Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Zeros, interpolació i l'anell de funcions holomorfes en una regió

Autora: Judit Jansat Ballarín

Directora:	Carme Cascante Canut
Realitzat a:	Departament de Matemàtiques i Informàtica
Barcelona,	19 de juny de 2021

Abstract

In this work, we study the construction of holomorphic functions with prescribed zeros on a domain given by the Weierstrass zeros theorem and use this result and Mittag-Leffler's theorem to interpolate a sequence of numbers by a holomorphic function.

As an application of the previous topics, we study some algebraic properties of the ring $\mathcal{H}(\Omega)$ and its ideals. In particular, we prove a Bézout identity in this ring given by Wedderburn lemma. Finally, we prove Bers' theorem, which states that if the holomorphic function rings on two domains are algebraically equivalent, then the respective domains are conformally equivalent.

Resum

En aquest treball, estudiarem la construcció de funcions holomorfes amb zeros prefixats en una regió donada pel Teorema de zeros de Weierstrass i l'utilitzarem, juntament amb el teorema de Mittag-Leffer per resoldre el problema clàssic d'interpolació per funcions holomorfes.

Com a aplicació dels resultats mencionats, estudiarem algunes propietats algebraiques de l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$ i dels seus ideals. En particular, provarem una identitat de Bézout en aquest anell a conseqüència del Lema de Wedderburn. Per últim, provarem el Teorema de Bers, un resultat que diu que si els espais de funcions holomorfes en dues regions són algebraicament equivalents, aleshores els dominis corresponents són conformement equivalents.

2010 Mathematics Subject Classification. 30C15, 30H50, 20D20, 30D30

Agraïments

Vull agrair a la Dra. Carme Cascante per proposar-me el tema d'aquest treball, per la seva paciència, les seves correccions i l'ajuda proporcionada en tot aquest procés. A la meva família i amics pel suport oferit al llarg d'aquests anys i per confiar en mi en tot moment. Per tot això, moltes gràcies.

Índex

1 Introducció

Sigui X un subespai de funcions holomorfes en una regió Ω del pla (un obert connex), un problema clàssic de la Teoria de funcions és la descripció dels conjunts de zeros de les funcions de X i la construcció de funcions d'aquest subespai amb zeros prefixats aquesta regió. En aquest treball considerem el cas en què $X = \mathcal{H}(\Omega)$ i provarem l'existència de funcions holomorfes amb zeros prefixats en Ω.

L'any 1876, el matemàtic alemany Karl Weierstrass va donar solució a aquesta qüestió per a l'espai de funcions enteres en el seu intent d'establir una expressió general per les funcions meromorfes en $\mathbb{C}$. Tal com explica en la seva obra *Zur Theorie der eindrutigen analytischen Functionen*, es va trobar amb la necessitat de resoldre abans aquest problema de zeros: *"hatte ich jedoch ... zuvor eine in der Theorie der transcendent ganzen Functionen bestende ... Lüke auszuf füllen, was mir erst nach manchen vergeblichen Versuchen vor nicht langer Zeit in befriedigender Weise gelungen ist."* (Per fer això, primer necessitava omplir un forat en la teoria de funcions enteres, el qual, després d'un nombre d'intents fútils, només he pogut aconseguir resoldre de manera satisfactòria recentment.)

El problema de zeros plantejat és el següent; prenem una successió discreta $\{z_n\}_n$ de punts repetits tantes vegades com la multiplicitat desitjada i busquem una funció holomorfa que s'anul·li en aquesta successió amb les multiplicitats prefixades. La idea de la construcció és considerar un producte $\prod_n f_n$ de manera que per cada n la funció f_n s'anul·li en z_n amb multiplicitat 1. Si es té un nombre finit de punts, només cal considerar un producte de monomis de la forma $(z - z_n)$. Pel cas general, però, cal escollir les funcions f_n de manera adequada per tal que el corresponent producte infinit convergeixi.

La novetat en la construcció de Weierstrass va ser la utilització de factors de convergència que no influenciessin en el comportament dels zeros. D'aquesta manera va poder construir els anomenats factors elementals de Weierstrass, els quals es correspondrien a les funcions f_n del producte infinit descrit. El treball de Weierstrass va ser molt ben acollit per la comunitat matemàtica. Henri Poincaré esmentà aquesta aportació en el seu obituari per Weierstrass (1898): *" La principale contribution de Weierstrass aux progrés de la théorie des fonctions est la découverte des facteures primaries."* (La principal contribució de Weierstrass en la teoria de funcions és el descobriment dels factors elementals.)

La construcció d'aquests factors va permetre a Karl Weierstras provar l'ara anomenat Teorema de zeros de Weierstrass (o simplement Teorema de Weierstrass) i deduir-ne com a conseqüència la representació de funcions meromorfes com a quocient de funcions enteres.

El primer resultat que considerem en aquest treball és una extensió del Teorema clàssic de Weiestrass per a funcions holomorfes en una regió.

Teorema A. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ una regió i sigui $\{z_n\}_n \subset \Omega$ una successió sense punts d'acumulació en Ω tal que cada z_n només es repeteix un nombre finit m_n de vegades. Llavors existeix una funció $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\mathcal{Z}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z_n\}$ i $m(f, z_n) = m_n$, on $m(f, z_n)$ és la multiplicitat de z_n com a zero de f.*

El segon objectiu del treball és demostrar un teorema d'interpolació per funcions holomorfes en una regió Ω. En aquest cas, el problema plantejat és el següent; donada una successió $\{z_n\}_n \subset \Omega$ de punts diferents dos a dos i $\{b_n\}_n$ una successió de valors complexos, trobar una funció $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z_n) = b_n$ per cada n. La resolució d'aquesta qüestió utilitza dues eines principals; el Teorema de Weierstrass i el Teorema de Mittag-Leffler. Aquest segon teorema publicat l'any 1876 permet trobar funcions meromorfes amb pols i parts principals prefixades.

De fet, veurem que els dos resultats esmentats permeten provar un Teorema d'interpolació més general, el qual interpola també els valors d'un nombre finit de derivades.

Teorema B. *Sigui $\{z_n\}_n \subset \Omega$ una successió de punts de Ω diferents dos a dos sense punts d'acumulació en Ω i donada, per cada $n \geq 1$, una successió finita de nombres complexos $(b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \ldots, b_{N_n}^{(n)})$, $N_n \geq 0$. Aleshores existeix una funció entera f tal que per cada $n \geq 1$ i cada j, $0 \leq j \leq N_n$, satisfà*

$$f^{(j)}(a_n) = b_j^{(n)}.$$

En aquesta memòria veurem primer aquests tres teoremes en el cas particular que $\Omega = \mathbb{C}$, ja que requereixen eines més senzilles i ens donen una idea de l'esquema a seguir per provar el cas general.

La demostració del Teorema de Weierstrass i el Teorema d'interpolació, així com l'estudi de les seves conseqüències més immediates constitueix la primera part d'aquest treball. La segona part està dedicada a estudiar algunes propietats algebraiques de l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$, com a aplicacions del Teorema de Weierstrass i el Teorema d'Interpolació. Observi el lector que $\mathcal{H}(\Omega)$ amb les operacions de suma i producte és un anell commutatiu unitari, de fet, és una $\mathbb{C}$-àlgebra (un $\mathbb{C}$ espai vectorial amb estructura d'anell).

En primer lloc ens centrarem a estudiar algunes nocions de divisibilitat en l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$. A conseqüència del Teorema de Weierstrass veurem que tota família no buida de funcions d'aquest l'anell té un màxim comú divisor. Seguidament, com a aplicació del Teorema d'interpolació provarem que en aquest anell es compleix la identitat de Bézout.

Teorema C. *Siguin $f_1, f_2, \ldots f_n$ funcions no nul·les de $\mathcal{H}(\Omega)$ i sigui d un màxim comú divisor d'aquestes funcions. Aleshores existeixen funcions $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ holomorfes en Ω tals que*

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots \alpha_n f_n \equiv d.$$

Aquest darrer Teorema és conseqüència del Lema de Wedderburn, publicat l'any 1915 per J.H.M. Wedderburn en [11].

Els resultats comentats fins ara ens permeten estudiar l'estructura dels ideals de l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$. Recordem que un ideal I és un subanell amb la propietat que si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $f \in I$ aleshores $gf \in I$. A més, un ideal I és finitament generat per les funcions $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ si és de la forma

$$I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i f_i : \, g_i \in \mathcal{H}(\Omega) \right\}$$

i un ideal és principal si existeix una funció $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $I = \langle f \rangle$.

Evidentment, tot ideal principal és finitament generat. En aquest treball provarem l'equivalència entre aquests dos tipus d'ideals i els ideals tancats, resultats que recollim en el següent teorema.

Teorema D. *Sigui I un ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$. Llavors són equivalents:*

a) I és finitament generat.

b) I és principal.

c) I és tancat.

En l'estudi dels ideals de $\mathcal{H}(\Omega)$ que farem, donarem un exemple d'ideal no tancat i que per tant no es troba en el diagrama anterior. Construirem aquest ideal amb l'ajuda del Teorema de Weierstrass.

Com a última aplicació provarem el Teorema de Bers, un teorema publicat l'any 1948 en [2] que relaciona l'estructura algebraica dels anells sobre dues regions del pla amb l'estructura conforme de les respectives regions. Per demostrar aquest teorema, seguirem un esquema semblant al de H.L. Royden en [8] el qual fa ús de la caracterització dels ideals maximals de l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$.

Observem que si dues regions del pla Ω_1 i Ω_2 són conformement equivalents, és a dir, si existeix una aplicació bijectiva i holomorfa $F : \Omega_1 \to \Omega_2$, aleshores l'aplicació $\phi : \mathcal{H}(\Omega_2) \to \mathcal{H}(\Omega_1)$ definida per $\phi(f) = f \circ F$ és un isomorfisme que preserva constants. En altres paraules, ϕ envia les funcions constants a elles mateixes.

El Teorema de Bers, demostra el recíproc d'aquest resultat.

Teorema E (Teorema de Bers)**.** *Siguin Ω_1 i Ω_2 dues regions de $\mathbb{C}$, llavors existeix un isomorfisme que preserva constants entre $\mathcal{H}(\Omega_1)$ i $\mathcal{H}(\Omega_2)$ si i només si Ω_1 i Ω_2 són biholomorfes.*

En resum, aquesta memòria té com a objectius construir funcions holomorfes amb zeros o valors prefixats en una regió del pla i estudiar, com a aplicació, propietats de l'anell de funcions holomorfes en aquesta regió i dels seus ideals.

Els resultats d'aquest treball estan basats principalment en [3] i [5]. En les demostracions dels teoremes de Weierstrass i Mittag-Leffler generals m'he basat en [4] i [9] i pels casos en $\mathbb{C}$ també he consultat [10]. En l'estudi dels resultats sobre ideals i sobre l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$ he consultat [1] i [8]. Finalment, l'obra [7] m'ha servit per posar en context els diferents resultats estudiats en aquest treball.

Estructura de la Memòria

Per tal d'assolir els nostres objectius, la memòria està redactada com segueix.

En la secció 2 es donen alguns conceptes bàsics que utilitzarem al llarg del treball. En primer lloc, es fa un breu recordatori sobre la convergència en l'espai de funcions holomorfes en una regió. Seguidament, s'introdueix el concepte de convergència de productes infinits i es presenten alguns resultats relacionats.

En la tercera secció es demostren el Teorema de Weierstrass i el Teorema d'interpolació per funcions enteres. També es dedueix el Teorema de factorització de Weierstrass. Aquest capítol inclou també el Teorema de Mittag-Leffler, el qual és una eina fonamental en la prova del Teorema d'interpolació.

En la següent secció es demostren les versions generals d'alguns dels resultats per funcions enteres donats en la secció 3.

En la Secció 4 es donen diferents aplicacions del Teorema de Weierstrass i el Teorema d'Interpolació en l'estructura algebraica de l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$. Primer es presenta el Lema de

Wedderburn i es prova que en $\mathcal{H}(\Omega)$ tota família de funcions té un màxim comú divisor. Tot seguit, s'estudia l'estructura dels ideals d'aquest anell i, finalment, acabem la secció demostrant el Teorema de Bers. El capítol també inclou el Lema de Royden, un resultat previ a la demostració del Teorema de Bers.

El treball inclou un Annex on es dóna una demostració del Teorema de Runge i un corol.lari que s'utilitza en la demostració de la versió general del Teorema de Mittag-Leffler i per provar que tot ideal tancat és principal. Incloem aquestes demostracions en l'annex perquè, tot i que el Teorema de Runge és un resultat fonamental en el treball, no és un dels objectius principals d'aquests.

2 Preliminars

Aquesta primera secció inclou alguns resultats i conceptes bàsics sobre l'espai $\mathcal{H}(\Omega)$ que utilitzarem al llarg del treball.

En primer lloc, recordarem la noció de convergència de successions en $\mathcal{H}(\Omega)$ així com un teorema clàssic del matemàtic Karl Weierstrass sobre aquestes successions. Seguidament, donarem una definició de convergència de productes infinits i algunes de les seves propietats. Acabarem provant una proposició que serà essencial en la demostració del Teorema de zeros de Weierstrass.

2.1 Convergència de successions en $\mathcal{H}(\Omega)$

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ és un obert, $\{f_n\}_n \subset \mathcal{C}(\Omega)$ una successió de funcions contínues en Ω i $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, la successió $\{f_n\}_n$ convergeix a f en $\mathcal{C}(\Omega)$ si per a tot compacte $K \subset \Omega$ la successió $\{f_n\}_n$ convergeix a f uniformement sobre K.

En el cas de tenir una successió de $\mathcal{H}(\Omega)$ es verifica el següent teorema de Weierstrass.

Teorema 2.1. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$, es verifica:*

a) L'espai $\mathcal{H}(\Omega)$ és un subespai tancat de Ω. Equivalentment, si $\{f_n\}_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ convergeix (en $\mathcal{C}(\Omega)$) cap a $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, llavors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

b) Per cada $k \geq 1$ la funció $\phi_k : \mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ definida per $\phi_k(f) = f^{(k)}$ és contínua. En altres paraules, si $\{f_n\}_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ és una successió que convergeix uniformement sobre compactes de Ω a $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, aleshores $\{f_n^{(k)}\}_n$ convergeix uniformement a $f^{(k)}$ sobre compactes de Ω.

2.2 Productes infinits de nombres complexos

Iniciem la secció recordant la noció de convergència de productes infinits de nombres complexos.

A diferència de la convergència de sèries de funcions, perquè un producte infinit convergeixi no és suficient veure que la sèrie de productes parcials tendeix a un nombre de $\mathbb{C}$, ja que amb aquesta definició es tindrien certes mancances que dificultarien el nostre propòsit.

La primera és que si hi ha un zero entre els termes a multiplicar, el producte infinit val zero independentment de tots els altres termes. En aquest cas, si el producte d'una successió $\{z_n\}_{n\geq 2}$ no convergeix, afegint un primer terme $z_1 = 0$, tots els productes parcials valdrien zero i, per tant, el seu límit també.

Per altra banda, un producte infinit podria valdre zero sense que cap dels seus factors ho fos. Per exemple, si $z_n = \frac{1}{2}$ per tot n, aleshores $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k = \frac{1}{2^n}$ que tendeix a 0. Aquesta propietat dificulta un dels nostres objectius, trobar funcions holomorfes que s'anul·lin únicament quan s'anul·len els factors del producte.

