# Simulation par éléments discrets de fibres flexibles avec frottement de Coulomb

Gilles Daviet

Inria – Laboratoire Jean Kuntzmann

Avec Florence Bertails-Descoubes



Rencontres du GDR 3MF — Nantes 12 juin 2014



#### **MOTIVATION: CHEVELURE NUMÉRIQUES**

#### Deux secteurs principaux

Loisir numérique (cinéma d'animation, effets spéciaux)



Final Fantasy (2000) The Incredibles (2005)

Avatar (2009)

Tangled (2010)

Brave (2012)

#### **MOTIVATION: CHEVELURE NUMÉRIQUES**

#### Deux secteurs principaux

Loisir numérique (cinéma d'animation, effets spéciaux)



Avatar (2009)

Tangled (2010)

Prototypage virtuel en cosmétologie

Final Fantasy (2000) The Incredibles (2005)



©L'Oréal

Brave (2012)

#### EXIGENCES SUR LE MODÈLE





Simulation dynamique (et non quasi-statique)

#### EXIGENCES SUR LE MODÈLE





- Simulation dynamique (et non quasi-statique)
- ► Fibres longues mais inextensibles
- ► Flexibles (en courbure et en torsion)
- ► Frisure naturelle

#### EXIGENCES SUR LE MODÈLE





- Simulation dynamique (et non quasi-statique)
- ► Fibres longues mais inextensibles
- ► Flexibles (en courbure et en torsion)
- ► Frisure naturelle
- Frottement statique ( présence d'un seuil )

### Plan de l'exposé

TIGES MÉCANIQUES

MODÈLE DE CONTACT

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

RÉSULTATS

### Plan de l'exposé

TIGES MÉCANIQUES

MODÈLE DE CONTACT

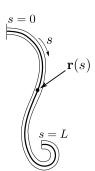
RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

**RÉSULTATS** 

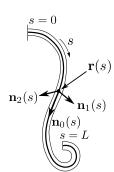
- Ligne moyenne  $\mathbf{r}(s)$
- ► Repère matériel  $\{\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$



- Ligne moyenne  $\mathbf{r}(s)$
- ► Repère matériel  $\{\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$
- ▶ Hypothèses de Kirchhoff :
  - Tige sans cisaillement
  - ▶ Tige inextensible
  - ► Inertie en torsion négligeable

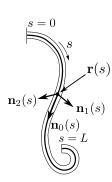


- Ligne moyenne  $\mathbf{r}(s)$
- ► Repère matériel  $\{\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$
- Hypothèses de Kirchhoff :
  - Tige sans cisaillement
  - ▶ Tige inextensible
  - Inertie en torsion négligeable
- Degrés de liberté :
  - torsion  $\tau(s)$
  - courbures  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$



- ▶ Ligne moyenne  $\mathbf{r}(s)$
- ► Repère matériel  $\{\mathbf{t}(s) = \mathbf{n}_0(s), \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\}$
- ▶ Hypothèses de Kirchhoff :
  - ► Tige sans cisaillement
  - ▶ Tige inextensible
  - Inertie en torsion négligeable
- Degrés de liberté :
  - ▶ torsion  $\tau(s)$
  - courbures  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$
- Grands déplacements mais petites déformations :
  - → Loi de comportement élastique

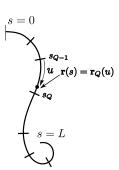
$$\mathbf{M}(s) = K\left(\kappa(s) - \kappa^{0}(s)\right)$$



#### Une discrétisation : les Super-Hélices

BERTAILS et al. 2006

▶ Découpage de la tige en N éléments  $\tau(s)$ ,  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$  constantes p. morceaux

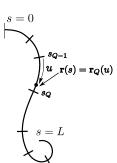


#### Une discrétisation : les Super-Hélices

BERTAILS et al. 2006

- ▶ Découpage de la tige en N éléments  $\tau(s)$ ,  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$  constantes p. morceaux
- Intégration en temps

$$M\mathbf{v} + f = 0, \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{t+dt}$$



