THEORIA 3
(2021) : 64 : str. 21-37

https://doi.org/10.2298/THEO2103021K
Originalni naučni rad
Original Scientific Paper

Jovana Kostić

DVA PRISTUPA PARADOKSIMA U LOGICI I MATEMATICI[1]

APSTRAKT: *Uobičajeno je razumevanje paradoksa kao ozbiljnih problema koji sprečavaju dalji razvoj matematičke ili logičke teorije unutar koje su formulisani. Paradoksi navodno pokazuju da je data teorija postavljena na nestabilne, ili čak kontradiktorne osnove, i time ukazuju na neophodnost njihove revizije. Moguć je, međutim, i drugačiji pogled na paradokse. Oni se mogu razumeti i kao da otkrivaju netačnost pojedinačnih pretpostavki o prirodi objekata u vezi kojih se javljaju ili načina na koji se o njima rasuđuje. Paradoksi bi u tom smislu mogli biti shvaćeni kao argumenti koji dovode do novih saznanja o prirodi tih objekata i predstavljaju značajnu motivaciju za unapređenje njihovog razumevanja. U ovom radu, opisaćemo uticaj koji je prvi od navedenih pristupa paradoksima imao na razvoj logike i matematike, pre svega teorije skupova. Pokazaćemo na konkretnim primerima da alternativni pogled na paradokse ili njihove formalne ekvivalente zapravo može voditi do značajnih rezultata u logici i omogućiti zasnivanje nove logičke discipline - teorije pojmova.*
KLJUČNE REČI: *paradoks, skup, pojam, samoreferencija, parcijalnost*

Uvod

Paradoks predstavlja naizgled korektno rasuđivanje koje polazi od ubedljivih premisa ali vodi nekim neprihvatljivim zaključcima. Ono se u većini slučajeva svodi na dedukovanje kontradikcije iz određenih pretpostavki. Te pretpostavke mogu se ticati različitih objekata i pripadati različitim teorijama ili oblastima znanja. S obzirom na to, Remzi (Frank Ramsey) uvodi distinkciju, koja je i danas uobičajena, između *semantičkih* i *logičkih* paradoksa. Semantički paradoksi tiču se jezičkih izraza - predikata, rečenica, definicija i slično, i koriste semantičke pojmove poput pojma istine ili referencije. Logički paradoksi se, sa druge strane, ne odnose na neki poseban jezik i njegove izraze, niti koriste semantičke pojmove. Pod tim paradoksima pre svega se

1 Ovaj rad je nastao u okviru projekta “Dinamički sistemi u prirodi i društvu: filozofski i empirijski aspekti” (br. 179041) koji finansira Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja.

misli na one koji su se javili prilikom razmatranja izvornog pojma skupa i imali značajan uticaj na razvoj teorije koja se tim pojmom bavi. Videćemo nešto kasnije da su paradoksi dve pomenute vrste u formalnom smislu ipak veoma slični, tj. da su zasnovani na istom načinu rasuđivanja.

Postoje dve moguće reakcije na pojavu paradoksa u nekoj teoriji ili oblasti istraživanja. Jedna reakcija bila bi da se pojava paradoksa tretira kao pokazatelj da su same osnove te teorije kontradiktorne i da njen dalji razvoj zahteva njihovu reviziju. Druga, umerenija, reakcija bila bi da se paradoksi tretiraju kao dokazi da su neke konkretne pretpostavke na kojima počiva njihovo izvođenje pogrešne. Ta dva pristupa paradoksima mogu imati veoma različite rezultate i usmeriti na različite načine dalji razvoj teorije u pitanju. To se najjasnije može videti u slučaju paradoksa koji su nastali unutar izvorne teorije skupova.

Teorija unutar koje je došlo do formulacije skupovno-teorijskih paradoksa zasnivala se na određenom razumevanju pojma skupa, prema kojem skup predstavlja *ekstenziju* nekog pojma ili svojstva - kolekciju objekata koji dele dato svojstvo, odnosno, potpadaju pod dati pojam. Ovako shvaćen skup predstavlja određenu mešavinu *ekstenzionalnog* i *intenzionalnog*. Njegovu ekstenzionalnu dimenziju čini kolekcija objekata koji čine taj skup, dok se njegova intenzionalna dimenzija sastoji u pojmu ili svojstvu prema kojem je ta kolekcija napravljena. Uslov za pripadnost skupu bi prema tom shvatanju skupova trebalo da bude određen na osnovu intuitivnog razumevanja uslova za potpadanje pod njemu odgovarajući pojam.