Per aquests motius, es dóna la següent definició de convergència de productes infinits.

Definició 2.2. *Si* $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}$, *es diu que el producte infinit* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *és convergent si i només si se satisfà alguna de les dues situacions següents:*

i) Per cada $n \geq 1$, $z_n \neq 0$ *i la successió de productes parcials* $p_N = \prod_{n=1}^{N} z_n$ *convergeix cap a un nombre* $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *En aquest cas, diem que el valor del producte infinit és* p *i escrivim* $p = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$.

ii) Existeix un enter n_0 *tal que* $z_n \neq 0$ *per tot* $n > n_0$ *i* $\prod_{n=1}^{\infty} z_{n+n_0}$ *convergeix en el sentit de l'apartat anterior. En aquest cas, es diu que* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = 0$.

De la definició de convergència de productes infinits es dedueix que si $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ convergeix, llavors la successió de termes generals $\{z_n\}_n$ té per límit 1. En particular, existeix $n_0 \geq 1$ complint que per a cada $n \geq n_0$, z_n està en el semiplà de la dreta, és a dir, $\mathrm{Re}\,(z_n) > 0$.

A continuació, es presenten algunes caracteritzacions de la convergència de productes infinits de nombres complexes amb part real positiva.

Proposició 2.3. *Sigui* $\{z_n\}_n \subset \{\mathrm{Re}\,(z) > 0\}$. *Llavors són equivalents:*

1) El producte $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *és convergent.*

2) La sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n$ *és convergent, on* log *és la determinació principal del logaritme.*

En aquest cas, $\prod_{n=1}^{\infty} z_n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n\right)$.

Es diu que el producte $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ és incondicionalment convergent si totes les reordenacions $\prod_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ (on $\sigma \in \mathcal{G}(\mathbb{N}^*)$ i $\mathcal{G}(\mathbb{N}^*)$ és el grup de permutacions de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) són convergents i tenen el mateix valor, $\prod_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$. Amb aquesta definició, tenim el resultat següent.

Proposició 2.4. *Sigui* $\{z_n\}_n \subset \{z;\, \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$. *Llavors, són equivalents:*

1) El producte $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *és incondicionalment convergent.*

2) $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - z_n| < +\infty$.

2.3 Productes infinits de funcions

Tot seguit, es donen alguns resultats sobre la convergència de productes infinits de funcions holomorfes necessaris per a la construcció de funcions amb zeros i multiplicitats prefixades.

Si $\{f_n\}_n$ és una successió de funcions que prenen valors a $\mathbb{C}$ definides en un conjunt $X \subset \mathbb{C}$, es diu que el producte $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ convergeix en X si per a cada $z \in X$, $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ és convergent. A més, si hi ha convergència uniforme en X, es diu que el producte convergeix uniformement en X.

Proposició 2.5. *Si les funcions f_n estan acotades i la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ convergeix uniformement en X, aleshores el producte infinit convergeix uniformement i incondicionalment en X.*

Un ingredient essencial en la demostració del Teorema de zeros de Weierstrass és la següent proposició que estableix condicions suficients per a la construcció de funcions holomorfes amb zeros prefixats i de la qual inclourem la demostració.

Proposició 2.6. *Sigui Ω una regió i $\{f_n\}_n \subset \mathcal{H}(\Omega)$ una successió de funcions holomorfes en Ω complint que $f_n \not\equiv 0$ en Ω, per tot $n \geq 1$. Si la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ convergeix uniformement sobre compactes de Ω, llavors el producte $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ convergeix uniformement i incondicionalment sobre compactes de Ω a una funció $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\mathcal{Z}(f) = \bigcup_{n=1} \mathcal{Z}(f_n)$. A més a més, se satisfà*

$$m(f, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z), \quad z \in \mathcal{Z}(f)$$

on $m(f, z)$ és la multiplicitat de z com a zero de f. (Utilitzem el conveni que $m(f, z) = 0$ si $f(z) \neq 0$).

Demostració. Donat que per hipòtesi la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ convergeix uniformement sobre compactes de Ω, es verifica que el producte infinit també convergeix uniformement i incondicional sobre compactes de Ω. Cada producte parcial $p_N = \prod_{n=1}^{N} f_n$ és una funció holomorfa, per tant, com que $\mathcal{H}(\Omega)$ és tancat, el seu límit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. La convergència del producte $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ ens dóna que $z \in \mathcal{Z}(f)$ si i només si $\{n \geq 1;\ z \in \mathcal{Z}(f_n)\}$ és finit i no buit. En particular, $\mathcal{Z}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}(f_n)$ i com $f_n \not\equiv 0$, $\mathcal{Z}(f_n)$ és com a molt numerable, aleshores també el conjunt $\mathcal{Z}(f)$ és finit o numerable, amb el que $f \not\equiv 0$ en Ω.
Finalment, cal provar la igualtat entre multiplicitats. Si $a \in \mathcal{Z}(f)$ prenem $r > 0$, de manera que $f(z) \neq 0$ per tot $z \in D(a, r)\backslash\{a\}$. A més, existeix un $n_0 \geq 1$ tal que

$f_n(a) \neq 0$ per tot $n \geq n_0$. Per tant, la funció $g = \prod_{n=n_0+1}^{\infty} f_n$ és holomorfa i sense zeros en $D(a, r)$. Llavors, hom té $f(z) = \prod_{n=1}^{n_0} f_n(z)\, g(z)$ i, per tant,

$$m(f, a) = \sum_{n=1}^{n_0} m(f_n, a) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, a).$$

$\square$

3 Zeros i interpolació per funcions enteres

3.1 Teorema de Weierstrass en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$

El principal objectiu d'aquesta secció és construir funcions enteres amb zeros i multiplicitats prefixades. Suposarem que $\{z_n\}_n$ és una successió de nombres complexos de forma que $\#\{k;\, z_k = z_n\} < +\infty$ per a cada $n \geq 1$ i complint que $\lim_n |z_n| = +\infty$. Aquesta darrera condició s'imposa perquè si no tindríem algun punt d'acumulació de la successió $\{z_n\}_n$ i aplicant el principi de prolongació analítica, $f \equiv 0$ seria l'única funció entera que s'anul·la en els punts z_n.

Comencem observant que si només tenim un nombre finit de punts $z_1, z_2, \ldots, z_N$ (que poden estar repetits), llavors per exemple el polinomi

$$P(z) = \prod_{n=1}^{N} (z - z_n) \tag{3.1}$$

s'anul·la exactament en aquests punts. Òbviament aquesta no és l'única tria, ja que podem multiplicar cada factor per una funció entera sense zeros i si per exemple tots els $z_i \neq 0$, llavors

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

també satisfà les mateixes condicions.

Aquestes observacions poden fer considerar pel cas general un producte infinit de tipus:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right). \tag{3.2}$$

El producte (3.2), però, podria no convergir. Per exemple, si $\{z_n\}_n$ és la successió definida per $z_n = n$, $n \geq 1$. En aquest cas, el producte $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right)$ no convergeix incondicionalment, ja que si $z \in \mathbb{C}$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ complint que $\operatorname{Re}\left(1 - \frac{z}{n}\right) > 0$. Per tant, com que la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|}{n}$ no és convergent, tampoc ho és el producte.

La idea bàsica és, doncs, introduir funcions enteres α_n, sense zeros, de manera que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \alpha_n(z) \tag{3.3}$$

convergeixi incondicionalment i uniforme sobre compactes. Observem que aquests factors correctors no afegeixen nous zeros a la funció.
Atès que els factors α_n no han de tenir zeros, els busquem de la forma $\alpha_n = \exp(-\beta_n)$. Si $\operatorname{Re}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) > 0$, podem escriure $\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) = \exp\left(\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\right)$ on log és la determinació principal del logaritme en $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Desenvolupant en sèrie de potències $\log(1 - z)$, podem considerar com a tria de β_n els primers termes d'aquest desenvolupament. Això porta a la definició dels factors elementals de Weierstrass.

Definició 3.1. *Els factors elementals de Weierstrass són les funcions:*

- $E_0(z) = 1 - z$
- $E_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right)$, $p \geq 1$.

L'enter p s'anomena el grau del factor elemental.

Els factors elementals de Weierstrass tenen un únic zero en $z = 1$. La seva utilitat recau en el fet que si p és suficientment gran i $|z| < 1$ prenen valors propers a 1. Aquesta última afirmació s'obté veient que $E_p(z) = \exp\left(-\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right)$ i utilitzant que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ convergeix si $|z| < 1$.

Lema 3.2. *Si $|z| \leq 1$, llavors $|e^z - 1| \leq e|z|$.*

Demostració. Aquesta desigualtat és conseqüència immediata del desenvolupament en sèrie de potències de la funció exponencial. En efecte, si $|z| \leq 1$,

$$|e^z - 1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leq |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} \leq |z| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq e|z|.$$

□

Lema 3.3. *Si $|z| \leq 1/2$, llavors $|1 - E_p(z)| \leq e|z|^{p+1}$.*

Demostració. Per a $p = 0$, és evident a partir de la definició de E_0.
Suposem $p \geq 1$. Sigui log la determinació principal del logaritme en $\mathrm{Re}\,(z) > 0$. Llavors, si $|z| < 1$, desenvolupant el logaritme com a sèrie de potències obtenim:

$$E_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) = \exp\left(\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right)$$
$$= \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) = e^{w(z)}$$

on $w(z) = -\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.
Si $|z| \leq 1/2$, aleshores

$$|w(z)| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{1}{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|^{p+1}}{(p+1)(1-|z|)} \leq \frac{2}{p+1}|z|^{p+1} \leq |z|^{p+1}.$$

En particular, $|w(z)| \leq 1$ i aplicant el lema 3.2 obtenim:

$$|1 - E_p(z)| = |1 - e^{w(z)}| \leq e|w(z)| \leq e|z|^{p+1}.$$

□

Teorema 3.4 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sigui $\{z_n\}_n \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ i sigui $\{p_n\}_n \subset \mathbb{N}\backslash\{0\}$ complint que per tot $r > 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1} < \infty, \tag{3.4}$$

aleshores el producte infinit

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

convergeix incondicionalment en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ cap a una funció f entera tal que $\mathcal{Z}(f) = \bigcup_n \{z_n\}$. A més a més, si α apareix m vegades en la successió $\{z_n\}_n$, aleshores f té un zero en α de multiplicitat m.

Observació 3.5. Sempre podem trobar una successió d'enters $\{p_n\}_n$ que compleixi la condició demanada. Per exemple, si prenem $p_n = n-1$, per qualsevol successió $\{z_n\}_n$ amb les condicions descrites se satisfà (3.4) per tot $r > 0$.
En efecte, fixat $r > 0$, com que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, existeix un $n_r \geq 1$ tal que $|z_n| \geq 2r$ per tot $n \geq n_r$, és a dir, $\frac{r}{|z_r|} \leq \frac{1}{2}$. Així doncs,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty.$$

Demostració. Per la Proposició 2.6, només cal provar que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$ convergeix uniformement sobre compactes o, equivalentment, en cada disc $\overline{D(0,r)}$, $r > 0$.
Fixat $r > 0$, existeix $n_r \geq 1$ tal que $|z_n| > 2r$ per tot $n \geq n_r$, és a dir, $\frac{r}{|z_n|} \leq \frac{1}{2}$. Així doncs, si $|z| \leq r$ i $n \leq n_r$ pel lema 3.3 tenim:

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n} \leq \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{1+p_n}.$$

Donat que per hipòtesi es compleix (3.4), el Criteri M de Weierstrass ens assegura que la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| < \infty$$

convergeix uniformement sobre compactes com volíem veure.
La segona part del teorema és conseqüència directa de la Proposició 2.6 i del fet que els factors $E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ tenen un únic zero a $z = z_n$ el qual té multiplicitat 1. □

Observem que si 0 apareix m cops en la successió $\{z_n\}_n$ i h és una funció entera que s'anul·la en tots els punts de la successió $\{z_n\}_n$ diferents de 0, aleshores la funció

$$f(z) = z^m h(z),$$

resol el problema plantejat.

A continuació, donem dos exemples senzills que mostren com s'utilitza el teorema anterior.

Exemple 3.6. 1) Busquem una funció entera, la més senzilla possible, que s'anul·li en tots els enters amb multiplicitat 1. Prenem $\{z_n\}_n$, tal que $z_{2n} = n$ i $z_{2n-1} = -n$. Com ja hem dit, si prenem $p_n = n-1$ i considerem els corresponents factors elementals, el producte corresponent soluciona el problema. Però veiem a continuació que podem trobar una successió $\{p_n\}_n$, que de fet serà constant, més senzilla.

Observem que si prenem $p_n = 0$, $n \geq 1$, llavors per a cada $r > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{n}\right)^{p_n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{n} = \infty.$$

Prenem ara $p_n = 1$ per a $n \geq 1$. Aleshores

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{n}\right)^{p_n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{n}\right)^{2} < \infty$$

i, per tant, pel Teorema de Weierstrass el producte

$$z\prod_{n=1}^{\infty} E_1(\frac{z}{z_n}) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}} = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n}\right) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

defineix una funció entera que s'anul·la en tots els enters amb multiplicitat 1.

2) Com a últim exemple, busquem una funció entera que s'anul·li en la malla de punts $\{n + im : n, m \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}[i]$. Suposem que $\{z_n\}_n$ és la successió de zeros. Busquem $\{p_n\}_n$ tal que satisfaci la condició (3.4) del Teorema de Weierstrass. Intentarem trobar $p_n = p$, $n \geq 1$.

Per cada $k \geq 1$ construïm $\Delta_k = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 : |m| + |n| = k\}$. Aquests conjunts són finits, a més a més, $\bigcup_k \Delta_k = \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ i si $k \neq k'$, aleshores $\Delta_k \cap \Delta_{k'} = \emptyset$. En altres paraules, els Δ_k defineixen una partició de $\mathbb{Z}[i]$. Per altra banda, per tot n, $m \in \mathbb{Z}$ es tenen les desigualtats:

$$|m + in|^2 = m^2 + n^2 \leq (|m| + |n|)^2 \leq 2(m^2 + n^2) = 2|m + in|^2$$

Per tant, $|m+in| \leq |m|+|n| \leq \sqrt{2}\,|m+in|$, es a dir, $|m+in| \simeq |m|+|n|$. Això dóna lloc al següent:

$$\sum_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}} \frac{r^{p+1}}{|n+im|^{p+1}} = \sum_{k\geq1}\sum_{(m,n)\in\Delta_k} \frac{r^{p+1}}{|n+im|^{p+1}} \simeq \sum_{k\geq1}\sum_{(m,n)\in\Delta_k} \frac{r^{p+1}}{(|n|+|m|)^{p+1}}$$

$$r^{p+1}\sum_{k\geq1}\sum_{(m,n)\in\Delta_k} \frac{1}{k^{p+1}} = r^{p+1}\sum_{k\geq1}\frac{\#\Delta_k}{k^{p+1}}.$$

Donat que $\#\Delta_k = 4k$, obtenim que

$$\sum_{k\geq1}\frac{\#\Delta_k}{k^{p+1}} = \sum_{k\geq1}\frac{4k}{k^{p+1}} = 4\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^p},$$

Aquesta sèrie és convergent si $p \geq 1$. Prenent $p = 2$, el Teorema de Weierstrass ens diu que el producte

$$\prod_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}} E_2\left(\frac{z}{n+im}\right)$$

defineix una funció entera i la funció

$$f(z) = z\prod_{\substack{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\\(m,n)\neq(0,0)}}\left(1 - \frac{z}{n+im}\right) exp\left(\frac{z}{n+im} + \frac{z^2}{2(n+im)^2}\right)$$

és una funció entera que s'anul·la amb multiplicitat 1 en la malla de punts $\mathbb{Z}[i]$.

