



# Les assistants de preuve, ou comment avoir confiance en ses démonstrations.

Julien Narboux

► **To cite this version:**

Julien Narboux. Les assistants de preuve, ou comment avoir confiance en ses démonstrations.. Séminaire L, Mar 2013, Strasbourg, France. hal-00809448

**HAL Id: hal-00809448**

**<https://hal.inria.fr/hal-00809448>**

Submitted on 9 Apr 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Les assistants de preuve

ou comment avoir confiance en ses démonstrations

Julien Narboux



Séminaire L, Avril 2013

# Table des matières

1 Le problème

2 Les assistants de preuve

3 Quelques succès

4 Curry-Howard

5 Conclusion

6 Pub

7 Si on a le temps

# Exemples de bugs fameux

## Ariane Vol 501

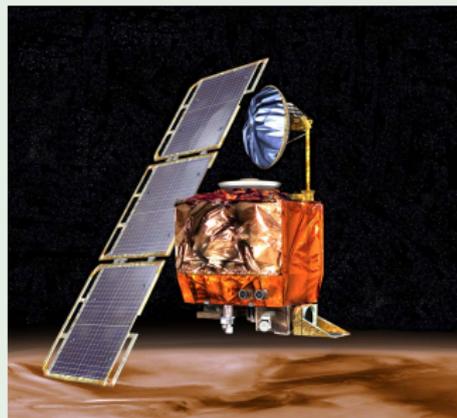
*"Because of the different flight path, a data conversion from a 64-bit floating point to 16-bit signed integer value caused a hardware exception (more specifically, an arithmetic overflow, as the floating point number had a value too large to be represented by a 16-bit signed integer). Efficiency considerations had led to the disabling of the software handler (in Ada code) for this error trap, although other conversions of comparable variables in the code remained protected. This caused a cascade of problems, culminating in destruction of the entire flight."*



## Mars Climate Orbiter

*"The 'root cause' of the loss of the spacecraft was the failed translation of English units into metric units in a segment of ground-based, navigation-related mission software."*

Coût : \$327 600 000.



# Un logiciel pour corriger les bugs ?

## Problème de l'arrêt

Il n'existe pas de programme permettant de décider si un programme termine ou pas.

Tester !

On écrit une fonction:

Programme + Propriété  $\rightarrow$  Vrai/Faux

Tester !

On écrit une fonction:

Programme + Propriété  $\rightarrow$  Vrai/Faux

Mais çà ne suffit pas !

## Problème

On a une infinité de cas.

## Solution

Réaliser une preuve.

Un raisonnement fini pour traiter une infinité de cas.

## Théorème de Fermat-Wiles

*Il n'existe pas de nombres entiers non nuls, et tels que :*

$$x^n + y^n = z^n$$

*dès que est un entier strictement supérieur à 2.*

- Paul Wolfskehl offre 100,000 marks
- deux conditions: relues par les pairs, attendre 2 ans
- 1907-1908 : 621 tentatives

## Autre exemple récent

*In the paper: Roman Mikhailov, Jie Wu On homotopy groups of the suspended classifying spaces Algebraic/ Geometric Topology, 2010, vol.10, pp.565–625. the authors state in Theorem 5.4: Let  $A_4$  be the 4-th alternating group. Then  $\pi_4(\Sigma K(A_4, 1)) = \mathbb{Z}/4$ . The elementary method used by the Kenzo program, known as the Whitehead tower, produces a different result, namely  $\pi_4(\Sigma K(A_4, 1)) = \mathbb{Z}/12$ . The authors of the quoted paper inadvertently forgot the 3-primary component. This Kenzo computation was done by Ana Romero, using extra-modules devoted to group resolutions written by herself.*

# Qu'est-ce qu'une preuve ?

- un argument convainquant

# Qu'est-ce qu'une preuve ?

- un argument convainquant
- une suite de déductions à partir des axiomes

# Qu'est-ce qu'une preuve ?

- un argument convainquant
- une suite de déductions à partir des axiomes
- un algorithme (correspondance de Curry-Howard)

Il peut être difficile de se convaincre qu'une preuve est correcte :

- 1 présence de calculs non vérifiables à la main

Il peut être difficile de se convaincre qu'une preuve est correcte :

