamos una demostración analítica, simple y didáctica del teorema de Brouwer, siguiendo la línea de John W. Milnor. Como corolario obtenemos el teorema del ángulo agudo de J.L. Lions, particularmente aplicado a la solución de sistemas algebraicos no lineales. Concluimos esta tesis dando diversas aplicaciones.

PALABRAS CLAVES: Función continua  
Teoremas de punto fijo  
Retracción  
Aplicación compacta

ABSTRACT

THE BROUWER FIXED-POINT THEOREM AND THE ACUTE ANGLE THEOREM  
OF LIONS

LUIS ENRIQUE QUISPE GALLEGOS

FEBRUARY - 2022

Advisor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa  
Obtained Title: Master in Applied Mathematics

.....  
The theory of fixed-points theorems is an extremely important tool in mathematics and its applications. In this context, Brouwer's Fixed Point Theorem is one of the most relevant results due to the simplicity of its statement and its wide applicability, however the known proofs of this theorem are quite complicated. In this work, we carry out an analytical, simple and didactic proof of Brouwer's theorem, following the line of John W. Milnor. As a corollary we obtain the acute angle theorem of J.L. Lions, particularly applied to the solution of nonlinear algebraic systems. We conclude this thesis by giving some applica-  
tions.

KEYWORDS: Continuous function  
Fixed Point Theorems  
Retraction  
Compact mapping

# Capítulo 1

## Introducción

Fue en 1817 que el matemático checo Bernhard Plácido Johann Nepomuk Bolzano (1781 - 1848) demostró el teorema del valor intermedio, que establece: "Si una función continua real definida en un intervalo es positiva en algún punto y negativa en otro punto, entonces ella debe ser nula en algún punto". Cuya demostración al parecer no fue satisfactoria. La primera demostración exitosa de este resultado fue realizado por Karl Theodor Wilhelm Weierstrass en 1854, por lo que actualmente muchos autores lo mencionan como el teorema de Bolzano - Weierstrass:

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y  $d \in \mathbb{R}$  tal que  $f(a) < d < f(b)$ , entonces existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = d$ .

Siendo su demostración de carácter rutinario, en la actualidad. En particular, si tenemos una función continua  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  podemos definir la función continua.

$$\begin{aligned} F : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow F(x) = x - f(x) \end{aligned}$$

Se tiene:  $F(-1) = -1 - f(-1) \leq 0$  y  $F(1) = 1 - f(1) \geq 0$ , así para  $d = 0$  se tiene  $F(-1) \leq d \leq F(1)$ . Luego por el teorema de Bolzano - Weierstrass existe  $x_0 \in ]-1, 1[$  tal que  $F(x_0) = d$ . Esto equivale a decir que existe  $x_0 \in ]-1, 1[$  tal que  $x_0 - f(x_0) = 0$ , esto es:

$$f(x_0) = x_0 \tag{*}$$

Cuando un punto  $x_0 \in D_f$  satisface la ecuación (\*) se dice que  $x_0$  es un punto fijo de  $f$ . Probablemente el matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 - 1966), motivado por el trabajo de B. Bolzano, construyó en 1911 la teoría del grado topológico, con la cual probó rigurosamente en 1912 el teorema del punto fijo para aplicaciones continuas definidas de una bola de  $\mathbb{R}^n$  en ella misma.

Preliminarmente, destacados matemáticos obtuvieron resultados equivalentes al teorema de Brouwer, tales como: Poincaré (1886), Bohl (1904) y Hadamard (1910) usando

sofisticadas herramientas matemáticas.

En la actualidad se tiene diversas pruebas del teorema del punto fijo de Brouwer, usando: teoría combinatoria, teoría homológica, topología diferencial, etc. basándose esencialmente en el "*teorema de la bola peluda*" (o teorema de la no retracción), y que de hecho no son de fácil acceso debido a la maquinaria matemática no elemental (no métrica) requerida para realizarlas. En 1978, John Milnor [14] hace por primera vez una prueba extraña, pero completamente elemental (es decir usando Análisis en  $\mathbb{R}^n$ ) del teorema de la bola peluda, y consecuentemente del teorema de Brouwer. En esencia, la demostración de J. Milnor se basa en el cálculo del volumen encerrado por una cáscara esférica en  $\mathbb{R}^n$  y el hecho de que la función  $t \rightarrow (1 + t^2)^{n/2}$  no es un polinomio cuando  $n$  es impar. Primero prueba el teorema de la bola peluda y como una consecuencia, usando proyecciones estereográficas, prueba el teorema del punto fijo de Brouwer. Esta demostración suele llamarse "demostración analítica", debido a que se usa resultados del análisis. Posteriormente diversas demostraciones analíticas, apoyándose en las ideas de Milnor; destacan las demostraciones de C. A. Rogers [17] y K. Gröger [6] que presentan demostraciones menos extrañas y casi son coincidentes, y la de P. Lax que prueba una fórmula alternativa del cambio de variable para integrales múltiples, de la cual se deduce la fórmula tradicional y también el teorema del punto fijo de Brouwer.

En los cursos de matemática usualmente se presenta el teorema de Brouwer sin demostrarlo, por diversos motivos: amplitud de la herramienta matemática, tiempo, etc. originando un preocupante vacío tanto en la formación matemática como la profundización de esta línea de investigación. Resulta así que implementar metodologías accesibles, de modo que estos importantes resultados sean comprendidos por especialistas y no especialistas en matemática representa una buena dificultad por la naturaleza profunda de los resultados involucrados en su demostración, lo que constituye, evidentemente, un serio obstáculo para su uso, manejo y aplicación, por lo que termina alejando a los interesados de esta valiosa e importante técnica de resolución de problemas.

Un problema adicional es mostrar el amplio espectro de aplicación de estos profundos resultados matemáticos a realidades cotidianas y prácticas. Usualmente se muestran ejemplos o aplicaciones que involucra matemática pura o abstracta; sin embargo con el avance de la ciencia y la tecnología han surgido una diversidad de aplicaciones, a situaciones concretas del mundo real, tales como dinámica de infecciones, economía, etc. que es sumamente importante conocer.

Por estas razones, este trabajo de tesis tiene dos objetivos fundamentales; primero, realizar una exposición clara y elemental de la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer (y un corolario que llamamos corolario del ángulo agudo de Lions) y segundo, presentar y proyectar aplicaciones a problemas biológicos y algebraicos. En este sentido nos apoyaremos en las demostraciones de Roger y Gröger para lograr nuestro primer objetivo; las aplicaciones serán tomadas de diversos papers.

Esta tesis consta de cuatro capítulos. El primer capítulo es la presente introducción, en

el segundo capítulo están las notaciones y resultados preliminares del Cálculo y Análisis Real detallando algunas pruebas ilustrativas, la de la lipchitzianidad de una función de clase  $C^1$  definida en un conjunto compacto y la del volumen de una bola limitado por una esfera, expresado como un polinomio de grado  $n$ . El capítulo tres es la parte central de esta tesis y aquí se demuestra, siguiendo las líneas de Roger y Gröger, el teorema del punto fijo de Brouwer, así como el teorema del ángulo agudo de Lions, como corolario. Las aplicaciones a problemas biológicos y algebraicos se presenta en el capítulo cuatro. Este trabajo de tesis concluye en el capítulo 5, en que realizamos un algoritmo básico de cálculo numérico para aproximar puntos fijos de funciones continuas. Al final se presentan las infaltables conclusiones y proyecciones.



# Capítulo 2

## Resultados preliminares

En este capítulo presentamos la definición formal de punto fijo, ejemplos y teorema del Análisis en  $\mathbb{R}^n$  necesarios para la demostración del teorema de Brouwer y sus consecuencias. Todo este capítulo está referido al libro *Análisis Real Vo I* de E. L. Lima, a excepción de los lemas finales.

**Definición 1:** Sea  $X$  un conjunto no vacío,  $A \subseteq X$  y  $f : A \rightarrow X$  una función dada. Un punto  $x_0 \in A$  se llama punto fijo de  $f$  si  $f(x_0) = x_0$ .

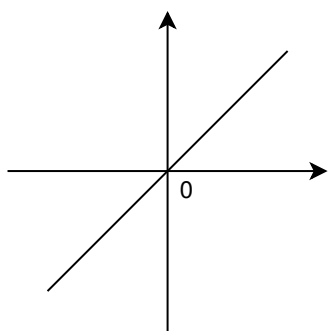
Un teorema de punto fijo es un enunciado que establece condiciones específicas sobre  $A$  y  $f$ , para que  $f$  tenga un punto fijo en  $A$ .

**Ejemplo:** Considere  $A = \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y:

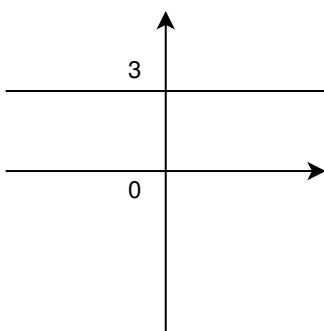
- i  $f(x) = x$ , todos sus puntos son puntos fijos.
- ii  $f(x) = 3$ , tiene un único punto fijo  $x_0 = 3$ .
- iii  $f(x) = -\frac{1}{x}$ , no tiene puntos fijos.

Consideremos ahora el espacio Euclideo.

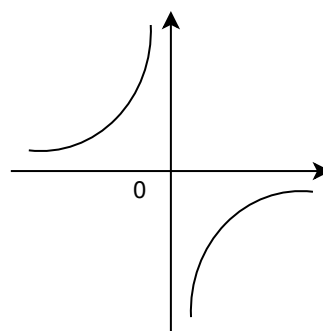
$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$



(i)



(ii)



(iii)

dotado del producto interno.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

y la norma inducida  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Dado un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ , la bola abierta  $B(x_0, r)$  de centro  $x_0$  y radio  $r$ , está definida por el conjunto.

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

**Definición 2 (punto interior):** Sea  $A \subseteq X$ . Un punto  $x_0 \in A$ , se llama punto interior de  $A$ , si existe  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \subseteq A$ . El interior de  $A$ , es el conjunto  $\overset{\circ}{A}$ , dado por.

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ es punto interior de } A\}$$

Diremos que  $A$  es abierto si  $A = \overset{\circ}{A}$ .