Paradoksi koji su se javili u vezi opisanog pojma skupa shvaćeni su kao pokazatelj da je taj pojam kontradiktoran i da ga je potrebno zameniti nekim novim pojmom koji onemogućava formulisanje sličnih paradoksa. Taj odnos prema paradoksima doveo je tako do promene u samom razumevanju pojma skupa koja se sastojala u njegovoj potpunoj ekstenzionalizaciji, tj. u svođenju skupova na puke kolekcije objekata nezavisne od načina na koji su one izgrađene. To je za posledicu imalo zanemarivanje intenzionalnih aspekata prisutnih u izvornom pojmu skupa i odustajanje od njihove formalne analize. Sami paradoksi koji se tiču izvornog pojma skupa time, međutim, nisu rešeni, ali jesu izbegnuti. Alternativni pristup paradoksima, koji je na neki način zagovaran od strane poznatih matematičara kao što su Kantor (Georg Cantor), Hilbert (David Hilbert), Cermelo (Ernst Zermelo) i Gedel (Kurt Gödel), mogao bi, sa druge strane, da dovede do njihovog rešavanja i do eventualnog zasnivanja teorije koja bi na konzistentan način opisivala izvorni pojam skupa. Taj pristup podrazumevao bi usvajanje rasuđivanja koje je u osnovi datih paradoksa i njihovo razumevanje kao argumenata koji ukazuju na neodrživost određenih pretpostavki o tom pojmu i to, pre svega, o njegovom intenzionalnom aspektu koji čine pojmovi.

U ovom radu pokušaćemo da opravdamo i motivišemo taj alternativni pristup rešavanju skupovno-teorijskih paradoksa. To opravdanje zasnivaće se pre svega na uvidu da je rasuđivanje u osnovi tih, kao i semantičkih paradoksa, ekvivalentno onome koje vodi nekim od najznačajnijih rezultata određenih logičkih teorija, pre svega *teorije izračunljivosti* i *teorije dokaza*. Ti rezultati tiču se tipično negativnih svojstava objekata kojima se te teorije bave - izračunljivih funkcija i formula. Ovi objekti imaju značajnih sličnosti sa pojmovima. Pre svega, oni su, kao i pojmovi, *intenzionalni*, pod čime ćemo podrazumevati činjenicu da ne mogu do kraja da se svedu na interpretaciju koju bi današnja teorija skupova nudila. Na tom svojstvu ovih objekata zasnovana je i mogućnost njihove *samoreferencije*, odnosno, njihove primene na same sebe ili njihovog definisanja pozivanjem na njih same koja, kako ćemo videti, ima značajnu ulogu u formulisanju paradoksa. Ove paralele mogle bi da motivišu razumevanje paradoksa koji se tiču izvorne koncepcije skupa kao svojevrsnih rezultata koji, poput njihovih ekvivalenata u navedenim logičkim teorijama, otkrivaju određena negativna svojstva pojmova koji su u osnovi te koncepcije.

Pre nego što pređemo na detaljnije razmatranje različitih pristupa paradoksima i njihovih posledica, kao i na razloge koji govore u prilog jednom od njih, opisaćemo ukratko neke od najpoznatijih semantičkih i skupovno-teorijskih paradoksa. To će nam omogućiti da bolje razumemo njihove zajedničke osobine i da uočimo sličnosti sa načinom argumentacije koji se koristi u pomenutim logičkim teorijama.

Semantički paradoksi

Najpoznatiji semantički paradoks je *paradoks lažljivca* koji se u jednoj od formulacija tiče rečenice ’Ova rečenica je lažna’. Ta rečenica bi trebalo da bude ili istinita ili lažna. Ali ako je istinita, onda je ono što ona tvrdi slučaj, što znači da je lažna. Sa druge strane, ako je lažna, onda ona tvrdi nešto što jeste slučaj, i to je čini istinitom. Pretpostavka da je data rečenica istinita ili lažna tako vodi kontradiktornom zaključku da je i jedno i drugo.

Još jedan poznati paradoks koji pripada istoj grupi je *Greling-Nelsonov paradoks* koji se tiče predikata i njihove primene. Među predikatima možemo razlikovati one koji izražavaju svojstvo koje i sami poseduju, pa se tako primenjuju na sebe, i one koji izražavaju svojstvo koje sami ne poseduju, pa se ne primenjuju na sebe. Predikati te druge vrste nazivaju se heterološkim predikatima. Takav je, na primer, predikat ’crven’ jer on sam nije crven, pa se ne primenjuje na sebe. Sa druge strane, predikat ’biti jezički izraz’ jeste i sam jezički izraz pa se primenjuje na sebe. Ali šta je slučaj sa predikatom ’heterološki’ koji izražava gore opisano svojstvo? Ako se primenjuje na sebe to znači da ima svojstvo koje izražava, a to je da se ne primenjuje na sebe. Sa druge strane, ako se ne primenjuje na sebe, onda se baš zbog toga primenjuje na sebe. Tako nas svaka od dve pretpostavke vodi kontradikciji.