Una conseqüència del teorema anterior és el Teorema de factorització de Weierstrass. Aquest permet factoritzar tota funció entera no nul·la f com un producte d'una funció entera sense zeros i un producte infinit amb els mateixos zeros i multiplicitats de f.

Sigui $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ i $\mathcal{Z}(f) = \{z_1, \ldots, z_N\}$ el conjunt de zeros de f és amb multiplicitats $m(f, z_n) = m_n$, per cada $n = 1, \ldots N$. Llavors $\frac{f(z)}{\prod_{n=1}^{N}(z-z_n)^{m_n}}$ és una funció entera sense zeros i, per tant, existeix una funció entera g complint que

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{N} (z - z_n)^{m_n} .$$

El Teorema de factorització de Weierstrass permet estendre aquesta factorització al cas que f té un nombre infinit de zeros.

Teorema 3.7 (Teorema de factorització de Weierstrass)**.** *Sigui $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f \not\equiv 0$, sigui $\{z_n\}_n$ la successió dels zeros de f, diferents de 0, de manera que cada zero apareix tantes vegades com la seva multiplicitat i sigui m la multiplicitat de 0 com a zero de f (Posarem $m = 0$ si $f(0) \neq 0$). Si $\{p_n\}_n$ és una successió de naturals que satisfà (3.4), aleshores existeix una funció g entera tal que:*

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right). \tag{3.5}$$

Demostració. Pel Teorema de Weierstrass, la funció $h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ és una funció entera complint que $\mathcal{Z}(h) = \mathcal{Z}(f)$ i $m(f, z) = m(h, z)$ per tot $z \in \mathcal{Z}(f)$. Per tant, f/h és una funció entera sense zeros i, conseqüentment, existeix una funció g entera complint que $e^{g(z)} = f(z)/h(z)$. En particular, g és una determinació del logaritme de f/h. Tenim doncs que $f = he^g$ és la factorització desitjada. $\square$

3.2 Teorema de Mittag-Leffler a $\mathbb{C}$

En aquest apartat demostrarem el Teorema de Mittag-Leffler per a funcions meromorfes en $\mathbb{C}$, el qual prova l'existència de funcions meromorfes en $\mathbb{C}$ amb pols i parts principals prefixades.
Aquest teorema és, juntament amb el Teorema de Weierstrass, una de les eines bàsiques per poder demostrar el Teorema d'interpolació.

Recordem, en primer lloc, algunes de les definicions relacionades amb les funcions meromorfes.

Definició 3.8. *Es diu que f té una singularitat aïllada en el punt $a \in \mathbb{C}$ si existeix $r > 0$ tal que f és holomorfa en $D(a, r)\backslash\{a\}$.*
En aquesta situació, es pot escriure f en $D(a, r)\backslash\{a\}$ a partir del seu desenvolupament de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Diem que a és un pol de f d'ordre m si $c_n = 0$ per tot $n \geq m + 1$. La suma $\sum_{n=1}^{m} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}$ és la seva part principal o part singular.

Definició 3.9. *Una funció és meromorfa en un obert Ω si és holomorfa en Ω llevat d'un conjunt discret de singularitats aïllades que són pols. Es denota $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.*

Provem a continuació un lema tècnic que utilitzarem en la demostració del Teorema de Mittag-Leffler.

En la versió que es farà d'aquest teorema per funcions meromorfes en regions del pla, caldrà substituir aquest lema pel Teorema de Runge, un teorema d'aproximació de funcions holomorfes per funcions racionals.

L'interès d'estudiar primer aquest cas particular recau en el fet que es pot demostrar utilitzant eines més senzilles i dóna una ideal de l'esquema de la demostració pel cas general.

Lema 3.10. *Sigui g una funció holomorfa en $D(a,r)$ complint que $\sup\limits_{z\in D(a,r)} |g(z)| \leq M$. Aleshores, per tot enter $k \geq 1$ existeix un polinomi g_k de grau com a molt k complint:*

$$|g(z) - g_k(z)| \leq 2M \left(\frac{|z-a|}{r}\right)^{k+1} \text{ , si } |z-a| \leq \frac{r}{2}.$$

Demostració. La funció g és holomorfa en $D(a,r)$. Així doncs, es pot escriure com:

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-a)^j \text{ , on } c_j = \frac{g^{(j)}}{n!}.$$

Prenem ara $0 \leq \delta < r$. De les desigualtats de Cauchy i de l'acotació de la funció g obtenim:

$$|c_j| = \frac{\left|g^j(a)\right|}{j!} \leq \frac{\max\limits_{D(a,\delta)} |g(z)|}{\delta^j} \leq \frac{M}{\delta^j}.$$

Per tant,

$$|c_j| \leq \lim_{\delta\to r^-} \frac{M}{\delta^j} = \frac{M}{r^j}.$$

Per a $k \geq 1$, considerem $g_k(z) = \sum_{j=1}^{k} c_j(z-a)^j$. Aleshores:

$$|g(z)-g_k(z)| = \left|\sum_{j=k+1}^{\infty} c_j(z-a)^j\right| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} |c_j||z-a|^j \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{M}{r^j}|z-a|^j = M \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\frac{|z-a|}{r}\right)^j.$$

Si $z \in \overline{D(a, \frac{r}{2})}$ llavors $\frac{|z-a|}{r} \leq \frac{1}{2}$ i es té:

$$|g(z) - g_k(z)| \leq M \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\frac{|z-a|}{r}\right)^j = M \frac{\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^{k+1}}{1 - \frac{|z-a|}{r}} \leq 2M \left(\frac{|z-a|}{r}\right)^{k+1}.$$

□

Observació 3.11. Si $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ i $g(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, l'acotació anterior ens dóna que per cada $k \geq 1$ existeix un polinomi g_k de grau $gr(g_k) \leq k$ tal que $|g(z)-g_k(z)| \leq 2|z|^{k+1}$ si $|z| \leq \frac{1}{2}$.

Demostrem, finalment el Teorema de Mittag-Leffler.

Teorema 3.12 (Teorema de Mittag-Leffler). *Sigui $\{b_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ una successió de nombres complexes diferents dos a dos complint $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$ i sigui $\{Q_n\}_{n\geq 1}$ una successió de polinomis no constants tals que $Q_n(0) = 0$ per cada $n \geq 1$. Aleshores existeix $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ tal que f té pols únicament en els b_n amb parts principals corresponents $Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$.*

Observació 3.13. 1) En el cas particular de considerar un nombre finit de punts, $b_1, b_2, \ldots\ldots b_N$, una solució al problema és

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right).$$

2) Observant el cas finit, un candidat natural seria $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$. Aquesta sèrie, però, podria no convergir. Per aquest motiu, el que farem serà modificar cada sumand de manera que ens assegurem la convergència de la sèrie, sense afegir pols addicionals ni canviar les parts principals corresponents.

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar (reordenant si és necessari) que els b_n estan ordenats en mòdul, és a dir, $0 \leq |b_1| \leq |b_2| \leq \cdots$.
Podem suposar també que $b_1 \neq 0$. En cas contrari, si tenim una funció g meromorfa en $\mathbb{C}$ amb les propietats demanades en cada b_n, $n \geq 2$, aleshores només cal considerar la funció $f(z) = g(z) + Q_1\left(\frac{1}{z}\right)$.
La funció que construirem serà de la forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - g_n(z)\right)$$

on els g_n són els polinomis que aproximen $Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$ donats pel lema 3.10.
En efecte, per a cada $n \geq 1$, la funció $Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$ és holomorfa en $D(0, |b_n|)$, ja que $b_n \notin D(0, |b_n|)$.
Si $M_n := \max_{|z|\leq \frac{|b_n|}{2}} \left|Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)\right|$, aplicant el lema 3.10 en $D(0, \frac{|b_n|}{2})$ obtenim per a cada $k_n \geq 1$ a escollir un polinomi p_{k_n} tal que si $|z| \in D(0, \frac{|b_n|}{4})$ compleix:

$$\left|Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - p_{k_n}(z)\right| \leq 2M_n\left(\frac{|z|}{|b_n|/2}\right)^{k_n+1} \leq 2M_n\left(\frac{|b_n|/4}{|b_n|/2}\right)^{k_n+1} = M_n\left(\frac{1}{2}\right)^{k_n}$$

Triem els enters k_n de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n\left(\frac{1}{2}\right)^{k_n} < +\infty$, (una opció és escollir per cada n un enter k_n que compleixi $M_n\left(\frac{1}{2}\right)^{k_n} \leq \frac{1}{2^n}$). Definint $g_n = p_{k_n}$ obtenim una successió de polinomis tals que per cada $n \geq 1$

$$\left|Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - g_n(z)\right| \leq \frac{1}{2^n}, \quad z \in D(0, \frac{|b_n|}{4}). \tag{3.6}$$

Vegem ara que la funció

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - g_n(z)\right)$$

compleix els requeriments de l'enunciat. Fixat $R > 0$, escrivim

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N_R-1} \left(Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - g_n(z) \right) + \sum_{n=N_R}^{\infty} \left(Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - g_n(z) \right) =: f_1(z) + f_2(z),$$

on $N_R \geq 1$ és un natural a triar. Donat que $\lim_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$, existeix N_R tal que $|b_n| > 4R$ si $n \geq N_R$. Comprovem a continuació que f_2 és holomorfa en $D(0,R)$. En efecte, si $|z| < R$ i $n \geq N_R$, es compleix que $|z| < \frac{|b_n|}{4}$ i, en conseqüència, se satisfà (3.6). Per tant, aplicant el Criteri M de Weierstrass obtenim que $f_2 \in \mathcal{H}(D(0,R))$.
Conseqüentment, f està ben definida en $D(0,R)$ (defineix una funció meromorfa en el disc) i, donat que els g_n són polinomis,

$$f(z) - \sum_{n=1}^{N_R-1} Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) = \sum_{n=N_R}^{\infty} \left(Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - g_n(z) \right) - \sum_{n=1}^{N_R-1} g_n(z)$$

és una funció holomorfa en aquest disc.

Per últim, només cal veure que les parts principals coincideixen.
Considerem la suma $\sum_{n=1}^{N_R-1} Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)$. Tots els $|b_n| < R$ compleixen que $n < N_R$, ja que si $n \geq N_R$, $|b_n| > 4R$. La resta de sumands satisfan que $|b_n| \geq R$ i, per tant, són funcions holomorfes en $D(0,R)$. Així doncs,

$$\sum_{n=1}^{N_R-1} Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) = \sum_{n\geq 1; |b_n|<R} Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) + h(z)$$

on $h(z)$ és una funció holomorfa en $D(0,R)$. Per tant,

$$f(z) - \sum_{n\geq 1; |b_n|<R} Q_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) \in \mathcal{H}(D(0,R))$$

i f compleix les propietats desitjades en el disc $D(0,R)$. Donat que això és cert per tot $R > 0$ es té que $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. $\square$

3.3 Teorema d'interpolació en $\mathbb{C}$

En aquesta secció demostrarem un teorema d'interpolació de funcions enteres. L'objectiu és provar, donada una successió, l'existència de funcions amb valors prefixats en els termes d'aquesta successió. Comencem observant com es pot fer la construcció si només tenim un nombre finit de punts i valors. Siguin $z_1, z_2, \dots z_n$ punts de $\mathbb{C}$ diferents dos a dos i $a_1, a_2, \dots, a_n$ nombres complexos arbitraris, llavors hi ha un únic polinomi P de grau $gr(P) \le n-1$ que compleix $P(z_j) = a_j$, $1 \le j \le n$.
En efecte, sigui $P(z) = c_1 + c_2 z + \cdots + c_n z^{n-1}$ un polinomi de grau $n-1$. Imposant que $P(z_j) = a_j$, $1 \le j \le n$, obtenim el següent sistema d'equacions:

$$c_1 + c_2 z_j + \cdots + c_n z_j^{n-1} = a_j \ , \ 1 \le j \le n$$

Aquest sistema es pot escriure de forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

La matriu d'aquest sistema és una matriu de Vandermonde, que té per determinant:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (z_j - z_i).$$

Donat que $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$, aquest determinant és no nul. Per tant, el sistema té solució i aquesta és única. El polinomi que s'obté s'anomena polinomi interpolador de Lagrange.

El cas general és conseqüència dels Teoremes de Mittag-Leffler i de Weierstrass.

Teorema 3.14 (Teorema d'interpolació)**.** *Sigui $\{z_n\}_{n\ge1}$ una successió de nombres complexos diferents dos a dos tal que $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$ i sigui $\{a_n\}_{n\ge1}$ una successió de nombres complexos arbitraris. Aleshores existeix $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $f(z_n) = a_n$ per tot $n \ge 1$.*

Demostració. Abans de començar la demostració, observem que si g és una funció holomorfa en $D(a,r)$, $r > 0$, amb un zero simple en a i h una funció holomorfa en $D(a,r) \backslash \{a\}$ amb un pol simple en a, aleshores la funció $g \cdot h$ compleix $(g \cdot h)(a) = w$ si se satisfà

$$Res(h,a) = \frac{w}{g'(a)}. \tag{3.7}$$

Efectivament, podem escriure g i h en un entorn de a com:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n \ , \ a_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}$$

$$h(z) = \frac{Res(h,a)}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n.$$

Aleshores

$$g(z)h(z) = \left(g'(a)(z-a) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^n \right) \left(\frac{Res(h,a)}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n \right)$$
$$= g'(a)(Res(h,a)) + Q(z-a)$$

on $Q(z)$ és una funció holomorfa en un entorn de 0 que s'anul·la en l'origen.
Així doncs, avaluant gh en a obtenim

$$g(a)h(a) = g'(a)Res(h,a)$$

Com a és un zero simple de g, tenim $g'(a) \neq 0$. Per tant si volem que la funció $f = g \cdot h$ compleixi $f(a) = w$ necessitem que se satisfaci (3.7).

Comencem amb la demostració del Teorema. Utilitzant el Teorema de Weierstrass obtenim una funció entera g que té zeros simples en els z_n, ja que els punts de la successió $\{z_n\}_n$ són diferents dos a dos. En particular, per tot $n \geq 1$ se satisfà $g'(z_n) \neq 0$. Aplicant ara el Teorema de Mittag-Leffler, existeix una funció $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ que té pols exactament en els a_n amb parts principals respectives

$$Q_n \left(\frac{1}{z - z_n} \right) = \frac{a_n / g'(z_n)}{z - z_n}.$$

Així doncs, la funció $f = g \cdot h$ és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \geq 1} \{z_n\}$ i té una singularitat evitable en cada punt z_n. Per tant, f s'estén a una funció entera. A més a més, com s'ha observat a l'inici de la demostració, per cada $n \geq 1$ es compleix

$$f(z_n) = g'(z_n)Res(h; z_n) = g'(z_n) \frac{a_n}{g'(z_n)} = a_n$$

com volíem provar. $\square$

El Teorema de Mittag-Leffler encara ens permet demostrar un teorema més general d'interpolació. A continuació veurem que podem construir una funció que no només prengui valors prefixats en els termes de la successió $\{z_n\}_n$, sinó que també tingui prefixats els valors d'un nombre finit de derivades en aquests punts.
Per poder demostrar el Teorema general d'interpolació, necessitem provar primer el següent lema.

