Construction et validation des éléments réduits associés á un carreau simplicial de degré arbitraire

Paul-Louis George, Houman Borouchaki, Nicolas Barral

Construction et validation des éléments réduits associés à un carreau simplicial de degré arbitraire.

Paul Louis George, Houman Borouchaki, Nicolas Barral

ISSN 0249-6399   ISRN INRIA/RR--8571--FR+ENG

RESEARCH REPORT

N° 8571

Juillet 2014

Project-Team Gamma3

Construction et validation des éléments réduits associés à un carreau simplicial de degré arbitraire.

Paul Louis George[*], Houman Borouchaki[†], Nicolas Barral[‡]

Équipe-Projet Gamma3

Rapport de recherche n° 8571 — Juillet 2014 — 55 pages

Résumé : On montre comment construire les éléments finis de Lagrange simpliciaux "Serendip" ou plutôt réduits en détaillant le cas des triangles de degré 3 et 4 et on indique qu'il n'y a probablemen pas de tels éléments pour les degrés supérieurs sauf à se restreindre sur l'espace polynomial cherché. On regarde également le cas des tétraèdres en montrant qu'il y a un élément Serendip (ou réduit) au degré 3 mais pas au dela même avec la restriction indiquée ci-dessus. On indique également comment s'assurer que le jacobien de ces éléments, dans un maillage donné, soit positif partout.

Mots-clés : Éléments finis de Lagrange Serendip. Éléments réduits. Triangle. Tétraèdre.

[*] INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: paul-louis.george@inria.fr

[†] UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, Université de Technologie de Troyes, BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France. email: houman.borouchaki@utt.fr ou @inria.fr

[‡] INRIA, Équipe-projet Gamma3, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France. email: nicolas.barral@inria.fr

RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Construction and validation of reduced simplicial elements of arbitrary degree.

Abstract: We give a method to constructing Lagrange Serendipity (or reduced) simplices with a detailed description of the triangles of degree 3 and 4. We indicate that higher order triangles are not candidate apart if we impose a restricted polynomial space. We show that a tetrahedron of degree 3 is a candidate while high order elements are not candidate even if a restriction in the polynomial space is considered. In addition, we propose a method for the validation of such elements, in a given mesh, where the validation means the positiveness of the jacobian.

Key-words: Lagrangian Serendipity Finite Element. Reduced Element. Triangle. Tetrahedron.

Table des matières

1 Introduction

On donne un moyen classique (en se basant sur des développements de Taylor) pour construire des éléments finis simpliciaux de Lagrange Serendip[1]. On présente également une autre méthode, probablement plus originale et nettement plus rapide, pour cette construction ou, on le verra, pour indiquer qu'il n'y a pas de solution. Ensuite, on montre que l'analyse de ces éléments, quand ils existent, est rendue simple si on en trouve l'élément associé complet. On explicite le cas des triangles de degrés 3 et 4 et on indique qu'aux degrés supérieurs il n'y a apparemment pas d'éléments réduits sauf à se restreindre sur le degré de l'espace polynomial que l'élément réduit doit couvrir. Pour les tétraèdres, on regarde les degré 3 et 4 et on montre que seul le tétraèdre de degré 3 est Serendip tandis que les éléments réduits de degré supérieur, même en imposant la même restriction que ci-dessus, n'existent pas. Dans les cas où il y a une solution, on montre comment définir les points de contrôle de l'élément complet équivalent. Le point de vue adopté consiste à raisonner sur l'écriture de ces carreaux dans le formalisme Bézier (polynôme de Bernstein et points de contrôle), monde dans lequel tout se simplifie. On montre également qu'il est ainsi possible de trouver les fonctions de forme des éléments Serendip *même sans connaître celles de l'élément complet.* Ceci se fait en regroupant les polynômes de Bernstein des formes de Bézier aprés avoir exprimé les points de contrôle en fonction des nœuds et retrouver ainsi l'écriture classique (fonctions de forme et nœuds).

[1]Il s'agit probablement d'un abus de language, le mot "réduit" serait vraissemblablement plus approprié.

2 Construction du triangle Serendip de degré 3

Pour les éléments quadrilatéraux et hexaédriques, cf. [5], on a vu deux méthodes pour obtenir des éléments Serendip et l'une d'elle, valable pour le degré 2 et le degré 3, était de partir d'un carreau transfini, cette idée ne s'applique pas dans le cas des simplexes. En effet, dans ce cas précis, cf. [7], toute fonction de mélange conduit à élever le degré du carreau et, ainsi, un bord de degré donné conduirait à un carreau de degré supérieur. Par suite, nous allons proposer une autre construction qui consiste à utiliser directement la définition même des éléments simpliciaux Serendip comme indiqué dans [1]. Ensuite on montrera comment positionner, ici au degré 3, le point de contrôle central, P_{111}, d'un triangle courant pour en permettre l'évaluation géométrique (jacobien positif partout). Enfin, en sens inverse, connaissant la position de ce point central, on montre qu'en l'éliminant dans l'écriture Bézier, on peut retrouver les fonctions de forme de l'élément réduit sans connaître celles de l'élément complet.

Fonctions de forme des triangles complets. L'expression, élément fini, des fonctions de forme des triangles de Lagrange (complets) de degré quelconque, n, a la forme générique particulièrement simple suivante :

$$q^c_{ijk}(u,v,w) = \frac{1}{i!j!k!}\Pi_{l=0}^{i-1}(nu-l)\Pi_{l=0}^{j-1}(nv-l)\Pi_{l=0}^{k-1}(nw-l)\,, \tag{1}$$

où u, v et w sont les coordonnées barycentriques, le triplet ijk correspond à ce système et $\Pi_{l=0}^{-1}(...) = 1$. Par exemple, la première fonction de forme est associée au triplet $n00$, etc.

2.1 Caractérisation de l'espace des polynômes

On cherche ici un triangle de degré 3 avec 9 nœuds frontaliers (au lieu de 10 nœuds, dont un nœud interne, pour le triangle complet). Il s'agit donc de trouver les 9 fonctions q_{ijk} de P^3, l'espace des polynômes de degré 3, ayant les quatre propriétés suivantes :

$$(P_r1) \quad q_{ijk}(A_{lmn}) = \delta_{ijk,lmn}$$

$$(P_r2) \quad \sum_{ijk} q_{ijk}(u,v,w) = 1$$

$$(P_r3) \quad EV\,\{q_{ijk}\} \quad \text{contient } P^2$$

$$(P_r4) \quad \text{symétrie complète}\,,$$

où $EV\,\{q_{ijk}\}$ est l'espace polynomial engendré par des fonctions q_{ijk} contenant P^2 (la relation de serendipité), et A_{ijk} est le nœud ijk (de coordonnées $(u,v,w) = (\frac{i}{3}, \frac{j}{3}, \frac{k}{3})$) du triangle de référence. Les deux premières propriétés sont classiques, la troisième et la quatrième définissent[2] ce qu'est un élément Serendip symétrique.

La notion de symétrie est analogue à celle introduite dans [5] pour les quadrilatères et les hexaèdres, mais, en les coordonnées barycentriques, cela se traduit par, par exemple (u, v) devient (v, u) qui est une symétrie pure sur une arête et u changé en v, v devient w, etc., qui est une rotation.

Pour simplifier les notations, on utilise la notation barycentrique à trois indices ou la notation séquentielle avec la correspondance montrée sur le schéma suivant :

```
003                     3
102  012                8   7
201  111  021           9       6
300  210  120  030      1   4   5   2
```

[2] à notre sens.

Ainsi, par exemple, q_{300} sera vu comme q_1 ou l'inverse, A_{300} comme A_1, ...

L'idée est de partir d'un développement de Taylor d'une fonction q en les sommets et en les nœuds exprimé en s'appuyant sur le nœud central, on introduit le vecteur $\overrightarrow{v_{ijk}} = \overrightarrow{A_{111}A_{ijk}}$ et les dérivées successives des q, vues de manière abstraite comme des opérateurs linéaires, bilinéaires, etc, et notées $D^1.(\overrightarrow{u}), D^2.(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}), etc.$, le coefficient étant compris dans l'opérateur. Alors, le développement s'arrete à la dérivée seconde et s'écrit, en A_{300} :

$$q(A_{300}) = q(A_{111}) + D^1.(\overrightarrow{v_{300}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{300}})\,.$$

On exprime de la même façon q en A_{030} et A_{003} et en sommant il vient :

$$\sum_{j=1,3} q(sommet_j) = 3q(A_{111}) + D^1.(\overrightarrow{v_{300}}) + D^1.(\overrightarrow{v_{030}}) + D^1.(\overrightarrow{v_{003}})$$

$$+D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{300}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{030}}, \overrightarrow{v_{030}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{003}}, \overrightarrow{v_{003}})\,,$$

qui se réduit à :

$$\sum_{j=1,3} q(sommet_j) = 3q(A_{111}) + D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{300}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{030}}, \overrightarrow{v_{030}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{003}}, \overrightarrow{v_{003}})\,, \quad (2)$$

car l'opérateur $D^1.()$ est linéaire et que, par définition, A_{111} étant le barycentre, $\overrightarrow{v_{300}} + \overrightarrow{v_{030}} + \overrightarrow{v_{003}} = 0$. On exprime ce même développement pour les nœuds des arêtes. par exemple :

$$q(A_{210}) = q(A_{111}) + D^1.(\overrightarrow{v_{210}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{210}}, \overrightarrow{v_{210}})\,.$$

et on somme, il vient :

$$\sum_{j=1,6} q(noeudarete_j) = 6q(A_{111}) + D^1.(\overrightarrow{v_{210}}) + D^1.(\overrightarrow{v_{120}}) + ... + D^1.(\overrightarrow{v_{201}})$$

$$+D^2.(\overrightarrow{v_{210}}, \overrightarrow{v_{210}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{120}}, \overrightarrow{v_{120}}) + ... + D^2.(\overrightarrow{v_{201}}, \overrightarrow{v_{201}})\,,$$

dont ne reste que (les termes relatifs à $D^1.()$ s'annulent deux à deux) :

$$\sum_{j=1,6} q(noeudarete_j) = 6q(A_{111}) + D^2.(\overrightarrow{v_{210}}, \overrightarrow{v_{210}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{120}}, \overrightarrow{v_{120}}) + ... + D^2.(\overrightarrow{v_{201}}, \overrightarrow{v_{201}})\,, \quad (3)$$

comme $A_{210} = \frac{2A_{300}+A_{030}}{3}$, etc, on peut exprimer les différents vecteurs $\overrightarrow{v_{ijk}}$ uniquement en fonctions des trois vecteurs liés aux sommets. Soit, par exemple, $\overrightarrow{v_{210}} = \frac{2\overrightarrow{v_{300}}+\overrightarrow{v_{030}}}{3}$. On calcule maintenant $D^2.(\overrightarrow{v_{210}}, \overrightarrow{v_{210}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{120}}, \overrightarrow{v_{120}})$, on trouve :

$$\frac{4}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{300}}) + \frac{4}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{030}}) + \frac{1}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{030}}, \overrightarrow{v_{030}})$$

$$+\frac{1}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{300}}) + \frac{4}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{030}}) + \frac{4}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{030}}, \overrightarrow{v_{030}})\,,$$

soit, au total :

$$\frac{5}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{300}}) + \frac{8}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{030}}) + \frac{5}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{030}}, \overrightarrow{v_{030}})\,.$$

En sommant sur les trois arêtes, il vient :

$$\frac{10}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{300}}) + \frac{10}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{030}}, \overrightarrow{v_{030}}) + \frac{10}{9}D^2.(\overrightarrow{v_{003}}, \overrightarrow{v_{003}})\,.$$

$$+\frac{8}{9}(D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{030}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{030}}, \overrightarrow{v_{003}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{003}}, \overrightarrow{v_{300}}))\,.$$

On va exprimer les termes croisés en fonction des termes liés aux seuls sommets, comme $D^2.(\overrightarrow{v_{300}} + \overrightarrow{v_{030}} + \overrightarrow{v_{003}}, \overrightarrow{v_{300}} + \overrightarrow{v_{030}} + \overrightarrow{v_{003}}) = 0$, il vient :

$$0 = D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{300}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{030}}, \overrightarrow{v_{030}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{003}}, \overrightarrow{v_{003}}) + 2(D^2.(\overrightarrow{v_{300}}, \overrightarrow{v_{030}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{030}}, \overrightarrow{v_{003}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{003}}, \overrightarrow{v_{300}}))\,,$$

ou, dit autrement :

$$D^2.(\overrightarrow{v_{300}},\overrightarrow{v_{030}})+D^2.(\overrightarrow{v_{030}},\overrightarrow{v_{003}})+D^2.(\overrightarrow{v_{003}},\overrightarrow{v_{300}}) = -\frac{1}{2}(D^2.(\overrightarrow{v_{300}},\overrightarrow{v_{300}})+D^2.(\overrightarrow{v_{030}},\overrightarrow{v_{030}})+D^2.(\overrightarrow{v_{003}},\overrightarrow{v_{003}}))\,,$$

donc, la somme ci-dessus se réduit à :

$$\frac{2}{3}D^2.(\overrightarrow{v_{300}},\overrightarrow{v_{300}}) + \frac{2}{3}D^2.(\overrightarrow{v_{030}},\overrightarrow{v_{030}}) + \frac{2}{3}D^2.(\overrightarrow{v_{003}},\overrightarrow{v_{003}})\,,$$

et la Relation (3) s'écrit :

$$\sum_{j=1,6} q(noeudarete_j) = 6q(A_{111}) + \frac{2}{3}(D^2.(\overrightarrow{v_{300}},\overrightarrow{v_{300}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{030}},\overrightarrow{v_{030}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{003}},\overrightarrow{v_{003}}))\,,$$

pour finir, on identifie cette dernière somme (les dérivées secondes) dans les deux relations ce qui donne la combinaison suivante :

$$\sum_{j=1,3} q(sommet_j) - 3q(A_{111}) = \frac{3}{2}(\sum_{j=1,6} q(noeudarete_j) - 6q(A_{111}))\,,$$

ou encore :

$$2\sum_{j=1,3} q(sommet_j) - 6q(A_{111}) = 3\sum_{j=1,6} q(noeudarete_j) - 18q(A_{111})\,,$$

et, au final, on a trouvé la propriété P_r3 de la définition initiale :

$$12q(A_{111}) + 2\sum_{j=1,3} q(sommet_j) - 3\sum_{j=1,6} q(noeudarete_j) = 0\,. \tag{4}$$

$\boxed{\text{La relation de serendipité pour le triangle de degré 3 à 9 nœuds}}$

À partir de cette définition liant les q, on peut construire effectivement les q_i. Par raison de symétrie, où (q_i^c désignent les fonctions de forme du triangle complet), on pose :

$$q_i = q_i^c + \alpha q_{111}^c \quad \text{pour les fonctions aux sommets, et}$$

$$q_i = q_i^c + \beta q_{111}^c \quad \text{pour les fonctions aux aretês}\,,$$

d'ou le résultat :

$$\alpha = -\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{4}\,.$$

En effet, pour $i = 1, 3$, on a, successivement :

$$12q_i(A_{111}) + 2 = 0$$

$$12q_i^c(A_{111}) + 12\alpha q_{111}^c(A_{111}) + 2 = 12\alpha + 2 = 0\,,$$

d'ou α, et, de même, pour les fonctions liées aux nœuds des arêtes,

$$12q_i(A_{111}) - 3 = 0$$

$$12q_i^c(A_{111}) + 12\beta q_{111}^c(A_{111}) - 3 = 12\beta - 3 = 0\,,$$

d'ou β.

Sur l'unicité de la solution. La Relation (4) nous a permis de fixer les deux paramètres nécessaires à la construction des fonctions de forme. Par suite, la solution est entièrement trouvée à ce stade (cf. le cas du triangle de degré 4 où cela ne sera pas vrai).

À titre de remarque, on vérifie que l'espace P^1 se trouve automatiquement dans cette solution. Soit q une fonction P^1 générique, alors on a :

$$\sum_{j=1,3} q(sommet_j) = 3q(A_{111}) + D^1.(\overrightarrow{v_{300}}) + D^1.(\overrightarrow{v_{030}}) + D^1.(\overrightarrow{v_{003}})$$

et

$$\sum_{j=1,6} q(noeudarete_j) = 6q(A_{111}) + D^1.(\overrightarrow{v_{210}}) + D^1.(\overrightarrow{v_{120}}) + ... + D^1.(\overrightarrow{v_{201}})\,,$$

qui se réduisent à :

$$\sum_{j=1,3} q(sommet_j) = 3q(A_{111})$$

et

$$\sum_{j=1,6} q(noeudarete_j) = 6q(A_{111})\,,$$

donc la relation

$$2\sum_{j=1,3} q(sommet_j) - \sum_{j=1,6} q(noeudarete_j) = 0\,,$$

est la condition pour que P^1 soit dans l'espace. Comme q est linéaire, ceci est assuré automatiquement (et ne fait pas intervenir la valeur centrale).

Pour poursuivre, on note que les quatre propriétés souhaitées au départ sont vérifiées, la troisième et la quatrième (car les fonctions complètes sont symétriques) par définition, les deux autres par construction car les q_i^c les vérifient et que $3\alpha + 4\beta = 1$. Connaissant, Relation (1), les fonctions du triangle complet et connaissant les valeurs de α et de β, on trouve facilement les fonctions de forme du triangle réduit Serendip de par leurs expressions, soit (comme posé au départ) :

$$q_i = q_i^c + \alpha q_{111}^c \quad \text{pour les fonctions aux sommets, et}$$

$$q_i = q_i^c + \beta q_{111}^c \quad \text{pour les fonctions aux arêtes}\,.$$

2.2 Les fonctions de formes via la relation de serendipité

On va en premier utiliser la relation de serendipité et prendre la forme définie pour les fonctions réduites en fonction des fonctions complètes. Ensuite, on va trouver directement, via l'écriture en Bézier, l'expression des fonctions réduites.

Pour la première fonction, q_1, alias q_{300} on a :

$$q_1 = q_{300} = q_{300}^c - \frac{1}{6}q_{111}^c$$

$$= \frac{1}{6}3u(3u-1)(3u-2) - \frac{1}{6}27uvw$$

$$= \frac{1}{2}u((2u-v-w)(u-2v-2w) - 9vw)\,,$$

$$= \frac{1}{2}u(2u^2 + 2v^2 + 2w^2 - 5uv - 5vw - 5uw)\,,$$

et il suffit de remplacer u, v et w par leurs expressions en x et y. Comme $u = 1-x-y$, $v = x$ et $w = y$, il vient :

$$q_1 = q_{300} = \frac{9}{2}(1-x-y)(\frac{2}{9} - x - y + xy + x^2 + y^2)\,.$$

Pour la quatrième fonction q_4, alias q_{210}, il vient :

$$\begin{aligned} q_4 = q_{210} &= q^c_{210} + \frac{1}{4} q^c_{111} \\ &= \frac{1}{2} 3u(3u-1)3v + \frac{1}{4} 27uvw \\ &= \frac{9}{4} uv(6u - 2 + 3w) = \frac{9}{4} uv(4u - 2v + w)\,, \end{aligned}$$

soit, en x et y :

$$q_4 = q_{210} = \frac{9}{4} x(1-x-y)(4-6x-3y)\,.$$

Par symétries et rotations on obtient toutes les fonctions, soit ce qui suit.

Les fonctions de forme, *in extenso*. En résumé, on donnons la liste des fonctions de forme :

1	$q_1 = q_{300}(x,y) = \frac{9}{2}(1-x-y)(\frac{2}{9} - x - y + xy + x^2 + y^2)$
2	$q_2 = q_{030}(x,y) = \frac{9}{2}x(\frac{2}{9} - x - y + xy + x^2 + y^2)$
3	$q_3 = q_{003}(x,y) = \frac{9}{2}y(\frac{2}{9} - x - y + xy + x^2 + y^2)$
4	$q_4 = q_{210}(x,y) = \frac{9}{4}x(1-x-y)(4-6x-3y)$
5	$q_5 = q_{120}(x,y) = \frac{9}{4}x(1-x-y)(-2+6x+3y)$
6	$q_6 = q_{021}(x,y) = \frac{9}{4}xy(1+3x-3y)$
7	$q_7 = q_{012}(x,y) = \frac{9}{4}xy(1-3x+3y)$
8	$q_8 = q_{102}(x,y) = \frac{9}{4}y(1-x-y)(-2+3x+6y)$
9	$q_9 = q_{201}(x,y) = \frac{9}{4}y(1-x-y)(4-3x-6y)$

Fonctions de forme du triangle de degré 3 à 9 nœuds

Notons que les deux propriétés $q_i(A_j) = \delta_{ij}$ et $\sum_{i=1,9} q_i = 1$ sont assurées par construction. On peut néanmoins les vérifier explicitement, par exemple, le dernier résultat est évident en u, v et w, il suffit de faire apparaître $(u+v+w)^3, (u+v+w)^2$ et $(u+v+w)$, et se vérifie aisément en x et y.

L'élément s'écrit, (indices séquentiels) :

$$\sum_{i=1,9} q_i(u,v) A_i\,. \tag{5}$$

2.3 Comparaison entre les espaces du triangle complet et du triangle réduit.

On exprime q^c_1 et q^c_4 du triangle complet, on a :

$$q^c_1(x,y) = q^c_{300}(x,y) = \frac{9}{2}(1-x-y)(\frac{2}{9} - x - y + 2xy + x^2 + y^2)$$

à rapprocher de :

$$q_1(x,y) = q_{300}(x,y) = \frac{9}{2}(1-x-y)(\frac{2}{9} - x - y + xy + x^2 + y^2)$$

et

$$q^c_4(x,y) = q^c_{210}(x,y) = \frac{9}{4} x(1-x-y)(4-6x-6y)$$

à rapprocher de :

$$q_4(x,y) = q_{210}(x,y) = \frac{9}{4}x(1-x-y)(4-6x-3y)$$

et, ainsi, on retrouve exactement les mêmes monômes[3] !

L'espace des polynômes du triangle complet. Par définition, cet espace contient les monômes suivants :

$$\begin{array}{c} 1 \\ x \quad y \\ x^2 \quad xy \quad y^2 \\ x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \end{array}$$

L'espace des polynômes du triangle réduit. Par construction, cet espace contient P^2, soit les monômes suivants :

$$\begin{array}{c} 1 \\ x \quad y \\ x^2 \quad xy \quad y^2 \end{array}$$

et la question est de voir plus en détails quels autres monômes sont dans cet espace. On part de l'espace complet dans lequel on sait qu'il existe des coefficients tels que :

$$x^l y^m = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{lm} q_{ijk}^c(x,y)\,,$$

pour $l = 0,3$, $m = 0,3$ et sous la contrainte $l+m \leq 3$. Ceci se décline en la liste suivante :

$$1 = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{00} q_{ijk}^c(x,y)\,,$$

$$x = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{10} q_{ijk}^c(x,y)\,,$$

$$y = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{01} q_{ijk}^c(x,y)\,,$$

$$xy = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{11} q_{ijk}^c(x,y)\,,$$

$$x^2 = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{20} q_{ijk}^c(x,y)\,,$$

$$y^2 = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{02} q_{ijk}^c(x,y)\,,$$

$$x^2y = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{21} q_{ijk}^c(x,y)\,,$$

$$xy^2 = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{12} q_{ijk}^c(x,y)\,,$$

$$x^3 = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{30} q_{ijk}^c(x,y)\,,$$

$$y^3 = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{03} q_{ijk}^c(x,y)\,.$$

[3]Contrairement au cas des quadrilatères.