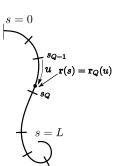
#### Une discrétisation : les Super-Hélices

BERTAILS et al. 2006

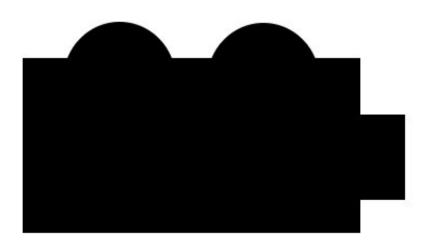
- ▶ Découpage de la tige en N éléments  $\tau(s)$ ,  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$  constantes p. morceaux
- Intégration en temps

$$M\mathbf{v} + f = 0, \mathbf{v} = \dot{\mathbf{\kappa}}_{t+dt}$$

Extension :  $\kappa$  linéaire p. morceaux Super-Clothoides (Casati *et al.* 2013)



# UNE DISCRÉTISATION : LES SUPER-HÉLICES ILLUSTRATION



### Plan de l'exposé

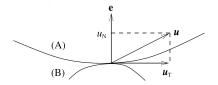
TIGES MÉCANIQUES

MODÈLE DE CONTACT

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

RÉSULTATS

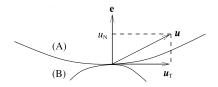
#### **CONTACT PONCTUEL**



#### Hypothèses

- 1. Le contact concerne toujours au plus deux objets, *A* et *B*
- 2. Surface de contact assez lisse pour définir une normale e

#### **CONTACT PONCTUEL**



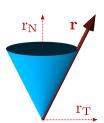
#### Hypothèses

- 1. Le contact concerne toujours au plus deux objets, *A* et *B*
- 2. Surface de contact assez lisse pour définir une normale e
- → On peut définir un repère local et
  - ▶ la vitesse relative  $\mathbf{u} A/B$
  - ▶ la force de contact  $\mathbf{r} B \rightarrow A$



Soit  $\mu \ge 0$  le coefficient de frottement. On définit le cône du second-ordre  $K_{\mu\nu}$ 

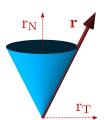
$$K_{\mu} = \{ \|\mathbf{r}_{\mathtt{T}}\| \leq \mu \mathbf{r}_{\mathtt{N}} \} \subset \mathbb{R}^3$$



Soit  $\mu > 0$  le coefficient de frottement. On définit le cône du second-ordre  $K_{\mu\nu}$ 

TIGES MÉCANIQUES

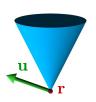
$$K_{\mu} = \{ \|\mathbf{r}_{\mathrm{T}}\| \leq \mu r_{\mathrm{N}} \} \subset \mathbb{R}^3$$



$$(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \in C(\mathbf{e}, \mu) \iff$$

Soit  $\mu \ge 0$  le coefficient de frottement. On définit le cône du second-ordre  $K_{\mu}$ ,

$$K_{\mu} = \{ \|\mathbf{r}_{\mathsf{T}}\| \le \mu \mathbf{r}_{\mathsf{N}} \} \subset \mathbb{R}^3$$



$$(\mathbf{u},\mathbf{r})\in C(\mathbf{e},\mu)\iff \left\{ egin{array}{ll} \mathrm{soit}\, \mathrm{d\'ecollage} & \mathbf{r}=\mathbf{0}\, \mathrm{et}\, u_{\mathrm{N}}>0 \end{array} 
ight.$$

Soit  $\mu \ge 0$  le coefficient de frottement. On définit le cône du second-ordre  $K_{\mu\nu}$ 