Lema 3.15. *Siguin f i g funcions holomorfes en un entorn de 0, tals que $f(0) \neq 0$. Per cada n existeix un polinomi h de grau n complint*

$$f(z)h(z) - g(z) = O(|z_n|^{n+1}) \text{ , quan } z \to 0. \tag{3.8}$$

És a dir, les sèries de potències de fh i de g coincideixen fins a ordre n.

Demostració. Considerem els desenvolupaments de f i g com a sèries de potències en un entorn de zero

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad , \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \ ,$$

on per hipòtesi, $a_0 \neq 0$.

Sigui $h(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ polinomi de grau n i imposem que satisfaci (3.8). Tenim

$$f(z)h(z) = a_0c_0 + (a_0c_1 + a_1c_0)z + \cdots + (a_0c_n + a_1c_{n-1} + \ldots \cdots + a_nc_0)z^n + O(|z|^{n+1})$$

Trobar el polinomi h que satisfà (3.8) equival, doncs, a resoldre el sistema següent:

$$\begin{cases} b_0 = a_0c_0 \\ b_1 = a_0c_1 + a_1c_0 \\ \vdots \\ b_n = a_0c_n + \cdots + a_nc_0 \end{cases}$$

que podem escriure de forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_n & a_{n-1} & \ldots & \ldots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

La matriu del sistema és una matriu $(n+1) \times (n+1)$ que té per determinant $a_0^{n+1} \neq 0$. Per tant, la matriu és invertible i el sistema té solució. Aquesta solució es pot trobar de manera sistemàtica per mitjà de l'algorisme:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{b_0}{a_0} \\ c_n = \frac{1}{a_0}\left(b_n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k a_{n-k}\right) & , n \geq 1 \end{cases}$$

Així doncs, hem trobat un polinomi h que satisfà les condicions de l'enunciat. □

Corol·lari 3.16. *Siguin f i g funcions holomorfes en un entorn de 0 de manera que f tingui un zero d'ordre $k+1$, $k \geq 0$ en $z = 0$. Aleshores existeix un polinomi h de grau $k+1$ amb $h(0) = 0$ que satisfà:*

$$f(z)h\left(\frac{1}{z}\right) - g(z) = O(|z|^{k+1})$$

Demostració. Podem escriure la funció f com $f(z) = z^{k+1}F(z)$ on F és holomorfa en un entorn de $z = 0$ i $F(0) \neq 0$.

Aplicant el lema anterior a F i g obtenim un polinomi $H(z) = \sum_{j=0}^{k} c_j z^j$ tal que:

$$F(z)H(z) - g(z) = O(|z|^{k+1})\,.$$

Observem que

$$\frac{1}{z^{k+1}}\,H(z) = \frac{1}{z^{k+1}} \sum_{j=0}^{k} c_j z^j = \frac{c_0}{z^{k+1}} + \frac{c_1}{k} + \cdots + \frac{c_k}{z} := h\left(\frac{1}{z}\right),$$

on $h(z) = c_0 z^{k+1} + c_1 z^k + \cdots + c_k z$ és un polinomi tal que $h(0) = 0$. A més a més, satisfà

$$f(z) \cdot h\left(\frac{1}{z}\right) - g(z) = z^{k+1} F(z) \frac{1}{z^{k+1}} H(z) - g(z) = F(z)H(z) - g(z) = O(|z|^{k+1})$$

com volíem provar. □

Teorema 3.17 (Teorema general d'interpolació)**.** *Sigui* $\{z_n\}_{n\geq 1}$ *una successió de nombres complexos diferents dos a dos tals que* $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ *i donada, per cada* $n \geq 1$, *una successió finita de nombres complexos* $(b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \ldots, b_{N_n}^{(n)})$, $N_n \geq 0$. *Aleshores existeix una funció entera* f *tal que per cada* $n \geq 1$ *i cada* j, $0 \leq j \leq N_n$, *se satisfà*

$$f^{(j)}(a_n) = b_j^{(n)}.$$

Demostració. Per cada $n \geq 1$ definim el polinomi

$$g_n(z) = \sum_{j=0}^{N_n} \frac{b_j^{(n)}}{j!} z^j .$$

Observem que $g_n^{(j)}(z) = b_j^{(n)}$ per tot $0 \leq j \leq N_n$.
Pel Teorema de Weierstrass existeix una funció entera F complint que $\mathcal{Z}(F) = \bigcup_n \{z_n\}$ i $m(f, z_n) = N_n + 1$, $n \geq 1$.
Per altra banda, el corol·lari anterior ens diu que per cada $n \geq 1$ existeix un polinomi Q_n de grau menor o igual que $N_n + 1$ que satisfà

$$F(z) Q_n \left(\frac{1}{z - z_n}\right) = g_n(z - z_n) + O(|z - z_n|^{N_n + 1}).$$

A més a més, $Q_n(0) = 0$ i els Q_n són polinomis no constants.
Aleshores, pel Teorema de Mittag-Leffler existeix una funció G meromorfa en $\mathbb{C}$ tal que G té pols exactament en els z_n amb parts principals corresponents $Q_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right)$.
Definim finalment la funció $f(z) = F(z)G(z)$. A continuació provarem que aquesta funció compleix les propietats demanades pel teorema.
Per tot $n \geq 1$ podem escriure $G(z) = Q_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) + g(z)$, on $g(z)$ és una funció holomorfa en un entorn de z_n. Per tant,

$$f(z) = F(z)G(z) = F(z) Q_n \left(\frac{1}{z - z_n}\right) + F(z)g(z) = g_n(z - z_n) + O(|z - z_n|^{N_n + 1})$$

En l'última igualtat utilitzem la definició dels polinomis Q_n i el fet que z_n és un zero de F de multiplicitat $N_n + 1$, és a dir, $F(z) = (z - z_n)^{N_n + 1} F_1(z)$ on F_1 és holomorfa en un entorn de z_n i $F_1(z_n) \neq 0$.
Per tant, la funció f satisfà els requisits estipulats en l'enunciat del teorema. □

4 Zeros i interpolació en dominis generals

En aquesta secció establirem versions dels teoremes de Weierstrass i interpolació en el context de funcions holomorfes en una regió Ω del pla.
Començarem la secció demostrant el teorema de Weierstrass per regions. Seguidament provarem el teorema de Mittag-Leffler com a pas previ a provar el Teorema d'interpolació en dominis generals.

4.1 Teorema de Weierstrass en dominis generals

Teorema 4.1 (Teorema de Weierstrass per dominis generals)**.** *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ una regió i sigui $\{z_n\}_n \subset \Omega$ una successió sense punts d'acumulació en Ω tal que cada z_n només es repeteix un nombre finit m_n de vegades, és a dir,*

$$1 \leq m_n = \#\{k \geq 1 : z_k = z_n\} < +\infty.$$

Llavors existeix una funció $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\mathcal{Z}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z_n\}$ i $m(f, z_n) = m_n$ per cada $n \geq 1$.

Observació 4.2. 1) Com s'ha vist anteriorment, si només considerem un nombre finit de punts $z_1, \cdots, z_N$ (que eventualment es poden repetir), el polinomi $\prod_{n=1}^{N}(z - z_i)$ compleix les propietats desitjades.

2) Observem que si la successió $\{z_n\}_n$ té punts d'acumulació a Ω, l'única funció holomorfa que s'anul·la en els punts de la successió és la funció idènticament zero.

3) En el cas que $\Omega = \mathbb{C}$, estudiat amb anterioritat, la successió $\{z_n\}_n$ s'acumula en $\infty_{\mathbb{C}}$. Ara, en canvi, la successió pot acumular-se sobre $\partial\Omega$.

Demostració. Si $z_0 \in \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\{z_n\}$, definim la transformació de Möbius

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{C}_\infty & \longrightarrow & \mathbb{C}_\infty \\ & z & \longmapsto & \frac{1}{z - z_0} \end{array}$$

Prenem $\widetilde{\Omega} := \phi(\Omega)$. Com ϕ és un homeomorfisme se satisfan les següents propietats:

1) $\phi(\Omega) = \widetilde{\Omega}$ és un obert.

2) $\phi(\infty) = 0$ i com $\infty \notin \Omega$, $0 \notin \widetilde{\Omega} = \phi(\Omega)$. En altres paraules, $0 \in \mathbb{C}_\infty \setminus \widetilde{\Omega}$.

3) $\infty = \phi(z_0) \in \widetilde{\Omega}$, ja que $z_0 \in \Omega$.

4) Finalment, tenim que $K_0 := \mathbb{C}_\infty \setminus \widetilde{\Omega}$ és un compacte per ser tancat i acotat. És acotat, ja que no conté ∞, i no buit perquè 0 hi pertany.

Hem transformat, doncs, la regió Ω en una regió $\widetilde{\Omega}$ que conté el punt de l'infinit i tal que $0 \notin \widetilde{\Omega}$.

Definim ara $\alpha_n = \phi(z_n) \in \widetilde{\Omega}$. Com $\{z_n\}_n$ no té punts d'acumulació en Ω i ϕ és un homeomorfisme aleshores $\{\alpha_n\}_n$ tampoc en té i, consegüentment, $d(\alpha_n, K_0) \to 0$. En efecte, si $\varepsilon > 0$, llavors $\mathbb{C}_\infty \setminus \{\zeta \in \mathbb{C};\, d(\zeta, K_0) < \varepsilon\}$ és un subconjunt compacte de $\widetilde{\Omega}$ i, per tant, conté un nombre finit de punts de la successió $\{\alpha_n\}_n$.

Per cada n, donat que K_0 és compacte, existeix $\beta_n \in K_0$ de manera que $|\beta_n - \alpha_n| = d(\alpha_n, K_0)$. A més a més, hem vist que $|\beta_n - \alpha_n| = d(\alpha_n, K_0) \to 0$.

Definim finalment

$$f_n(z) = \begin{cases} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{\phi(z) - \beta_n}\right) & \text{si } z \in \Omega \backslash \{z_0\} \\ 1 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

i provem que la funció

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z), \tag{4.1}$$

definida en Ω compleix les propietats demanades.

En primer lloc, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ per tot $n \geq 1$, ja que $f_n \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{z_0\})$ i $\lim\limits_{z \to z_0} f_n(z) = 1 = f_n(z_0)$. En efecte,

$$\lim_{z \to z_0} f_n(z) = \lim_{z \to z_0} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{\phi(z) - \beta_n}\right) = \lim_{w \to 0} E_n(w) = E_n(0) = 1 = f_n(z_0).$$

Per altra banda, per cada n el factor elemental de Weierstrass E_n té un únic zero simple en $z = 1$. Per tant, f_n té un zero de multiplicitat 1 quan $\frac{\alpha_n - \beta_n}{\phi(z) - \beta_n} = 1$, és a dir, quan $\phi(z) = \alpha_n$ o, equivalentment, quan $z = z_n$. Així doncs, la funció f s'anul·la en $\{z_n\}_n$ amb les multiplicitats demanades.

Per acabar, només queda provar que el producte infinit (4.1) convergeix incondicionalment i absolutament sobre compactes d'Ω. Pel Corol·lari 2.6, n'hi ha prou en veure que $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ convergeix uniformement sobre compactes d'Ω.
Sigui $K \subset \Omega$ compacte, llavors $\phi(K) \subset \widetilde{\Omega}$ també ho és. Per tant, $\phi(K) \backslash \{\infty\} \subset \mathbb{C}$ és tancat i disjunt de K_0. Així que $\delta := d(\phi(K) \backslash \{\infty\}, K_0) > 0$. Utilitzant ara que $|\beta_n - \alpha_n| = d(\alpha_n, K_0) \longrightarrow 0$, existeix un n_0 tal que $|\beta_n - \alpha_n| \leq \frac{\delta}{2}$ per tot $n \geq n_0$. En definitiva,

$$\left| \frac{\alpha_n - \beta_n}{\phi(z) - \beta_n} \right| \leq \frac{\delta/2}{\delta} = \frac{1}{2}.$$

Pel Lema 3.3 i la desigualtat anterior, si $z \in K$ i $n \geq n_0$

$$|1 - f_n(z)| = \left| 1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{\phi(z) - \beta_n}\right) \right| \leq e \left| \frac{\alpha_n - \beta_n}{\phi(z) - \beta_n} \right|^{n+1} \leq e \frac{1}{2^{n+1}}$$

i aplicant finalment el Criteri M de Weierstrass obtenim que $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ convergeix uniformement en K. $\square$

Corol·lari 4.3. *Tota funció f meromorfa en Ω es pot escriure com $f = g/h$, on g i h són funcions holomorfes en Ω.*

Demostració. Sigui $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Si f té un pol en cada z_j d'ordre n_j, pel Teorema de Weierstrass podem trobar una funció $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ que s'anul·li únicament en els z_j amb multiplicitats n_j. Definim ara $g = f \cdot h$. Les singularitats de g en els z_n són evitables i per tant, g s'estén a una funció holomorfa en Ω. $\square$

Observem que el recíproc d'aquest Corol·lari és evident, ja que si $g,\, h \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $h \not\equiv 0$ aleshores $g/h \in \mathcal{M}(\Omega)$.

4.2 Interpolació per funcions holomorfes en dominis generals

Per obtenir un Teorema d'interpolació per regions cal primer provar una versió del Teorema de Mittag-Leffler per dominis generals.

Observem que en la demostració del Teorema de Mittag-Leffler en $\mathbb{C}$ hem utilitzat el desenvolupament de Taylor per aproximar funcions holomorfes i acotades en discs per polinomis holomorfs. Per altra banda, hem comprovat que la funció construïda és meromorfa en tot disc centrat en l'origen.

En la versió general del Teorema utilitzarem el Teorema de Runge per aproximar, sota certes condicions, funcions holomorfes en un entorn d'un compacte per funcions racionals amb pols en un conjunt prefixat. Seguidament, provarem que la funció construïda és meromorfa en cada compacte d'una exhaució de compactes del nostre domini Ω. L'existència d'aquesta exhaució està justificada pel lema que segueix. La demostració del Teorema de Runge la donarem en l'Annex.

Lema 4.4. *Sigui $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ obert. Llavors existeix una successió $\{K_n\}_n$ de compactes de Ω tal que*

1) $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, *per a tot* $n \geq 1$.

2) $\cup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$.

3) *Per a tot compacte* $K \subset \Omega$, *existeix* $n \geq 1$ *tal que* $K \subset K_n$

4) *Tota component connexa de* $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ *conté alguna component connexa de* $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

Una successió amb aquestes propietats és una exhaució per compactes de Ω.

Demostració. Si $\Omega = \mathbb{C}$, només cal triar $K_n = \overline{D(0,n)}$.
Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, definim

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : \, d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{D(0,n)}.$$

Donat que K_n és la intersecció del tancat $\{z \in \mathbb{C}; \, d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$ i del compacte $\overline{D(0,n)}$, és compacte. Veiem les altres propietats:

1) $K_n \subset \{z \in \mathbb{C} : \, d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{n+1}\} \cap D(0, n+1) = \mathring{K}_{n+1}$.