Les coefficients sont trouvés par instanciations aux nœuds. Pour la constante, il est immédiat de voir que $\omega^{00}_{ijk} = 1$ pour tous les indices car, par construction, $\sum_{1,9} q_i(x,y) = \sum_{1,10} q^c_i(x,y)$ donc 1 .

Pour les autres monômes, les coefficients sont nuls sauf ceux indiqués explicitement.
Pour[4] x, $\omega^{10}_{210} = \frac{1}{3}, \omega^{10}_{120} = \frac{2}{3}, \omega^{10}_{030} = 1, \omega^{10}_{021} = \frac{2}{3}, \omega^{10}_{012} = \frac{1}{3}, \omega^{10}_{111} = \frac{1}{3}$.
Pour y, $\omega^{01}_{201} = \frac{1}{3}, \omega^{01}_{102} = \frac{2}{3}, \omega^{01}_{003} = 1, \omega^{01}_{012} = \frac{2}{3}, \omega^{01}_{021} = \frac{1}{3}, \omega^{01}_{111} = \frac{1}{3}$.
Pour xy, $\omega^{11}_{021} = \frac{2}{9}, \omega^{11}_{012} = \frac{2}{9}, \omega^{11}_{111} = \frac{1}{9}$.
Pour x^2, $\omega^{20}_{210} = \frac{1}{9}, \omega^{20}_{120} = \frac{4}{9}, \omega^{20}_{030} = 1, \omega^{20}_{021} = \frac{4}{9}, \omega^{20}_{012} = \frac{1}{9}, \omega^{20}_{111} = \frac{1}{9}$.
Pour y^2, $\omega^{02}_{201} = \frac{1}{9}, \omega^{02}_{102} = \frac{4}{9}, \omega^{02}_{003} = 1, \omega^{02}_{012} = \frac{4}{9}, \omega^{02}_{021} = \frac{1}{9}, \omega^{02}_{111} = \frac{1}{9}$.
Pour x^2y, $\omega^{21}_{021} = \frac{4}{27}, \omega^{21}_{012} = \frac{2}{27}, \omega^{21}_{111} = \frac{1}{27}$.
Pour xy^2, $\omega^{12}_{021} = \frac{2}{27}, \omega^{12}_{012} = \frac{4}{27}, \omega^{12}_{111} = \frac{1}{27}$.
Pour x^3, $\omega^{30}_{210} = \frac{1}{27}, \omega^{30}_{120} = \frac{8}{27}, \omega^{30}_{030} = 1, \omega^{30}_{021} = \frac{8}{27}, \omega^{30}_{012} = \frac{1}{27}, \omega^{30}_{111} = \frac{1}{27}$.
Pour y^3, $\omega^{03}_{201} = \frac{1}{27}, \omega^{03}_{102} = \frac{8}{27}, \omega^{03}_{003} = 1, \omega^{03}_{012} = \frac{8}{27}, \omega^{03}_{021} = \frac{1}{27}, \omega^{03}_{111} = \frac{1}{27}$.

Ensuite, on explicite x, il vient :

$$x = \frac{1}{3}q^c_{210}(x,y) + \frac{2}{3}q^c_{120}(x,y) + q^c_{030}(x,y) + \frac{2}{3}q^c_{021}(x,y) + \frac{1}{3}q^c_{012}(x,y) + \frac{1}{3}q^c_{111}(x,y)\,,$$

mais comme :

$$q_{210}(x,y) = q^c_{210}(x,y) + \frac{1}{4}q^c_{111}(x,y)$$

$$q_{030}(x,y) = q^c_{030}(x,y) - \frac{1}{6}q^c_{111}(x,y)\,,$$

et des relations analogues pour les autres fonctions, alors, en sens inverse :

$$q^c_{210}(x,y) = q_{210}(x,y) - \frac{1}{4}q^c_{111}(x,y)$$

$$q^c_{030}(x,y) = q_{030}(x,y) + \frac{1}{6}q^c_{111}(x,y)\,,$$

et, en remplaçant dans x, il vient :

$$x = \frac{1}{3}q_{210}(x,y) + \frac{2}{3}q_{120}(x,y) + q_{030}(x,y) + \frac{2}{3}q_{021}(x,y) + \frac{1}{3}q_{012}(x,y) + \frac{1}{3}q^c_{111}(x,y)$$
$$- \frac{1}{3}\frac{1}{4}q^c_{111}(x,y) - \frac{2}{3}\frac{1}{4}q^c_{111}(x,y) + \frac{1}{6}q^c_{111}(x,y) - \frac{2}{3}\frac{1}{4}q^c_{111}(x,y) - \frac{1}{3}\frac{1}{4}q^c_{111}(x,y)\,,$$

soit en $q^c_{111}(x,y)$:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{4} = 0\,,$$

et, ainsi, x s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions réduites. Par symétrie, on a la même propriété pour y.

On explicite maintenant x^2, on a :

$$x^2 = \frac{1}{9}q^c_{210}(x,y) + \frac{4}{9}q^c_{120}(x,y) + q^c_{030}(x,y) + \frac{4}{9}q^c_{021}(x,y) + \frac{1}{9}q^c_{012}(x,y) + \frac{1}{9}q^c_{111}(x,y)\,,$$

puis, en remplaçant :

$$x^2 = \frac{1}{9}q_{210}(x,y) + \frac{4}{9}q_{120}(x,y) + q_{030}(x,y) + \frac{4}{9}q_{021}(x,y) + \frac{1}{9}q_{012}(x,y) + \frac{1}{9}q^c_{111}(x,y)$$
$$+ \left\{ -\frac{1}{9}\frac{1}{4} - \frac{4}{9}\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{4}{9}\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\frac{1}{4} \right\} q^c_{111}(x,y)\,,$$

et le coefficient sur $q^c_{111}(x,y)$ est encore nul. Et, ainsi, x^2 s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions réduites. Par symétrie, on a la même propriété pour y^2.

[4] On écrit $x = \sum_{ijk} \omega^{10}_{ijk} q^c_{ijk}(x,y)$, alors pour $x = \frac{1}{3}$, seul $q^c_{210}(x,y)$ est non nul, donc $\omega^{10}_{210} = \frac{1}{3}$, etc.

On explicite maintenant xy, on a :

$$xy = \frac{2}{9}q^c_{021}(x,y) + \frac{2}{9}q^c_{012}(x,y) + \frac{1}{9}q^c_{111}(x,y)\,,$$

puis, en remplaçant :

$$xy = \frac{2}{9}q_{021}(x,y) + \frac{2}{9}q_{012}(x,y) + \frac{1}{9}q^c_{111}(x,y) - \frac{2}{9}\frac{1}{4}q^c_{111}(x,y) - \frac{2}{9}\frac{1}{4}q^c_{111}(x,y)\,,$$

et le coefficient sur $q^c_{111}(x,y)$ est encore nul. Donc, xy s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions réduites. On vient donc de vérifier que le P^3 réduit contient le P^2.

On explicite maintenant x^3, on a :

$$x^3 = \frac{1}{27}q^c_{210}(x,y) + \frac{8}{27}q^c_{120}(x,y) + q^c_{030}(x,y) + \frac{8}{27}q^c_{021}(x,y) + \frac{1}{27}q^c_{012}(x,y) + \frac{1}{27}q^c_{111}(x,y)\,,$$

puis, en remplaçant :

$$x^3 = \frac{1}{27}q_{210}(x,y) + \frac{8}{27}q_{120}(x,y) + q_{030}(x,y) + \frac{8}{27}q_{021}(x,y) + \frac{1}{27}q_{012}(x,y) + \frac{1}{27}q^c_{111}(x,y)$$
$$+ \left\{-\frac{1}{27}\frac{1}{4} - \frac{8}{27}\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{8}{27}\frac{1}{4} - \frac{1}{27}\frac{1}{4}\right\} q^c_{111}(x,y)\,,$$

et x^3 se réduit à :

$$x^3 = \frac{1}{27}q_{210}(x,y) + \frac{8}{27}q_{120}(x,y) + q_{030}(x,y) + \frac{8}{27}q_{021}(x,y) + \frac{1}{27}q_{012}(x,y) + \frac{1}{27}q^c_{111}(x,y)\,,$$

donc x^3 *ne s'exprime pas* comme une combinaison linéaire des fonctions réduites.

Pour conclure, on explicte x^2y, il vient :

$$x^2y = \frac{4}{27}q^c_{021}(x,y) + \frac{2}{27}q^c_{012}(x,y) + \frac{1}{27}q^c_{111}(x,y)\,,$$

puis, en remplaçant :

$$x^2y = \frac{4}{27}q_{021}(x,y) + \frac{2}{27}q_{012}(x,y) + \frac{1}{27}q^c_{111}(x,y) - \frac{1}{4}\frac{4}{27}q^c_{111}(x,y) - \frac{1}{4}\frac{2}{27}q^c_{111}(x,y)\,,$$

qui se réduit à :

$$x^2y = \frac{4}{27}q_{021}(x,y) + \frac{2}{27}q_{012}(x,y) - \frac{1}{54}q^c_{111}(x,y)\,,$$

donc x^2y *ne s'exprime pas* comme une combinaison linéaire des fonctions réduites.

Par contre, $x^3 + 2x^2y$ s'écrit comme :

$$x^3{+}2x^2y = \frac{1}{27}q_{210}(x,y){+}\frac{8}{27}q_{120}(x,y){+}q_{030}(x,y){+}\frac{8}{27}q_{021}(x,y){+}\frac{1}{27}q_{012}(x,y){+}\frac{8}{27}q_{021}(x,y){+}\frac{4}{27}q_{012}(x,y)\,,$$

soit, au final :

$$x^3 + 2x^2y = \frac{1}{27}q_{210}(x,y) + \frac{8}{27}q_{120}(x,y) + q_{030}(x,y) + \frac{16}{27}q_{021}(x,y) + \frac{5}{27}q_{012}(x,y)\,.$$

Par symétrie, on a le même résultat pour y^3 et xy^2. Ainsi le triangle réduit a pour espace de polynômes le P^2 enrichi par les 2 polynômes $x^3 + 2x^2y$ et $y^3 + 2xy^2$ et, de plus, par la combinaison $x^2y - xy^2$ qui est également dans l'espace qui, de ce fait, contient 9 monômes ou combinaisons, ce que l'on schématise comme :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & x & & y & \\ x^2 & & xy & & y^2 \\ x^3+2x^2y & & x^2y-xy^2 & & y^3+2xy^2 \end{array}$$

en notant la parfaite symétrie de ces expressions. Ceci rappelle la définition liée aux quadrilatères, par exemple, pour le degré 2, on avait comme polynômes le P^2 enrichi des deux monômes x^2y et xy^2.

2.4 Validation d'un triangle courant

À des fins de validation d'un triangle courant d'un maillage donné, il faut construire le point P_{111} du triangle complet équivalent à ce triangle.

On a vu que le carreau réduit s'écrit

$$M(u,v,w) = \sum_{ijk} q_{ijk}(u,v,w) A_{ijk}\,,$$

pour tous les triplets d'indices bord ou encore comme :

$$M(u,v,w) = \sum_{ijk} (q^c_{ijk}(u,v,w) + \alpha_{ijk} q^c_{111}(u,v,w)) A_{ijk}\,,$$

avec $\alpha_{ijk} = -\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{4}$ selon l'indice (sommet ou arête), $q^c_{ijk}(u,v,w)$ les fonctions du triangle complet et A_{ijk}, ici, les nœuds de l'élément courant. On sait par ailleurs que

$$M(u,v,w) = \sum_{ijk} B^3_{ijk}(u,v,w) P_{ijk}\,,$$

et on va chercher dans ces deux expressions de $M(u,v,w)$ ce qui vient au regard de $B^3_{111}(u,v,w)$ en rappelant que $B^3_{111}(u,v,w) = 6uvw$. En Bézier il vient seulement P_{111}, en trouvant les contributions dans l'autre expression, on va pouvoir, en identifiant, trouver ce que vaut P_{111}.

On rappelle que

$$\begin{aligned} q^c_{300}(u,v,w) &= \frac{1}{6}(3u)(3u-1)(3u-2) = \frac{1}{2}u(3u-1)(3u-2)\,,\\ q^c_{210}(u,v,w) &= \frac{1}{2}(3u)(3u-1)(3v) = \frac{9}{2}uv(3u-1)\,,\\ q^c_{120}(u,v,w) &= \frac{1}{2}(3u)(3v)(3v-1) = \frac{9}{2}uv(3v-1)\,,\\ &\text{tandis que} \quad q^c_{111} = 27uvw\,. \end{aligned}$$

En ouvrant $1 = u+v+w$, il vient :

$$\begin{aligned} q^c_{300}(u,vw) &= \frac{1}{2}u(2u-v-w)(u-2v-2w)\,,\\ q^c_{210} &= \frac{9}{2}uv(2u-v-w)\,,\\ q^c_{120} &= \frac{9}{2}uv(-u+2v-w)\,, \end{aligned}$$

dont on ne regarde que les termes en uvw, on trouve respectivement :

$$2uvw, \quad -\frac{9}{2}uvw \quad \text{et} \quad -\frac{9}{2}uvw\,,$$

et des contributions analogues pour les autres fonctions, par rapport à $6uvw$, on trouve :

$$\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad -\frac{3}{4}$$

pour les sommets et pour les arêtes respectivement, sans oublier $\frac{9}{2}$ pour le centre. Dans

$$\sum_{ijk} (q^c_{ijk}(u,v,w) + \alpha_{ijk} q^c_{111}(u,v,w)) A_{ijk}$$

les facteurs de $6uvw$ sont donc :

$$\sum_{sommet} (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\frac{9}{2}) A_{ijk} = \sum_{sommet} -\frac{5}{12} A_{ijk}$$

car $\alpha_{ijk} = \alpha = -\frac{1}{6}$ ici et

$$\sum_{arete} (-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\frac{9}{2})A_{ijk} = \sum_{arete} \frac{3}{8} A_{ijk}\,,$$

car $\alpha_{ijk} = \beta = \frac{1}{4}$ ici. Ainsi, les termes en A_{300} viennent de A_{300} lui-même et via A_{210}, A_{120} et A_{301}, A_{202}, comme :

$$A_{210} = \frac{8A_{300} + 12P_{210} + 6P_{120} + A_{030}}{27}$$

$$A_{120} = \frac{A_{300} + 6P_{210} + 12P_{120} + 8A_{030}}{27}\,,$$

et idem pour l'autre arête incidente en A_{300}, il vient donc 5 termes pour A_{300} :

$$-\frac{5}{12} + \frac{3}{8}\frac{1}{27}(8 + 1 + 1 + 8) = -\frac{1}{6}\,,$$

et on a la même contribution pour les deux autres sommets. On examine maintenant les termes en A_{210} et A_{120} qui vont donner la contribution en P_{210} et P_{120}. Il vient 2 termes en P_{210} :

$$\frac{3}{8}\frac{1}{27}(12 + 6) = \frac{1}{4}\,,$$

et la même contribution pour les autres P_{ijk}, ceci établit la Relation (6) qui fixe P_{111} en fonction des sommets et des points de contrôle des arêtes, à savoir :

$$P_{111} = -\frac{1}{6}(P_{300} + P_{030} + P_{003}) + \frac{1}{4}(P_{210} + P_{012} + P_{201} + P_{021} + P_{102} + P_{120})\,, \qquad (6)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$12P_{111} + 2(P_{300} + P_{030} + P_{003}) - 3(P_{210} + P_{012} + P_{201} + P_{021} + P_{102} + P_{120}) = 0\,,$$

qui est analogue à la Relation (4). La question de savoir si cette analogie est propre au degré 3 reste posée.

2.5 Construction directe des fonctions de forme via les Bézier

Le triangle de Bézier complet de degré 3 a pour expression :

$$\sum_{i+j+k=n} B^n_{ijk}(u, v, w)P_{ijk}\,, \qquad (7)$$

avec $n = 3$, P_{ijk} les points de contrôle, les paramètres u, v et w tels que $u + v + w = 1$ (coordonnées barycentriques) et les polynômes de Bernstein écrits en coordonnées barycentriques :

$$B^n_{ijk}(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!}u^i v^j w^k\,,$$

par ailleurs, les indices i, j et k varient de 0 à $n = 3$ et somment à 3. Le schéma correspondant à la numérotation des points de contrôle est le suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P_{003} & & & \\ & & P_{102} & & P_{012} & & \\ & P_{201} & & P_{111} & & P_{021} & \\ P_{300} & & P_{210} & & P_{120} & & P_{030} \end{array}$$

Selon la même organisation, les polynômes de Bernstein s'écrivent :

$$w^3$$

$$3uw^2 \quad 3vw^2$$

$$3u^2w \quad 6uvw \quad 3v^2w$$

$$u^3 \quad 3u^2v \quad 3uv^2 \quad v^3$$

Les nœuds du triangle courant, A_{ijk}, sont les images par (7) des nœuds du triangle unité, ainsi A_{ijk} est l'image du triplet $(\frac{i}{3}, \frac{j}{3}, \frac{k}{3})$. Le lien entre les nœuds et les points de contrôle des arêtes sont de la forme, par exemple pour l'arête $1-2$, alias $P_{300} - P_{030}$:

$$A_{210} = \frac{8P_{300} + 12P_{210} + 6P_{120} + P_{030}}{27}$$

$$A_{120} = \frac{P_{300} + 6P_{210} + 12P_{120} + 8P_{030}}{27},$$

et, en sens inverse :

$$P_{210} = \frac{-5A_{300} + 18A_{210} - 9A_{120} + 2A_{030}}{6}$$

$$P_{120} = \frac{2A_{300} - 9A_{210} + 18A_{120} - 5A_{030}}{6},$$

et des expressions analogues pour les deux autres arêtes. Le seul point de contrôle restant, P_{111}, est fixé à la position trouvée ci-dessus, à savoir, Relation (6) et schéma ci-dessous :

$$P_{111} = -\frac{1}{6}(P_{300} + P_{030} + P_{003}) + \frac{1}{4}(P_{210} + P_{012} + P_{201} + P_{021} + P_{102} + P_{120}).$$

Il suffit maintenant d'exprimer dans le carreau complet les points de contrôle par leurs expressions en fonction des A_{ijk} pour, après regroupement, trouver les fonctions de forme de l'élément réduit associé à ce choix.

```
-1/6

 1/4       1/4

 1/4      (111)      1/4

-1/6       1/4       1/4    -1/6
```

Remarque en aparté. Le carreau s'écrit, avec $n = 3$:

$$\sum_{i+j+k=n} B^n_{ijk}(u, v, w) P_{ijk},$$

et les fonctions réduites sont :

$$B'_{300} = B_{300} - \frac{1}{6}B_{111}$$

$$B'_{210} = B_{210} + \frac{1}{4}B_{111}$$

$$B'_{120} = B_{120} + \frac{1}{4}B_{111}$$

$$B'_{030} = B_{030} - \frac{1}{6}B_{111}$$

$$B'_{021} = B_{021} + \frac{1}{4}B_{111}$$

$$B'_{012} = B_{012} + \frac{1}{4}B_{111}$$

$$B'_{003} = B_{003} - \frac{1}{6}B_{111}$$
$$B'_{102} = B_{102} + \frac{1}{4}B_{111}$$
$$B'_{201} = B_{201} + \frac{1}{4}B_{111}\,.$$

On cherche u^2, soit :

$$u^2 = u^2(u+v+w) = u^3 + u^2v + u^2w = B_{300} + \frac{1}{3}B_{210} + \frac{1}{3}B_{201}\,,$$

en B_{111}, ca fait :

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{4} = 0\,,$$

ça baigne pour u^2 donc pour v^2 et w^2. On cherche uv, soit :

$$uv = uv(u+v+w) = u^2v + uv^2 + uvw = \frac{1}{3}B_{210} + \frac{1}{3}B_{120} + \frac{1}{6}B_{111}\,,$$

en B_{111}, ca fait :

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 0\,,$$

ça baigne pour uv donc aussi pour uw et vw. On cherche u, soit :

$$u = u(u+v+w)^2 = u(u^2+v^2+w^2+2uv+2uw+2vw) = u^3+uv^2+uw^2+2u^2v+2u^2w+2uvw$$
$$= B_{300} + \frac{1}{3}B_{120} + \frac{1}{3}B_{102} + \frac{2}{3}B_{210} + \frac{2}{3}B_{201} + \frac{1}{3}B_{111}\,,$$

en B_{111}, ca fait :

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 0\,,$$

ça baigne pour u donc pour v et w. On vérifie la constante, soit :

$$1 = (u+v+w)^3 = (u+v+w)(u^2+v^2+w^2+2uv+2uw+2vw) = u^3+uv^2+uw^2+2u^2v+2u^2w+2uvw$$
$$+u^2v + v^3 + vw^2 + 2uv^2 + 2uvw + 2v^2w + u^2w + v^2w + w^3 + 2uvw + 2uw^2 + 2vw^2$$
$$= u^3 + v^3 + w^3 + 3u^2v + 3u^2w + 3uv^2 + 3v^2w + 3uw^2 + 3vw^2 + 6uvw$$
$$= \sum B_{ijk} \quad \text{évidemment}$$

en B_{111}, ca fait :

$$3\,\frac{1}{6} - 6\,\frac{1}{4} + 1 = 0\,,$$

ça baigne pour 1. En écriture Bézier, on vient de vérifier que le "B^3" réduit contient le "B^2" complet. La question est donc de savoir si cette propriété reste vraie pour des degrés autres.

La première fonction de forme. On cherche toutes les contributions sur A_{300} dans (7). Il vient :

- le terme direct en $P_{300} = A_{300}$ soit $B^3_{300}(u,v,w) = u^3$,
- le terme issu de P_{210} soit, avec son poids : $-\frac{5}{6}(3u^2v) = -\frac{5}{2}u^2v$,
- le terme issu de P_{120} soit, avec son poids : $\frac{2}{6}(3uv^2) = uv^2$,
- par symétrie, pour P_{201} et P_{102}, il vient $-\frac{5}{2}u^2w$ et uw^2,
- les termes issu de P_{111}, via $P_{300}, P_{210}, P_{120}, P_{201}$ et P_{102}, donc au nombre de 5, soient, avec les poids, $6uvw(-\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\frac{5}{6} - \frac{1}{4}\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{3}) = -\frac{5}{2}uvw$,

soit, au total :

$$u(u^2 - \frac{5}{2}uv - \frac{5}{2}uw + v^2 + w^2 - \frac{5}{2}vw)\,,$$

et, comme $u = 1-x-y, v = x$ et $w = y$, il vient :

$$q_1 = q_{300} = \frac{9}{2}(1-x-y)(\frac{2}{9} - x - y + xy + x^2 + y^2)\,.$$

La seconde fonction de forme. On cherche toutes les contributions sur A_{030} dans (7). Par rotation de q_1, on remplace u par v et v par w, soit :

$$v(v^2 - \frac{5}{2}vw - \frac{5}{2}vu + w^2 + u^2 - \frac{5}{2}wu)\,,$$

donc :

$$q_2 = q_{030} = \frac{9}{2}x(\frac{2}{9} - x - y + xy + x^2 + y^2)\,.$$

La troisième fonction de forme. Par rotation de q_2, il vient :

$$w(w^2 - \frac{5}{2}wu - \frac{5}{2}wv + u^2 + v^2 - \frac{5}{2}uv)\,,$$

donc :

$$q_3 = q_{003} = \frac{9}{2}y(\frac{2}{9} - x - y + xy + x^2 + y^2)\,.$$

La quatrième fonction de forme. Elle vient de P_{210}, P_{120} et P_{111}, soit, avec les poids :

$$9u^2v - \frac{9}{2}uv^2 + \frac{1}{4}(3 - \frac{3}{2})6uvw = \frac{9}{4}uv(4u - 2v + w)$$

et il vient

$$q_4 = q_{210} = \frac{9}{4}x(1 - x - y)(4 - 6x - 3y)\,.$$

La cinquième fonction de forme. Elle vient de P_{210}, P_{120} et P_{111}, soit, avec les poids :

$$\frac{9}{4}uv(-2u + 4v + w)\,,$$

$$q_5 = q_{120} = \frac{9}{4}x(1 - x - y)(-2 + 6x + 3y)\,.$$

Notons que par symétrie (sur l'expression en u, v), on obtient q_5 directement à partir de q_4 en changeant u en v et v en u.