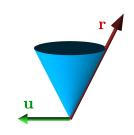
$$K_{\mu} = \{ \|\mathbf{r}_{\mathtt{T}}\| \leq \mu r_{\mathtt{N}} \} \subset \mathbb{R}^3$$



$$(\mathbf{u}, \mathbf{r}) \in C(\mathbf{e}, \mu) \iff \left\{ egin{array}{ll} \mathrm{soit} \ \mathrm{d\'ecollage} & \mathbf{r} = \mathbf{0} \ \mathrm{et} \ u_\mathrm{N} > 0 \\ \mathrm{soit} \ \mathrm{adh\'erence} & \mathbf{r} \in K_\mu \ \mathrm{et} \ \mathbf{u} = 0 \end{array} 
ight.$$

Soit  $\mu \ge 0$  le coefficient de frottement. On définit le cône du second-ordre  $K_{\mu\nu}$ 

$$K_{\mu} = \{ \|\mathbf{r}_{\mathrm{T}}\| \leq \mu \mathbf{r}_{\mathrm{N}} \} \subset \mathbb{R}^3$$



$$(\mathbf{u},\mathbf{r}) \in C(\mathbf{e},\mu) \iff \begin{cases} \text{ soit d\'ecollage} & \mathbf{r} = \mathbf{0} \text{ et } u_{\text{\tiny N}} > 0 \\ \text{ soit adh\'erence} & \mathbf{r} \in K_{\mu} \text{ et } \mathbf{u} = 0 \\ \text{ soit glissement} & \mathbf{r} \in \partial K_{\mu} \setminus 0, u_{\text{\tiny N}} = 0 \\ \text{ et } \exists \alpha \geq 0, \ \mathbf{u}_{\text{\tiny T}} = -\alpha \ \mathbf{r}_{\text{\tiny T}} \end{cases}$$

#### APPROCHE EXPLICITE

Ajout d'une force de pénalité  $\mathbf{r}=r_{\scriptscriptstyle \mathrm{N}}\mathbf{e}+\mathbf{r}_{\scriptscriptstyle \mathrm{T}}$ 

#### APPROCHE EXPLICITE

Ajout d'une force de pénalité  $\mathbf{r} = r_{\text{N}}\mathbf{e} + \mathbf{r}_{\text{T}}$ 

- $r_{\rm N} := \eta(d) + \nu {\bf v}_{\rm N}^{k-1}$ , d distance de pénétration
- $\mathbf{r}_{\mathrm{T}} := -\mu r_n \|\mathbf{v}_{\mathrm{T}}^{k-1}\|$

#### APPROCHE EXPLICITE

Ajout d'une force de pénalité  $\mathbf{r} = r_{\text{N}}\mathbf{e} + \mathbf{r}_{\text{T}}$ 

- $ho r_{\rm N} := \eta(d) + \nu {f v}_{\rm N}^{k-1}$ , d distance de pénétration
- $\mathbf{r}_{\mathrm{T}} := -\mu r_n \|\mathbf{v}_{\mathrm{T}}^{k-1}\|$
- Explicite, peu stable
- $ightharpoonup \mathbf{r}_{\scriptscriptstyle T} > 0 \implies \mathbf{u}_{\scriptscriptstyle T} > 0$ , pas de seuil

#### FORMULATION PAR CONTRAINTES

Système global (sans interactions) :

$$\mathbf{M}\,\mathbf{v}+\mathbf{f}=0$$

$$\rightarrow$$
 inconnues :  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\kappa}_{t+dt}$  et  $\mathbf{v}$ 

#### FORMULATION PAR CONTRAINTES

Système global (sans interactions) :

$$\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{f} = 0$$

- $\rightarrow$  inconnues :  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\kappa}_{t+dt}$  et  $\mathbf{v}$
- Système global (avec contact frottant) :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \mathbf{v} + \mathbf{f} &= \mathbf{H}^{\top} \mathbf{r} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{H} \mathbf{v} + \mathbf{w} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{r}) & \text{v\'erifie la loi de Coulomb} \end{cases}$$
 (1)