2) Per tot n, $\{z \in \mathbb{C}; \, d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\} \subset \Omega$ i, per tant, $K_n \subset \Omega$. Per altra banda, si $z \in \Omega$, $d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$, ja que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ és tancat. Així doncs, existeix $n \geq 1$ complint $|z| \leq n$ i $d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}$, és a dir, $z \in K_n$.

3) Si $K \subset \Omega$ és compacte, llavors existeix $n \geq 1$ i $K \subset \{z \in \mathbb{C}; \, d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{D(0,n)} = K_n$.

4) Observem primer que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ i, per tant, tota component connexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ està continguda en una única component connexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$. Així doncs, només ens cal provar que cada component connexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ conté algun punt de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

   La component connexa no acotada C_∞ de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ conté $\infty \in \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

Si C és una component connexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ diferent de C_∞, tenim

$$C \subset \mathbb{C} \setminus K_n = \left(\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,n)}\right) \cup \left\{ z : \ d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Però com $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D(0,n)}$ és un connex de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ que conté ∞, tenim que $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D(0,n)} \subset C_\infty$ i, en particular, $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,n)} \subset C_\infty$.

Les components connexes formen una partició amb el que $C \cap C_\infty = \emptyset$ i es compleix que $C \subset \overline{D(0,n)}$ i, en particular, que $C \subset \{z;\ d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) < \frac{1}{n}\}$.

Per tant per a tot $z \in C$, existeix $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tal que $|z - w| < \frac{1}{n}$. Llavors $D(w, \frac{1}{n})$ és un subconjunt connex de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ (donat que si $|\lambda - w| < 1/n$, $d(\lambda, \mathbb{C} \setminus \Omega) < 1/n$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus K_n$) que conté el punt z i com C és la component connexa de z en $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$, es dedueix que $D(w, \frac{1}{n}) \subset C$ i, en particular, C conté el punt $w \in \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

□

Teorema 4.5 (Teorema de Mittag-Leffler per funcions meromorfes en una regió)**.** *Siguin Ω una regió de $\mathbb{C}$, $\{z_n\}_n \subset \Omega$ una successió de punts diferents dos a dos sense punts d'acumulació en Ω i $\{P_n\}_n$ una successió de polinomis tal que $P_n(0) = 0$. Aleshores, existeix $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que els seus pols són exactament els punts de la successió $\{z_n\}_n$ i la part singular de f en cada z_n és $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$.*

Demostració. Donat Ω, considerem, aplicant el lema anterior, una exhaustió per compactes $\{K_n\}_n$ de Ω.

La successió $\{z_n\}_n$ no té punts d'acumulació en Ω, per tant, hi ha un nombre finit de punts de la successió en cada compacte K_n. Definim ara els conjunts discrets següents:

i) $A_1 = \bigcup_{k \geq 1} \{z_k\} \cap K_1$.

ii) $A_n = \bigcup_{k \geq 1} \{z_k\} \cap (K_n \setminus K_{n-1})$, $n \geq 2$.

Com s'ha esmentat, tots els A_n són finits. A continuació, definim les funcions racionals

$$Q_n(z) = \sum_{z_k \in A_n} P_n\left(\frac{1}{z - z_k}\right).$$

La funció Q_n té pols en $K_n \setminus K_{n-1}$, en particular Q_n és holomorfa en K_{n-1}.

Pel Teorema de Runge (vist a l'Annex), existeixen funcions racionals $\{R_n\}_n$ amb pols en $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ tals que

$$|R_n(z) - Q_n(z)| < \frac{1}{2^n}, \quad si\, z \in K_{n-1}. \tag{4.2}$$

Finalment, provarem que la funció

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(Q_n(z) - R_n(z)\right), \quad z \in \Omega$$

satisfà les propietats desitjades.

Fixat $N \geq 2$, tenim

$$f = Q_1 + \sum_{n=2}^{N} (Q_n - R_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (Q_n - R_n) \tag{4.3}$$

Les funcions Q_n són holomorfes en K_N per tot $n \geq N+1$, a més a més, per construcció, R_n és holomorfa en K_N, per tot n. Per tant, donat que es compleix la desigualtat (4.2), el Criteri M de Weierstrass ens dóna que l'última suma de (4.3) convergeix uniformement en K a una funció holomorfa.

Així doncs, donat que els pols de R_n són fora de Ω la funció $f - \sum_{n=1}^{N} Q_n$ és holomorfa en l'interior de K_N i, per la definició de Q_n, f té les parts principals desitjades en K_N.

En efecte, donat $z_{n_0} \in \{z_n\}_n \cap K_N$:

$$f(z) - \sum_{n=1}^{N} Q_n(z) = f(z) - \sum_{n=1}^{N} \sum_{z_k \in A_n} P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) = h(z)$$

on h és holomorfa en K_N. Llavors

$$f(z) - P_{n_0}\left(\frac{1}{z - z_{n_0}}\right) = h(z) + \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{z_k \in A_n \\ z_k \neq z_{n_0}}} P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right)$$

El terme de la dreta és holomorf en un entorn de z_{n_0}, així doncs, la part singular del pol z_{n_0} és la demanada.

Aleshores, també compleix les propietats desitjades en Ω, ja que N és arbitrari. $\square$

Un cop obtingudes les versions generals dels Teoremes de Weierstrass i Mittag- Leffler, els mateixos arguments que hem fet per al cas de tot el pla permeten demostrar el Teorema d'Interpolació en dominis generals enunciat a continuació.

Teorema 4.6 (Teorema general d'interpolació en regions). *Sigui $\{z_n\}_{n\geq 1} \subset \Omega$ una successió de punts diferents dos a dos sense punts d'acumulació a Ω. Per cada $n \geq 1$, considerem una successió finita de nombres complexos $(b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \ldots, b_{N_n}^{(n)})$, $N_n \geq 0$. Aleshores existeix una funció $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que per cada $n \geq 1$ i cada j, $0 \leq j \leq N_n$, satisfà*

$$f^{(j)}(a_n) = b_j^{(n)}.$$

5 L'anell $\mathcal{H}(\Omega)$ de funcions holomorfes

Sigui Ω una regió del pla complex, l'espai $\mathcal{H}(\Omega)$ és una $\mathbb{C}$-àlgebra, és a dir, un espai vectorial sobre els complexos que a més té estructura d'anell.

En aquesta secció obtindrem com a aplicació dels Teoremes de Weierstrass i d'interpolació propietats algebraiques de l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$ i dels seus ideals. En el que segueix, denotarem per 1 i 0 les funcions idènticament igual a 1 i 0 en Ω respectivament. Direm que una funció és no nul·la si no és idènticament 0.

Abans de començar provem que $\mathcal{H}(\Omega)$ és un domini d'integritat.

Lema 5.1. *$\mathcal{H}(\Omega)$ és un domini d'integritat, és a dir, si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $fg \equiv 0$, llavors o bé $f \equiv 0$ o bé $g \equiv 0$.*

Demostració. Siguin $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tals que $fg \equiv 0$, suposem $f \not\equiv 0$. Aleshores $\mathcal{Z}(f)$ és finit o numerable. Per altra banda, tenim que $\mathcal{Z}(fg)$ no és numerable, és Ω, i $\mathcal{Z}(fg) = \mathcal{Z}(f) \cup \mathcal{Z}(g)$. Llavors $\mathcal{Z}(g)$ no pot ser numerable i, conseqüentment, $g \equiv 0$.
El cas en què $g \not\equiv 0$ es fa de manera anàloga. $\square$

5.1 Divisibilitat en l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$

En aquest apartat definim algunes de les nocions de divisibilitat en l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$ i provem el Lema de Wedderburn, amb el qual demostrem que en l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$ es compleix la identitat de Bézout.

Definició 5.2.
1. *Diem que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ és una unitat si és invertible, és a dir, existeix $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $fg \equiv 1$. Equivalentment, f és una unitat si $\mathcal{Z}(f) = \emptyset$.*
2. *Siguin f, $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ diem que f divideix a g (escrivim $f|g$) si existeix $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g = f\,h$, és a dir, si $m(f, z) \leq m(g, z)$, per a tot $z \in \mathcal{Z}(f)$.*

Definició 5.3. *Donada una família $\mathcal{F}$ de funcions de $\mathcal{H}(\Omega)$, la funció d és màxim comú divisor de $\mathcal{F}$ si $d|f$ per tot $f \in \mathcal{F}$ i si una funció h satisfà que $h|f$ per tot $f \in \mathcal{F}$ aleshores $h|d$.*

Lema 5.4. *Tota família $\mathcal{F}$ de funcions no nul·les té màxim comú divisor.*

Demostració. Definim el conjunt $\mathcal{Z} := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{Z}(f)$. Si $\mathcal{Z} = \emptyset$ aleshores els únics divisors comuns de $\mathcal{F}$ són les unitats i, per tant, la funció 1 és un màxim comú divisor.
Si $\mathcal{Z} \neq \emptyset$, pel Teorema de Weierstrass, podem construir una funció $d \in \mathcal{H}(\Omega)$ que s'anul·li en $\mathcal{Z}$ amb multiplicitats $m(d, z) = \min\{m(f, z) : f \in \mathcal{F}\}$, $z \in \mathcal{Z}$. Llavors, per construcció, d és màxim comú divisor de $\mathcal{F}$. En efecte, és evident que d divideix totes les funcions de $\mathcal{F}$. A més a més, per qualsevol funció h tal que $h|f$ per tot $f \in \mathcal{F}$ tenim $m(h, z) \leq \min\{m(f, z) : f \in \mathcal{F}\} = m(d, z)$ i per tant $h|d$, com volíem veure. $\square$

Els següents resultats ens diuen que en l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$ es compleix la identitat de Bézout.

Teorema 5.5. *Siguin $f_1, f_2, \dots f_n$ funcions no nul·les de $\mathcal{H}(\Omega)$ sense zeros comuns en Ω, aleshores existeixen funcions $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ holomorfes en Ω tals que*

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n \equiv 1.$$

Demostració. Demostrarem el resultat per inducció sobre el nombre n de funcions. El cas $n = 1$ és evident, però necessitem addicionalment provar el cas $n = 2$ per fer la inducció. Siguin f_1, $f_2 \in \mathcal{H}(\Omega)$ funcions sense zeros comuns en Ω. Per provar l'enunciat, n'hi ha prou en trobar una funció β complint que $\frac{1-\beta f_2}{f_1}$ sigui holomorfa en Ω. Construirem una funció β tal que f_1 i $(1-\beta f_2)$ tinguin els mateixos zeros i la multiplicitat d'un zero de $(1-\beta f_2)$ sigui com a mínim igual a la de f_1. Si aquesta funció existeix, prenent $\alpha_1 = \frac{1-\beta f_2}{f_1}$ i $\alpha_2 = \beta$ tindríem una solució del problema.
Anem doncs a construir la funció β. Si a un zero de f_1 de multiplicitat m, la funció β ha de satisfer:

$$\begin{cases} 1-\beta(a)f_2(a) = 0 \\ (\beta f_2)^{(j)}(a) = 0, \quad si\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Per la regla de Leibnitz, aquestes condicions són equivalents a

$$\begin{cases} \beta(a)f_2(a) = 1 \\ (\beta)^{(j)}(a)f_2(a) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \beta^{(k)}(a)f_2^{(j-k)}(a), \quad si\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

Observem que com $f_1(a) = 0$ i per hipòtesi f_1 i f_2 no tenen zeros comuns, llavors $f_2(a) \neq 0$. Per tant, la condició d'ordre 1 ens dóna que $\beta(a) = 1/f_2(a)$ i de les condicions d'ordre major podem trobar recursivament els valors de $\beta^{(j)}(a)$, $0 \leq 1 \leq m$, que fan que $1-\beta f_2$ tingui un zero en a de multiplicitat m.
Finalment, aplicant el Teorema general d'interpolació amb les dades donades anteriorment obtenim que existeix una funció $\beta \in \mathcal{H}(\Omega)$ amb les propietats desitjades.

Suposem ara que el resultat és cert per a qualssevol $n-1$ funcions de $\mathcal{H}(\Omega)$, $n \geq 2$, que satisfan les propietats de l'enunciat. Siguin, doncs, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ funcions sense cap zero en comú en Ω. Fem la suposició que $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ tenen zeros comuns, en cas contrari per la hipòtesi d'inducció existeixen funcions $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ holomorfes en Ω tals que

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_{n-1} \equiv 1.$$

i prenent $\alpha_n = 0$ hauríem acabat.
Per tant, sigui d un màxim comú divisor de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ tenim que les funcions $\phi_1 = \frac{f_1}{d}, \phi_2 = \frac{f_2}{d}, \ldots, \phi_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{d}$ són holomorfes en Ω i no tenen zeros comuns. Per la hipòtesi d'inducció, existeixen $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_{n-1} \in \mathcal{H}(\Omega)$ tals que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \phi_1 \equiv 1$$

consegüentment

$$\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j f_1 \equiv d$$

Atès que d i f_n no tenen zeros comuns, pel cas $n = 2$ existeixen funcions $\gamma, \delta \in \mathcal{H}(\Omega)$ tals que $\gamma d + \delta f_n \equiv 1$. Així doncs,

$$(\gamma\beta_1)f_1 + \cdots + (\gamma\beta_{n-1})f_{n-1} + \delta f_n \equiv 1$$

i queda provat el teorema. □

El cas particular del teorema anterior en què $n = 2$ s'anomena Lema de Wedderburn i va ser publicat l'any 1915 per Joseph Wedderburn en [11].

Corol·lari 5.6. *Siguin $f_1, f_2, \ldots f_n$ funcions no nul·les de $\mathcal{H}(\Omega)$ i sigui d un màxim comú divisor d'aquestes funcions. Aleshores existeixen funcions $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ holomorfes en Ω tals que*

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots \alpha_n f_n \equiv d.$$

Demostració. Les funcions $\frac{f_1}{d}, \frac{f_2}{d}, \ldots \frac{f_n}{d}$ són holomorfes en Ω i no tenen zeros comuns en aquest domini. Per tant, pel Teorema 5.5 existeixen funcions $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ holomorfes en Ω tals que

$$\alpha_1 \frac{f_1}{d} + \alpha_2 \frac{f_2}{d} + \ldots \alpha_n \frac{f_n}{d} \equiv 1.$$

Equivalentment,

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots \alpha_n f_n \equiv d$$

com volíem veure. □

5.2 Ideals de l'anell de funcions holomorfes

L'objectiu principal d'aquesta secció és caracteritzar i estudiar els ideals de $\mathcal{H}(\Omega)$. En particular, volem provar les implicacions del següent diagrama.

$\boxed{\text{Ideals finitament generats}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Ideals principals}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Ideals tancats}}$

Abans de començar, recordem algunes de les definicions més importants sobre ideals.

Definició 5.7. *Un ideal I de l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$ és un subanell amb la propietat que si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $f \in I$ aleshores $gf \in I$.*

Observació 5.8. $\mathcal{H}(\Omega)$ i $\{0\}$ són ideals de $\mathcal{H}(\Omega)$. S'anomenen respectivament l'ideal total i l'ideal nul (o trivial).