Diremos que  $F$  es cerrado de  $\mathbb{R}^n$  si  $\mathbb{R}^n \setminus F$  es abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

La bola cerrada de centro  $x_0$  y radio  $r$  es el conjunto  $B[x_0, r]$  definido así:

$$B[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$$

La frontera de la bola abierta  $B(x_0, r)$  es el conjunto.

$$Fr(B(x_0, r)) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}$$

también llamada esfera de centro  $x_0$  y radio  $r$ , también es denotado  $S[x_0, r]$ .

Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , la clausura de  $A$ , denotada  $\overline{A}$  es el conjunto.

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0\}$$

La frontera de  $A$ , denotada  $Fr(A)$  es el conjunto definido así:

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$$

En particular:

$$Fr(B(x_0, r)) = Fr(\overline{B(x_0, r)}) = S[x_0, r]$$

**Notación 1:**  $Fr(B(x_0, r)) \equiv \partial B(x_0, r)$

**Notación 2:** En adelante denotaremos con  $B^n$  y  $S^{n-1}$ , respectivamente a la bola unitaria y esfera unitaria de  $\mathbb{R}^n$  centradas en el origen.

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

**Definición 3:** Sea  $A \subseteq X$ , donde  $X$  es un espacio métrico, un cubrimiento abierto de  $A$  es una familia  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de conjuntos abiertos de  $X$  tal que  $A \subseteq \cup_{\alpha \in I} G_\alpha$ , aquí  $I$  es un conjunto arbitrario de índices. Un subconjunto  $K$  del espacio métrico  $X$ , es compacto si todo cubrimiento abierto de  $K$  posee un subcubrimiento finito de  $K$ , esto es si  $G_\alpha$  es un cubrimiento abierto de  $K$ , hay un número finito de índices  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  tales que.

$$K \subseteq \cup_{i=1}^p G_{\alpha_i}$$

(Heine - Borel)  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  es compacto  $\Leftrightarrow K$  es cerrado y acotado.

**Definición 4:** Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Decimos que  $f$  es diferenciable en  $x_0 \in \Omega$  si existe una aplicación lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  dependiendo en general de  $x$ , tal que una bola  $B(x_0, r) \subseteq \Omega$  para  $x_0 + h \in B(x_0, r)$  se verifica.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + T(h) + r_{x_0}(h)$$

con.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r_{x_0}(h)\|}{|h|} = 0$$

Observaciones:

- 1) Denotaremos  $f'(x_0) = T$ , llamada la derivada de  $f$  en  $x_0$  y  $f'(x_0)(h)$  se llama diferencial de  $f$  en  $x_0$  y  $h$ .
- 2) En adelante, cuando sea conveniente identificaremos el conjunto  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  de las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  con el conjunto  $M^{m \times n}$  de las matrices  $m \times n$ .
- 3) Cuando  $f$  es diferenciable en  $\Omega$  obtenemos una nueva aplicación.

$$f' : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$x \rightarrow f'(x) : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{lineal}} \mathbb{R}^m$$

- 4) Se demuestra en Análisis Real el siguiente teorema. *Teorema:* Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación diferencial en  $x_0$ , todas las componentes  $f_J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq J \leq m$  de  $f$  tienen todas las derivadas parciales de primer orden en  $x_0$ , y más aún el diferencial de  $f$  en  $x_0$  y  $h$  está dado por:

$$f'(x_0)h = \left[ \frac{\partial f_J(x_0)}{\partial x_i} \right]_{\substack{1 \leq J \leq m \\ 1 \leq i \leq n}} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

La función matricial  $\left[ \frac{\partial f_J(x)}{\partial x_i} \right]$  se llama matriz jacobiano de  $f$  y la denotamos con  $J_f(x)$ , y el respectivo determinante  $\det(J_f(x))$ .

Definiciones:

- i) Sea  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  el espacio de funciones continuas en  $\Omega$ , denotado  $C(\Omega)$ , está definido así:

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$$

- ii) Sea  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . La derivada de orden  $|\alpha|$  de  $f$  es:

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

donde  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

Se tienen los siguientes conjuntos de funciones continuas.

$$C^h(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : D^\alpha f \in C(\Omega) \forall |\alpha| \leq h\}, h \in \mathbb{N}$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{h=1}^{\infty} C^h(\Omega)$$

**Definición:** Sea.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

y  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  un conjunto abierto,  $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Se dice que  $f$  pertenece a la clase  $C^h(\Omega)$ , escribiendo  $f \in C^h(\Omega)$  si cada una de las funciones componentes  $f_j, j = 1, \dots, m$  es de clase  $C^h(\Omega)$ , es decir, si todas las derivadas parciales de  $f_j$ , de orden menor o igual que  $h$  existen y son continuas. Por simplicidad escribiremos  $f \in C^h$ .

**Definición:** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Una función continua  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  se llama de clase  $C^1$  en  $A$  si  $f$  admite una extensión continua a una vecindad abierta de  $A$  en la que  $f$  es continuamente diferenciable (esto es  $f$  es de clase  $C^1$  en esta vecindad).

Para la demostración del teorema de Brouwer necesitamos de los siguientes resultados básicos del Análisis Real.

**Teorema (del valor medio):** Dada  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en el abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , si el segmento de recta que va de  $x$  a  $y$ , denotado  $[x, y]$ , está contenido en  $\Omega$ , entonces existe un número  $\theta \in ]0, 1[$  tal que.

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(x + \theta(y - x)), y - x \rangle$$

**Teorema (Aproximación de Weierstrass):** Sea  $S$  un subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^n$  y una función continua  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ . Entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe un polinomio  $p(x)$ , tal que:

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \forall x \in S$$

**Teorema (Teorema de la función inversa):** Sea  $\Omega$  un conjunto abierto no vacío de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$ . Si  $x_0 \in \Omega$  es tal que  $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ , entonces,  $f$  es una aplicación abierta e inyectiva en una vecindad de  $x_0$ .

**Definición:** El soporte de una función  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , siendo  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , es el conjunto.

$$\text{sop}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}^\Omega$$

**Teorema (Del cambio de variable):** Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  una aplicación inyectiva, de clase  $C^1$ , tal que  $\det(J_g(x)) \neq 0, \forall x \in U$  y  $f : g(U) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $\text{sop}(f)$  es un conjunto compacto de  $g(U)$ . Entonces:

$$\int_{g(U)} f(y) dy = \int_U f(g(x)) |\det(J_g(x))| dx$$

**Definición:** Sea.

$$\begin{aligned} f : U \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^m \\ x &\rightarrow f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{aligned}$$

Se dice que  $f$  es un homeomorfismo si.

- i)  $f$  es biyectiva y
- ii)  $f$  y  $f^{-1}$  son continuas

**Teorema (Del Homeomorfismo):** Sean  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $G : X \rightarrow X$  una contracción estricta (i.e.  $\|Gx - Gy\| \leq h\|x - y\|$  para algún  $0 < h < 1$ ). Entonces  $G : X \rightarrow X$  es un homeomorfismo.

**Lema 1. ([14])** Sea  $A$  un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$ . Entonces, existe  $L > 0$  tal que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in A$$

**Demostración:** Como  $A$  es compacto, del cubrimiento abierto  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  de bolas abiertas de  $A$ , podemos extraer un subcubrimiento finito  $\{U_1, \dots, U_p\}$  de  $A$ , esto es:

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^p U_k$$

de modo que  $f \in C^1(\overline{U}_k)$ ,  $k = 1, \dots, p$  (pues  $f \in C^1(A)$ ). Sea.

$$C_{i,J}^h = \max_{x \in \overline{U}_h} \left\{ \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \right\}$$

$$i, J = 1, 2, \dots, n$$

$$h = 1, 2, \dots, p$$

Como cada  $U_h$  es convexo, el teorema del valor medio implica, que para  $x, y \in U_h$ :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(y)| \leq \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \sum_{J=1}^n C_{i,J}^h \right)}_{L_k} \|x - y\| \quad (1)$$

Si  $x, y \in A$ , pero ambos no se encuentran en la misma  $U_{h_0}$  (es decir  $(x, y) \in A \times A$  pero  $(x, y) \notin U_{h_0} \times U_{h_0}$ ), definimos la aplicación.

$$g : W \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow g(x, y) = \|x - y\|$$

donde  $W = (A \times A) \setminus \bigcup_{h=1}^p (U_h \times U_h)$ . La aplicación  $g$  es continua en  $W$ . Así existe.

$$\min_{(x,y) \in W} g(x, y) = \varepsilon > 0$$

pues  $x \neq y$ , en este caso

$$\|f(x) - f(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x - y\|} \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon^{-1} \text{diam} f(A) \|x - y\| \quad (2)$$

donde  $\text{diam}(S) = \sup\{\|z - w\| : z, w \in S \subseteq \mathbb{R}^n\}$

Tomando.

$$L = \max\{L_1, \dots, L_p, \varepsilon^{-1} \text{diam} f(A)\}$$

donde  $L_h = \sum_{i,J=1}^n C_{i,J}^h$ ,  $h = 1, \dots, p$ , se sigue de (1) y (2) la conclusión del lema.  $\square$

Para enunciar el siguiente Lema, dados el campo vectorial  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  y para cada  $t \in \mathbb{R}$  definimos la aplicación.

$$f_t : A \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que } f_t(x) = x + tF(x), \forall x \in A$$

**Lema 2. ([14])** Si  $A$  es un dominio cerrado y acotado (esto es la cerradura de un subconjunto abierto y convexo) y si  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$  en  $A$ , entonces existe  $\varepsilon > 0$  tal que la función:

$$\varphi : ] - \varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \varphi(t) = \int_A \det(I + tF(x)) dx$$

es un polinomio en  $t$  de grado a lo más  $n$ . Observe que si  $\det(I + tF(x)) \neq 0$  entonces  $\varphi(t) = \text{vol}(f_t(A))$ . (Aquí  $\text{vol}$  significa el volumen, según la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ ).

*Demostración:* Aplicaremos el teorema de cambio de variable para obtener una expresión del volumen de  $f_t(A)$ , cuyas hipótesis que  $f_t$  sea inyectiva y de clase  $C^1$ , y que  $f'_t(x)$  (la derivada del campo  $f_t$  en  $x$ ) sea invertible en  $A$  (esto es que  $\det(J_{f_t}(x)) \neq 0$ ,  $\forall x \in A$ ).