 $\rightarrow$  Inconnues : q, v, u et r

#### FORMULATION PAR CONTRAINTES

Système global (sans interactions) :

$$\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{f} = 0$$

- $\rightarrow$  inconnues :  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\kappa}_{t+dt}$  et  $\mathbf{v}$
- Système global (avec contact frottant) :

$$\begin{cases}
\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{f} &= \mathbf{H}^{\top}\mathbf{r} \\
\mathbf{u} &= \mathbf{H}\mathbf{v} + \mathbf{w} \\
(\mathbf{u}, \mathbf{r}) & \text{v\'erifie la loi de Coulomb}
\end{cases}$$
(1)

- $\rightarrow$  Inconnues : q, v, u et r
- → Non-lisse, non linéaire, pas de garantie d'existence

### Plan de l'exposé

TIGES MÉCANIQUES

MODÈLE DE CONTACT

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

RÉSULTATS

# PROBLÈME À *n* CONTACTS MÉTHODE CHOISIE

#### Méthode de Gauss-Seidel projeté

- Très stable
- ► Convergence  $O(\log k)$
- ... mais erreur suffisamment faible très rapidement

# PROBLÈME À *n* CONTACTS MÉTHODE CHOISIE

#### Méthode de Gauss-Seidel projeté

- ► Très stable
- ► Convergence  $O(\log k)$
- ... mais erreur suffisamment faible très rapidement

#### Idée

► Tant que la convergence n'est pas atteinte



## Problème à n contacts

#### Méthode de Gauss-Seidel projeté

- ► Très stable
- ► Convergence  $O(\log k)$
- ... mais erreur suffisamment faible très rapidement

#### Idée

MÉTHODE CHOISIE

- ► Tant que la convergence n'est pas atteinte
  - Pour chaque contact

## Problème à n contacts

#### Méthode de Gauss-Seidel projeté

- ► Très stable
- ► Convergence  $O(\log k)$
- ... mais erreur suffisamment faible très rapidement

#### Idée

MÉTHODE CHOISIE

- ► Tant que la convergence n'est pas atteinte
  - Pour chaque contact
    - Résoudre le contact de manière isolée

## Problème à n contacts

#### Méthode de Gauss-Seidel projeté

- ► Très stable
- ► Convergence  $O(\log k)$
- ... mais erreur suffisamment faible très rapidement

#### Idée

MÉTHODE CHOISIE

- ► Tant que la convergence n'est pas atteinte
  - Pour chaque contact
    - Résoudre le contact de manière isolée

#### REFORMULATION

Rappel de la formulation primale en  $(\mathbf{v}, \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{r})$ :

$$\left\{ \begin{array}{lll} M\, v + f &=& H^\top r \\ u &=& H\, v + w \\ (u,r) & \text{v\'erifie la loi de Coulomb} \end{array} \right.$$

#### REFORMULATION

Rappel de la formulation primale en  $(\mathbf{v}, \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{r})$ :

$$\left\{ \begin{array}{lll} M\, v + f & = & H^\top r \\ u & = & H\, v + w \\ (u,r) & & \text{v\'erifie la loi de Coulomb} \end{array} \right.$$

Formulation duale compacte en  $(\mathbf{u}, \mathbf{r})$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u & = & W\,r + b \\ (u,r) & & \text{v\'erifie la loi de Coulomb} \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{W} = \mathbf{H} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}^{\top} \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$  est l'opérateur de Delassus

ILLUSTRATION POUR 4 CONTACTS

# $\mathbf{u} = \mathbf{b} + egin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} & \mathbf{W}_{14} \ \mathbf{W}_{12} & \mathbf{W}_{22} & \mathbf{W}_{23} & \mathbf{W}_{24} \ \mathbf{W}_{23} & \mathbf{W}_{33} & \mathbf{v}_{24} \ \mathbf{W}_{14} & \mathbf{W}_{24} & \mathbf{W}_{44} \end{pmatrix} egin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3 \ \mathbf{r}_4 \end{pmatrix}$