Definició 5.9. *En l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$,*

i) Diem que un ideal I és propi si $\{0\} \neq I \neq \mathcal{H}(\Omega)$. En particular, un ideal no nul és propi si $1 \notin I$.

ii) Un ideal és finitament generat per les funcions $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ si és de la forma

$$I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i f_i : \, g_i \in \mathcal{H}(\Omega) \right\}$$

iii) Un ideal I és principal si existeix $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $I = \langle f \rangle$.

Observació 5.10. Podem donar la noció de divisibilitat en termes d'ideals: $f|g$ si i només si $g \in \langle f \rangle$.

Observem que tot ideal principal és finitament generat. La implicació contrària es demostra en següent lema, el qual és conseqüència del Corol·lari 5.6.

Lema 5.11. *Tot ideal amb un nombre finit de generadors és principal.*

Demostració. Sigui $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$. Si d és un màxim comú divisor de $f_1, \ldots, f_n$, el Corol·lari 5.6 ens diu que existeixen funcions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ tals que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = d$. Aquest fet implica que $d \in I$. Altrament, tenim que $d|f_i$ per tot $1 \le i \le n$, així doncs, $f_i \in \langle d \rangle$ per cada i i, equivalentment, $I = \langle d \rangle$ és principal. □

Així doncs, hem provat l'equivalència entre ideals principals i ideals finitament generats de $\mathcal{H}(\Omega)$. Queda provar la correspondència entre ideals principals i tancats de $\mathcal{H}(\Omega)$. Per poder-ho fer, caldrà primer veure que podem identificar els ideals principals de $\mathcal{H}(\Omega)$ amb una successió de parells ordenats $\{z_j, n_j\}_j$, on $\{z_j\}_j \subset \Omega$ és una successió de punts diferents dos a dos de Ω i $\{n_j\}_j$ les multiplicitats associades a cadascun d'ells. A aquests parells ordenats els anomenarem varietats de multiplicitats, el nom d'aquest terme està pres de [1].

Definició 5.12. *Anomenem varietat de multiplicitats en Ω la seqüència de parells $V = \{z_k, n_k\}_k$ on $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$, $\mathcal{Z} = \bigcup_k \{z_k\}$ és un subconjunt discret de Ω i els $n_k \geq 1$ enters.*
Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ satisfà que $f^{(j)}(z_k) = 0$ per cada k i per tot $0 \le j \le n_k - 1$ diem que f s'anul·la en V.
L'ideal $I(V)$ és l'ideal de totes les funcions que s'anul·len en V. En altres paraules,

$$I(V) = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(z_k) = \cdots = f^{(n_k-1)}(z_k) = 0,\ k \geq 1\}.$$

Observació 5.13.

1) $I(V)$ és efectivament un ideal, ja que si $f \in I(V)$, f s'anul·la en V i aleshores gf on $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ també s'anul·la en V.

2) L'ideal $I(V)$ on $V = \{z_k, n_k\}_k$ és l'ideal de totes les funcions que s'anul·len en els z_k amb multiplicitats corresponents majors o iguals a n_k.

Teorema 5.14. *Hi ha una correspondència bijectiva entre els ideals principals no nuls de $\mathcal{H}(\Omega)$ i les varietats de multiplicitats de Ω. Aquesta correspondència s'obté assignant a cada varietat de multiplicitats V l'ideal $I(V)$ definit en 5.12.*

Demostració. Donada V una varietat de multiplicitats de Ω, li assignem l'ideal $I(V)$ de totes les funcions que s'anul·len en V. A continuació, vegem que aquest ideal és principal. Si $V = \emptyset$, l'ideal $I(V)$ es correspon a l'ideal total $\mathcal{H}(\Omega)$. Per tant, $I(V) = \langle 1 \rangle$ i en particular és principal.
Si $V = \{z_k, n_k\}_k \neq \emptyset$, el Teorema de Weierstrass ens assegura l'existència d'una funció $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que s'anul·la exactament en els $\{z_k\}_k$ amb multiplicitats n_k. Llavors, $f \in I(V)$ i per qualsevol $g \in I(V)$, $g \in \langle f \rangle$. En efecte, donat que $\mathcal{Z}(f) \subset \mathcal{Z}(g)$ i $m(z_k, f) \le m(z_k, g)$ aleshores $f|g$ i per l'Observació 5.10 tenim que $g \in \langle f \rangle$. Així doncs, $I(V) = \langle f \rangle$ i per tant és principal.

Recíprocament, sigui $I = \langle f \rangle$ un ideal principal no nul, aleshores totes les funcions de I s'anul·len en $\mathcal{Z}(f)$ amb multiplicitats, com a mínim, iguals a les de f. Com que $\mathcal{Z}(f)$ és un subconjunt discret de Ω el podem enumerar com $\{z_k\}_k$. Prenem, doncs, la varietat associada $V = \{z_k, n_k\}_k$ on $\mathcal{Z}(f) = \{z_k\}_k$ i $n_k = m(z_k, f)$. Queda veure que efectivament $\langle f \rangle = I(V)$. La inclusió $\langle f \rangle \subset I(V)$ és evident, ja que totes les funcions de $\langle f \rangle$ s'anul·len en V. Sigui ara $g \in I(V)$, g s'anul·la en els z_k amb multiplicitats majors o iguals que

f. Per tant, $\dfrac{g}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ i $f\dfrac{g}{f} = g \in \langle f \rangle$, amb el que queda provada la inclusió contrària. Finalment, s'obté $I(V) = \langle f \rangle = I$. $\square$

El teorema anterior ens permet caracteritzar els ideals principals com $I(V)$ on V és una varietat de multiplicitats. Aquesta eina ens serà de gran ajuda en la demostració del següent teorema.

Teorema 5.15. *Tot ideal principal de $\mathcal{H}(\Omega)$ és tancat.*

Demostració. Pel Teorema 5.14, si I és un ideal principal aleshores $I = I(V)$ per alguna varietat de multiplicitats $V = \{z_k, n_k\}_k$. És a dir, és l'ideal

$$I(V) = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(z_k) = \cdots = f^{(n_k-1)}(z_k) = 0,\, k \geq 1\}.$$

Sigui $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successió de funcions de $I(V)$ convergent a f, volem veure que $f \in I = I(V)$. Per tot $n \geq 1$, $f_n(z_k) = 0$ per tot $k \geq 1$ i com que tenim convergència puntual, $f(z_k) = 0$ per tot $k \geq 1$. Per altra banda, el Teorema 2.1 ens diu que per cada k i cada $1 \leq j \leq n_k$ la successió $\{f_n^{(j)}\}_n$ convergeix a $f^{(j)}$. Aleshores, com abans $f^{(j)}(z_n) = 0$. Concloem, doncs, que $f \in I(\mathcal{Z})$ i l'ideal I és tancat. $\square$

Així doncs, hem vist que tot ideal principal és tancat. Falta veure la implicació contrària. Per fer-ho, veurem que tot ideal tancat es pot escriure com $I(V)$ on V és una varietat de multiplicitats. Aquesta serà la varietat de multiplicitats de l'ideal I, que definirem més endavant i denotarem per $V(I)$.

Abans, però, necessitem demostrar una proposició.

Definició 5.16. *Sigui I un ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$. Definim el conjunt de zeros de I com*

$$\mathcal{Z}(I) = \bigcap_{f\in I} \mathcal{Z}(f).$$

Observació 5.17. Si $I \neq \{0\}$, llavors $\mathcal{Z}(I)$ és un subconjunt de Ω sense punts d'acumulació.

Observació 5.18. Donats I_1, I_2 ideals de $\mathcal{H}(\Omega)$. Si $I_1 \subset I_2$ llavors $\mathcal{Z}(I_2) \subset \mathcal{Z}(I_1)$.

Proposició 5.19. *Si I és un ideal de $\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$, aleshores I és dens en $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Demostració. Per veure que I és dens cal veure que donada una funció $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, un compacte $K \subset \Omega$ i $\varepsilon > 0$ existeix una funció $h \in I$ de manera que $\|f - h\|_K = \sup_{z\in K} |f(z) - h(z)| < \varepsilon$.
En primer lloc, suposarem que cap component connexa de $\Omega \setminus K$ és relativament compacta en Ω. Si existís alguna component connexa amb aquesta propietat l'afegiríem a K i provaríem l'enunciat en aquest compacte més gran. Ho podem fer pel Lema 7.6 de l'Annex.
Si $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$, hom té

$$\mathcal{Z}(I) \cap K = \bigcap_{f\in I} (\mathcal{Z}(f) \cap K) = \emptyset$$

Donat que K és compacte, per la propietat de la intersecció finita dels espais compactes, existeixen un nombre finit de funcions $f_1, f_2, \dots, f_n \in I$ tals que $\bigcap_{i=1}^{n} (\mathcal{Z}(f_i) \cap K) = \emptyset$ i, per tant,

$$\inf_{z \in K} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2 + \cdots + |f_n|^2 \right) = \delta > 0.$$

Aleshores, per continuïtat, podem trobar un obert U, $K \subset U \subset \Omega$, complint que $\inf_{z \in U} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2 + \cdots + |f_n|^2 \right) \geq \frac{\delta}{2} > 0$, és a dir, tal que $f_1, f_2, \dots, f_n$ no tenen zeros comuns a U.

Així doncs, pel Teorema 5.5 existeixen funcions $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathcal{H}(U)$ de manera que

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_n f_n \equiv 1$$

en U (si U no és connex, apliquem el teorema a cada component connexa de U). En aquestes condicions, pel Corol·lari 7.5 del Teorema de Runge podem aproximar cada $g_i \in \mathcal{H}(K)$ per una funció $h_i \in \mathcal{H}(\Omega)$ uniformement en K. Escollim les aproximacions h_i de manera que

$$\|h_i - g_i\|_K < \frac{\varepsilon}{n(\|f\|_K + 1)(\sup_i \|f_i\|_K + 1)}$$

Definim finalment

$$h := f \sum_{i=1}^{n} h_i f_i \in I$$

i amb les aproximacions donades se satisfà $\|f - h\|_K < \varepsilon$. En efecte,

$$\|f - h\|_K = \left\| f \sum_{i=1}^{n} g_i f_i - f \sum_{i=1}^{n} h_i f_i \right\|_K \leq \|f\|_K \sum_{i=1}^{n} \|g_i - h_i\|_K \|f_i\|_K < \varepsilon.$$

Amb això, queda provat que I un ideal dens en $\mathcal{H}(\Omega)$. □

Corol·lari 5.20. *Si I és un ideal propi i tancat de $\mathcal{H}(\Omega)$, llavors $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$.*

Demostració. Si $I \neq \mathcal{H}(\Omega)$ és tancat, llavors no és dens en $\mathcal{H}(\Omega)$ i per la Proposició 5.19 $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$. □

Després d'aquest parèntesi, demostrem finalment que tot ideal tancat de $\mathcal{H}(\Omega)$ és principal.

Definició 5.21. *Sigui Ω un domini de $\mathbb{C}$ i sigui I un ideal propi de $\mathcal{H}(\Omega)$, si $\mathcal{Z}(I) = \bigcup_k \{z_k\}$, i per cada k*

$$n_k := \min\{m(f, z_k) : f \in I\}$$

on $m(f, z_k)$ és la multiplicitat de z_k com a zero de f, anomenem varietat de multiplicitats de l'ideal I a la successió $V(I) = \{z_k, n_k\}_k$.

Teorema 5.22. *Sigui I un ideal tancat de $\mathcal{H}(\Omega)$, llavors $I = I(V(I))$. En particular, tot ideal tancat és principal.*

Demostració. La inclusió $I \subset I(V(I))$ és evident, ja que totes les funcions de I s'anul·len en $V(I)$.

Provem ara que $I(V(I)) \subset I$. Donat que $I(V(I))$ és principal, pel Teorema 5.14, existeix una funció $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $I(V(I))) = \langle f \rangle$. Definim

$$I_1 = \{g \in \mathcal{H}(\Omega) : fg \in I\}$$

i vegem que $\mathcal{Z}(I_1) = \emptyset$. És clar de la definició d'ideal que $I \subset I_1$. Per tant, $\mathcal{Z}(I_1) \subset \mathcal{Z}(I)$ i, en particular, per a provar que $\mathcal{Z}(I_1) = \emptyset$ n'hi ha prou en veure que cap punt de $\mathcal{Z}(I)$ està en $\mathcal{Z}(I_1)$. En efecte, si $z_0 \in \mathcal{Z}(I)$, hi ha una funció $f_0 \in I$ tal que $f_0(z_0) = 0$ amb multiplicitat $m(f_0, z_0) = m(f, z_0)$, per les definicions de $V(I)$ i f. Llavors z_0 no és zero de la funció $g_0 = f_0/f$, però, com $g_0 \in I_1$, hom té que $z_0 \notin \mathcal{Z}(I_1)$. Així doncs, $\mathcal{Z}(I_0) = \emptyset$ i per la Proposició 5.19 I_1 és dens en $\mathcal{H}(\Omega)$.
Sigui $T_f : \mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ l'operador continuo definit com $T_f(h) = f \cdot h$, aleshores

$$I(V(I)) = \langle f \rangle = T_f(\mathcal{H}(\Omega)) = T_f(\,\overline{I_1}\,) \subset \overline{T_f(I_1)} \subset \overline{I} = I$$

Per tant, $I(V(I)) \subset I$ i tenim la igualtat $I = I(V(I)) = \langle f \rangle$. □

I amb aquesta darrera demostració queda provada l'última implicació del diagrama inicial.

Finalment, caracteritzarem els ideals maximals tancats de $\mathcal{H}(\Omega)$. Aquesta caracterització prendrà un paper important en la demostració del Lema de Royden que farem més endavant.

Definició 5.23. *Un ideal $I \in \mathcal{H}(\Omega)$ és maximal si és un ideal propi i no existeix cap ideal J tal que $I \subsetneq J \subsetneq \mathcal{H}(\Omega)$.*

Teorema 5.24. *Un ideal tancat $I \subset \mathcal{H}(\Omega)$ és maximal si i només si existeix $z_0 \in \Omega$ tal que*

$$I = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(z_0) = 0\}$$

o, equivalentment, és l'ideal generat per la funció $(z - z_0)$.

Demostració. Si I és un ideal maximal tancat aleshores pel Corol·lari 5.20 hom té $\mathcal{Z}(I) \neq \emptyset$. Sigui z_0 un element de $\mathcal{Z}(I)$, definim $g = z - z_0$. Tenim, doncs, que per tot $f \in I$ $g|f$ i per tant $f \in \langle g \rangle$. Conseqüentment $I \subset \langle g \rangle \subsetneq \mathcal{H}(\Omega)$ i $I = \langle g \rangle$ per ser un ideal maximal.

Recíprocament, si $I = \langle z - z_0 \rangle = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(z_0) = 0\}$ i J és un ideal tal que $I \subsetneq J \subset \mathcal{H}(\Omega)$ volem veure que J és l'ideal total. Prenem una funció $h \in J \setminus I$. Aleshores h no s'anul·la en z_0 i pel Teorema de Wedderburn existeixen funcions α, $\beta \in \mathcal{H}(\Omega)$ tals que

$$\alpha(z - z_0) + \beta h = 1$$

així doncs $1 \in J$, ja que $h \in J$ i $(z - z_0) \in I \subset J$. Per tant, $J = \mathcal{H}(\Omega)$ i I és maximal. □

Per tant, hi ha una correspondència bijectiva entre ideals maximals tancats i punts de Ω. Escriurem, doncs, els ideals maximals com $I_a := \{f \in \mathcal{H}(\Omega) :\ f(a) = 0\}$ on $a \in \Omega$.