Veamos que  $f_t$  es inyectiva. Sean  $x_1, x_2 \in A$  tal que  $f_t(x_1) = f_t(x_2)$ . Esto implica.

$$x_1 - x_2 = t(F(x_1) - F(x_2)) \Rightarrow \|x_1 - x_2\| = |t| \|F(x_1) - F(x_2)\| \leq L(t) \|x_1 - x_2\|$$

donde  $L$  es la constante obtenida gracias al Lema 1. Luego  $(1 - L)|t| \|x_1 - x_2\| = 0$ .

Tomando  $|t| < L^{-1}$ , resulta  $x_1 = x_2$ . Así  $x_1 = x_2$ .

Así  $f_t$  es inyectiva en  $A$ . Por otro lado cada componente de  $f_t$ ,  $f_t^i(x) = x_i + tF_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$  es de clase  $C^1$ , por lo que  $f_t \in C^1$ . Además  $f'_t(x) = I + tF'(x)$ . Observe aquí que  $f'_t(x)$  es el operador lineal representado por la matriz jacobiana de  $f_t$  en  $x$ . También de la desigualdad.

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\| \text{ obtenida por el Lema 1}$$

fácilmente se obtiene  $\|F'(x)\| \leq L$ .

En consecuencia.

$$\|f'_t(x)\| = \|I + tF'(x)\| \geq \|I\| - |t| \|F'(x)\| \geq 1 - |t|L > 0$$

para  $|t| < L^{-1}$ .

Esto es  $f'_t(x)$  es invertible para  $|t| < L^{-1}$ , lo que implica  $\det(f'_t(x)) > 0$ ,  $\forall |t| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon \in ]0, L^{-1}[$ . Ahora, ya estamos en condiciones de aplicar el teorema de cambio de variable con  $g = f_t$ , y

$$f : g(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = 1$$

$$\text{vol}(f_t(A)) = \int_{f_t(A)} 1 dy = \int_A |\det(J_{f_t}(x))| dx = \int_A |\det(f'_t(x))| dx$$

pero del álgebra lineal se sabe que.

$$\det(f'_t(x)) = \det(I + tF'(x)) = 1 + ta_1(x) + t^2a_2(x) + \cdots + t^na_n(x)$$

donde cada  $a_i, i = 1, \dots, n$  es una función continua (ya que dependen de  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  que son continuas). En consecuencia.

$$\begin{aligned} \text{vol}(f_t(A)) &= \int_A 1dx + t \int_A a_1(x)dx + \cdots + t^n \int_A a_n(x)dx \\ &= \alpha_0 + t\alpha_1 + \cdots + t^n\alpha_n \end{aligned}$$

donde  $\alpha_i = \int_A a_i(x)dx, i = 1, \dots, n; \alpha_0 = \text{vol}(A)$  □

**Lema 3. ([13])** Sea  $\Omega$  abierto, convexo, de  $\mathbb{R}^n$  y  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$ . Si  $\|F(x)\| = C$  constante  $> 0, \forall x \in \Omega$ , entonces  $J_F(x) = 0$ .

*Demostración:* Sea ([11], Proposición 4.1)  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n), F_J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ .

De la hipótesis:

$$\|F(x)\|^2 = \sum_{J=1}^n |F_J(x)|^2 = C^2 > 0, \forall x \in \Omega$$

Tomando las derivadas parciales de la anterior expresión.

$$\sum_{J=1}^n 2 \frac{\partial F_J}{\partial x_i}(x) \cdot F_J(x) = 0, i = 1, \dots, n$$

Por lo que tenemos el sistema.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} F_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} F_2 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_1} F_n &= 0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} F_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} F_2 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_2} F_n &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n} F_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} F_2 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} F_n &= 0 \end{aligned}$$

que puede ser escrito como:

$$AF = 0$$

donde  $F$  es identificado con una columna.

$$A = \left[ \frac{\partial F_J(x)}{\partial x_i} \right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = J_F(x), \quad J_F(x) \in M^{n \times n}$$



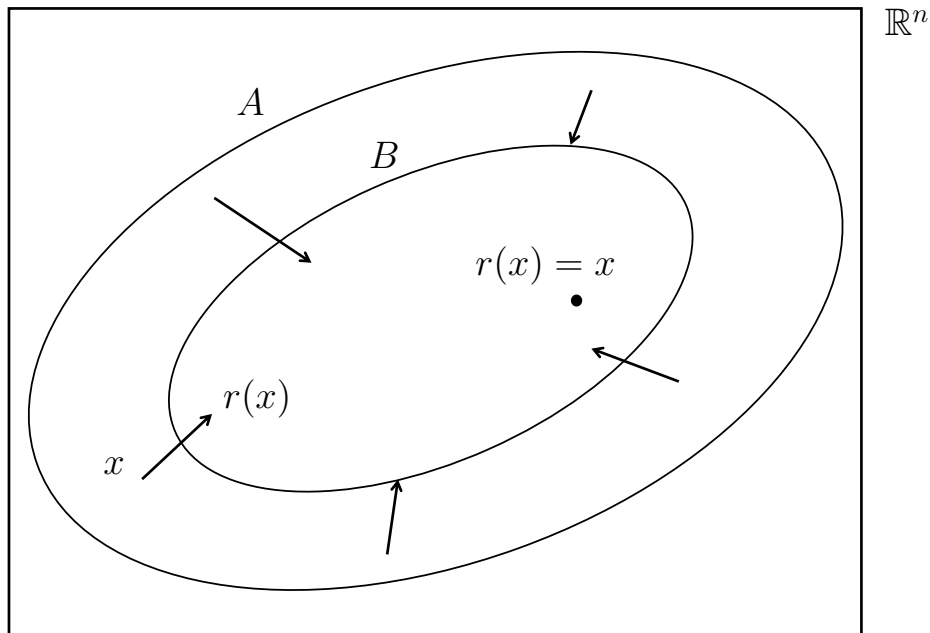
Del álgebra lineal como  $F \neq 0$ , se obtiene  $A = 0$ . □

**Definición:** Sea  $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Una retracción de  $A$  sobre  $B$  es una aplicación continua  $r : A \rightarrow B$  tal que  $r(x) = x, \forall x \in B$ . Si tal retracción existe,  $B$  se llama retracto de  $A$ . Geométricamente una retracción colapsa continuamente el conjunto  $A$  en  $B$  manteniendo todos los puntos de  $B$ .

*Ejemplo:*  $A = \mathbb{R}^n, B = \{x \in A : \|x\| \leq R\}$  para  $R > 0$ . Definimos:  $r : A \rightarrow B$ , mediante.

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in B \\ R \frac{x}{\|x\|}, & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

Entonces, uno puede verificar que  $r$  es una retracción de todo el espacio  $\mathbb{R}^n$  sobre la bola cerrada  $B$ .



## Capítulo 3

# El Teorema del Punto Fijo de Brouwer y el Teorema del Ángulo Agudo

Este capítulo es el corazón de este trabajo de tesis, aquí probaremos el resultado prometido, esto es el teorema del punto fijo de Brouwer solo con herramientas del Análisis. Para conseguir nuestro objetivo primero probaremos un teorema que tiene valor independiente de nuestro trabajo, llamado el teorema de la no retracción.

Para motivar nuestro estudio, veamos un ejemplo sencillo, en dimensión uno, sobre la no existencia de retracciones.

*Ejemplo:* No existe ninguna función diferenciable  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \{-1, 1\}$  tal que  $\gamma(1) = 1$  y  $\gamma(-1) = -1$ .

En efecto, supongamos absurdamente que existe una función diferenciable  $\gamma_0$  con las propiedades indicadas. Obviamente  $\gamma_0$  es continua; también  $\gamma'_0(x) = 0, \forall x_0 \in [-1, 1]$ . De lo contrario, por ejemplo,  $\gamma'_0(x) > 0$  para algún  $x_0 \in [-1, 1]$ . Así  $\gamma_0$  es creciente en  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ , para algún  $\delta > 0$  y  $\gamma_0(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[)$  es un intervalo en  $R_{\gamma_0}$ , lo que no puede ser. En consecuencia, del teorema fundamental del cálculo.

$$0 = \int_{-1}^1 \gamma'_0(x) dx = \gamma_0(1) - \gamma_0(-1) = 2$$

lo que es una contradicción.

**Teorema (de la no retracción):** No existe un función  $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$  de clase  $C^1$ , tal que  $f(x) = x, \forall x \in S^{n-1}$ .

*Demostración:* Por el absurdo, supongamos que tal función existe. Para  $t \in [0, 1]$ , construimos  $f_t : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por:

$$\begin{aligned} f_t(x) &= (1-t)x + tf(x), \quad x \in B^n \\ &= x + t(f(x) - x) \end{aligned}$$

Haciendo  $F(x) = f(x) - x$ , podemos escribir.

$$f_t(x) = x + tF(x), \quad x \in B^n, t \in [0, 1]$$

donde obviamente  $F \in C^1(B^n)$  (pues  $f \in C^1(B^n)$ ) y  $f_t \in C^1(B^n)$ . Por el Lema 1, existe  $L > 0$  tal que

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|$$

También para  $x \in B^n$

$$\|f_t(x)\| = \|(1-t)x + tf(x)\| \leq (1-t)\|x\| + t\|f(x)\| \leq (1-t) + t = 1$$

Así  $f_t(B^n) \subseteq B^n$ .

Por otro lado, de la prueba del Lema 2,  $f_t : B^n \rightarrow B^n$  es inyectiva, para  $0 \leq t \leq \frac{1}{L}$ .

Ahora nos dirigimos a verificar las condiciones del teorema del cambio de variable en  $\mathbb{R}^n$ , para evaluar el volumen de  $B^n$ , y llegar a la contradicción buscada.

Veamos que  $B^n = f_t(B^n)$ ,  $t \in J_0 = [0, t_0]$  con  $t_0 \in \mathbb{R}$  a determinar.

En efecto solo resta probar  $B^n \subseteq f_t(B^n)$ . Primero observemos que la derivada de  $f_t$  (matriz jacobiana de  $f_t$  en  $x$ ) puede ser vista como una aplicación lineal  $f'_t(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por:

$$f'_t(x) = I + tF'(x); \quad x \in B^n$$

Luego

$$|f'_t(x)| = |I + tF'(x)| \geq |I| - |tF'(x)|, \quad t \in [0, 1]$$

De la condición de Lipschitz de  $F$ , obtenemos  $|F'(x)| \leq L$  y así  $|tF'(x)| \leq |t|L$ .