Les autres fonctions de forme. Les fonctions q_6 et q_7 se déduisent, en u, v et w, de q_4 et q_5. Les fonctions q_8 et q_9 se déduisent, à leur tour, de q_6 et q_7.

Les fonctions de forme, *in extenso*. Voir le tableau ci-dessus, on retrouve évidemment les mêmes fonctions.

2.6 Construction de l'espace réduit directement dans les Bézier

Par symétrie, on pose *a priori* :

$$B'_{300} = B_{300} + \alpha B_{111}\,,$$

$$B'_{210} = B_{210} + \beta B_{111}\,,$$

et des relations identiques pour les autres fonctions réduites (notées B'_{ijk}). Il n'y a donc que 2 paramètres. Pour u^2 :

$$u^2 = u^2(u + v + w) = u^3 + u^2v + u^2w = B_{300} + \frac{1}{3}B_{210} + \frac{1}{3}B_{201}$$

$$u^2 = B'_{300} + \frac{1}{3}B'_{210} + \frac{1}{3}B'_{201} - (\alpha + \frac{2}{3}\beta)B_{111}\,,$$

donc

$$\alpha + \frac{2}{3}\beta = 0\,,$$

ce qui donne le système :

$$\alpha + \frac{2}{3}\beta = 0\,,$$

$$3\alpha + 6\beta = 1\,.$$

soit

$$\beta = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}(1 - \frac{6}{4}) = -\frac{1}{6}\,.$$

Pour uv :

$$uv = uv(u+v+w) = u^2v + uv^2 + uvw = \frac{1}{3}B_{210} + \frac{1}{3}B_{120} + \frac{1}{6}B_{111}\,,$$

$$uv = \frac{1}{3}B'_{210} + \frac{1}{3}B'_{120} + (\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\beta)B_{111}\,,$$

donc $\beta = \frac{1}{4}$ donne la solution. En écriture Bézier, quelques lignes donnent la réponse et permettent de construire les fonctions réduites en imposant la présence des Bernstein de degré 2. À noter que l'on n'utilise pas de développements de Taylor.

Obtenir les fonctions réduites en Lagrange est un jeu d'écriture en exprimant les points de contrôle en fonctions des nœuds et en regroupant les Bernstein en accord.

3 Construction du triangle Serendip de degré 4

On cherche ici un triangle de degré 4 avec 12 nœuds (au lieu de 15 pour le triangle complet).

3.1 Caractérisation de l'espace des polynômes

On va raisonner sur le carreau de degré 4 dont l'organisation est la suivante :

```
004                        3
103  013                  10   9
202  112  022             11        8
301  211  121  031        12             7
400  310  220  130  040    1   4    5    6    2
```

Il s'agit donc de trouver les 12 fonctions q_{ijk} de P^4, l'espace des polynômes de degré 4, ayant les quatre propriétés suivantes :

$$(P_r1) \quad q_{ijk}(A_{lmn}) = \delta_{ijk,lmn}$$

$$(P_r2) \quad \sum_{ijk} q_{ijk}(u,v,w) = 1$$

$$(P_r3) \quad EV\,\{q_{ijk}\} \quad \text{contient } P^3$$

$$(P_r4) \quad \text{symétrie complète}\,,$$

où $EV\,\{q_{ijk}\}$ est l'espace polynomial engendré par des fonctions q_{ijk} contenant P^3 (la relation de serendipité), et A_{ijk} est le nœud ijk (de coordonnées $(u,v,w) = (\frac{i}{4}, \frac{j}{4}, \frac{k}{4})$) du triangle de référence.

L'idée est de partir d'un développement de Taylor d'une fonction q en les sommets et en les nœuds d'un sous-motif du treillis complet exprimé en s'appuyant sur le nœud central de ce sous-motif, on introduit le vecteur $\overrightarrow{v_{ijk}} = \overrightarrow{A_{211}A_{ijk}}$ pour le motif centré en A_{211} et les dérivées successives des q, vues de manière abstraite comme des opérateurs linéaires, bilinéaires, etc, et notées $D^1.(\overrightarrow{u}), D^2.(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}), etc.$, le coefficient étant compris dans l'opérateur. Alors, le développement s'arrete à la dérivée troisième et s'écrit, en A_{400} :

$$q(A_{400}) = q(A_{211}) + D^1.(\overrightarrow{v_{400}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{400}}, \overrightarrow{v_{400}}) + D^3.(\overrightarrow{v_{400}}, \overrightarrow{v_{400}}, \overrightarrow{v_{400}}) ,$$

on a également :

$$q(A_{130}) = q(A_{211}) + D^1.(\overrightarrow{v_{130}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{130}}, \overrightarrow{v_{130}}) + D^3.(\overrightarrow{v_{130}}, \overrightarrow{v_{130}}, \overrightarrow{v_{130}}) ,$$

$$q(A_{103}) = q(A_{211}) + D^1.(\overrightarrow{v_{103}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{103}}, \overrightarrow{v_{103}}) + D^3.(\overrightarrow{v_{103}}, \overrightarrow{v_{103}}, \overrightarrow{v_{103}}) .$$

En sommant, il vient la relation (avec des notations évidentes) :

$$\sum_{s_{211}} q(s) = 3q(A_{211}) + \sum_{s_{211}} D^1.(\overrightarrow{v_s}) + \sum_{s_{211}} D^2.(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}) + \sum_{s_{211}} D^3.(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}) ,$$

qui, comme A_{211} est le barycentre de son sous-motif, se réduit à

$$\sum_{s_{211}} q(s) = 3q(A_{211}) + \sum_{s_{211}} D^2.(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}) + \sum_{s_{211}} D^3.(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}) ,$$

On exprime ce même développement pour les nœuds des arêtes du sous-motif. par exemple : et par suite :

$$q(A_{310}) = q(A_{211}) + D^1.(\overrightarrow{v_{310}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{310}}, \overrightarrow{v_{310}}) + D^3.(\overrightarrow{v_{310}}, \overrightarrow{v_{310}}, \overrightarrow{v_{310}}) .$$

et on somme, il vient :

$$\sum_{a_{211}} q(a) = 6q(A_{211}) + D^1.(\overrightarrow{v_{310}}) + D^1.(\overrightarrow{v_{220}}) + ... + D^1.(\overrightarrow{v_{301}})$$

$$+D^2.(\overrightarrow{v_{310}}, \overrightarrow{v_{310}}) + D^2.(\overrightarrow{v_{220}}, \overrightarrow{v_{220}}) + ... + D^2.(\overrightarrow{v_{301}}, \overrightarrow{v_{301}})$$

$$+D^3.(\overrightarrow{v_{310}}, \overrightarrow{v_{310}}, \overrightarrow{v_{310}}) + D^3.(\overrightarrow{v_{220}}, \overrightarrow{v_{220}}, \overrightarrow{v_{220}}) + ... + D^3.(\overrightarrow{v_{301}}, \overrightarrow{v_{301}}, \overrightarrow{v_{301}}) ,$$

dont ne reste que (les termes relatifs à $D^1.()$ s'annulent deux à deux) :

$$\sum_{a_{211}} q(a) = 6q(A_{211}) + \sum_{a_{211}} D^2.(\overrightarrow{v_a}, \overrightarrow{v_a}) + \sum_{a_{211}} D^3.(\overrightarrow{v_a}, \overrightarrow{v_a}, \overrightarrow{v_a}) ,$$

mais la somme des dérivées troisièmes s'annule donc il reste uniquement :

$$\sum_{a_{211}} q(a) = 6q(A_{211}) + \sum_{a_{211}} D^2.(\overrightarrow{v_a}, \overrightarrow{v_a}) .$$

Le raisonnement vu au degré 3 pour les dérivées secondes s'applique de la même façon, en effet, par exemple, $A_{310} = \frac{2A_{400}+A_{130}}{3}$ et, par suite, on a :

$$\sum_{a_{211}} D^2.(\overrightarrow{v_a}, \overrightarrow{v_a}) = \frac{2}{3} \sum_{s_{211}} D^2.(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}) .$$

En résumé, les deux relations s'écrivent :

$$\sum_{s_{211}} q(s) = 3q(A_{211}) + \sum_{s_{211}} D^2.(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}) + \sum_{s_{211}} D^3.(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}) ,$$

$$\sum_{a_{211}} q(a) = 6q(A_{211}) + \frac{2}{3} \sum_{s_{211}} D^2.(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}) .$$

Par simple combinaison, on chasse les dérivées secondes et il vient :

$$2\sum_{s_{211}} q(s) - 3\sum_{a_{211}} q(a) = -12q(A_{211}) + 2\sum_{s_{211}} D^3.(\overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_s}) ,$$

mais la dernière somme de la ligne précédente est une constante que l'on note C_{211}. Ainsi, on a :

$$C_{211} = 12q(A_{211}) + 2\sum_{s_{211}} q(s) - 3\sum_{a_{211}} q(a)\,. \tag{8}$$

En considérant les deux autres sous-motifs, on obtient les deux relations :

$$C_{121} = 12q(A_{121}) + 2\sum_{s_{121}} q(s) - 3\sum_{a_{121}} q(a)\,,$$

$$C_{112} = 12q(A_{112}) + 2\sum_{s_{112}} q(s) - 3\sum_{a_{112}} q(a)\,.$$

Comme $C_{211} = C_{121} = C_{112}$, on obtient les liaisons entre les valeurs centrales et les valeurs aux bords qui permettront de définir la propriété de serendipité.

En premier, on explicite les 3 constantes. Soit :

$$\begin{aligned} C_{211} &= 12q(A_{211}) + 2q(A_{400}) + 2q(A_{130}) + 2q(A_{103}) \\ &- 3q(A_{310}) - 3q(A_{220}) - 3q(A_{121}) - 3q(A_{112}) - 3q(A_{202}) - 3q(A_{301})\,, \\ C_{121} &= 12q(A_{121}) + 2q(A_{310}) + 2q(A_{040}) + 2q(A_{013}) \\ &-3q(A_{220}) - 3q(A_{130}) - 3q(A_{031}) - 3q(A_{022}) - 3q(A_{112}) - 3q(A_{211})\,, \\ C_{112} &= 12q(A_{112}) + 2q(A_{301}) + 2q(A_{031}) + 2q(A_{004}) \\ &-3q(A_{211}) - 3q(A_{121}) - 3q(A_{022}) - 3q(A_{013}) - 3q(A_{103}) - 3q(A_{202})\,. \end{aligned} \tag{9}$$

On exprime que $C_{211} = C_{121}$, il vient :

$$15q(A_{211}) - 15q(A_{121}) =$$

$$-2q(A_{400})-5q(A_{130})-2q(A_{103})+5q(A_{310})+3q(A_{202})+3q(A_{301})+2q(A_{040})+2q(A_{013})-3q(A_{031})-3q(A_{022})\,.$$

On exprime maintenant que $C_{211} = C_{112}$, il vient :

$$15q(A_{211}) - 15q(A_{112}) =$$

$$-2q(A_{400})-2q(A_{130})-5q(A_{103})+3q(A_{310})+3q(A_{220})+5q(A_{301})+2q(A_{031})+2q(A_{004})-3q(A_{022})-3q(A_{013})\,. \tag{10}$$

Les deux relations de serendipité pour le triangle de degré 4 à 12 nœuds

3.2 Les fonctions de formes via la relation de serendipité

On cherche les fonctions réduites sous la forme :

$$q_i(u,v,w) = q_i^c(u,v,w) + \alpha_i q_{211}^c(u,v,w) + \beta_i q_{121}^c(u,v,w) + \gamma_i q_{112}^c(u,v,w)\,,$$

où les $q_i^c(u,v,w)$ sont les fonctions de forme de l'élément complet. Pour trouver les fonctions de forme du triangle réduit, il suffit de regarder ce que donne les deux relations ci-dessus ci-dessus en remplacant la fonction q générique par les fonctions cherchées, les q_i pour les différentes valeurs de i. On fixe $i = 1$, alors les deux relations donnent :

$$15\alpha_1 - 15\beta_1 = -2$$

$$15\alpha_1 - 15\gamma_1 = -2\,,$$

donc $\gamma_1 = \beta_1$ et $\beta_1 = \alpha_1 + \frac{2}{15}$. Par rotation, on déduit $\alpha_2 = \gamma_2$ et $\alpha_2 = \beta_2 + \frac{2}{15}$ avec $\beta_2 = \alpha_1$, tout comme $\alpha_3 = \beta_3$ et $\beta_3 = \gamma_3 + \frac{2}{15}$ avec $\gamma_3 = \alpha_1$.

On fixe $i = 4$, alors on trouve :

$$15\alpha_4 - 15\beta_4 = 5$$

$$15\alpha_4 - 15\gamma_4 = 3\,,$$

on fixe $i = 6$, alors on trouve :

$$15\alpha_6 - 15\beta_6 = -5$$

$$15\alpha_6 - 15\gamma_6 = -2\,,$$

soit, par symétrie :

$$15\beta_4 - 15\alpha_4 = -5 \quad \text{et} \quad 15\beta_4 - 15\gamma_4 = -2\,,$$

comme attendu. Donc $\beta_4 = \alpha_4 - \frac{1}{3}$ et $\gamma_4 = \alpha_4 - \frac{1}{5}$. Par rotation on a les coefficients des autres fonctions liées aux nœuds des arêtes autres que le milieu.

On fixe $i = 5$, alors on trouve :

$$15\alpha_5 - 15\beta_5 = 0$$

$$15\alpha_5 - 15\gamma_5 = 3\,,$$

donc $\alpha_5 = \beta_5$ et $\gamma_5 = \alpha_5 - \frac{1}{5}$, soit le tableau suivant :

i	ijk	α_{ijk}	β_{ijk}	γ_{ijk}
1	400	α_1	$\alpha_1 + 2/15$	$\alpha_1 + 2/15$
2	040	$\alpha_1 + 2/15$	α_1	$\alpha_1 + 2/15$
3	004	$\alpha_1 + 2/15$	$\alpha_1 + 2/15$	α_1
4	310	α_4	$\alpha_4 - 1/3$	$\alpha_4 - 1/5$
7	031	$\alpha_4 - 1/5$	α_4	$\alpha_4 - 1/3$
10	103	$\alpha_4 - 1/3$	$\alpha_4 - 1/5$	α_4
6	130	$\alpha_4 - 1/3$	α_4	$\alpha_4 - 1/5$
9	013	$\alpha_4 - 1/5$	$\alpha_4 - 1/3$	α_4
12	301	α_4	$\alpha_4 - 1/5$	$\alpha_4 - 1/3$
5	220	α_5	α_5	$\alpha_5 - 1/5$
8	022	$\alpha_5 - 1/5$	α_5	α_5
11	202	α_5	$\alpha_5 - 1/5$	α_5

Par ailleurs, on doit avoir $\sum_i \alpha_i = 1$, cette somme vaut :

$$3\alpha_1 + 6\alpha_4 + 3\alpha_5 + 4/15 - 3/5 - 2/3 = 3\alpha_1 + 6\alpha_4 + 3\alpha_5 - 1\,,$$

donc, comme on attend 1, on a la relation :

$$3\alpha_1 + 6\alpha_4 + 3\alpha_5 = 2\,. \tag{11}$$

À ce stade, on est en train de définir une famille de solutions possibles dépendant de 2 paramètres (*i.e.*, on n'a pas l'unicité comme pour le cas précédent). Le seul moyen de pouvoir proposer un choix précis va être d'exhiber d'autres relations liant les paramètres. L'idée est de s'assurer que le P^2 est contenu dans l'espace.

3.3 Recherche du P^3 dans l'espace

Pour fixer les deux paramètres restants, on va regarder l'expression des monômes en fonction de ces paramètres, Dans un premier temps, on cherche simplement x. On part donc de l'espace complet dans lequel on sait qu'il existe des coefficients tels que :

$$x^l y^m = \sum_{ijk} \omega_{ijk}^{lm} q_{ijk}^c(x, y)\,,$$

pour $l = 0, 4$, $m = 0, 4$ et sous la contrainte $l + m \leq 4$. Pour chercher x, on fixe $l = 1$ et $m = 0$ et par instanciations, on a :

$$x = \frac{1}{4}q^c_{310}(x,y)+\frac{2}{4}q^c_{220}(x,y)+\frac{3}{4}q^c_{130}(x,y)+q^c_{040}(x,y)+\frac{3}{4}q^c_{031}(x,y)+\frac{2}{4}q^c_{022}(x,y)+\frac{1}{4}q^c_{013}(x,y)$$
$$+\frac{1}{4}q^c_{211}(x,y)+\frac{2}{4}q^c_{121}(x,y)+\frac{1}{4}q^c_{112}(x,y)\,,$$

mais comme :

$$q_{310}(x,y) = q^c_{310}(x,y) + \alpha_{310}q^c_{211}(x,y) + \beta_{310}q^c_{121}(x,y) + \gamma_{310}q^c_{112}(x,y)$$

et des relations analogues pour les autres fonctions, alors, en sens inverse :

$$q^c_{310}(x,y) = q_{310}(x,y) - \alpha_{310}q^c_{211}(x,y) - \beta_{310}q^c_{121}(x,y) - \gamma_{310}q^c_{112}(x,y)$$

et, en remplaçant dans x, il vient :

$$x = \frac{1}{4}q_{310}(x,y)+\frac{2}{4}q_{220}(x,y)+\frac{3}{4}q_{130}(x,y)+q_{040}(x,y)+\frac{3}{4}q_{031}(x,y)+\frac{2}{4}q_{022}(x,y)+\frac{1}{4}q_{013}(x,y)$$
$$+\frac{1}{4}q^c_{211}(x,y)+\frac{2}{4}q^c_{121}(x,y)+\frac{1}{4}q^c_{112}(x,y)$$
$$-\frac{1}{4}(\alpha_{310}+2\alpha_{220}+3\alpha_{130}+4\alpha_{040}+3\alpha_{031}+2\alpha_{022}+\alpha_{013})q^c_{211}(x,y)$$
$$-\frac{1}{4}(\beta_{310}+2\beta_{220}+3\beta_{130}+4\beta_{040}+3\beta_{031}+2\beta_{022}+\beta_{013})q^c_{121}(x,y)$$
$$-\frac{1}{4}(\gamma_{310}+2\gamma_{220}+3\gamma_{130}+4\gamma_{040}+3\gamma_{031}+2\gamma_{022}+\gamma_{013})q^c_{112}(x,y)\,,$$

soit en $q^c_{211}(x,y)$:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(\alpha_{310}+2\alpha_{220}+3\alpha_{130}+4\alpha_{040}+3\alpha_{031}+2\alpha_{022}+\alpha_{013})\,,$$

et on remplace les α_{ijk} selon le tableau précédent, il vient :

$$\frac{1}{4}(1-\alpha_4-2\alpha_5-3\alpha_4+1-4\alpha_1-8/15-3\alpha_4+3/5-2\alpha_5+2/5-\alpha_4+1/5)$$
$$= \frac{1}{4}(-4\alpha_1-8\alpha_4-4\alpha_5+8/3)\,, = -\alpha_1-2\alpha_4-\alpha_5+2/3\,,$$

et, d'après la Relation (11), ceci est nul. Il en est de même pour les β_i et les γ_i.

On cherche maintenant x^2, il vient :

$$x^2 = \frac{1}{16}q^c_{310}(x,y)+\frac{4}{16}q^c_{220}(x,y)+\frac{9}{16}q^c_{130}(x,y)+q^c_{040}(x,y)+\frac{9}{16}q^c_{031}(x,y)+\frac{4}{16}q^c_{022}(x,y)+\frac{1}{16}q^c_{013}(x,y)$$
$$+\frac{1}{16}q^c_{211}(x,y)+\frac{4}{16}q^c_{121}(x,y)+\frac{1}{16}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, comme ci-dessus, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$\frac{1}{16}-\frac{1}{16}(\alpha_4+4\alpha_5+9\alpha_4-3+16\alpha_1+\frac{32}{15}+9\alpha_4-\frac{9}{5}+4\alpha_5-\frac{4}{5}+\alpha_4-\frac{1}{5})\,,$$
$$1-16\alpha_1-20\alpha_4-8\alpha_5+\frac{11}{3} = -16\alpha_1-20\alpha_4-8\alpha_5+\frac{14}{3}\,,$$

donc la relation :

$$-16\alpha_1-20\alpha_4-8\alpha_5 = -\frac{14}{3}$$

doit être satisfaite pour trouver x^2. On regarde xy, soit :

$$xy = \frac{3}{16}q^c_{031}(x,y) + \frac{4}{16}q^c_{022}(x,y) + \frac{3}{16}q^c_{013}(x,y) + \frac{1}{16}q^c_{211}(x,y) + \frac{2}{16}q^c_{121}(x,y) + \frac{2}{16}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et donc en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$\frac{1}{16} - \frac{1}{16}(3\alpha_4 - \frac{3}{5} + 4\alpha_5 - \frac{4}{5} + 3\alpha_4 - \frac{3}{5}) \;=\; 1 - 3\alpha_4 + \frac{3}{5} - 4\alpha_5 + \frac{4}{5} - 3\alpha_4 + \frac{3}{5} \;=\; 3 - 6\alpha_4 - 4\alpha_5\,,$$

donc la relation :

$$6\alpha_4 + 4\alpha_5 = 3\,,$$

doit être vérifiée pour trouver xy. On a donc le système :

$$3\alpha_1 + 6\alpha_4 + 3\alpha_5 = 2\,,$$

$$8\alpha_1 + 10\alpha_4 + 4\alpha_5 = \frac{7}{3}\,,$$

$$6\alpha_4 + 4\alpha_5 = 3\,.$$

Ce système n'a pas de solution donc il n'existe pas triangle P^4 réduit contenant le P^3 puisque même le P^2 n'est pas obtenu.