5.2.1 Ideals amb conjunt de zeros buit

Tot seguit, veurem algunes conseqüències de la Proposició 5.19 i el seu Corol·lari 5.20 demostrats en l'apartat anterior.

Donat que $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(\Omega)) = \emptyset$, ja que $\mathcal{Z}(1) = \emptyset$ i $1 \in \mathcal{H}(\Omega)$, pel Corol·lari 5.20 sabem que l'únic ideal tancat tal que $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$ és l'ideal total. Davant d'aquesta situació, seria natural preguntar-nos com són els ideals propis que tenen per conjunt de zeros $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$. Així doncs, a continuació estudiarem breument com han de ser aquests ideals, els quals M. Henrisken anomena ideals lliures (vegeu [6]). Fins ara hem vist que si existeixen, han de ser oberts i densos en $\mathcal{H}(\Omega)$.

L'existència d'aquests ideals no és evident. Per exemple, en l'espai de polinomis $\mathbb{C}[z]$ l'únic ideal I tal que $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$ és el total. Aquest fet és conseqüència de l'apartat iii del Corol·lari que es presenta a continuació.

Corol·lari 5.25. *Si $I \subset \mathcal{H}(\Omega)$ és un ideal propi tal que $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$, aleshores:*

i) I no està finitament generat.

ii) Per qualssevol $f_1, f_2, \ldots, f_n \in I$ tenim que $\mathcal{Z}(f_1) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}(f_n) \neq \emptyset$.

iii) I no pot contenir cap polinomi P no nul.

Demostració. *i)* Si I té un nombre finit de generadors, llavors és tancat i pel Corol·lari 5.20 només pot ser l'ideal total, fet que contradiu que I sigui propi.

ii) Si existissin $f_1, f_2, \ldots, f_n \in I$ tals que $\mathcal{Z}(f_1) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}(f_n) = \emptyset$, pel Teorema 5.5 tindríem que $1 \in I$ i aleshores $I = \mathcal{H}(\Omega)$, cosa que és una contradicció.

iii) Aquest punt és un cas particular de ii.
Si $P \in I$ i $z_1, \ldots, z_m$ són les seves arrels podem trobar funcions $f_1, f_2, \ldots, f_n \in I$ tals que no s'anul·lin en cap zero de P, això és possible donat que $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$. Així doncs, $\mathcal{Z}(P) \cap \mathcal{Z}(f_1) \cap \cdots \cap \mathcal{Z}(f_n) = \emptyset$ i això no pot ser per ii.

□

Per últim, veurem en un exemple que mostra que en $\mathcal{H}(\Omega)$ efectivament existeixen ideals diferents del total amb conjunt de zeros buit.

Exemple 5.26. Prenem $\{z_j\}_{j\geq 1}$ una successió sense punts d'acumulació en Ω. Definim l'ideal I de manera $f \in I$ si existeix un enter $j_f \geq 0$ tal que per tot $j \geq j_f + 1$ se satisfà $f(z_j) = 0$. És a dir,

$$I = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(z_j) = 0,\, j \geq j_f + 1,\, j_f \geq 0\}.$$

I és efectivament un ideal, ja que si $f \in I$ i $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, aleshores $gf(z_j) = 0$ per tot $j \geq j_f + 1$ i, conseqüentment, $gf \in I$.
El Teorema de Weierstrass ens diu que $I \neq \{0\}$. I per altra banda, $I \neq \mathcal{H}(\Omega)$, ja que $1 \notin I$. A més a més, $\mathcal{Z}(I) = \emptyset$.

5.3 Teorema de Bers

En aquesta última secció provarem el Teorema de Bers, per fer-ho utilitzarem un resultat de Royden [8] i la caracterització dels ideals maximals donada en el Teorema 5.24.

Definició 5.27. *Un homomorfisme d'anells entre* $\mathcal{H}(\Omega_1)$ *i* $\mathcal{H}(\Omega_2)$ *és una aplicació* $\phi : \mathcal{H}(\Omega_1) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega_2)$ *tal que:*

- $\phi(f+g) = \phi(f) + \phi(g)$.
- $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$.
- $\phi(1_{\Omega_1}) = 1_{\Omega_2}$.

Tot homomorfisme d'anells bijectiu és un isomorfisme.

En aquest apartat identificarem la funció constantment igual a λ amb la constant λ.

Definició 5.28. *Un homomorfisme* π *de l'anell* $\mathcal{H}(\Omega)$ *en* $\mathbb{C}$ *preserva constants si*

$$\pi(\lambda) = \lambda, \quad \textit{per tot } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Definició 5.29. *Siguin* Ω *i* Ω' *dominis en* $\mathbb{C}$*, un homomorfisme* ϕ *de l'anell* $\mathcal{H}(\Omega)$ *en* $\mathcal{H}(\Omega')$ *preserva constants si*

$$\phi(\lambda) = \lambda, \quad \textit{per tot } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sigui Ω un domini, per cada $a \in \Omega$ definim $\pi_a : \mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ com

$$\pi_a(f) = f(a), \quad \text{per tot } f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

π_a és un homomorfisme d'anells que preserva constants i s'anomena l'homomorfisme d'avaluació en a.

Lema 5.30.

- *$Ker(\pi_a) = I_a$ per cada $a \in \Omega$.*
- *$\pi_a \equiv \pi_b$ si i només si $a = b$.*

Demostració. La primera afirmació és evident.
Per la segona, observem que la implicació de dreta a esquerra és també evident. La implicació contrària està justificada pel fet que si $a \neq b$ i $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ definida per $f(z) = \frac{z-a}{b-a}$, aleshores $\pi_a(f) = 0$ i $\pi_b(f) = 1$. □

Donem a continuació el Lema de Royden com a pas previ a demostrar el Teorema de Bers. Aquest lema prova que els homomorfismes d'avaluació puntual són els únics homomorfismes de $\mathcal{H}(\Omega)$ en $\mathbb{C}$ que preserven constants.

Lema 5.31 (Lema de Royden)**.** *Si* $\pi : \mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ *és un homomorfisme d'anells que preserva constants, aleshores* $\pi \equiv \pi_a$ *per un cert* $a \in \Omega$*.*

Demostració. Prenem l'ideal $I = Ker(\pi)$. Donat que π no és idènticament nul·la, ja que preserva constants, llavors $I \neq \mathcal{H}(\Omega)$.
Suposem que podem construir una funció $h \in I$ tal que $h(a) = 0$ amb multiplicitat 1 per un únic $a \in \Omega$ i finalitzem la demostració del lema (l'existència de h la demostrarem més endavant).
Si prenem aquesta h, aleshores $\langle h \rangle = I_a \subset I$. A més a més, I_a és maximal pel Teorema 5.24 i, per tant, $I = I_a$.
Per altra banda, per qualsevol $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tenim que $g - g(a) \in I_a = Ker(\pi)$. Per tant, com π és un homomorfisme que preserva constants tenim

$$0 = \pi(g - g(a)) = \pi(g) - g(a)$$

i conseqüentment $\pi(g) = g(a) = \pi_a(g)$. Així doncs, $\pi \equiv \pi_a$ com volíem veure.

Comprovem ara que efectivament existeix aquesta funció $h \in I$ que té un únic zero en Ω amb multiplicitat 1.
En primer lloc, veiem que $I \neq \{0\}$ perquè si $I = \{0\}$ aleshores π és injectiva i en particular es verifica que $\mathcal{H}(\Omega)$ només conté funcions constants, cosa que és una contradicció. En efecte, per tot $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es té que $\pi(f) = \pi(\pi(f))$ i com π és injectiva, $f \equiv \pi(f)$.
Així doncs, podem prendre una funció $f \in I$ no nul·la tal que f no és una unitat, ja que $I \neq \mathcal{H}(\Omega)$. Per tant, f s'anul·la en algun punt i en particular $\mathcal{Z}(f) \neq \emptyset$. Sigui ara $\{z_n\}_n$ tal que $\mathcal{Z}(f) = \bigcup_n \{z_n\}$ és el conjunt de zeros de f. Aplicant el Teorema d'interpolació podem construir una funció $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z_n) = n$ i $m(z_n, g - g(z_n)) = 1$ (per exemple, imposant que $g'(z_n) \neq 0$).
Sigui $G = g - \pi(g)$, com que per hipòtesis π és un homomorfisme que preserva constants tenim $G \in \mathrm{Ker}(\pi) = I$. Les funcions G i f han de tenir algun zero en comú, el qual anomenarem z_{n_0}. En cas contrari, 1 seria un màxim comú divisor de f i G i, pel Teorema 5.5, tindríem que $1 \in I$, cosa que és una contradicció. Així doncs

$$0 = G(z_{n_0}) = g(z_{n_0}) - \pi(g)$$

i, en particular, $\pi(g) = g(z_{n_0})$. A més a més, G no s'anul·la en cap altre z_n, ja que

$$G(z_n) = g(z_n) - \pi(g) = g(z_n) - g(z_{n_0}) = n - n_0.$$

Observem que donat que $G'(z_{n_0})) = g'(z_{n_0}) \neq 0$, la multiplicitat de G en z_{n_0} és 1.
Hem vist, doncs, que z_{n_0} és l'únic zero comú de G i f i $\min\{m(z_{n_0}, f), m(z_{n_0}, G)\} = 1$. Per tant, la funció $h = (z - z_{n_0})$ s'anul·la únicament en z_{n_0} amb multiplicitat 1 i és un màxim comú divisor de f i G. Aleshores, pel Corol·lari 5.6 existeixen funcions α, $\beta \in \mathcal{H}(\Omega)$ tals que

$$\alpha f + \beta G = h$$

i per tant $h \in I$ com volíem veure. □

Teorema 5.32. *Siguin Ω_1 i Ω_2 dues regions de $\mathbb{C}$, llavors existeix un isomorfisme que preserva constants entre $\mathcal{H}(\Omega_1)$ i $\mathcal{H}(\Omega_2)$ si i només si Ω_1 i Ω_2 són biholomorfes.*

Demostració. Suposem primer que $F : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ és biholomorfa i definim

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{H}(\Omega_2) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\Omega_1) \\ & f & \longmapsto & f \circ F \end{array}$$

llavors ϕ és un isomorfisme que preserva constants. En efecte, $\phi(\lambda) = \lambda \circ F = \lambda$. Com F és biholomorfa podem definir $\phi_1(g) = g \circ F^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ que és clarament la inversa de ϕ i preserva constants. Per tant, ϕ és isomorfisme que preserva constants.
Recíprocament, suposem que ϕ és un isomorfisme de $\mathcal{H}(\Omega_2)$ en $\mathcal{H}(\Omega_1)$ que preserva constants. Volem trobar a partir de ϕ una funció F de Ω_1 en Ω_2 biholomorfa.
Fixem un $a \in \Omega_1$ i considerem $\pi_a : \mathcal{H}(\Omega_1) \longrightarrow \mathbb{C}$ l'homomorfisme d'avaluació en a. Llavors $\pi_a \circ \phi$ és un homomorfisme de $\mathcal{H}(\Omega_2)$ en $\mathbb{C}$ que preserva constants, per ser composició d'aplicacions que preserven constants. Pel Lema de Royden existeix $b \in \Omega_2$ complint que $\pi_a \circ \phi \equiv \pi_b$ i, tal com hem observat en el Lema 5.31, b és únic.
Llavors la funció F donada per $F(a) = b$ està ben definida. Observem a més que si $f \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ i $a \in \Omega_1$, llavors

$$\phi(f)(a) = \pi_a(\phi \circ f) = \pi_{F(a)}(f) = f(F(a))$$

i, per tant,

$$\phi(f) \equiv f \circ F.$$

Prenent $f = id_{\Omega_2}$ podem deduir que $F = \phi(id_{\Omega_2}) \in \mathcal{H}(\Omega_1)$.
Com ϕ és un isomorfisme que conserva constants, aleshores ϕ^{-1} també ho és. Seguint el mateix argument que abans per ϕ^{-1} obtenim una funció holomorfa $G : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_1$ tal que $\phi^{-1}(g) = g \circ G$ per tota $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$.
Per altra banda, per tot $f \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ tenim

$$f = \phi^{-1}(\phi(f)) = f \circ F \circ G$$

i, en particular, si prenem $f = id_{\Omega_2}$, es dedueix que $F \circ G = id_{\Omega_2}$ i, anàlogament, que $G \circ F = id_{\Omega_1}$.
Així doncs, G és la inversa de F i F és un biholomorfisme de Ω_1 en Ω_2. $\square$

6 Conclusions

En aquesta memòria hem estudiat la construcció de funcions holomorfes amb zeros prefixats en una regió donada pel Teorema de Weierstrass i hem demostrat un teorema d'interpolació per funcions de $\mathcal{H}(\Omega)$. A més a més, hem aplicat aquests resultats per obtenir propietats algebraiques de l'anell $\mathcal{H}(\Omega)$. Així doncs, podem dir que s'han assolit els objectius plantejats en la introducció.

Les aplicacions donades dels problemes de zeros i interpolació tractats són exemples de la interacció natural que hi ha entre diferents branques de les matemàtiques, fet que no sempre se'ns mostra en les assignatures del grau.

Des d'un punt de vista més personal, la realització d'aquest treball he estat molt enriquidora, ja que he pogut tant conèixer nous conceptes com recuperar-ne alguns d'assignatures cursades en el grau, com per exemple, d'assignatures d'Anàlisi Complexa i d'Estructures Algebraiques. A més a més, aquesta ha estat la meva primera experiència en la redacció d'un text extens en matemàtiques i tot el que això comporta. He après a escriure matemàtiques formalment, fer una recerca bibliogràfica, seleccionar i detallar les demostracions trobades en diferents fonts i estructurar els resultats obtinguts en una memòria. A més, també he intentat posar en context els resultats considerats i explicar els casos més senzills com a motivació pels casos generals.

7 Annex

En aquesta secció inclourem el Teorema de Runge i alguns resultats relacionats que hem utilitzat al llarg de la memòria. Primer demostrarem dos lemes previs i seguidament passarem a la demostració del Teorema de Runge. Finalment, demostrarem algunes conseqüències d'aquest Teorema que hem utilitzat en la demostració de la Proposició 5.19.

Recordem que si $K \subset \mathbb{C}$ compacte, $\mathcal{H}(K)$ és el conjunt de funcions holomorfes en un obert U, $K \subset U$, és a dir, en un entorn obert de K. Recordem també que $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ és el pla complex ampliat en el punt de l'infinit que és homeomorf a l'esfera unitat de $\mathbb{R}^3$ via la projecció estereogràfica.

Teorema 7.1 (Teorema de Runge). *Sigui $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ compacte i $E \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$. Aleshores si E talla tota component connexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, tota funció $f \in \mathcal{H}(K)$ es pot aproximar uniformement en K per funcions racionals amb pols en E.*

La demostració d'aquest teorema requereix dos lemes previs. Provarem primer que tota integral de Cauchy sobre un camí γ fora d'un compacte K és límit uniforme sobre K d'una successió de funcions racionals amb pols simples en γ^*, on γ^* és el recorregut de γ.