- ① présence de calculs non vérifiables à la main
- ② preuves très longues, très compliquées

Il peut être difficile de se convaincre qu'une preuve est correcte :

- ① présence de calculs non vérifiables à la main
- ② preuves très longues, très compliquées
- ③ trop de détails techniques, trop de cas pour les traiter à la main sans faire d'erreurs

# Table des matières

- 1 Le problème
- 2 Les assistants de preuve
- 3 Quelques succès
- 4 Curry-Howard
- 5 Conclusion
- 6 Pub
- 7 Si on a le temps

- 1 Clarifier les *hypothèses*

# Une quête de la rigueur

- 1 Clarifier les *hypothèses*
- 2 Clarifier ce qu'est une *preuve*

- 1 Clarifier les *hypothèses*
- 2 Clarifier ce qu'est une *preuve*
- 3 Être si précis que l'on a plus besoin de *comprendre* la preuve pour la *vérifier*

# Une quête de la rigueur

- 1 Clarifier les *hypothèses*
- 2 Clarifier ce qu'est une *preuve*
- 3 Être si précis que l'on a plus besoin de *comprendre* la preuve pour la *vérifier*
- 4 Automatiser des preuves

Par définition vérifier qu'une preuve est correcte est un problème *décidable*.

On peut donc construire des assistants de preuve.

## Exemples

- Coq
- Isabelle
- PVS
- HOL-Light
- ...

## Qu'est-ce que Coq ?

- un assistant de preuve
- développé et distribué librement par Inria

## Il permet de :

- définir des notions mathématiques et/ou des programmes
- démontrer mécaniquement des théorèmes mathématiques mettant en jeu ces définitions

Les deux étapes du développement d'une démonstration dans Coq sont les suivantes :

- d'abord la construction *interactive* d'une démonstration *par l'utilisateur*;
- ensuite la vérification *automatique* de la correction de démonstration *par le système*.

**L'utilisateur prouve, puis le système vérifie que la preuve est bien correcte.**

- "Si les portes sont ouvertes c'est que la rame est en face d'un quai".
- 

$$\sum_0^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

On veut montrer que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

On veut montrer que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va montrer que:

$$2 * \sum_{i=0}^n i = n(n+1)$$

On veut montrer que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va montrer que:

$$2 * \sum_{i=0}^n i = n(n+1)$$

En Coq:

Lemma sun\_n : forall n:nat, 2 \* (sum\_int n) = n\*(n+1).

On veut montrer que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va montrer que:

$$2 * \sum_{i=0}^n i = n(n+1)$$

En Coq:

Lemma sun\_n : forall n:nat, 2 \* (sum\_int n) = n\*(n+1).

Oui mais comment est définie l'opération  $\sum$  ?

On veut montrer que:

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

On va montrer que:

$$2 * \sum_{i=0}^n i = n(n+1)$$

En Coq:

Lemma sun\_n : forall n:nat, 2 \* (sum\_int n) = n\*(n+1).

Oui mais comment est définie l'opération  $\sum$  ?

$$\sum_{i=0}^0 i = 0$$

$$\sum_{i=0}^n i = n + \sum_{i=0}^{n-1} i$$

# Table des matières

1 Le problème

2 Les assistants de preuve

**3 Quelques succès**

4 Curry-Howard

5 Conclusion

6 Pub

7 Si on a le temps

# Le problème de la vérification d'une preuve

Présence de calculs

## Théorème des 4 couleurs

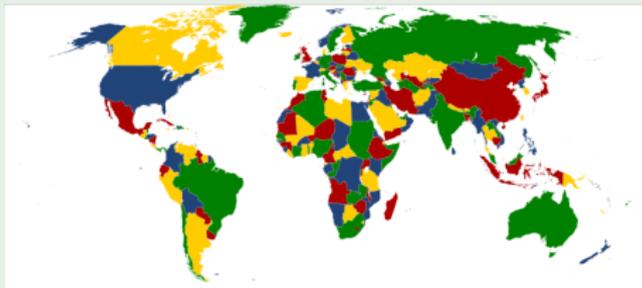
Quatre couleurs suffisent pour colorier une carte géographique *plane* sans que deux pays ayant une *frontière* en commun ne soient de la même couleur.