Posebnu grupu semantičkih paradoksa čine paradoksi koji se tiču pojma definicije. Najjednostavniji od njih je *Berijev paradoks* koji se tiče formulacija poput sledeće: ’najmanji prirodni broj koji se ne može definisati sa manje od 20 reči’. Ono što ovu formulaciju čini paradoksalnom jeste to što ona naizgled predstavlja definiciju broja koji opisuje, a u kojoj se javlja manje od 20 reči. Njome bi tako trebalo da je definisan broj za koji istovremeno važi i da može i da ne može biti definisan sa manje od 20 reči, što je nemoguće.

Iako je u osnovi većine paradoksa izvođenje kontradikcije iz određenih pretpostavki, postoje takođe i oni koji umesto kontradikcija impliciraju neka proizvoljna tvrđenja. Takav je, na primer, *Karijev paradoks* (Haskell Curry) koji se zasniva na formulisanju rečenice p ekvivalentne rečenici ’Ako je p istinito, onda q’, gde je q proizvoljna rečenica. Pretpostavimo da je p istinito. Tada je istinita i njemu ekvivalentna rečenica ’Ako je p istinito, onda q’. Iz te implikacije i pretpostavke da je p istinito, primenom modus ponensa možemo zaključiti q. Time smo pokazali da navedena implikacija jeste istinita pošto njen konsekvens zaista sledi iz njenog antecedensa. Samim tim, istinita je i rečenica p, pa na osnovu istog argumenta možemo zaključiti q, sada bez ikakvih pretpostavki. Pošto je q proizvoljna rečenica, ovaj argument naizgled pruža metod kojim svako tvrđenje izraženo rečenicom koja se javlja na njegovom mestu može biti dokazano. Na primer, taj argument možemo koristiti za dokaz tvrđenja da Deda Mraz postoji. Smalijan (Raymond Smullyan) tako formuliše sledeću rečenicu: ’Ako se ne varam, Deda Mraz postoji’. Antecedens ove implikacije, tj. tvrđenje da se Smalijan ne vara, ekvivalentan je čitavoj implikaciji, pa na datu rečenicu možemo primeniti gore navedeno rasuđivanje kako bismo došli do zaključka da Deda Mraz postoji (Smullyan, 1978, pp. 202-203).

Semantički paradoksi shvaćeni su kao značajna prepreka u zasnivanju i razvoju određenih semantičkih teorija, kao što je teorija istine. Neophodno je bilo naći rešenje tih paradoksa koje bi onemogućilo njihovo formulisanje u toj teoriji. Standardno rešenje semantičkih paradoksa zasniva se na zabrani upotrebe *impredikativnih definicija* - karakterizacija entiteta koje se pozivaju na totalitet kojem i sam taj entitet pripada. Prema tom rešenju, definicija nekog objekta koja bi referirala na sve definicije ili sve objekte iste vrste ne bi bila legitimna. Slično tome, predikat istinitosti rečenica ne bi mogao biti definisan tako da se odnosi na sve rečenice, pa i one u kojima se sam taj predikat javlja. Slično rešenje ponudio je Tarski (Alfred Tarski) koji je umesto jednog, uveo više različitih predikata istine. Koji će se predikat primenjivati na datu rečenicu zavisilo bi od toga da li ta rečenica govori o istinitosti neke druge rečenice i koje - da li one koja takođe govori o istinitosti određenih rečenica, itd.

Ovo rešenje semantičkih paradoksa proizilazilo bi iz prvog od dva alternativna pristupa paradoksima - ono odbacuje pojmove istine i definicije koji omogućavaju formulaciju paradoksa, i na njihovo mesto uvodi neke druge, manje problematične, ali i neintuitivne pojmove. Alternativno rešenje, oličeno u aksiomatskim teorijama istine poput Kripkeove (Saul Kripke), omogućava samoprimenu predikata koji stoji za istinitost, tj. njegovu primenu na rečenice u kojima se i sam javlja, i na taj način ne odstupa od intuitivnog shvatanja tog predikata, ali ga tretira kao parcijalni predikat što omogućava izbegavanje paradoksa (Kripke, 1975). Ovo rešenje prihvata mogućnost formulisanja naizgled paradoksalnih tvrđenja, kao na primer, rečenice koja je istinita ako i samo ako je lažna. Međutim, time što odbacuje pretpostavku da ta rečenica mora biti istinita ili lažna ono onemogućava dedukovanje kontradikcije iz nje. Na taj način se *paradoks lažljivca* koristi za dolazak do uvida koji se tiče intuitivnog pojma istine, a to je da taj pojam nije nužno definisan za svaku rečenicu.

Skupovno-teorijski paradoksi

Od svih matematičkih teorija, paradoksi su najviše uticaja imali na razvoj teorije skupova. U vreme kada su otkriveni, teorija skupova bila je veoma mlada disciplina. Paradoksi u vezi pojma skupa i drugih skupovno-teorijskih pojmova su zato mogli da u značajnoj meri uzdrmaju i demotivišu njen dalji razvoj.