Lema 7.2. *Sigui $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ compacte i $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus K$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$, llavors:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j,n}}{a_{j,n} - z} = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\frac{dw}{2\pi i},$$

uniformement en $z \in K$, on per cada $1 \leq j \leq n,\ n \geq 1$

- $\lambda_{j,n} = \dfrac{1}{2\pi i n} f\left(\gamma\Big(\dfrac{j-1}{n}\Big)\right)\gamma'\Big(\dfrac{j-1}{n}\Big).$
- $a_{j,n} = \gamma\Big(\dfrac{j-1}{n}\Big).$

Demostració. Siguin $z \in K$ i $t \in [0,1]$, definim

$$F(z,t) = \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z}\frac{\gamma'(t)}{2\pi i}.$$

Es compleix que F és contínua en el compacte $K \times [0,1]$, ja que $\gamma^* \subset \mathbb{C} \setminus K$. Per tant, és uniformement contínua en $K \times [0,1]$.

A més

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\frac{dw}{2\pi i} = \int_0^1 F(z,t)dt.$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in K}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_{j,n}}{a_{j,n}-z}-\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\frac{dw}{2\pi i}\right| &= \sup_{z\in K}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}F\left(z,\frac{j-1}{n}\right)-\int_0^1 F(z,t)dt\right| \\
&= \sup_{z\in K}\left|\sum_{j=1}^{n}\int_{\frac{j-1}{n}}^{\frac{j}{n}}\left(F\left(z,\frac{j-1}{n}\right)-F(z,t)\right)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sup_{\substack{z\in K;\\ t\in[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]}}\left|F\left(z,\frac{j-1}{n}\right)-F(z,t)\right| \\
&\leq \sup_{\substack{z\in K;\\ |t-s|\leq\frac{1}{n}}}|F(z,s)-F(z,t)|
\end{aligned}$$

I aquest últim terme tendeix a 0 quan $n\to\infty$, ja que F és uniformement contínua a $K\times[0,1]$. $\square$

Utilitzarem també el següent lema tècnic vist a l'assignatura d'Anàlisi Complexa.

Lema 7.3. *Sigui $\Omega\subset\mathbb{C}$ obert i $\emptyset\neq K\subset\Omega$ compacte. Llavors existeix un cicle $\Gamma=\Gamma_{\Omega\setminus K}\subset\Omega\setminus K$ que és una suma finita (formal) de poligonals tancades simples formades per segments paral·lels als eixos de coordenades complint que per a tota $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ i tot $z\in K$,*

$$f(z)=\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}\frac{dw}{2\pi i}.$$

Amb aquests dos lemes procedim a demostrar el Teorema de Runge.

Demostració Teorema de Runge. Pels lemes 7.2 i 7.3, tota funció $f\in\mathcal{H}(K)$ és límit uniforme en K d'una successió de combinacions lineals de funcions del tipus $R_a(z)=\dfrac{1}{a-z}$, on $a\in\mathbb{C}\setminus K$. Per tant, per acabar la demostració del teorema només ens cal veure que per a tot $a\in\mathbb{C}\setminus K$, R_a es pot aproximar per funcions racionals amb pols en E.

Definim $R(E)$ com l'espai de funcions racionals amb pols en E. La seva adherència en $\mathcal{C}(K)$, $\overline{R(E)}$, és l'espai de les funcions que es poden aproximar uniformement en K per funcions de $R(E)$. Volem provar, doncs, que per tot punt $a\in\mathbb{C}\setminus K$, $R_a\in\overline{R(E)}$.

Sigui C_∞ la component connexa de $\mathbb{C}_\infty\setminus K$ que conté ∞. Distinguirem dos casos:

Cas 1: $E\cap C_\infty\neq\{\infty\}$, és a dir, C_∞ conté algun punt finit d'E. Volem veure que $V=\{a\in\mathbb{C}\setminus K:\ R_a\in\overline{R(E)}\}$ coincideix amb $\mathbb{C}\setminus K$.

Observem que com $E\setminus\{\infty\}\subset\mathbb{C}\setminus K$, per a tot $a\in E\setminus\{\infty\}$ es compleix que $\frac{1}{z-a}\in\mathcal{H}(K)$ i $\frac{1}{z-a}\in R(E)$. Per tant, $E\setminus\{\infty\}\subset V$ i, consegüentment, V talla tota component connexa de $\mathbb{C}\setminus K$. Per aquesta raó, per provar que $V=\mathbb{C}\setminus K$ n'hi ha prou en veure que:

i) V és obert en $\mathbb{C}$.

ii) V és tancat en $\mathbb{C}\setminus K$.

Provem (i): Sigui $a \in V \subset \mathbb{C} \setminus K$ i $\delta = d(a,K) > 0$, volem veure que $D(a,\delta) \subset V$. En efecte, si $b \in D(a,\delta)$, llavors $0 \leq r = \frac{|a-b|}{\delta} < 1$ i, en particular, si $z \in K$, $\frac{|a-b|}{|a-z|} \leq \frac{|a-b|}{\delta} < 1$. Per tant,

$$R_b(z) = \frac{1}{b-z} = \frac{1}{a-z} \cdot \frac{1}{(1-\frac{a-b}{a-z})} = \frac{1}{a-z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a-b}{a-z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a-b)^n \, (R_a(z))^{n+1} .$$

Si $z \in K$, aquesta sèrie convergeix uniformement sobre K pel criteri M de Weierstrass, ja que si $z \in K$, llavors $\left| \dfrac{a-b}{a-z} \right| \leq r < 1$ i en conseqüència, $R_b \in \overline{R(E)}$.

Provem ara (ii), és a dir, que V és tancat en $\mathbb{C} \setminus K$. Cal veure que si $\{a_n\}_n \subset V$ i $b \in \mathbb{C} \setminus K$ compleixen que $\{a_n\}_n \to b$, llavors $b \in V$.

En efecte, donat que $d(b,K) > 0$ i $\{a_n\} \to b$, existeix un $n_0 \geq 1$ tal que $|a_{n_0} - b| \leq \frac{1}{2} d(b,K) := r$. Llavors $D(a_{n_0}, r) \subset D(b, 2r) \subset \mathbb{C} \setminus K$ i, en conseqüència, $0 < r \leq d(a_{n_0}, K) := \delta_0$. Finalment s'obté que $b \in D(a_{n_0}, r) \subset D(a_{n_0}, \delta_0)$, però en l'apartat (i) hem vist que si $a_{n_0} \in V$ i $\delta_0 = d(a_{n_0}, K)$, $D(a_{n_0}, \delta_0) \subset V$.

Cas 2: $E \cap C_\infty = \{\infty\}$. Sabem que si $r > \max_{z \in K} |z|$, llavors $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,r)} \subset C_\infty$. Per tant, si triem un punt $a_0 \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,r)}$, llavors tenim que

$$E_0 = (E \setminus \{\infty\}) \cup \{a_0\}$$

és un subconjunt de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ que talla cada component connexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ i a_0 és un punt finit de $C_\infty \cap E_0$. Pel cas (i), per a cada $a \in \mathbb{C} \setminus K$, R_a es pot aproximar per funcions racionals en E_0.

Descomponent les funcions racionals en fraccions simples només cal provar que R_{a_0} és el límit uniforme a K d'una successió de polinomis (funcions racionals amb pols a ∞).

Hem escollit $a_0 \notin \overline{D(0,r)}$, per tant, per a cada $z \in K$, $\left| \frac{z}{a_0} \right| \leq \frac{\sup_{z \in K} |z|}{r} < 1$ i

$$R_{a_0}(z) = \frac{1}{a_0 - z} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{(1 - \frac{z}{a_0})} = \frac{1}{a_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_0} \right)^n$$

i aquesta sèrie convergeix uniformement sobre K pel criteri M de Weierstrass. □

Corol·lari 7.4. *Sigui $\emptyset \neq K \subset \mathbb{C}$ compacte tal que $\mathbb{C} \setminus K$ connex. Llavors tota funció holomorfa en K és límit uniforme sobre K d'una successió de polinomis.*

Demostració. Si $\mathbb{C} \setminus K$ és connex, llavors $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ també ho és i aplicant el Teorema de Runge a $E = \{\infty\}$ obtenim el resultat. □

Els següents resultats s'utilitza en la demostració de la Proposició 5.19 i incloem aquí les seves demostracions.

Corol·lari 7.5 ([3], Teorema 10.7)**.** *Si $K \subset \Omega$ compacte i Ω obert. Si cap component connexa de $\mathbb{C} \setminus K$ és relativament compacta en Ω, llavors tota funció holomorfa en un entorn de K es pot aproximar uniformement sobre K per funcions holomorfes en Ω (més concretament per funcions racionals amb pols fora de Ω).*

Demostració. En primer lloc, si cap component connexa de $\mathbb{C} \setminus K$ és relativament compacta en Ω, aleshores tota component connexa i acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ talla $\mathbb{C} \setminus \Omega$. En efecte, si C

fos una component connexa acotada de $\mathbb{C}\setminus K$ tal que $C \subset \Omega$, aleshores com $\partial C \subset K \subset \Omega$ tindríem $\overline{C} \subset \Omega$ i, conseqüentment, C seria relativament compacta en Ω.

Així doncs, triem $E \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$ de la següent manera: el punt de l'infinit pertany a E i per cada component connexa i acotada C_i de $\mathbb{C}\setminus K$ escollim $z_i \in C_i \cap (\mathbb{C}\setminus\Omega)$ (punt que existeix per l'observació anterior). Prenent, doncs, $E = \{\infty\} \cup \bigcup_i \{z_i\}_i$, pel Teorema de Runge podem aproximar tota funció holomorfa en un entorn de K per una funció racional amb pols en $E \subset \mathbb{C}\setminus\Omega$ i per tant per una funció holomorfa en Ω. □

Lema 7.6. *Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert del pla i $K \subset \Omega$ un compacte. Definim $K' := K \cup \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ on $\mathcal{C}$ és la família de totes les components connexes de $\Omega\setminus K$ que són relativament compactes en Ω. Llavors $\overline{K'}$ és compacte.*

Demostració. La demostració la farem en tres passos:

- Per a cada $C \in \mathcal{C}$, es compleix que $\partial C \subset K$. En efecte, si $C \in \mathcal{C}$ es verifica que C és oberta, ja que $\Omega\setminus K$ és obert. Per altra banda, per hipòtesi, C és relativament compacta en Ω amb el que $\partial C \subset C \subset \Omega$. Suposem que existeix un punt $z \in \partial C\setminus K$, llavors $\Omega\setminus K$ és un entorn obert de z i podem trobar una bola $B(z,r) \subset \Omega\setminus K$. Observem que com C és obert, $\partial C \cap C = \emptyset$ i en particular, $z \notin C$. Per tant, $C \subsetneq C \cup B(z,r)$ i $C \cup B(z,r)$ és un connex de $\Omega\setminus K$, el que ens porta a una contradicció. Per tant, $\partial C \subset K$.

- K' és acotat. Donat que K és acotat, existeix $z \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ complint que $K \subset B(z,r)$. Llavors per a cada component connexa C de $\mathcal{C}$ es verifica que

$$\sup_{w\in C}|w-z| = \sup_{w\in\overline{C}}|w-z| \overset{(1)}{=} \max_{w\in\overline{C}}|w-z| \overset{(2)}{=} \max_{w\in\partial C}|w-z| \overset{(3)}{\leq} \max_{w\in K}|w-z| \leq r$$

  on (1) i (3) es dedueixen de la compacitat de C i del primer pas de la demostració, respectivament. I (2) es dedueix del fet que donat dos punts $x \neq y$ i donat $\delta > 0$ existeixen punts $x_1, y_1 \in B(y,\delta)$ complint que $d(x,x_1) < d(x,y) < d(x,y_1)$. Per tant, $\overline{K'} \subset \{w;\ |w-z| \leq r\}$ i $\overline{K'}$ és acotat.

- K' és tancat. Sigui $\mathcal{C}'$ la família de les components connexes de $\Omega\setminus K$ que no són relativament compactes en Ω. Llavors $\Omega\setminus K = V \cup W$ on

$$V := \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C \qquad \text{i} \qquad W := \bigcup_{C\in\mathcal{C}'} C$$

  són oberts disjunts. Per tant, $\Omega\setminus K' = (\Omega\setminus K)\setminus V = W$ és també obert i en particular K' és tancat en Ω. Si $\Omega = \mathbb{C}$, llavors K' és tancat. Suposem doncs que $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$. Llavors $\mathbb{C}\setminus\Omega$ és un tancat no buit disjunt amb el compacte K amb el que $\delta = d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega) > 0$. Observem que per a provar que K' és tancat n'hi ha prou en demostrar que $d(\overline{K'}, \mathbb{C}\setminus\Omega) = d(K', \mathbb{C}\setminus\Omega) = \delta > 0$, perquè si es compleix aquesta igualtat, llavors $\overline{K'} \subset \Omega$ i com $\overline{K'}$ és tancat en Ω, $\overline{K'} = \overline{K'} \cap \Omega = K'$. Provem doncs la igualtat entre distàncies. Donat que $K' = K \cup V$ es verifica que

$$d(K', \mathbb{C}\setminus\Omega) = \min\{d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega), d(V, \mathbb{C}\setminus\Omega)\} = \min\{\delta, d(V, \mathbb{C}\setminus\Omega)\},$$

  i per tant, hem de comprovar que $d(V, \mathbb{C}\setminus\Omega) \geq \delta$ o, equivalentment, que per a cada $C \in \mathcal{C}$, $d(C, \mathbb{C}\setminus\Omega)$.

Sigui, doncs, $C \in \mathcal{C}$. Es compleix que

$$d(C, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \inf_{z \in \mathbb{C} \setminus \Omega} d(z, C) = \inf_{z \in \mathbb{C} \setminus \Omega} d(z, \overline{C}).$$

Però $d(z, \overline{C}) = d(z, \partial C)$ per la compacitat de $\overline{C}$ i, de nou, pel fet que donats dos punts $x \neq y$ i donat $\delta > 0$ existeixen punts $x_1, y_1 \in B(y, \delta)$ complint que $d(x, x_1) < d(x, y) < d(x, y_1)$. A més, pel pas 1, hem provat que $\partial C \subset K$ amb el que $d(z, \partial C) \geq d(z, K) \geq \delta$. Hem provat doncs que $d(C, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \delta$.

$\square$

Referències

[1] Berenstein, C.A.; Gay, R.: *Complex variables. An introduction.* Graduate Texts in Mathematics, 125. Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] Bers, L.: On rings of analytic functions. Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 311–315.

[3] Bruna, J.; Cufí, J.: *Anàlisi Complexa.* Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona. Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Bellaterra(Barcelona), 2008.

[4] Conway, J.B.: *Functions of one complex variable.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

[5] Fernández, J.L.: Productos infinitos. `http://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/asignaturas/vc1718/josechu7.pdf` , 2018.

[6] Henriksen, M.: On the ideal structure of the ring of entire functions. Pacific J. Math. 2 (1952), 179–184.

[7] Remmert, R.: *Classical topics in complex function theory.* Translated from the German by Leslie Kay. Graduate Texts in Mathematics, 172. Springer-Verlag, New York, 1998.

[8] Royden, H.L.: Rings of analytic and meromorphic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 269–276.

[9] Rudin, W.: *Real and complex analysis.* Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[10] Stein, E. M.; Shakarchi, R.: *Complex analysis.* Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[11] Wedderburn, J.H.M.: On matrices whose coefficients are functions of a single variable. Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), no. 3, 328–332.