Pero

$$|t|L \leq 1 \Leftrightarrow |t| < L^{-1}$$

En consecuencia, se tiene para  $0 \leq t \leq t_0$ ,  $0 < t_0 < L^{-1}$ ,  $|f'_t(x)| \geq 1 - |t|L > 0$ .

Luego, por el teorema de aplicación inversa  $f'_t(x)$  es invertible y  $f_t$  es una aplicación abierta,  $\forall t \in [0, t_0]$ .

Denotemos por simplicidad  $B^n \equiv B$ .

Ahora probaremos que

$$\overset{\circ}{B} \subseteq f_t(\overset{\circ}{B})$$

donde  $\overset{\circ}{B}$  es interior de  $B$ .

Si fuera que  $\mathring{B} \not\subseteq f_t(\mathring{B})$ , existe

$$y_0 \in \mathring{B} \cap \partial f_t(\mathring{B})$$

$(\partial f_t(\mathring{B})) \equiv$  frontera de  $f_t(\mathring{B})$ . Se tiene

$y_0 \in \partial f_t(\mathring{B}) \subseteq \partial f_t(B) \subseteq f_t(B)$ . donde el último contenido es debido a que  $f_t(B)$  es compacto (cerrado y acotado) por ser la imagen de un compacto vía una función continua, y los conjuntos cerrados absorben su frontera.

Luego existe  $(x_r)_{r \geq 1} \subseteq$  tal que

$$f_t(x_r) \rightarrow y_0 \quad (\alpha)$$

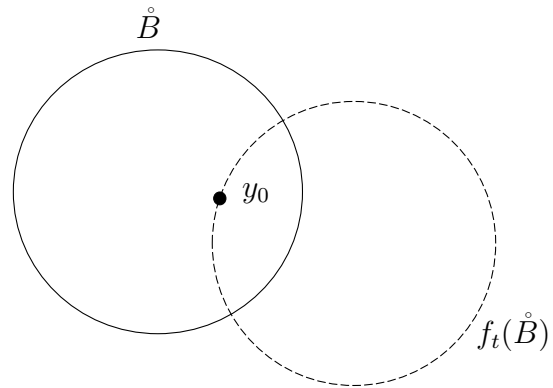
Por otro lado como  $B$  es compacto de  $\mathbb{R}^n$  existe una subsucesión  $(x_{r_n})$  de  $(x_r)_{r \geq 1}$  tal que

$$x_{r_n} \rightarrow x_0 \in B$$

y de la continuidad de  $f_t$  resulta

$$f_t(x_{r_n}) \rightarrow y_0 \quad (\beta)$$

De  $(\alpha)$  y  $(\beta)$ , y la unicidad del límite  $f_t(x_0) = y_0$ , por lo que  $y_0 \in f_t(B)$ .



Ahora como  $f_t(\mathring{B})$  es un abierto ya que  $f_t$  es una aplicación abierta en  $[0, t_0]$  se tiene  $\partial f_t(\mathring{B}) \cap f_t(\mathring{B}) = \emptyset$  y así

$$y_0 \notin f_t(\mathring{B})$$

lo que implica que  $x_0 \notin \mathring{B}$ . Entonces  $x_0 \in S^{n-1}$ , y como  $f_t|_{S^{n-1}} = I_{S^{n-1}}$ , resulta

$$x_0 = f_t(x_0) = y_0$$

por lo que  $y_0 \in S^{n-1}$ , lo que es una contradicción con el hecho  $y_0 \in \mathring{B}$ .

Así se ha probado que  $\mathring{B} \subseteq f_t(B^n)$ .

De todo lo anterior  $B^n = f_t(B^n)$ .

Ya tenemos que  $f_t : B^n \rightarrow B^n$  es una aplicación biyectiva para  $t \in [0, t_0]$ ,  $0 < t_0 < L^{-1}$ .

Recordando que  $f_t \in C'(B^n)$  podemos aplicar el *Lema 2* y obtener.

$$0 < t \equiv \text{vol}(B^n) = \text{vol}(f_t(B^n)) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n \equiv \varphi(t), \quad t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \cap ]0, t_0]$$

Entonces.

$$\varphi(t) = \text{vol}(B^n), \quad \forall t \in [0, t_1], \quad t_1 = \min\{\varepsilon, t_0\}$$

Ahora, como  $\varphi$  es un polinomio, resulta:

$$\varphi(t) = \text{vol}(B^n), \quad \forall t \in [0, 1]$$

En particular

$$\text{vol}(f_1(B^n)) = \varphi(1) = \text{vol}(B^n) > 0$$

Por otro lado, de la definición de  $f_t$ :

$$f_1(x) = f(x) \in S^{n-1}$$

luego

$$\langle f_1(x), f_1(x) \rangle = |f_1(x)|^2 = |f(x)|^2 = 1$$

Del Lema 3,  $J_{f_1}(x) = 0$ ,  $\forall x \in B^n$  y  $\det(J_{f_1}(x)) = 0$ ,  $\forall x \in B^n$ .

De esto y el teorema de cambio de variable se tiene:

$$\text{vol}(f_1(B^n)) = \int_{B^n} |\det(J_{f_1}(x))| dx = \int_{B^n} 0 dx = 0$$

es decir

$$0 < \varphi(1) = 0$$

lo que es una contradicción. Esto concluye la demostración del teorema de la no retracción.  $\square$

*Teorema de Brouwer (para funciones diferenciables):* Si  $f : B^n \rightarrow B^n$  es de clase  $C^1$  entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $B^n$ .

*Demostración:* Sea  $f \in C^1(B^n)$  y supongamos absurdamente que  $f(x) \neq x, \forall x \in B^n$ .

Vamos a construir una función (retracción) que contradiga el teorema de la no retracción.

Definimos:

$$\omega : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \rightarrow \omega(x) = x - \left( \frac{1 - \|x\|^2}{1 - \langle x, f(x) \rangle} \right) f(x)$$

Se observa que:

i)  $\omega$  está bien definida, pues  $0 < 1 - \langle x, f(x) \rangle, \forall x \in B^n$ .

En efecto, para  $x \in B^n$ :

$$0 < |x - f(x)|^2 = |x|^2 - 2\langle x, f(x) \rangle + |f(x)|^2$$
$$\leq 2 - 2\langle x, f(x) \rangle$$

Dividiendo por 2 resulta.

$$0 < 1 - \langle x, f(x) \rangle, \forall x \in B^n$$

ii)  $\omega(x) \neq 0, \forall x \in B^n$ , de lo contrario existe  $x_0 \in B^n$  tal que.

$$x_0 - \left( \frac{1 - \|x_0\|^2}{1 - \langle x_0, f(x_0) \rangle} \right) f(x_0) = 0$$

de donde se obtiene.

$$f(x_0) = x_0$$

lo que es una contradicción.

Por estas observaciones podemos definir.

$$g : B^n \rightarrow B^n \text{ tal que } g(x) = \frac{\omega(x)}{\|\omega(x)\|}, x \in B^n$$

Entonces  $\|g(x)\| = 1$ , por lo que  $g(x) \in S^{n-1}, \forall x \in B^n$ .

Resulta así que  $g(B^n) \subseteq S^{n-1}$ .

Además  $g \in C^1(B^n)$ , y  $g(x) = x, \forall x \in S^{n-1}$ . Luego  $g$  es una retracción de clase  $C^1$ , de  $B^n$  en  $S^{n-1}$ , lo que contradice el teorema de la no retracción.  $\square$

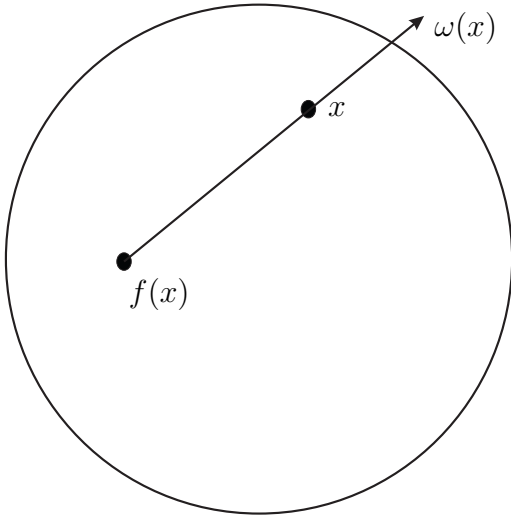
**Observación:** La elección de la función  $\omega$  está ligada a la intersección del rayo, que va de  $f(x)$  a  $x$ , y que es paralelo al vector  $x - f(x)$ , con la esfera  $S^{n-1}$ . En efecto, al suponer  $f(x) \neq x$  el semirayo  $\overrightarrow{f(x)x}$  intersecta a  $S^{n-1}$  en  $\omega(x)$ , donde.

$$\begin{aligned} \omega(x) &= x + \lambda(x - f(x)) \\ &= (1 + \lambda) \left[ x - \frac{\lambda}{1 + \lambda} f(x) \right], \lambda \neq -1 \end{aligned}$$

Con  $\|\omega(x)\| = 1$ .

Finalmente probaremos la versión continua del teorema de Brouwer.