Teorija skupova koju je zasnovao Kantor, trebalo je da opiše skupove shvaćene kao kolekcije objekata koji dele određeno svojstvo. Skupovi su, drugim rečima, shvatani kao ekstenzije pojmova pomoću kojih su definisani. Tako je pitanje pripadnosti skupu bilo usko povezano sa pitanjem potpadanja pod odgovarajući pojam. Najveći doprinos razvoju te teorije dao je Frege (Gottlob Frege) koji je pokušao da je formalno zasnuje. Jedna od aksioma koju je Frege prihvatao bez ograničenja jeste da za svako svojstvo ili pojam postoji skup objekata koji imaju to svojstvo, odnosno, potpadaju pod taj pojam. Pošto su svojstva u jeziku izražena predikatima, ta aksioma formulisana je na sledeći način:

$$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow P(y))$$

gde P stoji za proizvoljni predikat. Prema uobičajenoj interpretaciji, upravo je ta aksioma, poznata kao *aksioma* (*neograničene*) *komprehenzije*, omogućila formulisanje skupovno-teorijskih paradoksa.

Među skupovno-teorijskim paradoksima najpoznatiji je *Raselov paradoks* (Bertrand Russell) koji se tiče samog pojma skupa i relacije pripadnosti skupu. Posmatrajmo svojstvo skupova izraženo predikatom 'nije sopstveni element'. Skup koji ima to svojstvo je, na primer, skup ljudi, jer sam taj skup nije čovek pa nije ni sopstveni element; isto važi i za skup plavih stvari, skup prirodnih brojeva, i slično. Sa druge strane, skup nepraznih skupova i sam je neprazan, pa bi trebalo da pripada sebi; isto važi i za skup svih skupova, skup matematičkih objekata, itd. Prema aksiomi komprehenzije, postoji skup svih skupova koji imaju dato svojstvo, tj. koji nisu sopstveni elementi. Postavlja se pitanje da li je taj skup sopstveni element ili nije. Ako jeste, onda ima svojstvo koje dele svi njegovi elementi, tj. svojstvo da nije sopstveni element. Sa druge strane, ako nije sopstveni element, onda zadovoljava uslov za pripadnost samom sebi, pa jeste sopstveni element. Na taj način dolazimo do kontradiktornog zaključka da dati skup istovremeno i jeste i nije element samog sebe.

Osim *Raselovog paradoksa*, na razvoj teorije skupova značajno su uticali i paradoksi koji nose imena Kantora i Burali-Fortija (Cesare Burali-Forti). *Kantorov paradoks* tiče se pojma kardinalnog broja nekog skupa, koji predstavlja broj elemenata tog skupa. Kako je sam Kantor pokazao, partitivni skup nekog skupa (skup svih njegovih podskupova) ima strogo veći broj elemenata, odnosno veći kardinalni broj, od samog tog skupa. Ali ako skup svih skupova postoji (što aksioma neograničene komprehenzije garantuje), onda bi njegov kardinalni broj trebalo da bude veći od kardinalnog broja bilo kog drugog skupa, uključujući i njegov partitivni skup. Tako dolazimo do kontradiktornog zaključka da je kardinalni broj partitivnog skupa skupa svih skupova istovremeno strogo veći i manji od kardinalnog broja tog skupa.

Sličan paradoks koji se tiče ordinalnog broja skupova ili ordinala formulisao je Burali-Forti. Ordinali su tranzitivni skupovi koji su dobro uređeni relacijom pripadnosti. Paradoks se zasniva na pretpostavci (koja je kasnije i dokazana) da je skup svih ordinala dobro uređen, pa je samim tim i sam taj skup jedan ordinal (pošto je takođe tranzitivan). Taj skup bi zato trebalo da pripada samom sebi. Međutim, iz toga sledi da bi bio strogo manji od samog sebe, što je kontradikcija.

Pošto se tiču nekih od osnovnih pojmova teorije skupova, navedeni paradoksi zahtevali su odgovarajuće rešenje. Unutar formalne teorije, što je teorija skupova težila da postane, formulacija tih paradoksa mogla bi voditi eksplicitnim kontradikcijama što bi datu teoriju učinilo protivrečnom, pa samim tim i neupotrebljivom. Kao što ćemo videti, moguća su različita rešenja paradoksa koja bi vodila manjim ili većim izmenama unutar same teorije skupova, pri čemu bi svako od njih moralo da onemogući izvođenje kontradikcija u osnovi tih paradoksa. Ta različita rešenja vezana su za različita shvatanja samih paradoksa i njihove uloge.