3.4 Recherche du seul P^2 dans l'espace

On regarde ici s'il est possible de trouver le seul espace P^2. Pour ce faire, il suffit de considérer les trois Relations (9), à savoir :

$$C_{211} = 12q(A_{211}) + 2q(A_{400}) + 2q(A_{130}) + 2q(A_{103})$$

$$-3q(A_{310}) - 3q(A_{220}) - 3q(A_{121}) - 3q(A_{112}) - 3q(A_{202}) - 3q(A_{301})\,,$$

$$C_{121} = 12q(A_{121}) + 2q(A_{310}) + 2q(A_{040}) + 2q(A_{013})$$

$$-3q(A_{220}) - 3q(A_{130}) - 3q(A_{031}) - 3q(A_{022}) - 3q(A_{112}) - 3q(A_{211})\,,$$

$$C_{112} = 12q(A_{112}) + 2q(A_{301}) + 2q(A_{031}) + 2q(A_{004})$$

$$-3q(A_{211}) - 3q(A_{121}) - 3q(A_{022}) - 3q(A_{013}) - 3q(A_{103}) - 3q(A_{202})\,,$$

et de fixer $C_{211} = C_{121} = C_{112} = 0$. Il vient alors le système :

$$12q(A_{211}) - 3q(A_{121}) - 3q(A_{112}) = -2q(A_{400}) - 2q(A_{130}) - 2q(A_{103})$$

$$+3q(A_{310}) + 3q(A_{220}) + 3q(A_{202}) + 3q(A_{301})\,,$$

$$-3q(A_{211}) + 12q(A_{121}) - 3q(A_{112}) = -2q(A_{310}) - 2q(A_{040}) - 2q(A_{013})$$

$$+3q(A_{220}) + 3q(A_{130}) + 3q(A_{031}) + 3q(A_{022})\,,$$

$$-3q(A_{211}) - 3q(A_{121}) + 12q(A_{112}) = -2q(A_{301}) - 2q(A_{031}) - 2q(A_{004})$$

$$+3q(A_{022}) + 3q(A_{013}) + 3q(A_{103}) + 3q(A_{202})\,.$$

Les fonctions de forme pour ce choix. Il y a trois types de fonctions de forme. On explicite donc les trois fonctions modèles, *i.e.*, pour $i = 1, i = 4$ et $i = 5$. En premier, on explite les fonctions complètes utiles pour ces indices, Formule (1).

$$q_1^c(u,v,w) = q_{400}^c(u,v,w) = \frac{1}{6}u(4u-1)(4u-2)(4u-3)\,,$$

$$q_4^c(u,v,w) = q_{310}^c(u,v,w) = \frac{8}{3}u(4u-1)(4u-2)v\,,$$
$$q_5^c(u,v,w) = q_{220}^c(u,v,w) = 4u(4u-1)v(4v-1)\,,$$
$$q_{13}^c(u,v,w) = q_{211}^c(u,v,w) = 32uvw(4u-1)\,,$$
$$q_{14}^c(u,v,w) = q_{121}^c(u,v,w) = 32uvw(4v-1)\,,$$
$$q_{15}^c(u,v,w) = q_{112}^c(u,v,w) = 32uvw(4w-1)\,.$$

Pour $i = 1$, alias indice $ijk = 400$, le système se réduit à :

$$12\alpha_{400} - 3\beta_{400} - 3\gamma_{400} = -2\,,$$

$$-3\alpha_{400} + 12\beta_{400} - 3\gamma_{400} = 0\,,$$
$$-3\alpha_{400} - 3\beta_{400} + 12\gamma_{400} = 0\,,$$

dont la solution est :

$$\alpha_{400} = -\frac{1}{5}\,, \gamma_{400} = \beta_{400} = -\frac{1}{15}\,,$$

donc

$$q_1(u,v,w) = q_1^c(u,v,w) - \frac{32}{15}uvw(3(4u-1)+(4v-1)+(4w-1))$$
$$= \frac{1}{6}u(4u-1)(4u-2)(4u-3) - \frac{32}{15}uvw(3(4u-1)+(4v-1)+(4w-1))$$

soit, `Maple` :

$$(32/3)u^4 - 16u^3 + (22/3)u^2 - u - (128/5)u^2vw + (32/3)uvw - (128/15)uv^2w - (128/15)uvw^2\,,$$

et, en x et en y (toujours `Maple`) :

$$q_1(x,y) \;=\; q_{400}(x,y) \;=\; \frac{1}{15}(1-x-y)$$

$$(15 - 110x - 110y + 240x^2 + 240y^2 + 256xy - 160x^3 - 160y^3 + 224x^2y + 224xy^2)\,.$$

En changeant x en $1-x$, on obtient q_2, en changeant y en $1-y$, on obtient q_3.

Pour $i = 4$, alias indice $ijk = 310$, on a le système :

$$12\alpha_{310} - 3\beta_{310} - 3\gamma_{310} = 3\,,$$

$$-3\alpha_{310} + 12\beta_{310} - 3\gamma_{310} = -2\,,$$
$$-3\alpha_{310} - 3\beta_{310} + 12\gamma_{310} = 0\,,$$

dont la solution est

$$\alpha_{310} = \frac{7}{30}, \quad \beta_{310} = -\frac{1}{10}, \quad \gamma_{310} = \frac{1}{30}\,,$$

donc

$$q_4(u,v,w) = \frac{8}{3}u(4u-1)(4u-2)v + \frac{32}{30}uvw(7(4u-1) - 3(4v-1) + (4w-1))\,,$$

et, avec `Maple`, on trouve

$$(128/3)u^3v - 32u^2v + (16/3)uv + (448/15)u^2vw - (16/3)uvw - (64/5)uv^2w + (64/15)uvw^2)\,,$$

qui, en x et y, s'écrit :

$$-(16/15)x(x-1+y)(40x^2-50x+40xy-27y+16y^2+15)$$

donc :

$$q_4(x,y) \;=\; q_{310}(x,y) \;=\; \frac{16}{15}x(1-x-y)(15-50x-27y+40x^2+16y^2+40xy)\,.$$

En changeant x en $1-x$, on obtient q_6. Sur l'expression en (u,v,w), en changeant (u,v,w) par (v,w,u), on obtient q_7. De la, (w,u) changé en (u,w) donne q_9. En permutant x et y, on obtient q_{12}, etc.

Pour $i=5$, alias $ijk=220$, on a le système :

$$12\alpha_{220}-3\beta_{220}-3\gamma_{220}=3\,,$$

$$-3\alpha_{220}+12\beta_{220}-3\gamma_{220}=3\,,$$

$$-3\alpha_{220}-3\beta_{220}+12\gamma_{220}=0\,,$$

dont la solution est

$$\alpha_{220}=\frac{2}{5},\quad \beta_{220}=\frac{2}{5},\quad \gamma_{220}=\frac{1}{5}\,,$$

donc

$$q_5(u,v,w)=4u(4u-1)v(4v-1)+\frac{32}{5}uvw(2(4u-1)+2(4v-1))+(4w-1))\,,$$

soit, avec `Maple` :

$$64u^2v^2-16u^2v-16uv^2+4uv+(256/5)u^2vw-32uvw+(256/5)uv^2w+(128/5)uvw^2\,,$$

et, en x et y, cela donne

$$\frac{4}{5}x(x-1+y)(80x^2-80x+80xy-44y+32y^2+15)\,.$$

donc

$$q_5(x,y) \;=\; q_{220}(x,y) \;=\; \frac{4}{5}x(1-x-y)(-15+80x+44y-80x^2-32y^2-80xy)\,.$$

Sur l'expression en (u,v,w), en changeant (u,v,w) par (v,w,u), on obtient q_8, en changeant (u,v,w) par (w,u,v), on obtient q_{11}.

1	$q_1=q_{400}(x,y)=\frac{1}{15}(1-x-y)$ $(15-110x-110y+240x^2+256xy+240y^2-160x^3+224x^2y+224xy^2-160y^3)$
4	$q_4=q_{310}(x,y)=\frac{16}{15}x(1-x-y)(15-50x-27y+40x^2+16y^2+40xy)$
5	$q_5=q_{220}(x,y)=\frac{4}{5}x(1-x-y)(-15+80x+44y-80x^2-32y^2-80xy)$

Fonctions de forme type du triangle de degré 4 à 12 nœuds

L'espace polynomial. En premier, on rappele les coefficients de répartition :

i	ijk	α_{ijk}	β_{ijk}	γ_{ijk}
1	400	$-1/5$	$-1/15$	$-1/15$
2	040	$-1/15$	$-1/5$	$-1/15$
3	004	$-1/15$	$-1/15$	$-1/5$
4	310	$7/30$	$-1/10$	$1/30$
7	031	$1/30$	$7/30$	$-1/10$
10	103	$-1/10$	$1/30$	$7/30$
6	130	$-1/10$	$7/30$	$1/30$
9	013	$1/30$	$-1/10$	$7/30$
12	301	$7/30$	$1/30$	$-1/10$
5	220	$2/5$	$2/5$	$1/5$
8	022	$1/5$	$2/5$	$2/5$
11	202	$2/5$	$1/5$	$2/5$

ce qui correspond aux schémas suivants :

```
-1/15

-1/10  1/30

 2/5         1/5

 7/30  [211]       1/30

-1/5   7/30  2/5  -1/10  -1/15
```

```
-1/15                                    -1/5

 1/30  -1/10                              7/30   7/30

 1/5          2/5           et            2/5   [112]  2/5

 1/30        [121]  7/30                 -1/10               -1/10

-1/15  -1/10  2/5   7/30   -1/5          -1/15   1/30  1/5   1/30   -1/15
```

Pour mémoire, on a le P^2. On a la constante et x par construction, tout comme x^2 et xy, on vérifie ces deux derniers monômes.

$$x^2 = \frac{1}{16}q^c_{310}(x,y)+\frac{4}{16}q^c_{220}(x,y)+\frac{9}{16}q^c_{130}(x,y)+q^c_{040}(x,y)+\frac{9}{16}q^c_{031}(x,y)+\frac{4}{16}q^c_{022}(x,y)+\frac{1}{16}q^c_{013}(x,y)$$

$$+\frac{1}{16}q^c_{211}(x,y)+\frac{4}{16}q^c_{121}(x,y)+\frac{1}{16}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/16(1-7/30-4*2/5+9/10+16/15-9/30-4/5-1/30)=0\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/16(4+1/10-8/5-63/30+16/5-63/30-8/5+1/10)=0\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/16(1 - 1/30 - 4/5 - 9/30 + 16/15 + 9/10 - 8/5 - 7/30) = 0\,.$$

De même, pour xy. En effet :

$$xy = \frac{3}{16}q^c_{031}(x,y) + \frac{4}{16}q^c_{022}(x,y) + \frac{3}{16}q^c_{013}(x,y) + \frac{1}{16}q^c_{211}(x,y) + \frac{2}{16}q^c_{121}(x,y) + \frac{2}{16}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/16(1 - 3/30 - 4/5 - 3/30) = 0\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/16(2 - 21/30 - 8/5 + 3/10) = 0\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/16(2 + 3/10 - 8/5 - 21/30) = 0\,.$$

On cherche alors d'autres monômes au degré 3. On a

$$x^3 = \frac{1}{64}q^c_{310}(x,y) + \frac{8}{64}q^c_{220}(x,y) + \frac{27}{64}q^c_{130}(x,y) + q^c_{040}(x,y) + \frac{27}{64}q^c_{031}(x,y) + \frac{8}{64}q^c_{022}(x,y) + \frac{1}{64}q^c_{013}(x,y)$$
$$+\frac{1}{64}q^c_{211}(x,y) + \frac{8}{64}q^c_{121}(x,y) + \frac{1}{64}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/64(1 - 7/30 - 16/5 + 27/10 + 64/15 - 27/30 - 8/5 - 1/30) = 1/32\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/64(8 + 1/10 - 16/5 - 27*7/30 + 64/5 - 27*7/30 - 16/5 + 1/10) = 1/32\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/64(1 - 1/30 - 8/5 - 27/30 + 64/15 + 27/10 - 16/5 - 7/30) = 1/32\,,$$

donc :

$$x^3 = ... + \frac{1}{32}(\,q^c_{211}(x,y) + q^c_{121}(x,y) + q^c_{112}(x,y)\,)\,.$$

On regarde y^3, on a immédiatement :

$$y^3 = \frac{1}{64}q^c_{301}(x,y) + \frac{8}{64}q^c_{202}(x,y) + \frac{27}{64}q^c_{103}(x,y) + q^c_{004}(x,y) + \frac{1}{64}q^c_{031}(x,y) + \frac{8}{64}q^c_{022}(x,y) + \frac{27}{64}q^c_{013}(x,y)$$
$$+\frac{1}{64}q^c_{211}(x,y) + \frac{1}{64}q^c_{121}(x,y) + \frac{8}{64}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/64(1 - 7/30 - 16/5 + 27/10 + 64/15 - 1/30 - 8/5 - 27/30) = 1/32\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/64(1 - 1/30 - 8/5 - 27/30 + 64/15 - 7/30 - 16/5 + 27/10) = 1/32\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/64(8 + 1/10 - 16/5 - 27*7/30 + 64/5 + 1/10 - 16/5 - 27*7/30) = 1/32\,,$$

et ainsi :

$$y^3 = ... + \frac{1}{32}(\,q^c_{211}(x,y) + q^c_{121}(x,y) + q^c_{112}(x,y)\,)\,.$$

On en déduit que ni x^3 ni y^3 ne sont dans l'espace, par contre $x^3 - y^3$ y est.

On regarde x^2y, on a :

$$x^2y = \frac{9}{64}q^c_{031}(x,y) + \frac{8}{64}q^c_{022}(x,y) + \frac{3}{64}q^c_{013}(x,y) + \frac{1}{64}q^c_{211}(x,y) + \frac{4}{64}q^c_{121}(x,y) + \frac{2}{64}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/64(1 - 9/30 - 8/5 - 3/30) = -1/64\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/64(4 - 9 * 7/30 - 16/5 + 3/10) = -1/64\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/64(2 + 9/10 - 16/5 - 21/30) = -1/64\,.$$

Pour xy^2, on a :

$$xy^2 = \frac{3}{64}q^c_{031}(x,y) + \frac{8}{64}q^c_{022}(x,y) + \frac{9}{64}q^c_{013}(x,y) + \frac{1}{64}q^c_{211}(x,y) + \frac{2}{64}q^c_{121}(x,y) + \frac{4}{64}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/64(1 - 3/30 - 8/5 - 9/30) = -1/64\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/64(2 - 21/30 - 16/5 + 9/10) = -1/64\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/64(4 + 3/10 - 16/5 - 9 * 7/30) = -1/64\,.$$

On en déduit que ni x^2y ni xy^2 ne sont dans l'espace, par contre $x^2y - xy^2$ y est.

De même les combinaisons $x^3 + 2x^2y, x^3 + 2xy^2, y^3 + 2x^2y, y^3 + 2xy^2$ sont dans l'espace (certaines en redondance !).

On cherche encore d'autres monômes, maintenant au degré 4. On a

$$x^4 = \frac{1}{256}q^c_{310}(x,y)+\frac{16}{256}q^c_{220}(x,y)+\frac{81}{256}q^c_{130}(x,y)+q^c_{040}(x,y)+\frac{81}{256}q^c_{031}(x,y)+\frac{16}{256}q^c_{022}(x,y)+\frac{1}{256}q^c_{013}(x,y)$$
$$+\frac{1}{256}q^c_{211}(x,y) + \frac{16}{256}q^c_{121}(x,y) + \frac{1}{256}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/256(1-7/30-32/5+81/10+256/15-81/30-16/5-1/30) = 408/(30*256) = 17/320 = 34/640\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/256(16 + 1/10 - 32/5 - 7*81/30 + 256/5 - 7*81/30 - 32/5 + 1/10) = 21/320 = 42/640\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/256(1 - 1/30 - 16/5 - 81/30 + 256/15 + 81/10 - 32/5 - 7/30) = 17/320 = 34/640\,.$$

donc :

$$x^4 = ... + \frac{17}{320}q^c_{211}(x,y) + \frac{21}{320}q^c_{121}(x,y) + \frac{17}{320}q^c_{112}(x,y)\,.$$

Pour y^4, on a :

$$y^4 = \frac{1}{256}q^c_{301}(x,y)+\frac{16}{256}q^c_{202}(x,y)+\frac{81}{256}q^c_{103}(x,y)+q^c_{004}(x,y)+\frac{1}{256}q^c_{031}(x,y)+\frac{16}{256}q^c_{022}(x,y)+\frac{81}{256}q^c_{013}(x,y)$$

$$+\frac{1}{256}q^c_{211}(x,y)+\frac{1}{256}q^c_{121}(x,y)+\frac{16}{256}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/256(1-7/30-32/5+81/10+256/15-1/30-16/5-81/30)=17/320=34/640\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/256(1-1/30-16/5-81/30+256/15-7/30-32/5+81/10)=17/320=34/640\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/256(16+1/10-32/5-81*7/30+256/5+1/10-32/5-7*81/30)=21/320=42/640\,.$$

donc :

$$y^4=...+\frac{17}{320}q^c_{211}(x,y)+\frac{17}{320}q^c_{121}(x,y)+\frac{21}{320}q^c_{112}(x,y)\,.$$

Peu d'espoir. On regarde x^3y, on a :

$$x^3y=\frac{27}{256}q^c_{031}(x,y)+\frac{16}{256}q^c_{022}(x,y)+\frac{3}{256}q^c_{013}(x,y)+\frac{1}{256}q^c_{211}(x,y)+\frac{8}{256}q^c_{121}(x,y)+\frac{2}{256}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/256(1-27/30-16/5-3/30)=-96/(30*256)=-1/80=-8/640\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/256*(8-7*27/30-32/5+3/10)=-132/(30*256)=11/640\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/256(2+27/10-32/5-21/30)=-72/(30*256)=-3/320=-6/640\,.$$

Bof. On regarde néanmoins xy^3.

$$xy^3=\frac{3}{256}q^c_{031}(x,y)+\frac{16}{256}q^c_{022}(x,y)+\frac{27}{256}q^c_{013}(x,y)+\frac{1}{256}q^c_{211}(x,y)+\frac{2}{256}q^c_{121}(x,y)+\frac{8}{256}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/256*(1-3/30-16/5-27/30)=-16/(256*5)=-1/80=-8/640\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/256*(2-21/30-32/5+27/10)=-72/(30*256)=-6/640\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/256*(8+3/10-32/5-7*27/30)=-132/(30*256)=11/640\,.$$

Bof.

Le seul monôme encore raisonable est x^2y^2. On a :

$$x^2y^2=\frac{9}{256}q^c_{031}(x,y)+\frac{16}{256}q^c_{022}(x,y)+\frac{9}{256}q^c_{013}(x,y)+\frac{1}{256}q^c_{211}(x,y)+\frac{4}{256}q^c_{121}(x,y)+\frac{4}{256}q^c_{112}(x,y)\,,$$

et, en $q^c_{211}(x,y)$, on trouve :

$$1/256*(1-9/30-16/5-9/30)=-84/(30*256)=-7/640\,,$$

en $q^c_{121}(x,y)$, on a :

$$1/256*(4-63/30-32/5+9/10)=-108/(30*256)=-9/640\,,$$

finalement en $q^c_{112}(x,y)$, on trouve :

$$1/256 * (4 + 9/10 - 32/5 - 63/30) = -9/640\,.$$

En conclusion, aucune combinaison n'est possible.

Pour conclure, on n'a pas trouvé de triangle réduit de degré 4 incluant le P^3 et le moyen d'en extraire un a été d'imposer uniquement le P^2. Ce triangle a pour espace de polynômes au moins ce qui suit :

$$\begin{array}{c} 1 \\ x \quad y \\ x^2 \quad xy \quad y^2 \\ x^3 - y^3 \quad x^3 + 2x^2y \quad x^3 + 2xy^2 \quad x^2y - xy^2 \quad y^3 + 2x^2y \quad y^3 + 2xy^2 \end{array}$$

et rien au degré 4. Ceci semble comprendre 12 monômes (ou combinaisons), en fait, il y en a moins car il y a des redondances, par exemple $x^3 + 2x^2y - (y^3 + 2x^2y) = x^3 - y^3$.

3.5 Validation d'un triangle courant

À des fins de validation d'un triangle courant d'un maillage donné, il faut construire les points de contrôle des arêtes et les trois points de contrôle internes P_{211}, P_{121} et P_{112} du triangle complet correspondant à ce triangle.

Les points de contrôle des arêtes sont donnés ou, sinon, sont obtenus via les relations classiques, ici, pour la première arête :

$$P_{310} = \frac{-39A_{400} + 144A_{310} - 108A_{220} + 48A_{130} - 9A_{040}}{36}\,,$$

$$P_{220} = \frac{26A_{400} - 128A_{310} + 240A_{220} - 128A_{130} + 26A_{040}}{36}\,,$$

$$P_{130} = \frac{-9A_{400} + 48A_{310} - 108A_{220} + 144A_{130} - 39A_{040}}{36}\,.$$

Les points de contrôle centraux sont obtenus à partir des nœuds centraux équivalents (que l'on invente en les définissant comme les images des triplets voulus). Par exemple on a :

$$A_{211} = \sum_i \alpha_i A_i\,,$$

où les A_i sont, en indices séquentiels, les nœuds du bord du triangle. Ayant évalué les trois nœuds en question, on obtient les points de contrôle en posant le système :

$$A_{ijk} = \sum_{ijk} B^4_{ijk}(u,v,w) P_{ijk}\,,$$

pour les trois points centraux (voir plus bas, on ne sait pas faire autrement).

Au degré 3, la relation liant P_{111} aux P_{ijk} du bord est la même que celle liant A_{111} aux A_{ijk} du bord. On regarde si cette propriété est vraie ici. On suppose alors que les P_{ijk} centraux vérifient les relations

$$P_{211} = \sum_{ijk} \alpha_{ijk} P_{ijk}\,, \quad P_{121} = \sum_{ijk} \beta_{ijk} P_{ijk}\,, \quad P_{112} = \sum_{ijk} \gamma_{ijk} P_{ijk}\,,$$

ensuite on évalue A_{211} soit le point du triplet $(u,v,w) = (\frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ en écrivant $A_{211} = \sum_{ijk} B^4_{ijk}(u,v,w) P_{ijk}$, pour ce triplet. Il vient :

$$A_{211} = \frac{1}{256}\{16P_{400} + P_{040} + P_{004}$$

$$+32P_{310}+24P_{220}+8P_{130}+32P_{301}+24P_{202}+8P_{103}+4P_{031}+6P_{022}+4P_{013}$$
$$48P_{211}+24P_{121}+24P_{112}\} \ ,$$

puis on exprime les P_{ijk} en fonction des A_{ijk} via les relations données ci-dessus, soit :

$$P_{400}=A_{400}, \quad P_{040}=A_{040}, \quad P_{004}=A_{004}\,,$$

$$36P_{310}=-39A_{400}+144A_{310}-108A_{220}+48A_{130}-9A_{040}\,,$$
$$36P_{220}=26A_{400}-128A_{310}+240A_{220}-128A_{130}+26A_{040}\,,$$
$$36P_{130}=-9A_{400}+48A_{310}-108A_{220}+144A_{130}-39A_{040}\,.$$

pour la première arête et des relations similaires pour les deux autres.