**Teorema (de Brouwer):** Sea  $f : B^n \rightarrow B^n$  una función continua, entonces  $f$  tiene un punto fijo.



*Demostración:* Por el teorema de aproximación de Weierstrass, para la función continua  $f : B^n \rightarrow B^n$ , dado cualquier  $\frac{1}{\nu} > 0$ , con  $\nu \in \mathbb{N}$ , existe un polinomio  $p_\nu(x)$  tal que.

$$\|f(x) - p_\nu(x)\| < \frac{1}{\nu}, \forall x \in B^n$$

entonces.

$$\|p_\nu(x)\| < \|f(x)\| + \frac{1}{\nu} \leq 1 + \frac{1}{\nu}$$

esto es.

$$\left\| \frac{p_\nu(x)}{1 + \frac{1}{\nu}} \right\| \leq 1$$

por lo que la aplicación  $\frac{p_\nu}{1 + \frac{1}{\nu}} : B^n \rightarrow B^n$  está bien definida y es de clase  $C^1(B^n)$ . Luego por el teorema anterior, existe  $x_{0\nu} \in B^n$  tal que.

$$\frac{p_\nu(x_{0\nu})}{1 + \frac{1}{\nu}} = x_{0\nu}$$

lo que implica.

$$\begin{aligned} \|f(x_{0\nu}) - x_{0\nu}\| &= \left\| f(x_{0\nu}) - \frac{p_\nu(x_{0\nu})}{1 + \frac{1}{\nu}} \right\| \\ &\leq \|f(x_{0\nu}) - p_\nu(x_{0\nu})\| + \left\| p_\nu(x_{0\nu}) - \frac{p_\nu(x_{0\nu})}{1 + \frac{1}{\nu}} \right\| \\ &< \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} = \frac{2}{\nu} \end{aligned}$$

Luego.

$$0 \leq \inf_{x \in B^n} \|f(x) - x\| \leq \|f(x_{0\nu}) - x_{0\nu}\| < \frac{2}{\nu}$$

Y tomando límite, cuando  $\nu \rightarrow \infty$  resulta.

$$\inf_{x \in B^n} \|f(x) - x\| = 0$$

Ahora, como  $B^n$  es compacto y la aplicación  $x \rightarrow \|f(x) - x\|$  es continua en  $B^n$ , existe  $x^* \in B^n$  tal que.

$$\|f(x^*) - x^*\| = \inf_{x \in B^n} \|f(x) - x\| = 0$$

Por lo tanto, existe  $x^* \in B^n$  tal que  $f(x^*) = x^*$ , es decir,  $f$  tiene un punto fijo.  $\square$

**Corolario 1:** Sean  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $R > 0$  y  $T : \overline{B(x_0, R)} \rightarrow \overline{B(x_0, R)}$  continua. Existe  $x_1 \in \overline{B(x_0, R)}$  tal que  $T(x_1) = x_1$ .

*Demostración:* Consideremos la aplicación.

$$S : B^n \rightarrow B^n$$

$$x \rightarrow S(x) = \frac{1}{R}[T(x_0 + Rx) - x_0]$$

que es continua, pues  $T$  es continua. Observe que si  $x \in B^n$ ;  $\|(x_0 + Rx) - x_0\| = R\|x\| \leq R$ , esto es  $x_0 + Rx \in \overline{B(x_0, R)}$ . Como  $T(B^n) \subseteq B^n$  se tiene.

$$\|S(x)\| = \frac{1}{R}\|T(x_0 + Rx) - x_0\| \leq \frac{1}{R}R = 1, x \in B^n$$

por lo que  $S(x) \in B^n$ .

En estas condiciones podemos aplicar el teorema de Brouwer. Así existe  $\hat{x}_1 \in B^n$  tal que  $S\hat{x}_1 = \hat{x}_1$ , lo que implica.

$$T(x_0 + R\hat{x}_1) = x_0 + R\hat{x}_1$$

es decir que existe  $x_1 = x_0 + R\hat{x}_1 \in \overline{B(x_0, R)}$  tal que  $T(x_1) = x_1$   $\square$

El siguiente corolario, llamado teorema del ángulo agudo de Lions, es de gran aplicabilidad en el Análisis y el Álgebra, en particular permite resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

**Corolario 2 (Teorema del ángulo agudo de Lions):** Sea  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua. Suponga que existe  $R > 0$ , tal que.  $\langle p(\xi), \xi \rangle \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ , con  $\|\xi\| = R$ . Entonces existe  $\xi_0 \in \overline{B(0, R)}$  tal que  $p(\xi_0) = 0$ .

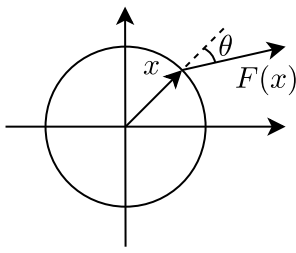
*Demostración:* Supongamos absurdamente que  $p(\xi) \neq 0, \forall \xi \in \overline{B(0, R)}$ . Construimos la aplicación.

$$F : \overline{B(0, R)} \rightarrow \overline{B(0, R)}$$

$$\xi \rightarrow F(\xi) = -\frac{R}{\|p(\xi)\|}p(\xi)$$

Que es continua, por ser producto de funciones continuas. Obviamente  $\|F(\xi)\| \leq R$  y así  $F(\xi) \in \overline{B(0, R)}$ .





Por el Corolario 1, existe  $\xi_0 \in \overline{B(0, R)}$  tal que  $F(\xi_0) = \xi_0$ , esto es.

$$-\frac{R}{\|p(\xi_0)\|}p(\xi_0) = \xi_0$$

Obviamente  $\|\xi_0\| = R$ , y.

$$\langle p(\xi_0), \xi_0 \rangle = \langle p(\xi_0), -\frac{R}{\|p(\xi_0)\|}p(\xi_0) \rangle = -R\|p(\xi_0)\| < 0$$

lo que contradice la hipótesis. □

Ahora nos centraremos en resolver el problema

$$F(x) = b$$

para  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua, con  $b \in \mathbb{R}^n$  dado.

**Definición:** La aplicación  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es coerciva si.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\langle F(x), x \rangle}{\|x\|} = +\infty$$

**Ejemplo:**

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \rightarrow F(x, y) = (x, y)$$

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \frac{\langle F(x, y), (x, y) \rangle}{\|(x, y)\|} = \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + y^2} = +\infty$$

**Teorema:** Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua y coerciva. Entonces, dado  $b \in \mathbb{R}^n$ , la ecuación.

$$F(x) = b$$

admite al menos una solución.

*Demostración:* Aplicaremos el teorema del ángulo agudo. Consideramos la función  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por:

$$P(x) = F(x) - b$$

Luego,  $P$  es continua.

De la coercividad de  $F$ ,  $\forall M > 0, \exists r > 0$  tal que.

$$\frac{\langle F(x), x \rangle}{\|x\|} \geq 0, \text{ si } \|x\| > r$$

Se tiene.

$$\begin{aligned} \langle P(x), x \rangle &= \langle F(x) - b, x \rangle = \langle F(x), x \rangle - \langle b, x \rangle \\ &\geq \langle F(x), x \rangle - \|b\|\|x\| = \|x\| \left( \frac{\langle F(x), x \rangle}{\|x\|} - \|b\| \right) \end{aligned}$$

Luego, tomando  $M = \|b\| + 1 > 0$ , existe  $R > 0$ :

$$\frac{\langle F(x), x \rangle}{\|x\|} \geq \|b\| + 1, \text{ si } \|x\| > R_0$$

por lo que para  $\|x\| = R = R_0 + 1$ .

$$\langle P(x), x \rangle \geq (R_0 + 1) > 0$$

Así se cumple todas las hipótesis del Teorema del Ángulo Agudo. En consecuencia existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $P(x_0) = 0$ , esto es:  $F(x_0) = b$ .

El siguiente ejemplo muestra que el teorema de Brouwer, infelizmente no es aplicable a espacios de dimensión infinita.

*Ejemplo:* Sea  $\ell^2(\mathbb{R}) = \{x = (a_r)_{r \geq 1} / a_r \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{r=1}^{\infty} a_r^2 < \infty\}$  dotado de la norma.

$$\|x\| = \left( \sum_{r=1}^{\infty} a_r^2 \right)^{1/2}, x = (a_r)_{r \geq 1}$$

Evidentemente  $\dim \ell^2(\mathbb{R}) = \infty$ . Consideremos la bola unitaria cerrada en  $\ell^2(\mathbb{R})$ :

$$B = \{x = (a_r)_{r \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{R}) : \|x\| \leq 1\}$$

y su cáscara.

$$S = \{x = (a_r)_{r \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{R}) : \|x\| = 1\}$$

Definamos  $f : B \rightarrow B$  mediante la regla.

$$f(x) = (\sqrt{1 - \|x\|}, a_1, a_2, \dots), x = (a_r)_{r \geq 1} \in \ell^2(\mathbb{R})$$

Entonces  $f$  es evidentemente continua, porque sus componentes son continuas (según la topología de  $\ell^2(\mathbb{R})$ ). Supongamos que existe  $x_0 \in B$  tal que  $f(x_0) = x_0$ , donde  $x_0 = (a_{0r})_{r \geq 1}$ . Entonces  $\|f(x_0)\|^2 = \|x_0\|^2$  y  $\sqrt{1 - \|x_0\|^2} + a_{01}^2 + \dots = a_{01}^2 + a_{02}^2 + \dots$ , lo que implica.

$$\sqrt{1 - \|x_0\|^2} = 0 \Rightarrow \|x_0\| = 1$$

que reemplazando en la relación  $f(x_0) = x_0$  implica que  $a_{01} = 0, a_{02} = 0, \dots, a_{0r} = 0, \dots$ , por lo que se tiene  $x_0 = 0$  y  $\|x_0\| = 1$ , lo que es una contradicción.

Sin embargo estableceremos sin demostración, un resultado importante llamado el teorema del punto fijo de Schauder, que es un corolario del teorema del punto fijo de Brouwer, lo extiende a espacios de de dimensión infinita.

*Teorema (de Schauder):* Sea  $X$  un espacio de Banach y  $K$  un subconjunto convexo, acotado, cerrado de  $X$ . Si  $f : K \rightarrow K$  es una aplicación compacta, entonces  $f$  tiene un punto fijo.

*Demostración:* ver Schauder [18].

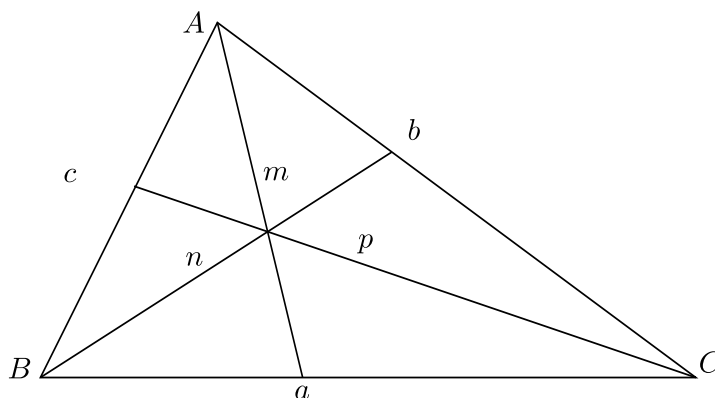
# Capítulo 4

## Aplicaciones

Existen una diversidad de aplicaciones del Teorema de Brouwer (y sus consecuencias) a diversas áreas del conocimiento. En esta sección mostraremos ejemplos simples que nos permitirán visualizar la gran aplicabilidad de esta potente herramienta.