Dve reakcije na skupovno-teorijske paradokse

Rasel je otkriće navedenih paradoksa video kao problem koji pokazuje da je tada prihvaćeno, a danas poznato kao ’naivno’, razumevanje skupova pogrešno i da na njemu ne može biti zasnovana konzistentna formalna teorija. Paradoksi su, prema njegovom shvatanju, ispoljili neizbežnu protivrečnost sadržanu u pretpostavljenom pojmu skupa, i samim tim pokazali da je taj pojam neophodno zameniti drugim, manje problematičnim pojmom. Ovakvo viđenje skupovno-teorijskih paradoksa je preovladalo. Dalji razvoj teorije skupova je prema tome podrazumevao pronalazak i formalni opis nekog novog pojma skupa. Glavno pitanje je tako postalo na koji način pojam skupa koji je pretpostavljen u takozvanoj naivnoj teoriji skupova treba revidirati kako bi paradoksi bili izbegnuti, i na njemu zasnovana konzistentna teorija.

Kao što je već pomenuto, glavna uloga u formulisanju paradoksa pripisivana je aksiomi komprehenzije, pa je samim tim rešenje traženo u novom pojmu skupa za koji ta aksioma ne važi. Ono što opravdava aksiomu komprehenzije jeste shvatanje skupova kao delom intenzionalnih objekata, tj. kao ekstenzija pojmova ili svojstava. Pošto bi svaki pojam ili svojstvo trebalo da ima neku ekstenziju, za svaki od njih bi trebalo i da postoji skup koji tu ekstenziju predstavlja. Sa druge strane, kada bi skupovi bili shvaćeni kao u potpunosti ekstenzionalni objekti, tj. kao puke kolekcije objekata koje su nezavisne od pravila na osnovu kog su napravljene, aksioma komprehenzije ne bi nužno važila. Formalizacija tako shvaćenog pojma skupa tada ne bi nužno vodila formulaciji paradoksa. Tako je rešenje paradoksa traženo u odbacivanju intenzionalnih aspekata skupova sadržanih u pojmovima čije bi ekstenzije oni trebalo da predstavljaju. Teorija skupova je postala teorija koja treba da opiše formalne karakteristike i način građenja skupova shvaćenih u isključivo ekstenzionalnom smislu.

Različite teorije predložene su kao teorije koje se bave tako shvaćenim skupovima. Teorija koja se pokazala najuspešnijom od njih i koja je danas prihvaćena kao standardna jeste *Cermelo-Frenkelova teorija skupova* (Zermelo-Fraenkel set theory). To je formalna aksiomatska teorija zasnovana na takozvanoj *iterativnoj koncepciji skupa*. Prema toj koncepciji, skupovi se grade iterativno, počevši od praznog skupa ili određenih neskupovnih objekata, i primenjujući skupovne operacije na njih ili na prethodno izgrađene skupove. Tako neki skup može biti izgrađen tek ako svi njegovi elementi već postoje. Izgradnjom skupova nastaje svojevrsna hijerarhija čije nivoe čine skupovi koji kao elemente sadrže isključivo objekte sa nižih nivoa. Nijedan od skupova u toj hijerarhiji ne može kao element sadržati samog sebe niti bilo koji drugi skup koji sadrži njega. Skupovi koji se pominju u paradoksima - skup svih skupova ili skup svih ordinala, prema ovoj koncepciji ne postoje, pošto bi morali da sadrže i same sebe, kao i skupove koji su pomoću njih izgrađeni a koji bi pripadali višim nivoima hijerarhije. Na taj način ova teorija izbegava formulaciju paradoksa.

Iako je navedeni pristup skupovno-teorijskim paradoksima vodio zasnivanju teorije koja se može pohvaliti velikim rezultatima i u kojoj se i dalje uspešno radi, on je istovremeno doveo do potpunog zanemarivanja intenzionalnih aspekata izvorne koncepcije skupa, tj. pojmova i relacije potpadanja pod pojam. Zamena te koncepcije skupa u potpunosti ekstenzionalnom koncepcijom, omogućila je izbegavanje, ali ne i rešavanje paradoksa. Postavlja se pitanje da li je njihovo rešenje uopšte moguće i da li bi neki alternativni pristup mogao da dovede do njega.

Novije istorijske rekonstrukcije pokazuju da su paradoksi među matematičarima naišli na reakciju koja je zapravo bila mnogo blaža od Raselove i koja pokazuje da oni njima nisu bili nimalo iznenađeni (Peckhaus, 2004; Moore & Garciadiego, 1981). Umesto da shvate paradokse kao probleme koji onemogućavaju dalji razvoj teorije u kojoj su se pojavili, matematičari su ih pre razumeli kao rezultate koji govore nešto o svojstvima objekata kojima se ta teorija bavi, ili preciznije, kao svođenje na apsurd određenih pretpostavki o tim objektima. Izvođenje paradoksa nije za cilj imalo da se pokaže protivrečnost osnovnih pojmova teorije skupova, nego da se dođe do indirektnog dokaza određenih činjenica koje se tiču skupova, kardinala ili ordinala.