Au regard de A_{400}, il vient les coefficients liés à $P_{400}, P_{310}, P_{220}, P_{130}, P_{301}, P_{202}, P_{103}$ ce qui fait 28 termes (1 pour $P_{400}, ..., P_{103}$ et 7 pour $P_{211}, ..., P_{112}$). Prenant notre courage à deux mains, on trouve, au facteur $\frac{1}{256}$ près :

$$16+2\,\{32(-39/36)+24(26/36)+8(-9/36)\}$$

$$+\,48\,\{\alpha_{400}+\alpha_{310}(-39/36)+\alpha_{220}(26/36)+\alpha_{130}(-9/36)+\alpha_{301}(-39/36)+\alpha_{202}(26/36)+\alpha_{103}(-9/36)\}$$
$$+\,24\,\{\beta_{400}+\beta_{310}(-39/36)+\beta_{220}(26/36)+\beta_{130}(-9/36)+\beta_{301}(-39/36)+\beta_{202}(26/36)+\beta_{103}(-9/36)\}$$
$$+\,24\,\{\gamma_{400}+\gamma_{310}(-39/36)+\gamma_{220}(26/36)+\gamma_{130}(-9/36)+\gamma_{301}(-39/36)+\gamma_{202}(26/36)+\gamma_{103}(-9/36)\}\ ,$$

on met $1/36$ en facteur, il reste : $16\times 36+2\,\{32(-39)+24(26)+8(-9)\}$

$$+\,48\,\{36\alpha_{400}+\alpha_{310}(-39)+\alpha_{220}(26)+\alpha_{130}(-9)+\alpha_{301}(-39)+\alpha_{202}(26)+\alpha_{103}(-9)\}$$
$$+\,24\,\{36\beta_{400}+\beta_{310}(-39)+\beta_{220}(26)+\beta_{130}(-9)+\beta_{301}(-39)+\beta_{202}(26)+\beta_{103}(-9)\}$$
$$+\,24\,\{36\gamma_{400}+\gamma_{310}(-39)+\gamma_{220}(26)+\gamma_{130}(-9)+\gamma_{301}(-39)+\gamma_{202}(26)+\gamma_{103}(-9)\}\ .$$

Pour continuer le calcul, on donne ici les valeurs des coefficients, c'est le tableau précédent que nous remettons ici (avec le facteur commun $\frac{1}{30}$) :

i	ijk	α_{ijk}	β_{ijk}	γ_{ijk}
1	400	$-6/30$	$-2/30$	$-2/30$
2	040	$-2/30$	$-6/30$	$-2/30$
3	004	$-2/30$	$-2/30$	$-6/30$
4	310	$7/30$	$-3/30$	$1/30$
7	031	$1/30$	$7/30$	$-3/30$
10	103	$-3/30$	$1/30$	$7/30$
6	130	$-3/30$	$7/30$	$1/30$
9	013	$1/30$	$-3/30$	$7/30$
12	301	$7/30$	$1/30$	$-3/30$
5	220	$12/30$	$12/30$	$6/30$
8	022	$6/30$	$12/30$	$12/30$
11	202	$12/30$	$6/30$	$12/30$

soit avec les valeurs de ce tableau :

$$-816\,+\,\frac{48}{30}\,\{36(-6)+(7)(-39)+(12)(26)+(-3)(-9)+(7)(-39)+(12)(26)+(-3)(-9)\}$$
$$+\,\frac{24}{30}\,\{36(-2)+(-3)(-39)+(12)(26)+(7)(-9)+(1)(-39)+(6)(26)+(1)(-9)\}$$
$$+\,\frac{24}{30}\,\{36(-2)+(1)(-39)+(6)(26)+(1)(-9)+(-3)(-39)+(12)(26)+(7)(-9)\}\ ,$$

soit :

$$-816 + \frac{8}{5}\{36(-6)+(7)(-39)+(12)(26)+(-3)(-9)+(7)(-39)+(12)(26)+(-3)(-9)\}$$
$$+\frac{4}{5}\{36(-2)+(-3)(-39)+(12)(26)+(7)(-9)+(-39)+(6)(26)+(-9)\}$$
$$+\frac{4}{5}\{36(-2)+(-39)+(6)(26)+(-9)+(-3)(-39)+(12)(26)+(7)(-9)\}\ ,$$

on trouve $-\frac{77}{64\times 36}$!!!!! donc une valeur farfelue et différente de $-\frac{6}{30}$.

Pour confirmer ce résultat, on regarde ce qui vient au regard de A_{310}. On trouve les coefficients liés à $P_{310}, P_{220}, P_{130}$ ce qui fait 12 termes (1 pour $P_{400}, ..., P_{103}$ et 3 pour $P_{211}, ..., P_{112}$) et donne (au facteur $\frac{1}{256}$ près) :

$$\{32(144/36)+24(-128/36)+8(48/36)\}+48\{\alpha_{310}(144/36)+\alpha_{220}(-128/36)+\alpha_{130}(48/36)\}$$
$$+24\{\beta_{310}(144/36)+\beta_{220}(-128/36)+\beta_{130}(48/36)\}+24\{\gamma_{310}(144/36)+\gamma_{220}(-128/36)+\gamma_{130}(48/36))\}\ ,$$

on met $\frac{1}{36}$ en facteur, il reste :

$$\{32(144)+24(-128)+8(48)\}\ +\ 48\{\alpha_{310}(144)+\alpha_{220}(-128)+\alpha_{130}(48)\}$$
$$+24\{\beta_{310}(144)+\beta_{220}(-128)+\beta_{130}(48)\}\ +\ 24\{\gamma_{310}(144)+\gamma_{220}(-128)+\gamma_{130}(48))\}\ ,$$
$$\text{soit}\quad 1920+\frac{48}{30}\{(7)(144)+(12)(-128)+(-3)(48)\}$$
$$+\frac{24}{30}\{(-3)(144)+(12)(-128)+(7)(48)\}\ +\ \frac{24}{30}\{(1)(144)+(6)(-128)+(1)(48))\}\ ,$$

on trouve $-\frac{1}{10}$ donc, encore, une valeur différente de $\frac{7}{30}$. On en déduit que les relations liant les points de contrôle internes et les nœuds internes ne sont pas les mêmes, contrairement au cas du triangle de degré 3.

En Annexe, on explicite la relation liant les points de contrôle et on confirme ce résultat.

3.6 Construction directe des fonctions de forme à partir des Bézier

La méthode est la même qu'au degré 3. On prend la forme de Bézier d'un élément courant :

$$M(u,v,w)=\sum_{ijk}B^4_{ijk}(u,v,w)P_{ijk}\ ,$$

et on remplace les P_{ijk} en fonction des A_{ijk}, il suffit alors de trouver ce qui vient en regard, par exemple, de A_{400}, pour trouver $q_{400}(u,v,w)$, en notant que A_{400} est présent en temps que tel, $A_{400}=P_{400}$, et se cache dans les points de contrôle de ses deux arêtes incidentes et dans les points centraux. Les points de contrôle des arêtes sont connus via les formules explicites vues ci-dessus, par contre, les points de contrôle internes sont obtenus via un système 3×3 à partir des nœuds internes et de la relation liant ces nœuds aux nœuds du bord (voir également l'annexe).

3.7 Construction de l'espace réduit directement dans les Bézier

Par symétrie, les coefficients pour la répartition de la contribution en $\hat{A}_{211}$ sont ceux donnés sur le diagramme suivant (lire *ai* comme α_i) :

```
a2

a5   a6

a4        a7

a3  [211]      a6

a1   a3   a4   a5   a2
```

et on en déduit ces mêmes coefficeints pour les autres contributions centrales, soit :

```
a2                          a1

a6   a5                     a3   a3

a7        a4                a4  [112] a4

a6      [121]   a3          a5             a5

a2   a5   a4   a3   a1      a2   a6   a7   a6   a2
```

On pose *a priori* la forme des fonctions réduites, soit :

$$B'_{ijk} = B_{ijk} + \alpha_{ijk} B_{211} + \beta_{ijk} B_{121} + \gamma_{ijk} B_{112} \,,$$

où les coefficients α, β et γ prennent les valeurs indiquées dans les diagrammes ci-dessus. Ainsi,

$$B'_{400} = B_{400} + \alpha_1 B_{211} + \alpha_2 B_{121} + \alpha_2 B_{112} \,,$$
$$B'_{310} = B_{310} + \alpha_3 B_{211} + \alpha_5 B_{121} + \alpha_6 B_{112} \,,$$

etc.

On impose les polynômes de degré 3. Considérons alors le monôme uvw. On a

$$uvw = uvw(u+v+w) = \frac{1}{12}(B_{211} + B_{121} + B_{112}) \,,$$

et la conclusion est immédiate, aucune combinaison n'est possible pour se débarasser des fonctions centrales : l'élément réduit, s'il existe, ne peut pas contenir les Bernstein de degré 3. À noter que l'on n'utilise pas de développements (fastidieux) de Taylor et que le résultat négatif de non existence est obtenu en quelques lignes.

On cherche alors une solution en n'imposant que le degré 2. On regarde donc u, u^2 et uv, la présence de la constante étant trivialement assurée. On a successivement :

$$u = u(u+v+w)^3 = u^4 + uv^3 + uw^3 + 3u^3v + 3u^3w + 3u^2v^2 + 3uv^2w + 3u^2w^2 + 3uvw^2 + 6u^2vw \,,$$
$$u^2 = u^2(u+v+w)^2 = u^4 + u^2v^2 + u^2w^2 + 2u^3v + 2u^3w + 2u^2vw \,,$$
$$uv = uv(u+v+w)^2 = u^3v + uv^3 + uvw^2 + 2u^2v^2 + 2u^2vw + 2uv^2w \,,$$

ce qui donne :

$$u \;=\; B_{400} + \frac{1}{4}B_{130} + \frac{1}{4}B_{103} + \frac{3}{4}B_{310} + \frac{3}{4}B_{301} + \frac{3}{6}B_{220} + \frac{3}{6}B_{202} + \frac{6}{12}B_{211} + \frac{3}{12}B_{121} + \frac{3}{12}B_{112} \,,$$

$$u^2 \;=\; B_{400} + \frac{1}{6}B_{220} + \frac{1}{6}B_{202} + \frac{2}{4}B_{310} + \frac{2}{4}B_{301} + \frac{2}{12}B_{211} \,,$$
$$uv \;=\; \frac{1}{4}B_{310} + \frac{1}{4}B_{130} + \frac{1}{12}B_{112} + \frac{2}{6}B_{220} + \frac{2}{12}B_{211} + \frac{2}{12}B_{121} \,.$$

On remplace alors les B en fonction des B', par exemple, de

$$B'_{400} = B_{400} + \alpha_1 B_{211} + \alpha_2 B_{121} + \alpha_2 B_{112} \,,$$

on déduit

$$B_{400} = B'_{400} - \alpha_1 B_{211} - \alpha_2 B_{121} - \alpha_2 B_{112} \,.$$

On exprime alors u, u^2 et uv en indiquant les contributions sur B_{211}, B_{121} et B_{112}. Pour u, il vient

$$\text{en}\, B_{211} \;:\; \frac{1}{2} - (\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_5 + \frac{1}{4}\alpha_5 + \frac{3}{4}\alpha_3 + \frac{3}{4}\alpha_3 + \frac{3}{6}\alpha_4 + \frac{3}{6}\alpha_4) = 0 \,,$$

$$\text{en } B_{121} \,:\, \frac{1}{4} - (\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_3 + \frac{1}{4}\alpha_6 + \frac{3}{4}\alpha_5 + \frac{3}{4}\alpha_6 + \frac{3}{6}\alpha_4 + \frac{3}{6}\alpha_7) = 0\,,$$

$$\text{en } B_{112} \,:\, \frac{1}{4} - (\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_6 + \frac{1}{4}\alpha_3 + \frac{3}{4}\alpha_6 + \frac{3}{4}\alpha_5 + \frac{3}{6}\alpha_7 + \frac{3}{6}\alpha_4) = 0\,,$$

dont on déduit un premier jeu de deux équations (les deux dernières relations sont redondantes) :

$$2\alpha_1 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 = 1\,,$$

$$4\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 = 1\,.$$

Pour uv, il vient :

$$\text{en } B_{211} \,:\, \frac{1}{6} - (\frac{1}{4}\alpha_3 + \frac{1}{4}\alpha_5 + \frac{2}{6}\alpha_4) = 0\,,$$

$$\text{en } B_{121} \,:\, \frac{1}{6} - (\frac{1}{4}\alpha_5 + \frac{1}{4}\alpha_3 + \frac{2}{6}\alpha_4) = 0\,,$$

$$\text{en } B_{112} \,:\, \frac{1}{12} - (\frac{1}{4}\alpha_6 + \frac{1}{4}\alpha_6 + \frac{2}{6}\alpha_7) = 0\,,$$

dont on déduit un second jeu de deux équations (les deux premières relations sont redondantes) :

$$3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 = 2\,,$$

$$6\alpha_6 + 4\alpha_7 = 1\,.$$

Pour u^2, il vient :

$$\text{en } B_{211} \,:\, \frac{1}{6} - (\alpha 1 + \frac{1}{6}\alpha 4 + \frac{1}{6}\alpha 4 + \frac{2}{4}\alpha 3 + \frac{2}{4}\alpha 3) = 0\,,$$

$$\text{en } B_{121} \,:\, \alpha 2 + \frac{1}{6}\alpha 4 + \frac{1}{6}\alpha 7 + \frac{2}{4}\alpha 5 + \frac{2}{4}\alpha 6 = 0\,,$$

$$\text{en } B_{112} \,:\, \alpha 2 + \frac{1}{6}\alpha 7 + \frac{1}{6}\alpha 4 + \frac{2}{4}\alpha 6 + \frac{2}{4}\alpha 5 = 0\,,$$

dont on déduit un troisième jeu de deux équations (les deux dernières relations sont redondantes) :

$$6\alpha 1 + 6\alpha 3 + 2\alpha 4 = 1\,,$$

$$12\alpha 2 + 2\alpha 4 + 6\alpha 5 + 6\alpha 6 + 2\alpha 7 = 0\,.$$

Pour finir, la somme des coefficients vaut 1, donc on a également :

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 = 1\,.$$

En résumé, on a 7 paramètres et 7 équations que nous rappelons ici :

$$2\alpha_1 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 = 1\,,$$

$$4\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 = 1\,,$$

$$3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 = 2\,,$$

$$6\alpha_6 + 4\alpha_7 = 1\,,$$

$$6\alpha 1 + 6\alpha 3 + 2\alpha 4 = 1\,,$$

$$12\alpha 2 + 2\alpha 4 + 6\alpha 5 + 6\alpha 6 + 2\alpha 7 = 0\,,$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7 = 1\,.$$

Ce système admet une solution qui est représentée sur le diagramme suivant :

```
                -13/120

            -2/120        14/120

          33/120              9/120

      38/120   [P211]             14/120

   -29/120   38/120   33/120   -2/120   -13/120
```

Pour conclure, en écriture Bézier, quelques lignes donnent la réponse, pas de solution contenant les Bernstein de degré 3 et une solution en imposant seulement la présence des Bernstein de degré 2.

Obtenir les fonctions réduites en Lagrange est un jeu d'écriture en exprimant les points de contrôle en fonctions des nœuds et en regroupant les Bernstein en accord.

4 Triangles Serendip ou réduits de degré supérieur ?

On se place au degré n, alors on a :
- $\#nbor = 3n$ nœuds sur le bord du triangle,
- $\#ntot = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ nœuds pour l'élément complet,
- $\#nint = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ nœuds internes pour l'élément complet,
- $\#type = \frac{n}{2}$, en entier, types de nœuds sur le bord.

Les fonctions réduites sont cherchées sous la même forme qu'aux degrés 3 et 4, soit :

$$q_{ijk}(u,v,w) = q^c_{ijk}(u,v,w) + \sum_{l=1}^{l=\#nint} \alpha^l_{ijk} q^c_l \,,$$

avec q^c_l la l^{ieme} fonction de forme interne du triangle complet. Les coefficients α^l_{ijk} sont obtenus en résolvant $\#nbor$ systèmes de dimension $\#nint \times \#nint$ dont on va donner la forme générique.

Indices des nœuds centraux. Pour avoir ces nœuds numérotés séquentiellement comme :

```
3        6
1  2     4  5
         1  2  3      etc.
```

au degré 4, au degré 5, etc., on fixe $index = 0$ et il faut retenir les nœuds d'indice ijk définis par la boucle suivante :

$$\text{pour} \quad k = 1, n-2$$

$$\text{pour} \quad j = 1, n-2$$

$$\text{pour} \quad i = n-2, 1$$

$$\text{si} \quad i+j+k = n, \text{alors :} \quad index = index + 1, A_{index} = A_{ijk}$$

$$\text{fin pour} \quad i$$

$$\text{fin pour} \quad j$$

$$\text{fin pour} \quad k$$

Motif associé au nœud interne d'indice ijk. On part du nœud A_{ijk} et on considère dans le treillis le motif formé par le sous-triangle dont il serait l'unique nœud central, le schéma est le suivant :

```
i-1,j-1,k+2
     .        .
     .             .
     .                 .
i,j-1,k+1    ......  i-1,j,k+1
     .        .          .       .
     .             .     .            .
     .                  . .                .
i+1,j-1,k    ......    i,j,k    ......  i-1,j+1,k
     .        .          .       .          .       .
     .             .     .            .     .            .
     .                  . .                ..                 .
i+2,j-1,k-1  ......  i+1,j,k-1  ......   i,j+1,k-1  ......  i-1,j+2,k-1
```

Les bords de ce sous-triangle correspondent aux droites $u = \frac{i-1}{n}$, $v = \frac{j-1}{n}$ et $w = \frac{k-1}{n}$. Les sommets sont les nœuds avec deux indices bord, les nœuds d'arête sont les nœuds avec un seul indice bord.

Le système définissant la serendipité. Il ne semble pas possible (facile) de trouver les relations de serendipité. À cela deux raisons, la première découle déjà de la difficulté rencontrée au degré 4 où seul P^2 a été trouvé, la seconde est simplement lié au fait que le développement de Taylor ne conduit à rien d'utilisable. Par ailleurs, le raisonnement direct en les Bernstein montre l'impossibilité de trouver plus que le degré 2. Il est néanmoins vraissemblable qu'au degré n, la présence de *certains* monômes ou *combinaisons* de monômes d'un espace P^k , avec $k < n$ mais aussi grand que possible, soit une possibilité, avec, si nécéssaire, quelques nœuds internes à garder. Une solution avec $k = 2$, quel que soit n, est une possibilité mais nous pensons que cette solution n'est pas intéressante (trop pauvre).

5 Validation d'un élément triangulaire Serendip

Pour les deux cas où nous avons exhibé une solution, une fois les points de contrôle reconstruits et selon [4], le carreau est décrit par la Relation (7) et son jacobien est le polynôme

$$\mathcal{J}(u,v,w) = \sum_{I+J+K=2(n-1)} B^{2(n-1)}_{IJK}(u,v,w) N_{IJK} \,,$$

dont les coefficients N_{IJK} valent :

$$N_{IJK} = n^2 \sum_{i_1+j_1+k_1=n-1, i_2+j_2+k_2=n-1} \frac{C^{n-1}_{i_1 j_1 k_1} C^{n-1}_{i_2 j_2 k_2}}{C^{2(n-1)}_{i_1+i_2, j_1+j_2, k_1+k_2}} \left| \Delta^{100}_{i_1+1, j_1 k_1} \quad \Delta^{010}_{i_2+1, j_2 k_2} \right| , \tag{12}$$

avec $i_1 + i_2 = I, j_1 + j_2 = J, k_1 + k_2 = K$ et avec

$$\Delta^{100}_{ijk} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i-1,j+1,k}} \quad \text{et} \quad \Delta^{010}_{ijk} = \overrightarrow{P_{ijk} P_{i-1,j,k+1}} \,.$$

La condition suffisante de validité de l'élément consiste à avoir les coefficients "coins" strictement positifs et les autres non négatifs.

6 Le cas de la trois dimensions

Le nombre de nœuds internes aux faces est celui trouvé pour la deux dimensions, par contre, il faut monter en degré pour avoir, dans le tétraèdre complet, quelques nœuds internes dans le volume. Au degré 4, on a un seul nœud interne dans le volume, au degré 5, on en a seulement 4, au degré n on en a la somme $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-3)(n-4)}{2} + ... + 0$. Néanmoins, au degré 4, on gagnerait 13 nœuds sur 35.

La relation définissante de la serendipité reste à préciser.