- Découper la matrice W en blocs 3 x 3
   → Chaque ligne de blocs correspond à un unique contact
- ▶ Puis pour  $k := 1 \dots N_{\text{itermax}}$  itérer sur ces lignes :

#### ILLUSTRATION POUR 4 CONTACTS

$$egin{aligned} \mathbf{u}_{1}^{k+1} &= \mathbf{b}_{1} + \overbrace{egin{array}{c|ccccc} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} & \mathbf{W}_{14} \\ \hline \mathbf{W}_{12} & \mathbf{W}_{22} & \mathbf{W}_{23} & \mathbf{W}_{24} \\ \hline \mathbf{W}_{23} & \mathbf{W}_{33} & \mathbf{r}_{24} \\ \hline \mathbf{W}_{14} & \mathbf{W}_{24} & \mathbf{W}_{44} \\ \hline \end{aligned}} egin{array}{c|cccc} \mathbf{r}_{1}^{k+1} & \mathbf{r}_{2}^{k} \\ \hline \mathbf{r}_{3}^{k} & \mathbf{r}_{4}^{k} \\ \hline \end{aligned}$$

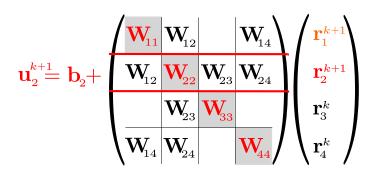
→ Résoudre le problème à un contact

$$(\mathbf{u}_1^{k+1}, \mathbf{r}_1^{k+1}) \in \mathcal{C}(\mu)$$

avec  $\mathbf{r}_{2}^{k}$ ,  $\mathbf{r}_{3}^{k}$ ,  $\mathbf{r}_{4}^{k}$  fixés,  $\mathbf{u}_{1}^{k+1}$  linéaire en  $\mathbf{r}_{1}^{k+1}$ 



#### ILLUSTRATION POUR 4 CONTACTS



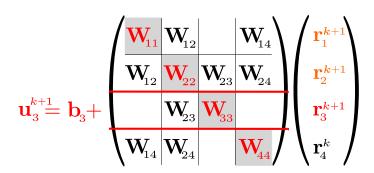
→ Résoudre le problème à un contact

$$(\mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{r}_2^{k+1}) \in \mathcal{C}(\mu)$$

avec  $\mathbf{r}_1^{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_3^k$ ,  $\mathbf{r}_4^k$  fixés,  $\mathbf{u}_2^{k+1}$  linéaire en  $\mathbf{r}_2^{k+1}$ 



#### ILLUSTRATION POUR 4 CONTACTS



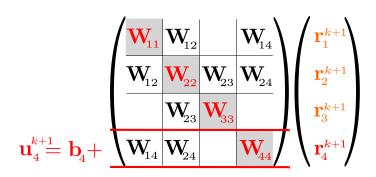
→ Résoudre le problème à un contact

$$(\mathbf{u}_3^{k+1}, \mathbf{r}_3^{k+1}) \in \mathcal{C}(\mu)$$

avec  $\mathbf{r}_1^{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_2^{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_4^k$  fixés,  $\mathbf{u}_3^{k+1}$  linéaire en  $\mathbf{r}_3^{k+1}$ 



#### ILLUSTRATION POUR 4 CONTACTS



→ Résoudre le problème à un contact

$$(\mathbf{u}_4^{k+1}, \mathbf{r}_4^{k+1}) \in \mathcal{C}(\mu)$$

avec  $\mathbf{r}_1^{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_2^{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_3^{k+1}$  fixés,  $\mathbf{u}_4^{k+1}$  linéaire en  $\mathbf{r}_4^{k+1}$ 