Sam Kantor je na osnovu svog paradoksa došao do zaključka da totalitet svih skupova ne može i sam biti skup, već da predstavlja takozvanu *inkonzistentnu kolekciju* (inkonsistente Vielheit) na koju se pojam kardinalnosti uopšte ne može primeniti. Ono što je omogućilo Kantoru da dođe do tog zaključka jeste činjenica da on nije prihvatao aksiomu komprehenzije u njenom neograničenom obliku. Umesto toga, Kantor je usvojio njenu ograničenu verziju prema kojoj samo pojmovi definisani za objekte unapred specifikovanog domena određuju skup kao svoju ekstenziju u tom domenu (Tait, 2000, p. 272). Na osnovu *Burali-Fortijevog paradoksa*, odnosno njegove verzije koju je sam formulisao, Kantor je došao do istog zaključka u vezi totaliteta svih ordinala (Burali-Forti je na osnovu istog paradoksa došao do pogrešnog zaključka da skup ordinala ne može biti dobro uređen). Dakle, umesto da pod uticajem otkrivenih paradoksa odbaci usvojeni pojam skupa, Kantor je nastojao da na osnovu tih paradoksa dođe do određenih saznanja o tom pojmu.

Ako bismo odlučili da sledimo ovaj Kantorov pristup paradoksima, ono što bi dalje trebalo razjasniti jeste zbog čega neograničena aksioma komprehenzije ne važi za skupove shvaćene kao ekstenzije pojmova, tj. zbog čega ekstenzija pojma ne može uvek biti skup. Odgovor na to pitanje bi trebalo tražiti u samom *pojmu pojma* i relaciji njegove primene (tj. relaciji potpadanja pod pojam). Prema naivnom shvatanju skupova, relacija potpadanja pod pojam osnovnija je od relacije pripadnosti skupu koja od nje zavisi. Pritom je pretpostavljeno da o relaciji potpadanja pod pojam već imamo odgovarajuće intuitivno razumevanje, i da njena svojstva nisu upitna. Ono na šta bi paradoksi mogli da ukazuju jeste da to ipak nije slučaj, i da relacija potpadanja pod pojam takođe zahteva formalno razmatranje i analizu. Raselov paradoks može biti formulisan i tako da se eksplicitno odnosi na pojmove. U toj formulaciji, paradoks se tiče *pojma neprimenljivosti na sebe* i nastaje kao posledica pokušaja da utvrdimo da li se taj pojam primenjuje na sebe ili ne. Ovaj paradoks spada u paradokse koje Gedel naziva intenzionalnim paradoksima pošto se tiču intenzionalnih objekata kao što su pojmovi. Ispravno rešenje tog paradoksa trebalo bi da rasvetli pogrešne pretpostavke o pojmovima i njihovoj primeni koje su dovele do njegove formulacije (Wang, 1996, pp. 269-273).

Sličan stav imao je Hilbert koji je smatrao da se do rešenja skupovno-teorijskih paradoksa može doći preispitivanjem pretpostavki o naivnoj koncepciji skupa, pre svega o svojstvima i pojmovima koji su u nju uključeni. Pogrešne pretpostavke o njima koje vode paradoksima potiču, po njegovom mišljenju, od tradicionalne logike i tiču se načina formiranja pojmova i njihovih relacija. Hilbert je bio posebno eksplicitan u svom stavu da paradokse ne treba izbegavati, niti od njih treba zazirati. Paradokse, po njegovom mišljenju, treba očekivati u razvoju bilo koje mlade discipline i treba iskoristiti potencijal koji oni imaju za otkrivanje svojstava objekata kojima se ta disciplina bavi (cf. Peckhaus & Kahle, 2002, p. 2, 9).

O tome da matematičari nisu bili posebno zabrinuti pojavom paradoksa svedoči i činjenica da je verzija Raselovog paradoksa bila poznata u Getingenu kao *Cermelov paradoks* dugo pre nego što je Rasel objavio svoje otkriće. U Cermelovoj formulaciji, paradoks pokazuje da je skup Z koji kao elemente sadrži sve svoje podskupove inkonzistentan. Naime, posmatrajmo njegov podskup koji sadrži sve elemente skupa Z koji nisu sopstveni elementi. Taj podskup je element skupa Z. Ako je on i sopstveni element, onda prema njegovoj definiciji, on nije sopstveni element. Ali tada, pošto on jeste u skupu Z i nije sopstveni element, on ipak mora biti sopstveni element. Na taj način dolazimo do kontradikcije (cf. Cantini, 2009, pp. 7-8).