Les fonctions de forme d'un tétraèdre de Lagrange complet. Avant de poursuivre on rappele ce que sont les fonctions complètes, dont l'expression générique des fonctions de forme est la même qu'en deux dimensions, pour le quadrulet de coordonnées barycentriques (u, v, w, t), soit :

$$q_{ijkl}(u,v,w,t) = \frac{1}{i!j!k!l!}\Pi_{l=0}^{i-1}(nu-l)\Pi_{l=0}^{j-1}(nv-l)\Pi_{l=0}^{k-1}(nw-l)\Pi_{l=0}^{l-1}(nt-l)\,. \tag{13}$$

Puis, en posant la forme générique des fonctions réduites en fonctions des complètes, on obtiendra leurs expressions. On va donc donner les seules fonctions complètes utiles aux degré 3 et 4. Soit, au degré 3, les fonctions des indices $3000, 2100$ (les deux fonctions type) et $1110, 1101, 1011, 0111$. Il vient successivement :

$$q^c_{3000} = \frac{1}{6}3u(3u-1)(3u-2) = \frac{1}{2}u(2u-v-w-t)(u-2v-2w-2t)\,,$$
$$q^c_{2100} = \frac{1}{2}3u(3u-1)3v = \frac{9}{2}uv(2u-v-w-t)\,,$$
$$q^c_{1110} = 3u3v3w = 27uvw\,,$$
$$q^c_{1101} = 27uvt\,,$$
$$q^c_{1011} = 27uwt\,,$$
$$q^c_{0111} = 27vwt\,.$$

Et, au degré 4, les fonctions aux indices $4000, 3100, 2200$ (les trois fonctions type) et $1120, 2110, 1210,\ 2101, 1201, 1102,\ 2011, 1021, 1012, 1111$. Soit :

$$q^c_{4000} = \frac{1}{24}4u(4u-1)(4u-2)(4u-3) = \frac{1}{3}u(3u-v-w-t)(u-v-w-t)(u-3v-3w-3t)\,,$$
$$q^c_{3100} = \frac{1}{6}4u(4u-1)(4u-2)4v = \frac{16}{3}uv(3u-v-w-t)(u-v-w-t)\,,$$
$$q^c_{2200} = \frac{1}{4}4u(4u-1)4v(4v-1) = uv(3u-v-w-t)(-u+3v-w-t)\,,$$
$$q^c_{1120} = \frac{1}{2}4u4v4w(4w-1) = 32uvw(-u-v+3w-t)\,,$$
$$q^c_{2110} = \frac{1}{2}4u(4u-1)4v4w = 32uvw(3u-v-w-t)\,,$$
$$q^c_{1210} = \frac{1}{2}4u4v(4v-1)4w = 32uvw(-u+3v-w-t)\,,$$
$$q^c_{2101} = \frac{1}{2}4u(4u-1)4v4t = 32uvt(3u-v-w-t)\,,$$
$$q^c_{1201} = \frac{1}{2}4u4v(4v-1)4t = 32uvt(-u+3v-w-t)\,,$$
$$q^c_{1102} = \frac{1}{2}4u4v4t(4t-1) = 32uvt(-u-v-w+3t)\,,$$
$$q^c_{2011} = \frac{1}{2}4u(4u-1)4w4t = 32uwt(3u-v-w-t)\,,$$
$$q^c_{1021} = \frac{1}{2}4u4w(4w-1)4t = 32uwt(-u-v+3w-t)\,,$$
$$q^c_{1012} = \frac{1}{2}4u4w4t(4t-1) = 32uwt(-u-v-w+3t)\,,$$
$$q^c_{1111} = 256uvwt\,.$$

6.1 Le tétraèdre de degré 3

Nous proposons de raisonner sur le schéma suivant qui montre, en les plans en t, une coupe du tétraèdre de degré 3 :

```
          0003                       (t=1)


          0012

       1002   0102                   (t=2/3)


          0021

       1011   0111

    2001   1101   0201               (t=1/3)



          0030

       1020   0120

    2010   1110  0210

 3000   2100   1200   0300           (t=0)
```

et de prendre les relations de serendipité du triangle de degré 3 pour chacune des quatre faces $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ et $t = 0$. Pour le triangle, on avait la Relation (4) :

$$12q(A_{111}) + 2 \sum_{j=1,3} q(sommet_j) - 3 \sum_{j=1,6} q(noeudarete_j) = 0\,,$$

que l'on décline sur les 4 faces. Pour $t = 0$, on obtient (voir le schéma ci-dessus) :

$$12q(A_{1110}) + 2\,\{q(A_{3000}) + q(A_{0300}) + q(A_{0030})\}$$

$$-3\,\{q(A_{2100}) + q(A_{1200}) + q(A_{0210}) + q(A_{0120}) + q(A_{1020}) + q(A_{2010})\} = 0\,,$$

pour $w = 0$, il vient :

$$12q(A_{1101}) + 2\,\{q(A_{3000}) + q(A_{0300}) + q(A_{0003})\}$$

$$-3\,\{q(A_{2100}) + q(A_{1200}) + q(A_{0201}) + q(A_{0102}) + q(A_{2001}) + q(A_{1002})\} = 0\,,$$

pour $v = 0$, il vient :

$$12q(A_{1011}) + 2\,\{q(A_{3000}) + q(A_{0030}) + q(A_{0003})\}$$

$$-3\,\{q(A_{2010}) + q(A_{1020}) + q(A_{2001}) + q(A_{1002}) + q(A_{0021}) + q(A_{0012})\} = 0\,,$$

pour $u = 0$, il vient :

$$12q(A_{0111}) + 2\,\{q(A_{0300}) + q(A_{0030}) + q(A_{0003})\}$$

$$-3\,\{q(A_{0210}) + q(A_{0120}) + q(A_{0201}) + q(A_{0102}) + q(A_{0021}) + q(A_{0012})\} = 0\,.$$

Ce système est découplé et s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
12q(A_{1110}) &= -2\left\{q(A_{3000})+q(A_{0300})+q(A_{0030})\right\}\\
&+3\left\{q(A_{2100})+q(A_{1200})+q(A_{0210})+q(A_{0120})+q(A_{1020})+q(A_{2010})\right\}\,,\\
12q(A_{1101}) &= -2\left\{q(A_{3000})+q(A_{0300})+q(A_{0003})\right\}\\
&+3\left\{q(A_{2100})+q(A_{1200})+q(A_{0201})+q(A_{0102})+q(A_{2001})+q(A_{1002})\right\}\,,\\
12q(A_{1011}) &= -2\left\{q(A_{3000})+q(A_{0030})+q(A_{0003})\right\}\\
&+3\left\{q(A_{2010})+q(A_{1020})+q(A_{2001})+q(A_{1002})+q(A_{0021})+q(A_{0012})\right\}\,,\\
12q(A_{0111}) &= -2\left\{q(A_{0300})+q(A_{0030})+q(A_{0003})\right\}\\
&+3\left\{q(A_{0210})+q(A_{0120})+q(A_{0201})+q(A_{0102})+q(A_{0021})+q(A_{0012})\right\}\,.
\end{aligned}$$

Les fonctions de forme. On les cherche sous la forme :

$$q_{ijkl}(u,v,w,t)=q^c_{ijkl}(u,v,w,t)+\alpha q^c_{1110}(u,v,w,t)+\beta q^c_{1101}(u,v,w,t)+\gamma q^c_{1011}(u,v,w,t)+\delta q^c_{0111}(u,v,w,t)\,.$$

Pour trouver q_{3000}, on instancie le système ci-dessus en remplaçant q par q_{3000}, il vient :

$$\alpha=\beta=\gamma=-\frac{1}{6}\ \text{et}\ \delta=0\,,$$

donc $q_{3000}(u,v,w,t)$ dépend de $q^c_{3000}(u,v,w,t)$ et des fonctions internes des trois faces incidentes, soit :

$$\begin{aligned}
q_{3000}(u,v,w,t) &= q^c_{3000}(u,v,w,t)-\frac{1}{6}q^c_{1110}(u,v,w,t)-\frac{1}{6}q^c_{1101}(u,v,w,t)-\frac{1}{6}q^c_{1011}(u,v,w,t)\\
&= \frac{1}{2}u\left\{(2u-v-w-t)(u-2v-2w-2t)-9(vw+vt+wt)\right\}\\
&= \frac{1}{2}u(2u^2-5uv-5uw-5ut+2v^2-5vw-5vt+2w^2-5wt+2t^2)\,,
\end{aligned}$$

et, en x, y et z :

$$q_{3000}(x,y,z)=\frac{1}{2}(1-x-y-z)$$
$$(2-9x-9y-9z+9x^2+9xy+9xz+9y^2+9yz+9z^2)\,.$$

Pour trouver q_{2100}, on fait de même et on trouve :

$$\alpha=\beta=\frac{1}{4},\ \gamma=\delta=0\,,$$

donc $q_{2100}(u,v,w,t)$ dépend de $q^c_{2100}(u,v,w,t)$ et des fonctions internes des deux faces incidentes, soit :

$$\begin{aligned}
q_{2100}(u,v,w,t) &= q^c_{2100}(u,v,w,t)+\frac{1}{4}q^c_{1110}(u,v,w,t)+\frac{1}{4}q^c_{1101}(u,v,w,t)\\
&= \frac{9}{2}uv(2u-v-w-t)+\frac{1}{4}(27uvw+27uvt)\ =\ \frac{9}{4}uv\left\{2(2u-v-w-t)+3(w+t)\right\}\\
&= \frac{9}{4}uv(4u-2v+w+t)\,,
\end{aligned}$$

et en x, y et z : $q_{2100}(x,y,z)=\dfrac{9}{4}(1-x-y-z)x(4-6x-3y-3z)\,,$

expression particulièrement simple.

1	$q_1=q_{3000}(x,y,z)=\frac{1}{2}(1-x-y-z)$ $(2-9x-9y-9z+9x^2+9xy+9xz+9y^2+9yz+9z^2)$
5	$q_5=q_{2100}(x,y,z)=\frac{9}{4}x(1-x-y-z)(4-6x-3y-3z)$

Fonctions de forme type du tétraèdre de degré 3 à 16 nœuds

Les autres fonctions de base s'en déduisent par symétries et rotations(en u,.. puis passage en x,... ou, directement en x,... selon le cas).

Validation d'un élément courant. Comme en deux dimensions, il suffit de reconstruire les nœuds internes (aux faces) de l'élément complet équivalent puis de reconstruire ses points de contrôle afin de pouvoir utiliser la condition habituelle de validité.

6.2 Le tétraèdre de degré 4

Nous proposons de raisonner sur le schéma suivant qui montre, en les plans en t, une coupe du tétraèdre complet de degré 4 qui possède 35 nœuds (3 par faces et un dans le volume) :

```
           0004                        (t=1)


           0013

        1003    0103                   (t=3/4)



           0022

        1012    0112

     2002    1102    0202              (t=1/2)


           0031

        1021    0121

     2011    1111   0211

  3001    2101    1201    0301         (t=1/4)


           0040

        1030    0130

     2020    1120    0220

  3010    2110    1210    0310

4000    3100    2200    1300    0400   (t=0)
```

et de prendre les relations de serendipité du triangle de degré 4 pour chacune des quatre faces $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ et $t = 0$ puis d'ajouter ces mêmes relations pour les peudo-faces liées aux coupes pour $t = \frac{1}{4}$ puis w, v et u en $\frac{1}{4}$ pour lier le nœud central (volumique) A_{1111} aux autres.

Définition englobant le P^3. On part de la relation du triangle en deux dimensions, à savoir les Formules (10) :

$$15q(A_{211}) - 15q(A_{121}) =$$

$$-2q(A_{400})-5q(A_{130})-2q(A_{103})+5q(A_{310})+3q(A_{202})+3q(A_{301})+2q(A_{040})+2q(A_{013})-3q(A_{031})-3q(A_{022})\,,$$

$$\text{et } 15q(A_{211}) - 15q(A_{112}) =$$

$-2q(A_{400}){-}2q(A_{130}){-}5q(A_{103}){+}3q(A_{310}){+}3q(A_{220}){+}5q(A_{301}){+}2q(A_{031}){+}2q(A_{004}){-}3q(A_{022}){-}3q(A_{013})\,.$

Donc, pour la face $t = 0$, on a :

$$(R1) \qquad 15q(A_{2110}) - 15q(A_{1210}) =$$
$$-2q(A_{4000}){-}5q(A_{1300}){-}2q(A_{1030}){+}5q(A_{3100}){+}3q(A_{2020}){+}3q(A_{3010}){+}2q(A_{0400}){+}2q(A_{0130}){-}3q(A_{0310}){-}3q(A_{0220})\,.$$
$$(R2) \qquad 15q(A_{2110}) - 15q(A_{1120}) =$$
$$-2q(A_{4000}){-}2q(A_{1300}){-}5q(A_{1030}){+}3q(A_{3100}){+}3q(A_{2200}){+}5q(A_{3010}){+}2q(A_{0310}){+}2q(A_{0040}){-}3q(A_{0220}){-}3q(A_{0130})\,.$$

Pour obtenir l'équivalent pour la face $w = 0$, il suffit de plaquer le motif

```
                0040

             1030    0130

          2020    1120    0220

       3010    2110    1210    0310

    4000    3100    2200    1300    0400          (t=0)
```

sur le motif :

```
                0004

             1003    0103

          2002    1102    0202

       3001    2101    1201    0301

    4000    3100    2200    1300    0400          (w=0)
```

ce qui donne les 2 relations :

$$(R3) \qquad 15q(A_{2101}) - 15q(A_{1201}) =$$
$$-2q(A_{4000}){-}5q(A_{1300}){-}2q(A_{1003}){+}5q(A_{3100}){+}3q(A_{2002}){+}3q(A_{3001}){+}2q(A_{0400}){+}2q(A_{0103}){-}3q(A_{0301}){-}3q(A_{0202})\,.$$
$$(R4) \qquad 15q(A_{2101}) - 15q(A_{1102}) =$$
$$-2q(A_{4000}){-}2q(A_{1300}){-}5q(A_{1003}){+}3q(A_{3100}){+}3q(A_{2200}){+}5q(A_{3001}){+}2q(A_{0301}){+}2q(A_{0004}){-}3q(A_{0202}){-}3q(A_{0103})\,.$$

Pour obtenir l'équivalent pour la face $v = 0$, il suffit de plaquer le motif

```
                0004

             1003    0013

          2002    1012    0022

       3001    2011    1021    0031

    4000    3010    2020    1030    0040          (v=0)
```

sur le motif initial, ce qui donne les 2 relations :

$$(R5) \qquad 15q(A_{2011}) - 15q(A_{1021}) =$$
$$-2q(A_{4000}){-}5q(A_{1030}){-}2q(A_{1003}){+}5q(A_{3010}){+}3q(A_{2002}){+}3q(A_{3001}){+}2q(A_{0040}){+}2q(A_{0013}){-}3q(A_{0031}){-}3q(A_{0022})\,.$$
$$(R6) \qquad 15q(A_{2011}) - 15q(A_{1012}) =$$
$$-2q(A_{4000}){-}2q(A_{1030}){-}5q(A_{1003}){+}3q(A_{3010}){+}3q(A_{2020}){+}5q(A_{3001}){+}2q(A_{0031}){+}2q(A_{0004}){-}3q(A_{0022}){-}3q(A_{0013})\,.$$

Pour obtenir l'équivalent pour la face $u = 0$, il suffit de plaquer le motif

```
                0004

             0103    0013

          0202    0112    0022

       0301    0211    0121    0031

    0400    0310    0220    0130    0040          (u=0)
```

sur le motif initial, ce qui donne les 2 relations :

$$(R7) \qquad 15q(A_{0211}) - 15q(A_{0121}) =$$
$$-2q(A_{0400})-5q(A_{0130})-2q(A_{0103})+5q(A_{0310})+3q(A_{0202})+3q(A_{0301})+2q(A_{0040})+2q(A_{0013})-3q(A_{0031})-3q(A_{0022})\,.$$
$$(R8) \qquad 15q(A_{0211}) - 15q(A_{0112}) =$$
$$-2q(A_{0400})-2q(A_{0130})-5q(A_{0103})+3q(A_{0310})+3q(A_{0220})+5q(A_{0301})+2q(A_{0031})+2q(A_{0004})-3q(A_{0022})-3q(A_{0013})\,.$$

On déduit pour la pseudo-face du plan $t = \frac{1}{4}$ la relation cherchée en utilisant le motif :

```
                0031

             1021    0121
                                        (t=1/4)
          2011    1111    0211

       3001    2101    1201    0301
```

et d'apres la Formule (8) :

$$C_{211} = 12q(A_{211}) + 2\sum_{s_{211}} q(s) - 3\sum_{a_{211}} q(a)\,,$$

il vient la relation

$$C_{1111-t} = 12q(A_{1111}) + 2q(A_{3001}) + 2q(A_{0301}) + 2q(A_{0031})$$
$$-3q(A_{2101}) - 3q(A_{1201}) - 3q(A_{0211}) - 3q(A_{0121}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{2011})\,.$$

Pour les trois autres pseudo-faces, les motifs examinés sont les trois suivants :

```
                0013

             1012    0112
                                        (w=1/4)
          2011    1111    0211

       3010    2110    1210    0310
```

puis

```
                0103

             1102    0112
                                        (v=1/4)
          2101    1111    0121

       3100    2110    1120    0130
```

et enfin

```
                1003

            1102    1012
                                        (u=1/4)
        1201    1111    1021

    1300    1210    1120    1030
```

d'ou les quatre relations :

$$C_{1111-t} = 12q(A_{1111}) + 2q(A_{3001}) + 2q(A_{0301}) + 2q(A_{0031})$$

$$-3q(A_{2101}) - 3q(A_{1201}) - 3q(A_{0211}) - 3q(A_{0121}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{2011})\,,$$

$$C_{1111-w} = 12q(A_{1111}) + 2q(A_{3010}) + 2q(A_{0310}) + 2q(A_{0013})$$

$$-3q(A_{2110}) - 3q(A_{1210}) - 3q(A_{0211}) - 3q(A_{0112}) - 3q(A_{1012}) - 3q(A_{2011})\,,$$

$$C_{1111-v} = 12q(A_{1111}) + 2q(A_{3100}) + 2q(A_{0130}) + 2q(A_{0103})$$

$$-3q(A_{2110}) - 3q(A_{1120}) - 3q(A_{0121}) - 3q(A_{0112}) - 3q(A_{1102}) - 3q(A_{2101})\,,$$

$$C_{1111-u} = 12q(A_{1111}) + 2q(A_{1300}) + 2q(A_{1030}) + 2q(A_{1003})$$

$$-3q(A_{1210}) - 3q(A_{1120}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{1012}) - 3q(A_{1102}) - 3q(A_{1201})\,.$$

Compte tenu de la similitude des motifs impliqués dans ces expressions et celle des faces, on a l'égalité suivante :

$$C_{1111-t} = C_{2110}\,,$$

où C_{2110} est la constante pour la face $t = 0$ (Relation (9)) pour le sous-motifs centré en A_{2110}, soit :

$$C_{2110} = 12q(A_{2110}) + 2q(A_{4000}) + 2q(A_{1300}) + 2q(A_{1030})$$

$$-3q(A_{3100}) - 3q(A_{2200}) - 3q(A_{1210}) - 3q(A_{1120}) - 3q(A_{2020}) - 3q(A_{3010})\,,$$

en exprimant que $C_{1111-t} = C_{2110}$, soit encore :

$$12q(A_{1111}) + 2q(A_{3001}) + 2q(A_{0301}) + 2q(A_{0031})$$

$$-3q(A_{2101}) - 3q(A_{1201}) - 3q(A_{0211}) - 3q(A_{0121}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{2011})$$

$$= 12q(A_{2110})+2q(A_{4000})+2q(A_{1300})+2q(A_{1030})-3q(A_{3100})-3q(A_{2200})-3q(A_{1210})-3q(A_{1120})-3q(A_{2020})-3q(A_{3010})\,,$$

on obtient la relation :

$$(R9) \qquad -3q(A_{2101})-3q(A_{1201})-3q(A_{0211})-3q(A_{0121})-3q(A_{1021})-3q(A_{2011})+3q(A_{1210})+3q(A_{1120})-12q(A_{2110})\,,$$

$$= -12q(A_{1111}) - 2q(A_{3001}) - 2q(A_{0301}) - 2q(A_{0031}) + 2q(A_{4000})$$

$$+2q(A_{1300}) + 2q(A_{1030}) - 3q(A_{3100}) - 3q(A_{2200}) - 3q(A_{2020}) - 3q(A_{3010})\,.$$

De la même façon, on dérive trois autres relations qui correspondent, avec des notations évidentes, à :

$$C_{1111-w} = C_{2101}, \quad C_{1111-v} = C_{2011} \text{ et } C_{1111-u} = C_{0211}\,.$$

Pour ce faire, on évalue les trois constantes de face, soit :

$$C_{2101} = 12q(A_{2101}) + 2q(A_{4000}) + 2q(A_{1300}) + 2q(A_{1003})$$

$$-3q(A_{3100}) - 3q(A_{2200}) - 3q(A_{1201}) - 3q(A_{1102}) - 3q(A_{2002}) - 3q(A_{3001})\,,$$

$$C_{2011} = 12q(A_{2011}) + 2q(A_{4000}) + 2q(A_{1030}) + 2q(A_{1003})$$

$$-3q(A_{3010}) - 3q(A_{2020}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{1012}) - 3q(A_{2002}) - 3q(A_{3001})\,,$$

$$C_{0211} = 12q(A_{0211}) + 2q(A_{0400}) + 2q(A_{0130}) + 2q(A_{0103})$$

$$-3q(A_{0310})-3q(A_{0220})-3q(A_{0121})-3q(A_{0112})-3q(A_{0202})-3q(A_{0301})\,,$$

et les trois relations s'en déduisent. De

$$12q(A_{1111})+2q(A_{3010})+2q(A_{0310})+2q(A_{0013})$$
$$-3q(A_{2110})-3q(A_{1210})-3q(A_{0211})-3q(A_{0112})-3q(A_{1012})-3q(A_{2011})$$
$$=12q(A_{2101})+2q(A_{4000})+2q(A_{1300})+2q(A_{1003})-3q(A_{3100})-3q(A_{2200})-3q(A_{1201})-3q(A_{1102})-3q(A_{2002})-3q(A_{3001})\,,$$

on tire :

$$(R10)\qquad -3q(A_{2110})-3q(A_{1210})-3q(A_{0211})-3q(A_{0112})-3q(A_{1012})-3q(A_{2011})+3q(A_{1201})+3q(A_{1102})-12q(A_{2101})$$
$$=-12q(A_{1111})-2q(A_{3010})-2q(A_{0310})-2q(A_{0013})+2q(A_{4000})$$
$$+2q(A_{1300})+2q(A_{1003})-3q(A_{3100})-3q(A_{2200})-3q(A_{2002})-3q(A_{3001})\,.$$

De

$$12q(A_{1111})+2q(A_{3100})+2q(A_{0130})+2q(A_{0103})$$
$$-3q(A_{2110})-3q(A_{1120})-3q(A_{0121})-3q(A_{0112})-3q(A_{1102})-3q(A_{2101})$$
$$=12q(A_{2011})+2q(A_{4000})+2q(A_{1030})+2q(A_{1003})-3q(A_{3010})-3q(A_{2020})-3q(A_{1021})-3q(A_{1012})-3q(A_{2002})-3q(A_{3001})\,,$$

on tire :

$$(R11)\qquad -3q(A_{2110})-3q(A_{1120})-3q(A_{0121})-3q(A_{0112})-3q(A_{1102})-3q(A_{2101})+3q(A_{1021})+3q(A_{1012})-12q(A_{2011})$$
$$=-12q(A_{1111})-2q(A_{3100})-2q(A_{0130})-2q(A_{0103})+2q(A_{4000})$$
$$+2q(A_{1030})+2q(A_{1003})-3q(A_{3010})-3q(A_{2020})-3q(A_{2002})-3q(A_{3001})\,.$$

De

$$12q(A_{1111})+2q(A_{1300})+2q(A_{1030})+2q(A_{1003})$$
$$-3q(A_{1210})-3q(A_{1120})-3q(A_{1021})-3q(A_{1012})-3q(A_{1102})-3q(A_{1201})$$
$$=12q(A_{0211})+2q(A_{0400})+2q(A_{0130})+2q(A_{0103})-3q(A_{0310})-3q(A_{0220})-3q(A_{0121})-3q(A_{0112})-3q(A_{0202})-3q(A_{0301})\,,$$

on tire :

$$(R12)\qquad -3q(A_{1210})-3q(A_{1120})-3q(A_{1021})-3q(A_{1012})-3q(A_{1102})-3q(A_{1201})+3q(A_{0121})+3q(A_{0112})-12q(A_{0211})$$
$$=-12q(A_{1111})-2q(A_{1300})-2q(A_{1030})-2q(A_{1003})+2q(A_{0400})$$
$$+2q(A_{0130})+2q(A_{0103})-3q(A_{0310})-3q(A_{0220})-3q(A_{0202})-3q(A_{0301})\,.$$