# GAUSS-SEIDEL ILLUSTRATION POUR 4 CONTACTS

$$egin{pmatrix} \mathbf{r}_1^{k+1} \ \mathbf{r}_2^{k+1} \ \mathbf{r}_3^{k+1} \ \mathbf{r}_4^{k+1} \end{pmatrix}$$

 $\rightarrow$  Recommencer la boucle avec k := k + 1

Résolution de  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) \in \mathcal{C}(\mu)$ 

- Linéarisation
  - Cône polygonal (pyramide)
  - Problème linéaire
  - ... mais plus de variables
  - ... et artefacts visables

Résolution de  $(\mathbf{u}_i,\mathbf{r}_i)\in\mathcal{C}(\mu)$ 

- Linéarisation
- ► Formulation fonctionelle  $f(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = 0$ 
  - ► Alart-Curnier (1992)
  - ▶ MFB (2011) : Fischer-Burmeister sur cône du second ordre
  - $\rightarrow$  Newton, point-fixe...
  - → Non-convexe, pas de convergence globale

Résolution de  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) \in \mathcal{C}(\mu)$ 

- Linéarisation
- Formulation fonctionelle  $f(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = 0$
- ► Formulation énumérative
  - Test successif de chaque cas cas ( décollage → adhérence → glissement )
  - Glissement : polynôme de degré 4
  - Formule exacte
    - $\rightarrow$  Nombreux tests, lent
  - ... ou valeurs propres matrice compagnon
    - → Possiblement mal conditionnée
  - Si non-existence, pas de solution approchée

Résolution de  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_i) \in \mathcal{C}(\mu)$ 

- Linéarisation
- Formulation fonctionelle  $f(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = 0$
- Formulation énumérative
- Méthode hybride
  - Cas simple ou glissement grossier par énumératif
  - Raffinement par Newton

# Plan de l'exposé

TIGES MÉCANIQUES

MODÈLE DE CONTACT

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

RÉSULTATS

# RÉSULTATS

 $\approx 2000$  super-hélices



# COMPARAISONS NUMÉRIQUES

#### SUR 306 PROBLÈMES INCRÉMENTAUX

Solveur local	Taux d'échec (%)	GS Iters	Time (ms)
Linéarisé	0	575	6497
PAC	19.3	163	1265
DAC	0.33	60	874
MFB	4.9	72	484
Enum	1	67	1044
MFB + Enum	0	41	312

 Le solveur hybride améliore à la fois la robustesse et l'efficacité en temps de calcul

# COMPARAISONS NUMÉRIQUES

#### SUR 306 PROBLÈMES INCRÉMENTAUX

Solveur local	Taux d'échec (%)	GS Iters	Time (ms)
Linéarisé	0	575	6497
PAC	19.3	163	1265
DAC	0.33	60	874
MFB	4.9	72	484
Enum	1	67	1044
MFB + Enum	0	41	312

- ► Le solveur hybride améliore à la fois la robustesse et l'efficacité en temps de calcul
- Le solveur linéarisé résout bien le problème approché, mais requiert plus d'itérations de Gauss–Seidel pour converger → performance globale moindre

## **CONCLUSION**

# Remarques

- Modèles visuellement réalistes
- Solveur stable

#### CONCLUSION

#### Remarques

- Modèles visuellement réalistes
- Solveur stable
- ► Coût du calcul en  $O(n^2)$
- ▶ *n* augmente super-linéairement avec le nombre de fibres
- ightharpoonup ightharpoonup limité à des systèmes de taille moyenne

#### CONCLUSION

#### Remarques

- Modèles visuellement réalistes
- Solveur stable
- Coût du calcul en  $O(n^2)$
- ▶ *n* augmente super-linéairement avec le nombre de fibres
- ightharpoonup ightharpoonup limité à des systèmes de taille moyenne