Verzija Kantorovog paradoksa u Hilbertovoj formulaciji je takođe bila poznata u Getingenu. Ta formulacija ne koristi pojmove transfinitne teorije skupova. Skupovi su u njoj definisani kao kolekcije koje se dobijaju iterativnom primenom operacije unije i operacije kojom se formira skup svih funkcija na datom skupu, počevši od skupa prirodnih brojeva. Neka je U unija svih tako dobijenih skupova, koja bi po definiciji i sama trebalo da je skup. Tada možemo formirati skup svih funkcija jednog argumenta na skupu U - skup U^U. Taj skup bi trebalo da bude podskup skupa U. Ako je to slučaj, onda svakoj funkciji koja je njegov element možemo pripisati neki element skupa U i to različite elemente različitim funkcijama. Svaka funkcija tada može biti indeksirana elementom skupa U koji joj je pripisan na taj način. Definišimo sada funkciju f na skupu U tako da za svaku funkciju f_x iz skupa U^U važi $f(x) \neq f_x(x)$. Funkcija f bi trebalo da bude element skupa U^U i samim tim indeksirana nekim elementom a skupa U. Tada će, međutim, na osnovu njene definicije važiti da $f_a(a) \neq f_a(a)$, što je kontradikcija.

Iako predstavljaju veoma značajne rezultate, ni Hilbertov ni Cermelov paradoks nisu među matematičarima iz Getingena smatrani ozbiljnim problemom koji bi onemogućio dalji rad u teoriji skupova (Peckhaus, 2004). Umesto toga, oni su shvaćeni kao rezultati koji treba da pokažu neodrživost neke konkretne pretpostavke o skupovima ili načina na koji se o njima rasuđuje. Da je takav odnos prema paradoksima preovladao, dalji razvoj teorije skupova ne bi nužno bio usmeren ka pronalaženju novog pojma skupa u odnosu na koji se ti paradoksi ne javljaju, nego ka pronalaženju načina za konzistentno uključivanje tih paradoksa u teoriju skupova i njihovo pretvaranje u rezultate te teorije. Time bi ovim paradoksima bila pripisana uloga slična onoj koju imaju argumenti formulisani unutar određenih logičkih teorija - teorije izračunljivosti i teorije dokaza, a koji predstavljaju formalne ekvivalente tim paradoksima. U nastavku ćemo ukratko opisati način rasuđivanja koji je u osnovi kako paradoksa, tako i argumenata koji se javljaju u pomenutim logičkim teorijama. Činjenica da je isti način rasuđivanja korišćen za dolazak do značajnih rezultata u tim teorijama pokazuje da rasuđivanje koje vodi paradoksima može biti zasnovano na samoj prirodi objekata kojih se tiče, zbog čega može i u značajnoj meri unaprediti njihovo razumevanje.

Rasuđivanje u osnovi paradoksa

Zajednička odlika svih, ili barem većine paradoksa opisanih u prethodnom delu rada jeste da se u njihovoj formulaciji koristi neka vrsta *dijagonalizacije*. Dijagonalizacija predstavlja primenu nekog objekta (funkcije, pojma, predikata, formule ili nečeg sličnog) na sebe ili sopstvenu karakterizaciju u nekom jeziku. U tom smislu ona omogućava formulisanje *samoreferencijalnih* primena datih objekata. Na primer, u *Greling-Nelsonovom paradoksu* predikat 'heterološki' definisan je pomoću pojma primene predikata sa samog sebe; isto važi i za pojam neprimenljivosti na sebe u intenzionalnoj verziji *Raselovog paradoksa*. Slično tome, paradoksi koji se tiču definicija svode se na formulisanje definicije koja referira na sve definicije iste vrste, pa i na samu sebe.

Ono do čega dijagonalizacija može voditi jeste formulisanje *fiksnih tačaka* predikata ili funkcija - objekata na koje se ti predikati i funkcije primenjuju a koji nakon te primene ostaju isti ili ekvivalentni sebi. To može biti rečenica na koju se primenjuje neki predikat (na primer, istinitosti, neistinitosti, dokazivosti, nedokazivosti) ili argument neke funkcije koji ostaje nepromenjen i nakon njene primene. Fiksne tačke takođe sadrže neku vrstu *samoreferencije* - pre svega ako je osobina objekta da predstavlja fiksnu tačku određenog predikata ili funkcije korišćena u njegovoj karakterizaciji. U tom slučaju se taj objekat karakteriše samoreferencijalno, tj. referencijom na njega samog.