1879 Preuve fausse par Kempe

1890 Heaywood trouve l'erreur

1976 Appel and Hake (1478 configurations, 1200 heures de calcul)

2004 Formalisation en Coq par Gonthier et Werner



## Conjecture de Kepler/Théorème de Hales

Pour un empilement de sphères égales, la densité maximale est atteinte pour un empilement cubique à faces centrées.

1998 Preuve par Thomas Hales

2004 - ? Projet Flyspeck: formalisation du théorème en cours en HOL-light avec des contributions en Coq et Isabelle (plus de 300000 lignes)

Robert MacPherson, éditeur, écrit que:

*"The news from the referees is bad, from my perspective. They have not been able to certify the correctness of the proof, and will not be able to certify it in the future, because they have run out of energy to devote to the problem. This is not what I had hoped for. The referees put a level of energy into this that is, in my experience, unprecedented. "*



Photo par Robert Cudmore



# Le problème de la vérification d'une preuve

Trop de détails techniques

## Système de pilotage d'une ligne de métro

- Méthode B
- Paris (ligne 14, 1998), Paris (ligne 1, 2005), Lyon (ligne D),  
...



# Le problème de la vérification d'une preuve

Trop de détails techniques

## Un système d'exploitation

sel4 : Micro kernel prouvé en Isabelle/HOL.

Preuve: 165000 lignes, 11 années/homme.

Code: 15000 lignes, 2.5 années/homme.

# Le problème de la vérification d'une preuve I

La taille de la preuve

## Théorème de Feit-Thompson

```
Theorem Feit_Thompson (gT:finGroupType) (G:{group gT}):  
  odd ##|G| -> solvable G.
```

Preuve en Coq par Georges Gonthier et son équipe (septembre 2012)<sup>a</sup>:  
170 000 lignes, 15 000 définitions, 4 200 théorèmes

---

<sup>a</sup><http://ssr2.msr-inria.inria.fr/~jenkins/current/progress.html>

`http://www.cs.ru.nl/~freek/100/index.html`

# Le problème de la vérification d'une preuve

Trop de détails techniques

## Un système de gestion de cartes à puces

Gemalto: preuve formelle avec Coq.  
Certification d'un système JavaCard  
au niveau EAL7.



# Table des matières

- 1 Le problème
- 2 Les assistants de preuve
- 3 Quelques succès
- 4 Curry-Howard**
- 5 Conclusion
- 6 Pub
- 7 Si on a le temps

# Correspondance de Curry-Howard I

$$\frac{f : \text{string} \rightarrow \text{int} \quad a : \text{string}}{\text{int}}$$

# Correspondance de Curry-Howard I

$$\frac{f : \text{string} \rightarrow \text{int} \quad a : \text{string}}{f(a) : \text{int}}$$

# Correspondance de Curry-Howard I

$$\frac{f : \text{string} \rightarrow \text{int} \quad a : \text{string}}{f(a) : \text{int}}$$

Règle de typage de l'application:

$$\frac{f : A \rightarrow B \quad a : A}{f(a) : B}$$

# Correspondance de Curry-Howard I

$$\frac{f : \text{string} \rightarrow \text{int} \quad a : \text{string}}{f(a) : \text{int}}$$

Règle de typage de l'application:

$$\frac{f : A \rightarrow B \quad a : A}{f(a) : B}$$

Modus ponens:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$$

# Correspondance de Curry-Howard I

$$\frac{f : \text{string} \rightarrow \text{int} \quad a : \text{string}}{f(a) : \text{int}}$$

Règle de typage de l'application:

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$$

Modus ponens:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$$

# Correspondance de Curry-Howard I

logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

programmation

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash (\text{fun } x : A \mapsto t) : A \rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B}$$

# Correspondance de Curry-Howard I

logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

programmation

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

# Correspondance de Curry-Howard I

logique

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

programmation

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

# Correspondance de Curry-Howard II

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad \left| \quad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) :}$$
$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

# Correspondance de Curry-Howard II

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad \left| \quad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B}$$
$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$$
$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

# Correspondance de Curry-Howard II

$$\begin{array}{c|c} \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} & \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B} \\ \\ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} & \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash A} \\ \\ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} & \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash B} \end{array}$$