**Aplicación 1:** El problema de construir un triángulo, dadas las tres bisectrices internas fue propuesto en 1842 por Terquem [20], concluyendo que se llegaba a un nuevo problema algebraico, “una ecuación de grado muy alto” (de grado 16), sin resolverla, dando lugar a un sin número de investigaciones que no resolvían satisfactoriamente el problema.

Terquem expresó las longitudes de las bisectrices en función de los lados mediante las relaciones.



$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{b+c} \sqrt{bc[(b+c)^2 - a^2]} \\ n &= \frac{1}{a+c} \sqrt{ac[(a+c)^2 - b^2]} \\ p &= \frac{1}{a+b} \sqrt{ab[(a+b)^2 - c^2]} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Eliminando los radicales en [4.1] obtenemos el sistema no lineal.

$$\begin{aligned} bc[(b+c)^2 - a^2] - (b+c)^2 m^2 &= 0 \\ ac[(a+c)^2 - b^2] - (a+c)^2 n^2 &= 0 \\ ab[(a+b)^2 - c^2] - (a+b)^2 p^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

La imposibilidad de obtener mediante construcciones geométricas (regla y compás) y la dificultad de probar la existencia de solución a partir de ecuaciones algebraicas de alto orden, condujo a Mironescu y Panaitopol [15] en 1995 a formular el problema planteado de las tres bisectrices, como un nuevo problema de punto fijo en tres nuevas variables relacionadas con los lados del triángulo.

Ellos aplicaron el Teorema del punto fijo de Brouwer para probar la existencia de la solución  $(a, b, c)$  del sistema (4.2). A seguir presentamos el método. La primera ecuación de (4.2) puede ser escrita como:

$$4m^2 = \left[ (b+c) + \left( \frac{b-c}{b+c} \right) a \right]^2 - [a + (b-c)]^2$$

lo que implica:

$$2(b+c) = \sqrt{4m^2 + (c+a-b)^2} + \sqrt{4m^2 + (a+b-c)^2} \quad (4.3)$$

Ahora haciendo.

$$\begin{aligned} a &= y + z, \\ b &= z + x, \\ c &= x + y \end{aligned}$$

Resulta.

$$\begin{aligned} x &= \frac{b+c-a}{2} \\ y &= \frac{c+a-b}{2} \\ z &= \frac{a+b-c}{2} \end{aligned}$$

que son positivos, y así (4.3) se escribe como:

$$x = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{m^2 + y^2} - y \right] + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{m^2 + z^2} - z \right] \quad (4.4)$$

De igual manera obtenemos.

$$y = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{n^2 + z^2} - z \right] + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{n^2 + x^2} - x \right] \quad (4.5)$$

$$z = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{p^2 + x^2} - x \right] + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{p^2 + y^2} - y \right] \quad (4.6)$$

Con la finalidad de definir adecuadamente una aplicación a la cual aplicaremos nuestro teorema del punto fijo, introducimos la siguiente función intermedia.

Para  $\alpha > 0$  definimos la función continua.

$$f_\alpha : [0, +\infty[ \rightarrow ]0, \alpha/2] \text{ tal que } f_\alpha(t) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\alpha^2 + t^2} - t \right]$$

Entonces:

i)  $f'_\alpha(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{t^2}{\alpha^2 + t^2}} - 1 \right] < 0$ , por lo que  $f_\alpha$  es decreciente  $\forall t \geq 0$ .

ii)  $|f'_\alpha(t)| = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}} \right) < \frac{1}{2}$ ,  $\forall t > 0$ , y así por el valor medio de Lagrange:

$$|f_\alpha(t_1) - f_\alpha(t_2)| < \frac{1}{2} |t_1 - t_2|, \forall t_1 \neq t_2, \text{ en } [0, +\infty[ \quad (4.7)$$

Ahora, retornando al sistema (4.4) y (4.6), puede escribirse.

$$\begin{aligned} x &= f_m(y) + f_m(z) \\ y &= f_n(x) + f_n(z) \\ z &= f_p(x) + f_p(y) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Motivados por (4.8) construimos la aplicación.

$$F : K \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow F(x, y, z) = (f_m(y) + f_m(z), f_n(x) + f_n(z), f_p(x) + f_p(y))$$

donde  $K = [0, m] \times [0, n] \times [0, p] \subseteq \mathbb{R}^3$ , que obviamente es un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^3$ . Además como las componentes de  $F$  son continuas, resulta que  $F$  es continua en  $K$ .

Ahora, observemos que.

$$|f_m(y) + f_m(z)| \leq |f_m(y)| + |f_m(z)| < \frac{1}{2}|y| + \frac{1}{2}|z| \leq \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m = m$$

donde la segunda desigualdad es debido a [4.7]. Similarmente obtenemos.

$$\begin{aligned} |f_n(x) + f_n(z)| &\leq n \\ |f_p(x) + f_p(y)| &\leq p \end{aligned}$$

Luego  $F(x, y, z) \in [0, m] \times [0, n] \times [0, p]$ . Así  $F : K \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow K$ , continua, por lo que existe  $(x_0, y_0, z_0) \in K$  tal que  $F(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0)$  debido al teorema del punto fijo de Brouwer, esto es (4.4)-(4.6) admite una solución.

Ahora supongamos que existe  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  en  $K$ , tal que  $P_0 \neq P_1$  y  $F(P_0) = P_0$  y  $F(P_1) = P_1$ .

Luego, de (4.7) obtenemos.

$$\|F(P_0) - F(P_1)\| < \frac{1}{2}\|P_0 - P_1\|$$

es decir.

$$\|P_0 - P_1\| < \frac{1}{2}\|P_0 - P_1\|$$

Lo que es una contradicción. En consecuencia  $P_0 = P_1$ . Así la solución a [4.4] -[4.6] es única. Por tanto existe un único triángulo de lados  $a, b$  y  $c$  que tienen bisectrices interiores de medidas  $m, n$  y  $p$ . □

**Aplicación 2:** Al modelar una enfermedad infecciosa endémica (es decir que dura varios años) Hethcothe y Tudor [8] plantean un sistema de ecuaciones integrales no lineales de Volterra, que a seguir describiremos breve mente.

El modelo planteado por ellos tiene cuatro características fundamentales.

Primera, incluye la dinámica vital (está el proceso de nacimientos y muertes).

Segunda, se asume que la infección proporciona inmunidad permanente.

Tercera, se incluye la inmunización de los recién nacidos y también de los susceptibles de todas las edades.

Cuarta, y lo más significativo es que se presente distribuciones de probabilidad biológicamente razonables para el periodo de exposición y el periodo infeccioso.

La población se divide en tres clases disjuntas:

- La clase infectada  $I$ , que contiene a los sujetos infectados.
- La clase susceptible  $S$ , que contiene a aquellos que pueden ser infectados (esto es los saludables).
- La clase recuperados  $R$ , que contiene a los sujetos que tienen inmunidad permanente debido a inmunización o debido a una infección anterior.

En este caso, en biomatemática, se denomina modelo  $SIR$ . Se asume que la población es constante y uniforme. Las ecuaciones integrales planteadas son:

$$I(t) = I_0(t)e^{-ut} + \int_0^t \beta S(x)I(x)P(t-x)e^{-u(t-x)} dx \quad (4.9)$$

$$R(t) = R_0e^{-ut} + \int_0^t \beta S(x)I(x)[1 - P(t-x)]e^{-u(t-x)} dx \\ + \varphi(1 - e^{-ut}) + \int_0^t \theta S(x)e^{-u(t-x)} dx \quad (4.10)$$

$$S(t) + R(t) + I(t) = 1 \quad (4.11)$$

$P$  es la probabilidad de quedar infectados. El sistema (4.9) - (4.11) puede escribirse como la ecuación matricial integral no lineal de Volterra

$$Z(t) = F(t) + \int_0^t A(t-y)G(Z(y))dy \quad (4.12)$$

donde  $Z(t) = \begin{pmatrix} I(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$

Por simplicidad en la exposición, daremos un modelo simplificado asociado a (4.12). Sea  $x(t)$  el número de individuos de una población de tamaño constante, que están infectados por una enfermedad infecciosa en el instante  $t$ . Supondremos que la razón instantánea de individuos infectados por unidad de tiempo está modelada por la expresión en  $f(t, x(t))$  siendo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función que generalmente involucra.

- la tasa de transferencia de los individuos  $x(t)$  de la clase  $S(t, x(t))$  para la clase  $I(t, x(t))$ .
- La probabilidad  $P_1(t, x(t))$  de los individuos  $x(t)$  que permanecen infectados  $t$  unidades de tiempo después de darse la infección.
- La probabilidad  $P_2(t, x(t))$  de los individuos  $x(t)$  estén vivos en el tiempo  $t_0 + t$  dado que estén vivos en el tiempo  $t_0$ .

La constante  $\mu$ , llamado razón de contacto indica el número medio de contactos (suficientes para la contaminación) de un infectado por unidad de tiempo, que usualmente es pequeño.

Con estas consideraciones, inferimos que en el tiempo  $t_0 \leq s \leq t$ , la suma de individuos infectados es.

$$\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Ahora, si  $a(t)$  representa un factor de decrecimiento asociado al número de individuos infectados inicialmente, y el número de los que están en proceso de inmunización, esto es



los que están en la clase  $R$ .

Luego, el número total de individuos infectados en el instante  $t$ , en el periodo  $[t_0, t]$  está dado por la expresión.

$$(Q_x)(t) = a(t) + u \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Entonces se plantea el siguiente problema: Hallar una función  $x(t)$  que sea una solución de equilibrio para la epidemia, esto es:

$$x(t) = a(t) + u \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Biológicamente, una solución de equilibrio ayuda a explicar si la enfermedad persiste o no, en una población infectada.

Debe observarse que los puntos de equilibrio de un sistema son aquellos donde la tasa de crecimiento de las poblaciones de individuos susceptibles e infectados permanece constante. Para resolver el problema, daremos explícitamente las hipótesis requeridas. Obtendremos un resultado general para un espacio de Banach reflexivo  $E$ .

Sea  $f : [t_0, t] \times R \rightarrow E$  una función Caratheodory, esto es, satisface:

- i) Para  $x \in E$ , la función  $t \rightarrow f(t, x)$  es medible.
- ii) Para cada  $t \in [t_0, t]$ , la función  $x \rightarrow f(t, x)$  es continua.