L'ensemble des 12 équations trouvées (de $(R1)$ à $(R12)$) est rappelé ci-dessous :

$$(R1)\qquad 15q(A_{2110})-15q(A_{1210})=$$
$$-2q(A_{4000})-5q(A_{1300})-2q(A_{1030})+5q(A_{3100})+3q(A_{2020})+3q(A_{3010})+2q(A_{0400})+2q(A_{0130})-3q(A_{0310})-3q(A_{0220})\,.$$
$$(R2)\qquad 15q(A_{2110})-15q(A_{1120})=$$
$$-2q(A_{4000})-2q(A_{1300})-5q(A_{1030})+3q(A_{3100})+3q(A_{2200})+5q(A_{3010})+2q(A_{0310})+2q(A_{0040})-3q(A_{0220})-3q(A_{0130})\,.$$

$$(R3)\qquad 15q(A_{2101})-15q(A_{1201})=$$
$$-2q(A_{4000})-5q(A_{1300})-2q(A_{1003})+5q(A_{3100})+3q(A_{2002})+3q(A_{3001})+2q(A_{0400})+2q(A_{0103})-3q(A_{0301})-3q(A_{0202})\,.$$
$$(R4)\qquad 15q(A_{2101})-15q(A_{1102})=$$
$$-2q(A_{4000})-2q(A_{1300})-5q(A_{1003})+3q(A_{3100})+3q(A_{2200})+5q(A_{3001})+2q(A_{0301})+2q(A_{0004})-3q(A_{0202})-3q(A_{0103})\,.$$

$$(R5)\qquad 15q(A_{2011})-15q(A_{1021})=$$
$$-2q(A_{4000})-5q(A_{1030})-2q(A_{1003})+5q(A_{3010})+3q(A_{2002})+3q(A_{3001})+2q(A_{0040})+2q(A_{0013})-3q(A_{0031})-3q(A_{0022})\,.$$

$$(R6) \qquad 15q(A_{2011}) - 15q(A_{1012}) =$$
$$-2q(A_{4000}) - 2q(A_{1030}) - 5q(A_{1003}) + 3q(A_{3010}) + 3q(A_{2020}) + 5q(A_{3001}) + 2q(A_{0031}) + 2q(A_{0004}) - 3q(A_{0022}) - 3q(A_{0013})\,.$$

$$(R7) \qquad 15q(A_{0211}) - 15q(A_{0121}) =$$
$$-2q(A_{0400}) - 5q(A_{0130}) - 2q(A_{0103}) + 5q(A_{0310}) + 3q(A_{0202}) + 3q(A_{0301}) + 2q(A_{0040}) + 2q(A_{0013}) - 3q(A_{0031}) - 3q(A_{0022})\,.$$

$$(R8) \qquad 15q(A_{0211}) - 15q(A_{0112}) =$$
$$-2q(A_{0400}) - 2q(A_{0130}) - 5q(A_{0103}) + 3q(A_{0310}) + 3q(A_{0220}) + 5q(A_{0301}) + 2q(A_{0031}) + 2q(A_{0004}) - 3q(A_{0022}) - 3q(A_{0013})\,.$$

$$(R9) \qquad -3q(A_{2101}) - 3q(A_{1201}) - 3q(A_{0211}) - 3q(A_{0121}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{2011}) + 3q(A_{1210}) + 3q(A_{1120}) - 12q(A_{2110})$$
$$= -12q(A_{1111}) - 2q(A_{3001}) - 2q(A_{0301}) - 2q(A_{0031}) + 2q(A_{4000})$$
$$+2q(A_{1300}) + 2q(A_{1030}) - 3q(A_{3100}) - 3q(A_{2200}) - 3q(A_{2020}) - 3q(A_{3010})\,.$$

$$(R10) \qquad -3q(A_{2110}) - 3q(A_{1210}) - 3q(A_{0211}) - 3q(A_{0112}) - 3q(A_{1012}) - 3q(A_{2011}) + 3q(A_{1201}) + 3q(A_{1102}) - 12q(A_{2101})$$
$$= -12q(A_{1111}) - 2q(A_{3010}) - 2q(A_{0310}) - 2q(A_{0013}) + 2q(A_{4000})$$
$$+2q(A_{1300}) + 2q(A_{1003}) - 3q(A_{3100}) - 3q(A_{2200}) - 3q(A_{2002}) - 3q(A_{3001})\,.$$

$$(R11) \qquad -3q(A_{2110}) - 3q(A_{1120}) - 3q(A_{0121}) - 3q(A_{0112}) - 3q(A_{1102}) - 3q(A_{2101}) + 3q(A_{1021}) + 3q(A_{1012}) - 12q(A_{2011})$$
$$= -12q(A_{1111}) - 2q(A_{3100}) - 2q(A_{0130}) - 2q(A_{0103}) + 2q(A_{4000})$$
$$+2q(A_{1030}) + 2q(A_{1003}) - 3q(A_{3010}) - 3q(A_{2020}) - 3q(A_{2002}) - 3q(A_{3001})\,.$$

$$(R12) \qquad -3q(A_{1210}) - 3q(A_{1120}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{1012}) - 3q(A_{1102}) - 3q(A_{1201}) + 3q(A_{0121}) + 3q(A_{0112}) - 12q(A_{0211})$$
$$= -12q(A_{1111}) - 2q(A_{1300}) - 2q(A_{1030}) - 2q(A_{1003}) + 2q(A_{0400})$$
$$+2q(A_{0130}) + 2q(A_{0103}) - 3q(A_{0310}) - 3q(A_{0220}) - 3q(A_{0202}) - 3q(A_{0301})\,.$$

Soit la matrice pour le vecteur des inconnues indiqué :

t1	t2	t3	w1	w2	w3	v1	v2	v3	u1	u2	u3
2110	1210	1120	2101	1201	1102	2011	1021	1012	0211	0121	0112
15	-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	-15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	15	-15	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	15	0	-15	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	15	-15	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	15	0	-15	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	-15	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	15	0	-15

-12	3	3	-3	-3	0	-3	-3	0	-3	-3	0
-3	-3	0	-12	3	3	-3	0	-3	-3	0	-3
-3	0	-3	-3	0	-3	-12	3	3	0	-3	-3
0	-3	-3	0	-3	-3	0	-3	-3	-12	3	3
2110	1210	1120	2101	1201	1102	2011	1021	1012	0211	0121	0112

Le déterminant de cette matrice est nul ! Le système est indéterminé. Pour en savoir plus, on va regarder la nature de ce système dans une instanciation particulière, en posant, $q = q_{ijkl}$ pour l'indice 4000 et en cherchant comme fonction, la forme habituelle :

$$q_{ijkl}(u,v,w,t) = q^c_{ijkl}(u,v,w,t) + \sum_{intface} \alpha_{intface} q^c_{intface}(u,v,w,t)\,.$$

On réécrit donc les douze équations qui, avec ce choix, se réduisent à :

$$(R1) \qquad 15\alpha_{2110} - 15\alpha_{1210} = -2$$

$$(R2) \qquad 15\alpha_{2110} - 15\alpha_{1120} = -2$$

$$(R3) \qquad 15\alpha_{2101} - 15\alpha_{1201} = -2$$

$$(R4) \qquad 15\alpha_{2101} - 15\alpha_{1102} = -2$$

$$(R5) \qquad 15\alpha_{2011} - 15\alpha_{1021} = -2$$

$$(R6) \qquad 15\alpha_{2011} - 15\alpha_{1012} = -2$$

$$(R7) \qquad 15\alpha_{0211} - 15\alpha_{0121} = 0$$

$$(R8) \qquad 15\alpha_{0211} - 15\alpha_{0112} = 0$$

$$(R9) \qquad -3\alpha_{2101} - 3\alpha_{1201} - 3\alpha_{0211} - 3\alpha_{0121} - 3\alpha_{1021} - 3\alpha_{2011} + 3\alpha_{1210} + 3\alpha_{1120} - 12\alpha_{2110} = 2$$

$$(R10) \qquad -3\alpha_{2110} - 3\alpha_{1210} - 3\alpha_{0211} - 3\alpha_{0112} - 3\alpha_{1012} - 3\alpha_{2011} + 3\alpha_{1201} + 3\alpha_{1102} - 12\alpha_{2101} = 2$$

$$(R11) \qquad -3\alpha_{2110} - 3\alpha_{1120} - 3\alpha_{0121} - 3\alpha_{0112} - 3\alpha_{1102} - 3\alpha_{2101} + 3\alpha_{1021} + 3\alpha_{1012} - 12\alpha_{2011} = 2$$

$$(R12) \qquad -3\alpha_{1210} - 3\alpha_{1120} - 3\alpha_{1021} - 3\alpha_{1012} - 3\alpha_{1102} - 3\alpha_{1201} + 3\alpha_{0121} + 3\alpha_{0112} - 12\alpha_{0211} = 0\,.$$

De $(R1)$ et $(R2)$, on déduit :

$$\alpha_{1210} = \alpha_{1120}, \quad \text{et} \quad \alpha_{2110} = \alpha_{1120} - \frac{2}{15}\,,$$

et des relations analogues pour les 2 autres couples suivants, soit :

$$\alpha_{1201} = \alpha_{1102}, \quad \text{et} \quad \alpha_{2101} = \alpha_{1102} - \frac{2}{15}\,,$$

$$\alpha_{1021} = \alpha_{1012}, \quad \text{et} \quad \alpha_{2011} = \alpha_{1012} - \frac{2}{15}\,,$$

tandis que $(R7)$ et $(R8)$ indiquent que :

$$\alpha_{0211} = \alpha_{0121} = \alpha_{0112}\,.$$

Avec ces informations reportées dans $(R9)$, il vient, pas à pas :

$$(R9) \qquad -6\alpha_{1102} + \frac{6}{15} - 6\alpha_{0112} - 6\alpha_{1012} + \frac{6}{15} - 6\alpha_{1120} + \frac{24}{15} = 2\,,$$

$$(R9) \qquad -6\alpha_{1102} - 6\alpha_{0112} - 6\alpha_{1012} - 6\alpha_{1120} = -\frac{6}{15}\,,$$

$$(R9) \qquad \alpha_{1102}+\alpha_{0112}+\alpha_{1012}+\alpha_{1120}=\frac{1}{15}\,.$$

Les relations $(R10)$ et $(R11)$ conduisent exactement à la même relation entre les α. La relation $(R12)$ devient, pas à pas :

$$(R12) \qquad -\alpha_{1210}-\alpha_{1120}-\alpha_{1021}-\alpha_{1012}-\alpha_{1102}-\alpha_{1201}+\alpha_{0121}+\alpha_{0112}-4\alpha_{0211}=0\,.$$

$$(R12) \qquad -2\alpha_{1120}-2\alpha_{1012}-2\alpha_{1102}-2\alpha_{0112}=0\,.$$

$$(R12) \qquad \alpha_{1120}+\alpha_{1012}+\alpha_{1102}+\alpha_{0112}=0\,.$$

Il en ressort que $(R9), (R10), (R11)$ et $(R12)$ sont *incompatibles.* Ce qui conduit au résultat suivant :

Théorème 1. Il n'y a pas de tétraèdre Serendip (ou réduit) de degré 4 englobant le P^3. $\square$

Remarquons que ce résultat négatif corrobore le fait qu'en deux dimensions nous n'avons pas trouvé de triangle réduit contenant le P^3.

Définition englobant le P^2. On reprend ce qui a été fait en deux dimensions. Il faut donc reprendre l'ensemble de ce qui précède sans utiliser les Relations (10) mais, à la place, repartir des Formules (9), à savoir :

$$C_{211}=12q(A_{211})+2q(A_{400})+2q(A_{130})+2q(A_{103})$$
$$-3q(A_{310})-3q(A_{220})-3q(A_{121})-3q(A_{112})-3q(A_{202})-3q(A_{301})\,,$$
$$C_{121}=12q(A_{121})+2q(A_{310})+2q(A_{040})+2q(A_{013})$$
$$-3q(A_{220})-3q(A_{130})-3q(A_{031})-3q(A_{022})-3q(A_{112})-3q(A_{211})\,,$$
$$C_{112}=12q(A_{112})+2q(A_{301})+2q(A_{031})+2q(A_{004})$$
$$-3q(A_{211})-3q(A_{121})-3q(A_{022})-3q(A_{013})-3q(A_{103})-3q(A_{202})\,.$$

en imposant la nullité de toutes les constantes, ce qui implique la présence du P^2 seulement.

Donc, pour la face $t=0$, on a :

$$0=12q(A_{2110})+2q(A_{4000})+2q(A_{1300})+2q(A_{1030})$$
$$-3q(A_{3100})-3q(A_{2200})-3q(A_{1210})-3q(A_{1120})-3q(A_{2020})-3q(A_{3010})\,,$$
$$0=12q(A_{1210})+2q(A_{3100})+2q(A_{0400})+2q(A_{0130})$$
$$-3q(A_{2200})-3q(A_{1300})-3q(A_{0310})-3q(A_{0220})-3q(A_{1120})-3q(A_{2110})\,,$$
$$0=12q(A_{1120})+2q(A_{3010})+2q(A_{0310})+2q(A_{0040})$$
$$-3q(A_{2110})-3q(A_{1210})-3q(A_{0220})-3q(A_{0130})-3q(A_{1030})-3q(A_{2020})\,.$$

Pour les autres faces, on obtient (par permutations des indices) les relations qui suivent. Pour la face $w=0$:

$$0=12q(A_{2101})+2q(A_{4000})+2q(A_{1300})+2q(A_{1003})$$
$$-3q(A_{3100})-3q(A_{2200})-3q(A_{1201})-3q(A_{1102})-3q(A_{2002})-3q(A_{3001})\,,$$
$$0=12q(A_{1201})+2q(A_{3100})+2q(A_{0400})+2q(A_{0103})$$
$$-3q(A_{2200})-3q(A_{1300})-3q(A_{0301})-3q(A_{0202})-3q(A_{1102})-3q(A_{2101})\,,$$
$$0=12q(A_{1102})+2q(A_{3001})+2q(A_{0301})+2q(A_{0004})$$
$$-3q(A_{2101})-3q(A_{1201})-3q(A_{0202})-3q(A_{0103})-3q(A_{1003})-3q(A_{2002})\,.$$

Pour la face $v=0$, on a :

$$0=12q(A_{2011})+2q(A_{4000})+2q(A_{1003})+2q(A_{1003})$$

$$-3q(A_{3010}) - 3q(A_{2020}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{1012}) - 3q(A_{2002}) - 3q(A_{3001})\,,$$

$$0 = 12q(A_{1021}) + 2q(A_{3010}) + 2q(A_{0040}) + 2q(A_{0013})$$

$$-3q(A_{2020}) - 3q(A_{1030}) - 3q(A_{0031}) - 3q(A_{0022}) - 3q(A_{1012}) - 3q(A_{2011})\,,$$

$$0 = 12q(A_{1012}) + 2q(A_{3001}) + 2q(A_{0031}) + 2q(A_{0004})$$

$$-3q(A_{2011}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{0022}) - 3q(A_{0013}) - 3q(A_{1003}) - 3q(A_{2002})\,.$$

Pour la face $u = 0$, on a :

$$0 = 12q(A_{0211}) + 2q(A_{0400}) + 2q(A_{0130}) + 2q(A_{0103})$$

$$-3q(A_{0310}) - 3q(A_{0220}) - 3q(A_{0121}) - 3q(A_{0112}) - 3q(A_{0202}) - 3q(A_{0301})\,,$$

$$0 = 12q(A_{0121}) + 2q(A_{0310}) + 2q(A_{0040}) + 2q(A_{0013})$$

$$-3q(A_{0220}) - 3q(A_{0130}) - 3q(A_{0031}) - 3q(A_{0022}) - 3q(A_{0112}) - 3q(A_{0211})\,,$$

$$0 = 12q(A_{0112}) + 2q(A_{0301}) + 2q(A_{0031}) + 2q(A_{0004})$$

$$-3q(A_{0211}) - 3q(A_{0121}) - 3q(A_{0022}) - 3q(A_{0013}) - 3q(A_{0103}) - 3q(A_{0202})\,.$$

On complète ces relations par celles des pseudo-faces (avec des constantes nulles), soient :

$$0 = 12q(A_{1111}) + 2q(A_{3001}) + 2q(A_{0301}) + 2q(A_{0031})$$

$$-3q(A_{2101}) - 3q(A_{1201}) - 3q(A_{0211}) - 3q(A_{0121}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{2011})\,,$$

$$0 = 12q(A_{1111}) + 2q(A_{3010}) + 2q(A_{0310}) + 2q(A_{0013})$$

$$-3q(A_{2110}) - 3q(A_{1210}) - 3q(A_{0211}) - 3q(A_{0112}) - 3q(A_{1012}) - 3q(A_{2011})\,,$$

$$0 = 12q(A_{1111}) + 2q(A_{3100}) + 2q(A_{0130}) + 2q(A_{0103})$$

$$-3q(A_{2110}) - 3q(A_{1120}) - 3q(A_{0121}) - 3q(A_{0112}) - 3q(A_{1102}) - 3q(A_{2101})\,,$$

$$0 = 12q(A_{1111}) + 2q(A_{1300}) + 2q(A_{1030}) + 2q(A_{1003})$$

$$-3q(A_{1210}) - 3q(A_{1120}) - 3q(A_{1021}) - 3q(A_{1012}) - 3q(A_{1102}) - 3q(A_{1201})\,.$$

Ceci donne 16 relations pour 13 inconnues ! On prend les 12 premières inconnues et les 12 premières relations puis on regarde les quatre relations ci-dessus.

On pose la forme habituelle des fonctions réduites, à savoir :

$$q_{ijkl}(u,v,w,t) = q^c_{ijkl}(u,v,w,t) + \sum_{mnop \in \mathcal{F}} \alpha^{mnop}_{ijkl} q^c_{mnop}(u,v,w,t)\,,$$

où $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des indices des nœuds des faces et celui du nœud central.

Les 12 premières relations ont comme solutions celles obtenues pour le triangle en deux dimensions, ce que l'on résume par le tableau suivant (pour les trois fonctions type) :

		2011	1021	1012
		2101	1201	1102
		2110	1210	1120
i	$ijkl$	α_{ijkl}	β_{ijkl}	γ_{ijkl}
1	4000	$-6/30$	$-2/30$	$-2/30$
		2011	1021	1012
		2110	1210	1120
5	3100	$7/30$	$-3/30$	$1/30$
6	2200	$12/30$	$12/30$	$6/30$

en notant que l'indice 1111 n'intervient pas dans ces répartitions. À partir de ces relations, on regarde si les 4 dernières relations sont satisfaite. On fixe $q = q_{4000}$, la première de ces relations donne (lire α^{mnop} comme α^{mnop}_{ijkl} avec $ijkl = 4000$) :

$$0 = 12\alpha^{1111} - 3\alpha^{2101} - 3\alpha^{1201} - 3\alpha^{0211} - 3\alpha^{0121} - 3\alpha^{1021} - 3\alpha^{2011} ,$$

donc, en reportant les valeurs des coefficients, il vient successivement :

$$4\alpha^{1111} = \alpha^{2101} + \alpha^{1201} + \alpha^{0211} + \alpha^{0121} + \alpha^{1021} + \alpha^{2011} ,$$

$$4\alpha^{1111} = \alpha^{2101} + \alpha^{1201} + \alpha^{1021} + \alpha^{2011} = -\frac{6}{30} - \frac{2}{30} - \frac{2}{30} - \frac{6}{30} = -\frac{8}{15} .$$

La dernière des 4 relations donne :

$$4\alpha^{1111} = \alpha^{1210} + \alpha^{1120} + \alpha^{1021} + \alpha^{1012} + \alpha^{1102} + \alpha^{1201} ,$$

donc

$$4\alpha^{1111} = -\frac{6}{15} .$$

On arrive à une impossibilié, d'òu le résultat :

Théorème 2. Il n'y a pas de tétraèdre Serendip (ou réduit) de degré 4 englobant le P^2. □

Ce qui termine notre étude des tétraèdres. On peut en effet légitimement penser que ce résultat négatif s'étend aux degrés plus élevés.

7 Validation d'un élément tétraédrique Serendip

Il s'agit donc de vérifier que les tétraèdres (de degré 3 puisque c'est le seul cas où nous avons trouvé une solution) d'un maillage donné sont valides au sens où leurs jacobiens sont positifs. Parmi les deux cas vus ci-dessus, seul le degré 3 donne une solution. Il suffit de reconstruire les points de contrôle d'un élément complet équivalent puis d'utiliser la méthode habituelle qui donne les conditions de validité. Le polynôme jacobien a la forme suivante, $n = 3$:

$$\mathcal{J}(u, v, w, t) = \sum_{I+J+K+L=(n-1)} B^{3(n-1)}_{IJKL}(u, v, w, t) N_{IJKL} ,$$

et les coefficients N_{IJKL} valent :

$$N_{IJKL} = n^3 \sum_{i_1+j_1+k_1+l_1=n-1, i_2+j_2+k_2+l_2=n-1, i_3+j_3+k_3+l_3=n-1} \frac{C^{n-1}_{i_1 j_1 k_1 l_1} C^{n-1}_{i_2 j_2 k_2 l_2} C^{n-1}_{i_3 j_3 k_3 l_3}}{C^{3(n-1)}_{i_1+i_2+i_3, j_1+j_2+j_3, k_1+k_2+k_3, l_1+l_2+l_3}} \left| \Delta^{1000}_{i_1+1, j_1 k_1, l_1} \quad \Delta^{0100}_{i_2+1, j_2 k_2, l_2} \quad \Delta^{0010}_{i_3+1, j_3 k_3, l_3} \right| , \tag{14}$$

avec $i_1 + i_2 + i_3 = I, j_1 + j_2 + j_3 = J, k_1 + k_2 + k_3 = K, l_1 + l_2 + l_3 = L$ et avec

$$\Delta^{1000}_{ijkl} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{i-1,j+1,kl}} \quad \text{et} \quad \Delta^{0100}_{ijkl} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{i-1,j,k+1,l}} \quad \text{et} \quad \Delta^{0010}_{ijkl} = \overrightarrow{P_{ijkl} P_{i-1,j,k,l+1}} .$$

La condition suffisante de validité de l'élément consiste à avoir les coefficients "coins" strictement positifs et les autres non négatifs.

8 Conclusion

On a montré comment construire des triangles Serendip (ou plutôt réduits) aux degrés 3 et 4 (mais en n'imposant que le P^2 même dans ce cas) et, de plus, qu'il n'y a pas de solution aux degrés plus élevés sauf en restreignant l'espace cherché à P^2 ce qui présente peu d'intêret. Pour la trois dimensions, on a construit le tétraèdre Serendip de degré 3 et on a établi qu'il n'y avait pas de tels éléments au degré 4 et, *a fortiori*, aux degrés plus élevés sauf avec la même restriction que ci-dessus.

On a également indiqué comment valider les éléments d'un maillage donné de ce type en montrant qu'il suffit de reconstruire les points de contrôle d'un élément complet équivalent avant d'appliquer la méthode habituelle d'analyse du signe de son jacobien.

Références

[1] C. Bernadi, Y. Maday et F. Rapetti, *Discrétisation variationnelles de problèmes aux limites elliptiques* , Collection Mathématiques et Applications, **45**, Springer, 2004.

[2] P. Bézier, *Courbes et surfaces, Mathématiques et CAO*, **4**, Hermès, Paris, 1986.

[3] G. Dhatt, G. Touzot, E, Lefrançois, Méthode des éléments finis, Hermès Science, Lavoisier, Paris, 2007.

[4] P.L. George et H. Borouchaki, Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2, *RR INRIA* **8376**, 2013.

[5] P.L. George et H. Borouchaki, Construction et validation des éléments Serendip associés à un carreau de degré arbitraire, *RR INRIA* **8572**, 2014.

[6] A. Perronnet, Interpolation transfinie sur le triangle, le tétraèdre et le pentaèdre. Application à la création de maillages et à la condition de Dirichlet, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 326, Série I, p. 117-l 22, 1998.

[7] A. Perronnet, Interpolation transfinie et maillage, chapitre 6 in série *Mim, Maillage et adaptation*, Hermès Lavoisier, Paris, 2001.

Annexe

Dans cette annexe, dans un premier temps, on établit la relation liant les points de contrôle centraux à ceux du bord pour le triangle de degré 4. Ensuite, en remarque, on regarde, en Bézier, ce que contient l'espace réduit. Pour finir, on vérifie explicitement que les coefficients trouvés liant les P_{ijk} redonnent bien, à partir des Bernstein "réduits" les fonctions de forme trouvées auparavant.