# Correspondance de Curry-Howard II

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \\ \\ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \\ \\ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash (a, b) : A \times B} \\ \\ \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \text{fst } t : A} \\ \\ \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \text{snd } t : B} \end{array}$$

# Correspondance de Curry-Howard III

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \left| \quad \frac{\Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash \mathit{inl} \ a : A + B} \quad \frac{\Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \mathit{inr} \ b : A + B} \right.}{\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}}$$
$$\frac{\Gamma \vdash m : A \vee B \quad \Gamma, x : A \vdash t : C \quad \Gamma, x : B \vdash u : C}{\Gamma \vdash \mathit{case} \ m \ \mathit{of} \ \mathit{inl}(a) \Rightarrow t \mid \mathit{inr}(a) \Rightarrow u : C}$$

# Règles de simplification

$$\text{fst}(A, B) = A$$

$$\text{snd}(A, B) = B$$

$$\text{case } (inl\ m) \text{ of } inl(a) \Rightarrow t | inr(a) \Rightarrow u = t[x := m]$$

$$\text{case } (inr\ m) \text{ of } inl(a) \Rightarrow t | inr(a) \Rightarrow u = u[x := m]$$

# Correspondance de Curry-Howard

<b>Logique</b>	<b><math>\lambda</math>-calcul/programmation</b>
formule	type
preuve	terme/programme
vérification d'une démonstration	vérification de type
normalisation des preuves	$\beta$ -réduction/calcul

# Table des matières

- 1 Le problème
- 2 Les assistants de preuve
- 3 Quelques succès
- 4 Curry-Howard
- 5 Conclusion**
- 6 Pub
- 7 Si on a le temps

- Comment décrire les preuves ?
- Comment formaliser ?
- Comment automatiser les preuves à grande échelle ou à petite échelle ?
- Comment échanger des preuves ?
- ...

- Les assistants de preuve sont utiles en mathématiques et en informatique.
- Ils permettent de manipuler la notion de preuve.
- Attention c'est addictif !

# Table des matières

1 Le problème

2 Les assistants de preuve

3 Quelques succès

4 Curry-Howard

5 Conclusion

**6 Pub**

7 Si on a le temps

Une bourse de thèse fléchée sur le preuve formelle appliquée à l'enseignement en 2013.

<http://dpt-info.u-strasbg.fr/~narboux/stages.html>

# Table des matières

- 1 Le problème
- 2 Les assistants de preuve
- 3 Quelques succès
- 4 Curry-Howard
- 5 Conclusion
- 6 Pub
- 7 Si on a le temps**

# Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous jacente à l'assistant de preuve et

# Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et

# Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et

# Qui vérifie le vérificateur ?

Il faut faire confiance à:

- la théorie sous jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et
- au microprocesseur et

# Qui vérifie le vérificateur ?

## Il faut faire confiance à:

- la théorie sous jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et
- au microprocesseur et
- à vos définitions et énoncés et

# Qui vérifie le vérificateur ?

## Il faut faire confiance à:

- la théorie sous jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et
- au microprocesseur et
- à vos définitions et énoncés et
- à vos axiomes.

# Qui vérifie le vérificateur ?

## Il faut faire confiance à:

- la théorie sous jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et
- au microprocesseur et
- à vos définitions et énoncés et
- à vos axiomes.

# Qui vérifie le vérificateur ?

## Il faut faire confiance à:

- la théorie sous jacente à l'assistant de preuve et
- que l'implantation correspond bien à la théorie et
- au compilateur et
- au microprocesseur et
- à vos définitions et énoncés et
- à vos axiomes.

## Critère de de Bruijn

- Les preuves sont certifiées par un *noyau*.
  - Isabelle (très petit)
  - HOL (très petit)
  - Coq (assez petit)

En revanche, ni Mizar, ni PVS n'ont une notion de noyau.

# Et l'automatisation ?

Un approche sceptique: on ne fait pas confiance aux démonstrateurs automatiques.

Deux solutions:

- 1 Prouver le prouveur.
- 2 Vérifier le résultat du prouveur: un certificat.

## Exemples

- Egalité entre deux expressions prises dans un anneau ou dans un corps.
- Tautologies.
- Inégalités linéaires.
- Théorèmes en géométrie.
- ...