También supondremos que existe una función  $\Phi(t, s)$  tal que para cada  $t$ , la función  $s \rightarrow \Phi(t, s)$  es decreciente y.

$$\|f(t, x)\|_E \leq \Phi(t, \|x\|_E), \forall t \in [t_0, t], \forall x \in E$$

Y para cada  $R > 0$  se verifica.

$$0 < \int_{t_0}^t \psi(\tau, R) d\tau < \infty, \forall t$$

(Para nuestro modelo, podemos considerar  $E = \mathbb{R}^n$ ). Tenemos el siguiente resultado.

**Teorema:** Con las hipótesis anteriores y con  $a \in C([t_0, t], E)$  existe una razón de contacto  $\mu$  suficientemente pequeña tal que la epidemia posee una solución de equilibrio.

*Demostración:* Consideremos  $R > \|a\|_{C([t_0, t], E)} > 0$ .

Tomemos  $u \in C([t_0, t], E)$ , con  $\|u\|_{C([t_0, t], E)} \leq R$ .

Luego.

$$\begin{aligned}\|Qu(t)\|_E &\leq \|a(t)\|_E + \mu \int_{t_0}^t \psi(\tau, \|u(\tau)\|_E) d\tau \\ &\leq \|a\|_{C([t_0, t], E)} + \mu \int_{t_0}^t \psi(\tau, R) d\tau \leq R\end{aligned}$$

siempre que:

$$0 < \mu < \frac{R - \|a\|}{\int_{t_0}^t \psi(\tau, R) d\tau}$$

Así  $Q : \overline{B}(0, R) \rightarrow \overline{B}(0, R)$ , donde  $\overline{B}(0, R)$  de la bola unitaria cerrada, de centro el origen y de radio  $R$ , del espacio  $C([t_0, t], E)$ .

También, de la condición *ii*) para  $f$ , se tiene que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|u - v\|_{C([t_0, t], E)} < \delta \Rightarrow \|u(s) - v(s)\|_E < \delta, \forall s \in [t_0, t]$ , lo que implica

$$\|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_E < \frac{\varepsilon}{2\mu|t - t_0|}, u, v \in \overline{B}(0, R)$$

Luego, para  $t \in [t_0, t]$ :

$$\begin{aligned}\|(Qu)(t) - (Qv)(t)\|_E &\leq \mu \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_E ds \\ &\leq \mu \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|_E ds \\ &\leq \mu \frac{\varepsilon}{2\mu|t - t_0|} \cdot |t - t_0| = \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Tomando el máximo en  $[t_0, T]$  resulta.

$$\|Qu - Qv\|_{C([t_0, t], E)} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Así  $Q : \overline{B}(0, R) \rightarrow \overline{B}(0, R)$  es continua.

También usando el teorema de Ascolí - Arzelá se prueba que  $Q(\overline{B}(0, R))$  es relativamente compacto en  $C([t_0, T], E)$ . De todo lo anterior  $Q : \overline{B}(0, R) \rightarrow \overline{B}(0, R)$  es un operador compacto. Luego por el teorema de Schauder  $Q$  posee un punto fijo en  $\overline{B}(0, R)$ , por lo que existe una solución de equilibrio para la epidemia.

**Aplicación 3:** Ahora discutiremos la existencia de "soluciones débiles" del problema.

$$\begin{cases} -\nabla u - \lambda u + u^3 = f \text{ sobre } \Omega \\ u = 0 \text{ en } \Gamma \end{cases} \quad (\diamond)$$

donde  $\Omega$  es un conjunto abierto, acotado, regular, de  $\mathbb{R}^3$ , con frontera en  $\Gamma$ ,  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Decimos que  $u \in H_0^1(\Omega)$  es solución débil de  $(\diamond)$  si.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} u^3 dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (\diamond)$$

Para probar la existencia de la solución débil, es usual aplicar el método de Galerkin, que a grandes rasgos consiste en proyectar el problema  $(\diamond)$  a espacios adecuados de dimensión finita, y luego aproximarse a la solución del problema  $(\diamond)$ , mediante un pasaje al límite. Aquí ilustraremos solamente la aplicación del teorema del ángulo agudo a la solución del problema aproximado (S.A.) resultante en el proceso dado por el método de Galerkin. Como  $H_0^1(\Omega)$  es separable, podemos construir una base hilbertiana  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J, \dots$  (ver Brezis [2] página 144).

Definimos  $V_m = [\omega_1, \dots, \omega_m]$  (espacio generado por los  $m$  primeros elementos de la base).

Obviamente  $V_m \subseteq V_{m+1}$ ,  $V_m \subseteq H_0^1(\Omega)$  y  $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m} = H_0^1(\Omega)$ .

Queremos determinar.

$$u_m = \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i \in V_m$$

tal que:

$$(S.A.) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega_1 dx - \lambda \int_{\Omega} u_m \omega_1 dx + \int_{\Omega} u_m^3 \omega_1 dx = \int_{\Omega} f \omega_1 dx \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega_2 dx - \lambda \int_{\Omega} u_m \omega_2 dx + \int_{\Omega} u_m^3 \omega_2 dx = \int_{\Omega} f \omega_2 dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega_m dx - \lambda \int_{\Omega} u_m \omega_m dx + \int_{\Omega} u_m^3 \omega_m dx = \int_{\Omega} f \omega_m dx \end{array} \right. \quad \vdots$$

Aquí observemos que podemos definir un isomorfismo.

$$\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow V_m$$

$$\xi \rightarrow \Phi(\xi) = \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i$$

donde  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ . Se tiene que.

$$|\Phi(\xi)|_{H_0^1}^2 = |\Phi(\xi)|_{V_m}^2 = \sum_{i=1}^m \xi_i^2 = |\xi|_{\mathbb{R}^m}^2$$

Por lo que  $\Phi$  es un isomorfismo isométrico, así podemos identificar  $u_m(\xi)$ .

Con la finalidad de resolver (S.A) aplicando el teorema del ángulo agudo, definimos:

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\xi \rightarrow F(\xi) = (F_1(\xi), \dots, F_m(\xi))$$

donde:

$$F_J(\xi) = \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla \omega_J dx - \lambda \int_{\Omega} u_m \omega_J dx + \int_{\Omega} u_m^3 \omega_J dx - \int_{\Omega} f \omega_J dx$$

$$\equiv (\nabla u_n, \nabla \omega_J) - \lambda + (u_m^3, \omega_J) - (f, \omega_J), J = 1, 2, \dots, m$$

Primero veamos que  $F$  es continua. Sea  $\xi, \xi_0 \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\xi \rightarrow \xi_0$  en  $\mathbb{R}^m$ . Luego.

$$|F_J(\xi) - F_J(\xi_0)| \leq \sum_{i=1}^m |\xi_i - \xi_{i0}| |(\nabla \omega_i, \nabla \omega_J)| + |\lambda| \sum_{i=1}^m |(\omega_i, \omega_J)| |\xi_i - \xi_{i0}|$$

$$+ |((\sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i)^3 - (\sum_{i=1}^m \xi_{i0} \omega_i)^3, \omega_J)|$$
(4.13)

Pero el último término puede estimarse así

$$I \leq \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^m |\xi_i - \xi_{i0}| |\omega_i| \right] \left[ \left( \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i \right)^2 + \left| \sum_{i=1}^m \xi_i \omega_i \right| \sum_{i=1}^m \xi_{i0} \omega_i + \left( \sum_{i=1}^m \xi_{i0} \omega_i \right)^2 \right] dx$$
(4.14)

Luego de (4.13) y (4.14), tomando límite cuando  $\xi \rightarrow \xi_0$ , usando el teorema de convergencia dominada resulta que.

$$|F_J(\xi) - F_J(\xi_0)| \rightarrow 0, J = 1, 2, \dots, m$$

lo que prueba la continuidad de  $F$ .

Ahora determinaremos un  $R > 0$ , tal que  $\langle F(\xi), \xi \rangle > 0, \forall |\xi| = R$ .

En efecto

$$\langle F(\xi), \xi \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u_m|^2 dx + \int_{\Omega} u_m^3 u_n dx - \int_{\Omega} f u_m dx$$

$$\geq \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx - \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx - |f|_2 |u_m|_2$$
(4.15)

donde  $|f|_2 = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx$  y  $\lambda_1$  es el primer autovalor para el problema de Dirichlet del operador de Laplace, (por lo que se tiene  $|u|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} |\nabla u|_2^2, \forall u \in H_0^1(\Omega)$ ).

Se tiene en (4.15)

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq |\nabla u_m|_2^2 - \frac{\lambda}{\lambda_1} |\nabla u_m|_2^2 - \frac{|f|_2}{\sqrt{\lambda_1}} |\nabla u_m|_2$$

Observando que podemos tomar

$$|u|_{H_0^1(\Omega)} = |\nabla u|_2, \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Se puede expresar la desigualdad como.

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) |u_m|_{H_0^1}^2 - \frac{|f|_2}{\sqrt{\lambda_1}} |u_m|_{H_0^1} \quad (4.16)$$

Pero.

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) |\xi|_{\mathbb{R}^n} - \frac{|f|_2}{\sqrt{\lambda_1}} |\xi|_{\mathbb{R}^n} > 0 \\ \Rightarrow & \left[ \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1}\right) |\xi|_{\mathbb{R}^n} - \frac{|f|_2}{\sqrt{\lambda_1}} \right] |\xi|_{\mathbb{R}^n} > 0 \Rightarrow |\xi|_{\mathbb{R}^n} > \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda}\right) \frac{|f|_2}{\sqrt{\lambda_1}} \end{aligned}$$

Para  $\lambda < \lambda_1$ .

Ahora, tomando  $R > \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda}\right) \frac{|f|_2}{\sqrt{\lambda_1}}$ , para  $\lambda < \lambda_1$  resulta que de (4.16) que

$$\langle F(\xi), \xi \rangle > 0, \forall |\xi|_{\mathbb{R}^n} = R$$

Observese que  $R$  no depende de  $m$ . En consecuencia, por el teorema del ángulo agudo de Lions, existe  $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que.

$$F(\xi_0) = 0, |\xi_0| \leq R$$

Esto es  $F_J(\xi_0)$ ,  $J = 1, 2, \dots, m$ , por lo que (S.A) admite una solución  $\xi_0$ , que corresponde a  $u_m$  buscada.