#### Perspectives

- Validation plus précise
- ► Raffinement du modèle de contact : anisotropie, adhésion
- ► Interactions avec l'air
- ► Modèle macroscopique (passage à l'échelle)



#### MERCI POUR VOTRE ATTENTION

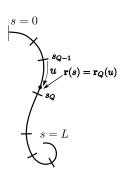
#### **Code disponible:**

http://gdaviet.fr/code/bogus

http://bipop.inrialpes.fr/~bertails/Papiers/Code

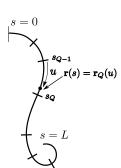
BERTAILS et al. 2006

▶ Découpage de la tige en N éléments  $\tau(s), \kappa_1(s), \kappa_2(s)$  constantes p. morceaux



BERTAILS et al. 2006

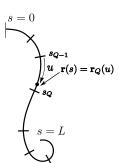
- ▶ Découpage de la tige en N éléments  $\tau(s)$ ,  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$  constantes p. morceaux
- ▶ Éléments raccordés de manière C¹



#### UNE DISCRÉTISATION: LES SUPER-HÉLICES

#### BERTAILS et al. 2006

- ▶ Découpage de la tige en *N* éléments  $\tau(s), \kappa_1(s), \kappa_2(s)$  constantes p. morceaux
- Éléments raccordés de manière C<sup>1</sup>
  - → Courbe lisse en hélices par morceaux

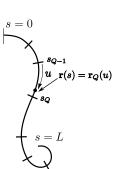


BERTAILS et al. 2006

- ▶ Découpage de la tige en N éléments  $\tau(s)$ ,  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$  constantes p. morceaux
- Éléments raccordés de manière C¹
   → Courbe lisse en hélices par morceaux
- ► Équation dynamique :

$$\mathbb{M}(\boldsymbol{\kappa},t)\ddot{\boldsymbol{\kappa}} + \nu \,\mathbb{K}\dot{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbb{K}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\kappa}},t)$$

M dense non-linéaire, K diagonale cste



BERTAILS et al. 2006

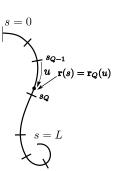
- ▶ Découpage de la tige en N éléments  $\tau(s)$ ,  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$  constantes p. morceaux
- Éléments raccordés de manière C¹
   → Courbe lisse en hélices par morceaux
- ► Équation dynamique :

$$\mathbb{M}(\boldsymbol{\kappa},t)\,\ddot{\boldsymbol{\kappa}} + \nu\,\mathbb{K}\,\dot{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbb{K}\,\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\kappa}},t)$$

M dense non-linéaire, K diagonale cste

► Intégration en temps stable

$$M \mathbf{v} + f = 0, \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{t+dt}$$



BERTAILS et al. 2006

- ▶ Découpage de la tige en N éléments  $\tau(s)$ ,  $\kappa_1(s)$ ,  $\kappa_2(s)$  constantes p. morceaux
- Éléments raccordés de manière C¹
   → Courbe lisse en hélices par morceaux
- Équation dynamique :

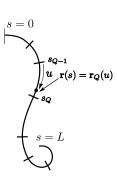
$$\mathbb{M}(\boldsymbol{\kappa},t)\,\ddot{\boldsymbol{\kappa}} + \nu\,\mathbb{K}\,\dot{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbb{K}\,\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa},\dot{\boldsymbol{\kappa}},t)$$

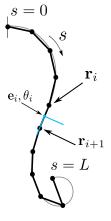
 $\mathbb{M}$  dense non-linéaire,  $\mathbb{K}$  diagonale cste

Intégration en temps stable

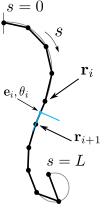
$$M \mathbf{v} + f = 0, \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{t+dt}$$

Extension :  $\kappa$  linéaire p. morceaux Super-Clothoides (Casati *et al.* 2013)