Expression des points de contrôle centraux. On sait que les A_{ijk} centraux vérifient les relations

$$A_{211} = \sum_{ijk} \alpha_{ijk} A_{ijk} \,, \quad A_{121} = \sum_{ijk} \beta_{ijk} A_{ijk} \,, \quad A_{112} = \sum_{ijk} \gamma_{ijk} A_{ijk} \,,$$

ensuite on évalue A_{211} soit le point du triplet $(u, v, w) = (\frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ en écrivant $A_{211} = \sum_{ijk} B^4_{ijk}(u, v, w) P_{ijk}$, pour ce triplet. Il vient :

$$256\, A_{211} = \{16P_{400} + P_{040} + P_{004}$$

$$+32P_{310} + 24P_{220} + 8P_{130} + 32P_{301} + 24P_{202} + 8P_{103} + 4P_{031} + 6P_{022} + 4P_{013}$$

$$48P_{211} + 24P_{121} + 24P_{112}\} \;,$$

$$\text{de même :} \quad 256\, A_{121} = \{P_{400} + 16P_{040} + P_{004}$$

$$+8P_{310} + 24P_{220} + 32P_{130} + 4P_{301} + 6P_{202} + 4P_{103} + 32P_{031} + 24P_{022} + 8P_{013}$$

$$24P_{211} + 48P_{121} + 24P_{112}\} \;,$$

$$\text{et :} \quad 256\, A_{112} = \{P_{400} + P_{040} + 16P_{004}$$

$$+4P_{310} + 6P_{220} + 4P_{130} + 8P_{301} + 24P_{202} + 32P_{103} + 8P_{031} + 24P_{022} + 32P_{013}$$

$$24P_{211} + 24P_{121} + 48P_{112}\} \;.$$

On en déduit le système :

$$\{48P_{211} + 24P_{121} + 24P_{112}\} \;=\; 256A_{211} \;-\; \{16P_{400} + P_{040} + P_{004}$$

$$+32P_{310} + 24P_{220} + 8P_{130} + 32P_{301} + 24P_{202} + 8P_{103} + 4P_{031} + 6P_{022} + 4P_{013}\} \;,$$

$$\{24P_{211} + 48P_{121} + 24P_{112}\} \;=\; 256A_{121} \;-\; \{P_{400} + 16P_{040} + P_{004}$$

$$+8P_{310} + 24P_{220} + 32P_{130} + 4P_{301} + 6P_{202} + 4P_{103} + 32P_{031} + 24P_{022} + 8P_{013}\} \;,$$

$$\{24P_{211} + 24P_{121} + 48P_{112}\} \;=\; 256A_{112} \;-\; \{P_{400} + P_{040} + 16P_{004}$$

$$+4P_{310} + 6P_{220} + 4P_{130} + 8P_{301} + 24P_{202} + 32P_{103} + 8P_{031} + 24P_{022} + 32P_{013}\} \;.$$

La matrice du système (au facteur 24) est :

```
 2 1 1                                     3/4 -1/4 -1/4
 1 2 1    qui s'inverse a la main, soit   -1/4  3/4 -1/4
 1 1 2                                    -1/4 -1/4  3/4
```

$$\text{Par suite :}\quad 96P_{211} \;=\; 3\times 256A_{211} \;-\; 3\,\{16P_{400}+P_{040}+P_{004}$$
$$+32P_{310}+24P_{220}+8P_{130}+32P_{301}+24P_{202}+8P_{103}+4P_{031}+6P_{022}+4P_{013}\}$$
$$-\,256A_{121} \;+\; \{P_{400}+16P_{040}+P_{004}$$
$$+8P_{310}+24P_{220}+32P_{130}+4P_{301}+6P_{202}+4P_{103}+32P_{031}+24P_{022}+8P_{013}\}$$
$$-\,256A_{112} \;+\; \{P_{400}+P_{040}+16P_{004}$$
$$+4P_{310}+6P_{220}+4P_{130}+8P_{301}+24P_{202}+32P_{103}+8P_{031}+24P_{022}+32P_{013}\}\;.$$
$$\text{Donc :}\quad 96P_{211} \;=\; 3\times 256A_{211}-256A_{121}-256A_{112}$$
$$-\,3\,\{16P_{400}+P_{040}+P_{004}$$
$$+32P_{310}+24P_{220}+8P_{130}+32P_{301}+24P_{202}+8P_{103}+4P_{031}+6P_{022}+4P_{013}\}$$
$$+\;\{P_{400}+16P_{040}+P_{004}$$
$$+8P_{310}+24P_{220}+32P_{130}+4P_{301}+6P_{202}+4P_{103}+32P_{031}+24P_{022}+8P_{013}\}$$
$$+\;\{P_{400}+P_{040}+16P_{004}$$
$$+4P_{310}+6P_{220}+4P_{130}+8P_{301}+24P_{202}+32P_{103}+8P_{031}+24P_{022}+32P_{013}\}\;,$$

soit simplement : $96P_{211} \;=\; 3\times 256A_{211}-256A_{121}-256A_{112}\;-\;46P_{400}+14P_{040}+14P_{004}$

$$-84P_{310}-42P_{220}+12P_{130}-84P_{301}-42P_{202}+12P_{103}+28P_{031}+30P_{022}+28P_{013}\,.$$

Il suffit (!) alors de remplacer A_{211}, A_{121} et A_{112} par leurs expressions en fonctions des A_{ijk} puis de remplacer ces A_{ijk} en fonction des P_{ijk} avant de regrouper. On redonne le tableau des coefficients

i	ijk	α_{ijk}	β_{ijk}	γ_{ijk}
1	400	$-6/30$	$-2/30$	$-2/30$
2	040	$-2/30$	$-6/30$	$-2/30$
3	004	$-2/30$	$-2/30$	$-6/30$
4	310	$7/30$	$-3/30$	$1/30$
7	031	$1/30$	$7/30$	$-3/30$
10	103	$-3/30$	$1/30$	$7/30$
6	130	$-3/30$	$7/30$	$1/30$
9	013	$1/30$	$-3/30$	$7/30$
12	301	$7/30$	$1/30$	$-3/30$
5	220	$12/30$	$12/30$	$6/30$
8	022	$6/30$	$12/30$	$12/30$
11	202	$12/30$	$6/30$	$12/30$

et on explicite les A_{ijk} centraux. Soit

$$A_{211}=-6/30P_{400}-2/30P_{040}-2/30P_{004}$$
$$+7/30A_{310}+12/30A_{220}-3/30A_{130}+7/30A_{301}+12/30A_{202}-3/30A_{103}+1/30A_{031}+6/30A_{022}+1/30A_{013}\,,$$
$$A_{121}=-2/30P_{400}-6/30P_{040}-2/30P_{004}$$
$$-3/30A_{310}+12/30A_{220}+7/30A_{130}+1/30A_{301}+6/30A_{202}+1/30A_{103}+7/30A_{031}+12/30A_{022}-3/30A_{013}\,,$$
$$A_{112}=-2/30P_{400}-2/30P_{040}-6/30P_{004}$$
$$+1/30A_{310}+6/30A_{220}+1/30A_{130}-3/30A_{301}+12/30A_{202}+7/30A_{103}-3/30A_{031}+12/30A_{022}+7/30A_{013}\,.$$

On exprime maintenant, première arête, les A_{ijk} par rapport aux P_{ijk}, soit les 3 relations :

$$A_{310} = \frac{81P_{400} + 108P_{310} + 54P_{220} + 12P_{130} + P_{040}}{256},$$

$$A_{220} = \frac{P_{400} + 4P_{310} + 6P_{220} + 4P_{130} + P_{040}}{16},$$

$$A_{130} = \frac{P_{400} + 12P_{310} + 54P_{220} + 108P_{130} + 81P_{040}}{256}.$$

Sur P_{400}, il vient (à diviser par 96) :

```
400-direct      400    310+301           220+202        130+103
-46 + 3*256 * (-6/30 + 14/30 * 81/256 + 24/30 * 1/16 - 6/30 * 1/256  )
    -   256 * (-2/30 -  2/30 * 81/256 + 18/30 * 1/16 + 8/30 * 1/256  )
    -   256 * (-2/30 -  2/30 * 81/256 + 18/30 * 1/16 + 8/30 * 1/256  )
soit
- 232/10
donc
-232/96 * 1/10 = -29/120
```

Sur P_{310}, c'est plus court, il vient

```
-84 + 3*256 * (   7/30 * 108/256 + 12/30 * 4/16 - 3/30 * 12/256  )
    -   256 * (  -3/30 * 108/256 + 12/30 * 4/16 + 7/30 * 12/256  )
    -   256 * (   1/30 * 108/256 +  6/30 * 4/16 + 1/30 * 12/256  )
soit
304/10
donc
304/96 * 1/10 = 38/120
```

Sur P_{220}, il vient

```
-42 + 3*256 * (  7/30 * 54/256 + 12/30 * 6/16 - 3/30 * 54/256  )
    -   256 * ( -3/30 * 54/256 + 12/30 * 6/16 + 7/30 * 54/256  )
    -   256 * (  1/30 * 54/256 +  6/30 * 6/16 + 1/30 * 54/256  )
soit 264/10
donc 264/96 * 1/10 = 33/120
```

Sur P_{130}, il vient

```
12 + 3*256  * (  7/30 * 12/256 + 12/30 * 4/16 - 3/30 * 108/256  )
    -   256 * ( -3/30 * 12/256 + 12/30 * 4/16 + 7/30 * 108/256  )
    -   256 * (  1/30 * 12/256 +  6/30 * 4/16 + 1/30 * 108/256  )
soit -16/10
donc -16/96 *1/10 = -2/120
```

Sur P_{031}, il vient

```
28  + 3*256 * (  1/30 * 12/256 +  6/30 * 4/16  + 1/30 * 108/256  )
    -   256 * (  7/30 * 12/256 + 12/30 * 4/16  - 3/30 * 108/256  )
    -   256 * ( -3/30 * 12/256 + 12/30 * 4/16  + 7/30 * 108/256  )
soit 112/10
donc 112/96 * 1/10 = 14/120
```

Sur P_{022}, il vient

```
30  + 3*256 * (  1/30 * 54/256 + 6/30 * 6/16  + 1/30 * 54/256  )
    -   256 * (  7/30 * 54/256 + 12/30 * 6/16 - 3/30 * 54/256  )
    -   256 * ( -3/30 * 54/256 + 12/30 * 6/16 + 7/30 * 54/256  )
soit 72/10
donc 72/96 * 1/10 = 9/120
```

Sur P_{040}, il vient

```
14  + 3*256 * ( -2/30 + 7/30 * 1/256 + 12/30 * 1/16 - 3/30 * 81/256  )
    + 3*256 * (       + 1/30 * 81/256 + 6/30 * 1/16 + 1/30 * 1/256  )
    -   256 * ( -6/30 - 3/30 * 1/256 + 12/30 * 1/16 + 7/30 * 81/256 )
    -   256 * (         7/30 * 81/256 + 12/30 * 1/16 - 3/30 * 1/256 )
    -   256 * ( -2/30 + 1/30 * 1/256 + 6/30 * 1/16   + 1/30 * 81/256 )
    -   256 * (       - 3/30 * 81/256 + 12/30 * 1/16 + 7/30 * 1/256 )
soit -104/10
donc -104/96 * 1/10 = - 13/120
```

soit le diagramme de poids (et les 2 autres par symétries) :

```
                  -13/120

             -2/120       14/120

           33/120              9/120

       38/120   [P211]              14/120

    -29/120   38/120   33/120  -2/120   -13/120
```

et les poids somment à 1, magnifique. Pour mémoire, pour A_{211}, on avait (remis en $1/120$) :

```
                 -8/120

             -12/120     4/120

           48/120              24/120

         28/120    [A211]            4/120

    -24/120   28/120  48/120  -12/120  -8/120
```

La conclusion est que la relation liant les nœuds internes aux nœuds bord est différente de celle liant les points de contrôle internes aux points de contrôle bord. Seul au degré 3, il y a identité.

Remarque en aparté. Le carreau s'écrit, avec $n = 4$, comme :

$$\sum_{i+j+k=n} B^n_{ijk}(u, v, w) P_{ijk}\,,$$

et les fonctions réduites sont définies par :

$$\begin{aligned}
B'_{400} &= B_{400} - \frac{29}{120} B_{211} - \frac{13}{120} B_{121} - \frac{13}{120} B_{112} \\
B'_{310} &= B_{310} + \frac{38}{120} B_{211} - \frac{2}{120} B_{121} + \frac{14}{120} B_{112} \\
B'_{220} &= B_{220} + \frac{33}{120} B_{211} + \frac{33}{120} B_{121} + \frac{9}{120} B_{112} \\
B'_{130} &= B_{130} - \frac{2}{120} B_{211} + \frac{38}{120} B_{121} + \frac{14}{120} B_{112} \\
B'_{301} &= B_{301} + \frac{38}{120} B_{211} + \frac{14}{120} B_{121} - \frac{2}{120} B_{112} \\
B'_{202} &= B_{202} + \frac{33}{120} B_{211} + \frac{9}{120} B_{121} + \frac{33}{120} B_{112} \\
B'_{103} &= B_{103} - \frac{2}{120} B_{211} + \frac{14}{120} B_{121} + \frac{38}{120} B_{112} \\
B'_{004} &= B_{004} - \frac{13}{120} B_{211} - \frac{13}{120} B_{121} - \frac{29}{120} B_{112} \\
B'_{013} &= B_{013} + \frac{14}{120} B_{211} - \frac{2}{120} B_{121} + \frac{38}{120} B_{112} \\
B'_{022} &= B_{022} + \frac{9}{120} B_{211} + \frac{33}{120} B_{121} + \frac{33}{120} B_{112} \\
B'_{031} &= B_{031} + \frac{14}{120} B_{211} + \frac{38}{120} B_{121} - \frac{2}{120} B_{112} \\
B'_{040} &= B_{040} - \frac{13}{120} B_{211} - \frac{29}{120} B_{121} - \frac{13}{120} B_{112}\,.
\end{aligned}$$

À partir de ces expressions, on regarde les monômes contenus dans l'espace réduit. Comme $\sum_{i+j+k=n} B^n_{ijk}(u, v, w) = 1$ et que les coefficients somment à 1, 1 est dans l'espace.

$$u = u(u+v+w)^3 = u^4 + uv^3 + uw^3 + 3u^3v + 3u^3w + 3u^2v^2 + 3uv^2w + 3u^2w^2 + 3uvw^2 + 6u^2vw$$

$$= B_{400} + \frac{1}{4} B_{130} + \frac{1}{4} B_{103} + \frac{3}{4} B_{310} + \frac{3}{4} B_{301} + \frac{3}{6} B_{220} + \frac{3}{6} B_{202} + \frac{6}{12} B_{211} + \frac{3}{12} B_{121} + \frac{3}{12} B_{112}$$

en B_{211}, il vient (au facteur 1/120 près) :

$$29 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - \frac{3*38}{4} - \frac{3*38}{4} - \frac{3*33}{6} - \frac{3*33}{6} + 120 * \frac{6}{12} = 0\,,$$

etc., et, comme attendu, u est dans l'espace donc v et w également.

Pour confirmer cet état, on regarde u^2. On a :

$$u^2 = u^2(u+v+w)^2 = u^4 + u^2v^2 + u^2w^2 + 2u^3v + 2u^3w + 2u^2vw$$

$$= B_{400} + \frac{1}{6} B_{220} + \frac{1}{6} B_{202} + \frac{2}{4} B_{310} + \frac{2}{4} B_{301} + \frac{2}{12} B_{211}$$

en B_{211}, il vient (au facteur 1/120 près) :

$$29 - \frac{33}{6} - \frac{33}{6} - \frac{2*38}{4} - \frac{2*38}{4} + 120 * \frac{2}{12} = 0\,,$$

donc, u^2 est dans l'espace, tout comme v^2 et w^2.

On regarde également uv.

$$uv = uv(u+v+w)^2 = u^3v + uv^3 + uvw^2 + 2u^2v^2 + 2u^2vw + 2uv^2w$$
$$= \frac{1}{4}B_{310} + \frac{1}{4}B_{130} + \frac{1}{12}B_{112} + \frac{2}{6}B_{220} + \frac{2}{12}B_{211} + \frac{2}{12}B_{121}$$

en B_{211}, il vient :

$$-\frac{38}{4} + \frac{2}{4} - \frac{2*33}{6} + 120 * \frac{2}{12} = 0\,,$$

donc, uv est dans l'espace, tout comme uw et vw.

Pour finir, on regarde uvw.

$$uvw = uvw(u+v+w) = u^2vw + uv^2w + uvw^2 = \frac{1}{12}(B_{211} + B_{121} + B_{112})\,,$$

et il est impossible de se débarasser de ces fonctions centrales.

En conclusion, l'espace polynomial de l'élément réduit, du point de vue Bézier, contient l'espace engendré par les B^2 (et pas plus, c'est d'ailleurs ce que nous avons montré en raisonnant directement sur les Bézier).

Vérification pour q_{310}. À titre de vérification, on montre que, par combinaisons, les Bézier redonnent les fonctions q trouvées via les relations de Serendipité. On écrit :

$$\sigma(u,v,w) = \sum_{ijk} B^4_{ijk}(u,v,w)P_{ijk}$$

pour tous les indices et

$$\sigma(u,v,w) = \sum_{ijk} B'^4_{ijk}(u,v,w)P_{ijk}$$

uniquement pour les indices bord. On cherche ce qui vient au regard de A_{310}, il y a la contribution de P_{310} sur A_{310} soit $\frac{144}{36}$, la contribution de P_{220} sur A_{310} soit $-\frac{128}{36}$ et celle de P_{130} sur A_{310} soit $\frac{48}{36}$.

Par ailleurs, on exprime les B' intervenant ici en fonction des B :

$$B'_{310} = B_{310} + \frac{38}{120}B_{211} - \frac{2}{120}B_{121} + \frac{14}{120}B_{112}\,,$$
$$B'_{220} = B_{220} + \frac{33}{120}B_{211} + \frac{33}{120}B_{121} + \frac{9}{120}B_{112}\,,$$
$$B'_{130} = B_{130} - \frac{2}{120}B_{211} + \frac{38}{120}B_{121} + \frac{14}{120}B_{112}\,.$$

Donc :

$$\frac{144}{36}B_{310} - \frac{128}{36}B_{220} + \frac{48}{36}B_{130}$$
$$+(\frac{144}{36}\frac{38}{120} - \frac{128}{36}\frac{33}{120} - \frac{48}{36}\frac{2}{120})B_{211} + (-\frac{144}{36}\frac{2}{120} - \frac{128}{36}\frac{33}{120} + \frac{48}{36}\frac{38}{120})B_{121} + (\frac{144}{36}\frac{14}{120} - \frac{128}{36}\frac{9}{120} + \frac{48}{36}\frac{14}{120})B_{112}\,,$$

soit (au facteur 1/36) :

$$144B_{310} - 128B_{220} + 48B_{130}$$
$$+(144\frac{38}{120} - 128\frac{33}{120} - 48\frac{2}{120})B_{211} + (-144\frac{2}{120} - 128\frac{33}{120} + 48\frac{38}{120})B_{121} + (144\frac{14}{120} - 128\frac{9}{120} + 48\frac{14}{120})B_{112}\,,$$

soit

$$144B_{310} - 128B_{220} + 48B_{130}$$
$$+(12\frac{38}{10} - 32\frac{11}{10} - 4\frac{2}{10})B_{211} + (-12\frac{2}{10} - 32\frac{11}{10} + 4\frac{38}{10})B_{121} + (12\frac{14}{10} - 32\frac{3}{10} + 4\frac{14}{10})B_{112}\,,$$

soit

$$144B_{310} - 128B_{220} + 48B_{130}$$

$$+(12\frac{19}{5} - 16\frac{11}{5} - 4\frac{1}{5})B_{211} + (-12\frac{1}{5} - 16\frac{11}{5} + 4\frac{19}{5})B_{121} + (12\frac{7}{5} - 16\frac{3}{5} + 4\frac{7}{5})B_{112}\,,$$

soit

$$144B_{310} - 128B_{220} + 48B_{130} + \frac{48}{5}B_{211} - \frac{112}{5}B_{121} + \frac{64}{5}B_{112}\,,$$

donc :

$$144 * 4u^3v - 128 * 6u^2v^2 + 48 * 4uv^3 + \frac{48}{5} * 12u^2vw - \frac{112}{5} * 12uv^2w + \frac{64}{5} * 12uvw^2\,,$$

et ceci (`Maple`) redonne bien $q_{310}()$.

Vérification pour q_{220}. On suit exactement la même méthode.

Contribution de P_{310} sur A_{220} : $-\frac{108}{36}$.
Contribution de P_{220} sur A_{220} : $\frac{240}{36}$.
Contribution de P_{130} sur A_{220} : $-\frac{108}{36}$.
Par ailleurs, on sait que :

$$B'_{310} = B_{310} + \frac{38}{120}B_{211} - \frac{2}{120}B_{121} + \frac{14}{120}B_{112}\,,$$

$$B'_{220} = B_{220} + \frac{33}{120}B_{211} + \frac{33}{120}B_{121} + \frac{9}{120}B_{112}\,,$$

$$B'_{130} = B_{130} - \frac{2}{120}B_{211} + \frac{38}{120}B_{121} + \frac{14}{120}B_{112}\,.$$

Donc :

$$-\frac{108}{36}B_{310} + \frac{240}{36}B_{220} - \frac{108}{36}B_{130}$$

$$+(-\frac{108}{36}\frac{38}{120}+\frac{240}{36}\frac{33}{120}+\frac{108}{36}\frac{2}{120})B_{211}+(\frac{108}{36}\frac{2}{120}+\frac{240}{36}\frac{33}{120}-\frac{108}{36}\frac{38}{120})B_{121}+(-\frac{108}{36}\frac{14}{120}+\frac{240}{36}\frac{9}{120}-\frac{108}{36}\frac{14}{120})B_{112}\,,$$

soit (au facteur 1/36) :

$$-108B_{310} + 240B_{220} - 108B_{130}$$

$$+(-108\frac{38}{120}+240\frac{33}{120}+108\frac{2}{120})B_{211}+(108\frac{2}{120}+240\frac{33}{120}-108\frac{38}{120})B_{121}+(-108\frac{14}{120}+240\frac{9}{120}-108\frac{14}{120})B_{112}\,,$$

soit

$$-108B_{310} + 240B_{220} - 108B_{130}$$

$$+(-9\frac{38}{10} + 20\frac{33}{10} + 9\frac{2}{10})B_{211} + (9\frac{2}{10} + 20\frac{33}{10} - 9\frac{38}{10})B_{121} + (-9\frac{14}{10} + 20\frac{9}{10} - 9\frac{14}{10})B_{112}\,,$$

soit

$$-108B_{310} + 240B_{220} - 108B_{130}$$

$$+(-9\frac{19}{5} + 10\frac{33}{5} + 9\frac{1}{5})B_{211} + (9\frac{1}{5} + 10\frac{33}{5} - 9\frac{19}{5})B_{121} + (-9\frac{7}{5} + 10\frac{9}{5} - 9\frac{7}{5})B_{112}\,,$$

soit

$$-108B_{310} + 240B_{220} - 108B_{130} + \frac{168}{5}B_{211} + \frac{168}{5}B_{121} - \frac{36}{5}B_{112}\,,$$

donc :

$$-108 * 4u^3v + 240 * 6u^2v^2 - 108 * 4uv^3 + \frac{168}{5} * 12u^2vw + \frac{168}{5} * 12uv^2w - \frac{36}{5} * 12uvw^2\,,$$

et ceci (`Maple`) redonne bien $q_{220}()$.

RESEARCH CENTRE
PARIS – ROCQUENCOURT

Domaine de Voluceau, - Rocquencourt
B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399