# Capítulo 5

## Un algoritmo numérico

En este capítulo presentamos la resolución de aproximación numérica a la solución de un sistema de ecuaciones no lineales, usando la metodología del punto fijo.

El siguiente teorema es una consecuencia del teorema de Brouwer y el teorema del punto fijo de de Banach, y será la herramienta fundamental para conseguir nuestro objetivo.

**Teorema (Burden - Faires [3]):** Sea  $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / a_i \leq x_i b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , donde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ . Si  $G : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua, tal que  $G(D) \subseteq D$ , entonces  $G$  tiene un punto fijo en  $D$ .

Además si  $G \in C^1(D)$  y existe  $0 < \alpha < 1$  tal que.

$$\left| \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{\alpha}{n}, \forall x \in D$$

donde  $G = (G_1, G_2, \dots, G_n)$ ,  $G_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces la sucesión  $\{x^{(h)}\}_{h \geq 1} \subseteq D$ , definida por un  $x^{(0)}$  arbitrario en  $D$ , y generada por.

$$x^{(h)} = G(x^{(h-1)}), \forall h \geq 1$$

converge al único punto fijo  $p \in D$  y.

$$\|x^{(h)} - p\|_{\infty} \leq \frac{\alpha^h}{1 - \alpha} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty}$$

donde  $\|x\|_{\infty} = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

**Ejemplo:** Consideremos el sistema no lineal

$$\begin{aligned} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 &= 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Muestre que admite una única solución en

$$D = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_i \leq 3, i = 1, 2, 3\}$$

e iterar comenzando con  $x^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)$  hasta obtener una aproximación menor que  $10^{-5}$  en la norma infinito.

*Solución:* Primero traducimos nuestro problema a un problema de punto fijo.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} \cos(x_2 x_3) \frac{1}{6} \equiv g_1(x_1, x_2, x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \operatorname{sen} x_3 + 1.06} - 0.1 \equiv g_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_3 &= -\frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60} \equiv g_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Consideremos.

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow G(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x)) \end{aligned}$$

Ahora, consideremos el conjunto convexo y compacto de  $\mathbb{R}^3$ .

$$D = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$$

Luego, para  $x = (x_1, x_2, x_3) \in D$  se tiene:

$$\begin{aligned} |g_1(x)| &\leq \frac{1}{3} |\cos(x_2 x_3)| + \frac{1}{6} \leq 0.5 \leq 1 \\ |g_2(x)| &\leq \frac{1}{9} \sqrt{1 + \operatorname{sen} x_3 + 1.06} - 1 < 0.09 \leq 1 \\ |g_3(x)| &\leq \frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} + \frac{10\pi - 3}{60} \leq \frac{1}{20} e + \frac{10\pi - 3}{60} < 0.61 \leq 1 \end{aligned}$$

Luego  $G(x) \in D$ . Por el teorema del punto fijo de Brouwer (observando que  $G$  es continua), existe un punto  $p \in D$  tal que  $G(p) = p$ . Obviamente  $p$  es una solución del sistema original (5.1) (pero no es única, debido a la raíz cuadrada).

Estudiemos ahora la acotación de las derivadas parciales. (Observe que  $G \in C^1(D)$ ). Se tiene

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right| = 0, \quad \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right| = 0, \quad \left| \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right| = 0$$

También

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right| &\leq \frac{1}{3} |x_3| |\text{sen}(x_2 x_2)| \leq \frac{1}{3} \text{sen}1 < 0.281 \\
\left| \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \right| &\leq \frac{1}{3} |x_2| |\text{sen}(x_2 x_3)| \leq \frac{1}{3} \text{sen}1 < 0.281 \\
\left| \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right| &= \frac{|x_1|}{9\sqrt{x_1^2 + \text{sen}x_3 + 1.06}} < \frac{1}{9\sqrt{0.281}} < 0.238 \\
\left| \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \right| &= \frac{|\cos x_3|}{8\sqrt{x_1^2 + \text{sen}x_3 + 1.06}} < \frac{1}{18\sqrt{0.218}} < 0.119 \\
\left| \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \right| &= \frac{|x_2|}{20} e^{-x_1 x_2} \leq \frac{1}{20} e < 0.14 \\
\left| \frac{\partial g_3}{\partial x_2} \right| &= \frac{|x_1|}{20} e^{-x_1 x_2} \leq \frac{1}{20} e < 0.14
\end{aligned}$$

Así obtenemos.

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq 0.281$$

Por lo que de  $\frac{\alpha}{3} = 0.281$ , resulta  $\alpha = 0.843 < 1$ . Luego el punto fijo  $p$ , solución de (5.2) es único (pero no es único como solución de (5.1)).

Para aproximarnos a  $p$ , elegimos  $x^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1) \in D$ . Según el teorema de Burden et.al., la sucesión.

$$\begin{aligned}
x_1^{(h)} &= \frac{1}{3} \cos(x_2^{(h-1)} x_3^{(h-1)}) + \frac{1}{6} \\
x_2^{(h)} &= \frac{1}{9} \sqrt{(x_1^{(h-1)})^2 + \text{sen}x_3^{(h-1)} + 1.06} - 0.1 \\
x_3^{(h)} &= \frac{1}{20} e^{-x_1^{(h-1)} x_2^{(h-1)}} - \frac{10\pi - 3}{60}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

converge a la única solución del sistema (5.2). Los resultados en la tabla siguiente, fueron generados hasta

$$\|x^{(h)} - x^{(h-1)}\|_{\infty} < 10^{-5}, h = 1, 2, 3, 4, 5$$

La estimativa para el error es.

$$\|x^{(5)} - p\|_{\infty} \leq \frac{(0.843)^5}{1 - 0.843} (0.423) < 1.15$$

lo que no es una buena aproximación. Pero computando la solución tenemos.

$$p = (0.5, 0, -\pi/6) \approx (0.5, 0, -5235987757)$$

Y luego



$$\|x^{(5)} - p\| \leq 2 \times 10^{-8}$$

□

**Cuadro 5.1:** Tabla generada por el sistema (5.3)

$k$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ $
0	0.10000000	0.10000000	-0.10000000	
1	0.49998333	0.00944115	-0.52310127	0.423
2	0.49999593	0.00002557	-0.52336331	$9.4 \times 10^{-3}$
3	0.50000000	0.00001234	-0.52359814	$2.3 \times 10^{-4}$
4	0.50000000	0.00009993	-0.52359847	$1.2 \times 10^{-5}$
5	0.50000000	0.00009992	-0.52359877	$3.1 \times 10^{-7}$

# Capítulo 6

## Conclusiones y perspectivas

En esta tesis nos hemos ocupado de una versión analítica del teorema del punto fijo de Brouwer (T.P.F.B) y sus aplicaciones. En particular hemos realizado de forma concreta, simple y didáctica la demostración de este famoso teorema de punto fijo, que usualmente es demostrado con técnicas sofisticadas de la Matemática. Nos hemos esforzado en clarificar completamente el trabajo de J. Milnor concluyendo que son suficientes las herramientas del análisis en  $\mathbb{R}^n$  para obtener este notable resultado del punto fijo.

Esperamos que nuestro trabajo sirva como ilustración de que es posible hacer completamente accesible potentes resultados en Matemática avanzada usando solo conocimientos básicos al alcance de cualquier iniciado en ciencias e ingeniería.

Las aplicaciones presentadas en geometría, biomatemática y análisis numérico, permite apreciar el amplio espectro de utilidad del T.P.F.B., así como motivar el desarrollo de estudios posteriores en modelamiento matemático. Evidentemente hay varias líneas de investigación que nuestro trabajo permitiría proyectar.

1. Versiones del teorema de Brouwer y la metodología empleada en esta tesis, en funciones multivaluadas.
2. Estudios de simplificación de corolarios de T.P.F.B., como el teorema de Leray - Schauder y el teorema de Schaefer.
3. Versiones del T.P.F.B., extendidas a dos o más operadores.

# Bibliografía

- [1] Bohl, P. *über die Bewegung eines mechanischen systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage. J.Reine Angew. Math* 1904; 179-276.
- [2] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Universitext, Springer Paris*; 1983.
- [3] Burden, R. L.; Faires, J. D. *Numerical Analysis, 10<sup>o</sup> edition, Cengage Learning, USA*.
- [4] Dinca, G.; Mawhin, J. *A constructive fixed point approach to the existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths. . 2010. Bulletin of the Belgian Mathematical Mathematical Society - Simon Stevin, Volume 17. pp. 333-341.*
- [5] Dugundji, J. *Topology*. 1966. Allyn and Bacon, Boston.
- [6] Gröjter, K. A. *A simple proof of the Brouwer fixed point theorem*. 1980. 293-295.
- [7] Hadamard, J. *Introduction a la theorie des fonctions dune variable (Volume 2)*. 1910. Hermann & Fils. 437-477.
- [8] Hethcote, H. W.; Tudor, D. W. *Integral Equation models for endemic infections diseases*. 1980. 37-47.
- [9] Kesavan, S. *Topics in functional analysis and applications . 2003. New Age International, LTD Publisher*.
- [10] Lax, P.D. *Change of variables in multiple integrals*. 1999. Amer. Math. Monthly. 497-501.
- [11] Lions, J. L. *Quelques méthodes de resolution des problems aux limites non lineaires*. 1969. Dunod, Paris.
- [12] Lima E. L. *Analise Real Vol 2 IMPA Projecto Euclides*.
- [13] Martins P. R. Vasconcellos C. F. *teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Cadernos do IME, Serie Matematica . Vol V.8. 2014*.
- [14] Milnor, J. *Analytics proof of the "Hairy ball theorem."and the Brouwer fixed point theorem*. 1978. Amer. Math. Monthly. 521-524.
- [15] Mironescu P, Panaitopol L., *The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths*. 1994. The american mathematical monthly. pp. 58-60.

- [16] Poincaré, H. *Sur les courbes définies par les équations différentielles*. 1886. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 167-244.
- [17] Roger, C. R. *A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed point theorem*. 1980. Amer. Math. Monthly. 525-527.
- [18] Schauder, J. *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*. 1930. Studia Math. 171-180.
- [19] Sperner, E. *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensional und des Gebietes*. 1928. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 265-272.
- [20] Terquem, O. *Considerations sur le triangle rectiligne d'après*. 1842. Nouv. Ann. Math. 79-87.