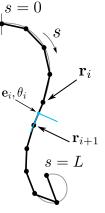




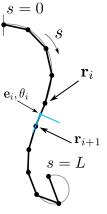
- Coordonnées maximales (squelette explicite):
  - ▶ N + 1 nœuds (points 3D)  $\mathbf{r}_i$
  - ightharpoonup N torsions matérielles  $\theta_i$
  - $\rightarrow$  4*N* + 3 degrés de libertés



- Coordonnées maximales (squelette explicite):
  - ▶ N + 1 nœuds (points 3D)  $r_i$
  - N torsions matérielles  $\theta_i$
  - $\rightarrow$  4*N* + 3 degrés de libertés
- Inextensibilité non-intrinsèque
  - → Ressorts ou contraintes dures



- Coordonnées maximales (squelette explicite) :
  - ▶ N + 1 nœuds (points 3D)  $r_i$
  - N torsions matérielles  $\theta_i$
  - $\rightarrow$  4*N* + 3 degrés de libertés
- Inextensibilité non-intrinsèque
  - → Ressorts ou contraintes dures
- Intégration implicite
  - ► Forces non-linéaires → Newton
  - Matrice creuse par bandes



- Coordonnées maximales (squelette explicite) :
  - N + 1 nœuds ( points 3D ) r<sub>i</sub>
    N torsions matérielles θ<sub>i</sub>
  - 437 . 0 1 . . . 1 121 . . .
  - $\rightarrow$  4*N* + 3 degrés de libertés
- Inextensibilité non-intrinsèque
  - → Ressorts ou contraintes dures
- Intégration implicite
  - ► Forces non-linéaires → Newton
  - ► Matrice creuse par bandes
  - ... mais pas forcément positive

- Approximation linéaire par morceaux de r(s) (indépendante de la résolution de la tige)
- ightharpoonup Cylindres englobants de rayon  $\epsilon$



- Approximation linéaire par morceaux de r(s) (indépendante de la résolution de la tige)
- ightharpoonup Cylindres englobants de rayon  $\epsilon$
- Détection du contact par le calcul de distance minimale entre les axes des cylindres :
  - $\rightarrow$  si  $d < 2\epsilon$ , un contact est activé



- Approximation linéaire par morceaux de r(s) (indépendante de la résolution de la tige)
- ightharpoonup Cylindres englobants de rayon  $\epsilon$
- Détection du contact par le calcul de distance minimale entre les axes des cylindres :
  - $\rightarrow$  si  $d < 2 \epsilon$ , un contact est activé
- ► Sortie:
  - ► Positions  $s_i^A$  et  $s_i^B$  du point de contact i pour chaque corps A, B
  - Normale **e**<sub>i</sub> au contact *i*



- Approximation linéaire par morceaux de r(s) (indépendante de la résolution de la tige)
- ightharpoonup Cylindres englobants de rayon  $\epsilon$
- Détection du contact par le calcul de distance minimale entre les axes des cylindres :
  - $\rightarrow$  si d < 2  $\epsilon$ , un contact est activé
- ► Sortie:
  - ▶ Positions  $s_i^A$  et  $s_i^B$  du point de contact i pour chaque corps A, B
  - ► Normale e<sub>i</sub> au contact *i*
- Méthodes d'accélération
  - Partitionnement des contraintes
  - ► Table de hachage en espace



- Approximation linéaire par morceaux de r(s) (indépendante de la résolution de la tige)
- ightharpoonup Cylindres englobants de rayon  $\epsilon$
- Détection du contact par le calcul de distance minimale entre les axes des cylindres :
  - $\rightarrow$  si  $d < 2 \epsilon$ , un contact est activé
- ► Sortie :
  - ▶ Positions  $s_i^A$  et  $s_i^B$  du point de contact i pour chaque corps A, B
  - Normale  $\mathbf{e_i}$  au contact i
- Méthodes d'accélération
  - Partitionnement des contraintes
  - ► Table de hachage en espace