U nekim slučajevima, pre svega kada se radi o negativnim svojstvima izraženim pomoću određenih predikata (lažnosti ili neistinitosti, neprimenljivosti, nedefinljivosti i slično), formulacija njihovih fiksnih tačaka vodi naizgled paradoksalnim posledicama u vidu postojanja rečenice koja je istinita ako i samo ako je lažna, pojma ili predikata koji se primenjuje na sebe ako i samo ako se ne primenjuje na sebe, ili broja koji neka karakterizacija definiše ako i samo ako ga ne definiše. Na prvi pogled, te posledice su oblika $p \leftrightarrow \neg p$ i ako su formulisane u teoriji koja je zasnovana na klasičnoj logici, omogućavaju dedukovanje kontradikcije, što datu teoriju čini protivrečnom. Iz tog razloga jeste neophodno izbeći tu dedukciji. Međutim, to ne mora biti postignuto time što bi se onemogućilo formulisanje date fiksne tačke, što jeste standardni potez. Formulacija tih fiksnih tačaka zapravo ne predstavlja grešku, već formalizuje ispravnu intuiciju o tome da je, na primer, rečenica u osnovi *paradoksa lažljivca* istinita ako i samo ako je lažna, ili da se pojam neprimenljivosti na sebe primenjuje na sebe ako i samo ako se ne primenjuje na sebe. Umesto da se izbegne mogućnost formulisanja datih fiksnih tačaka, moglo bi se sprečiti izvođenje kontradikcije iz tih formulacija - promenom logike koja to izvođenje omogućava ili promenom načina na koji je sama fiksna tačka negativnih predikata formulisana u teoriji. U poslednjem slučaju, ta fiksna tačka ne bi smela da bude formulisana tako da implicira postojanje fiksne tačke negacije - kao što je to, kako je gore pomenuto, slučaj na prvi pogled. Umesto toga bi, na primer, predikati koji izražavaju negativna svojstva, kao što je neprimenljivost ili lažnost, mogli da budu formulisani ne tako da predstavljaju negacije predikata koji izražavaju njima odgovarajuća pozitivna svojstva - primenljivosti ili istinitosti, već kao nezavisni predikati koji stoje u određenoj relaciji prema njima. Ono što bi time bilo postignuto jeste da bi intuicija o postojanju datih fiksnih tačaka bila sačuvana, ali bi izvođenje kontradikcije iz njene formalizacije bilo onemogućeno.

Ekvivalenti paradoksa u logičkim teorijama

Ono što govori u prilog takvom pristupu paradoksima jeste činjenica da je način argumentacije koji je u njihovoj osnovi naširoko korišćen u određenim logičkim teorijama - pre svega teoriji izračunljivosti i teoriji dokaza, i to za dolazak do nekih od najznačajnijih rezultata tih teorija. U tim teorijama, *dijagonalizacija*, tj. primena funkcija i formula na same sebe, formalizovana je i korišćena za dokaz postojanja *fiksnih tačaka* tih funkcija i formula. Način na koji se to postiže u tim teorijama je u toj meri sličan načinu na koji se dolazi do paradoksa da se može reći da teoreme o fiksnoj tački koje nalazimo u tim teorijama predstavljaju "matematički pismen način formulisanja većine paradoksalnih argumenata" (Cantini, 2009, p. 112). Primenjene na određene funkcije ili predikate, te teoreme takođe vode naizgled paradoksalnim posledicama. Videćemo u nastavku kako su te posledice shvaćene unutar datih teorija.

Teorija izračunljivosti

Teorija izračunljivosti bavi se funkcijama na prirodnim brojevima koje su *izračunljive* pomoću određenog algoritma. Jedan od ciljeva te teorije, koji je motivisao njeno zasnivanje, jeste formalizacija pojma izračunljive funkcije kojom bi taj intuitivni pojam trebalo učiniti matematički preciznim, kako bi se u njegovom istraživanju mogla koristiti matematička sredstva. Ovde nećemo ulaziti u detalje o tome na koji način se to postiže i kakve sve modele izračunavanja ova teorija nudi. Umesto toga, izdvojićemo par relevantnih pitanja i rezultata te teorije koji su nezavisni od konkretne formalizacije.

Jedan značajan i opšti rezultat teorije izračunljivosti jeste da neke izračunljive funkcije nisu totalne, odnosno, definisane za svaki argument. Način na koji se to dokazuje sličan je načinu na koji se rasuđuje u paradoksima. Pretpostavimo da su sve izračunljive funkcije jednog argumenta totalne. Pošto njih ima prebrojivo mnogo (jer toliko ima i njima odgovarajućih algoritama), svaku od njih možemo indeksirati nekim prirodnim brojem, i to različite funkcije različitim prirodnim brojevima. Tada možemo definisati funkciju f za koju važi $f(x) = f_x(x) + 1$. Pošto je funkcija f_x, za proizvoljno x, izračunljiva, onda to mora biti i funkcija f. Ona bi tada trebalo da je indeksirana nekim prirodnim brojem a. Ali tada će na osnovu njene definicije važiti $f_a(a) = f_a(a) + 1$, tj. postojaće fiksna tačka funkcije sledbenika, što je nemoguće. Dijagonalizacija funkcije f_a, tj. njena primena na sopstveni indeks, tako naizgled omogućava formulisanje fiksne tačke funkcije koja zapravo ne može imati fiksnu tačku (jednako kao što fiksnu tačku ne može imati ni funkcija u osnovi veznika negacije koja se koristi u formulaciji paradoksa).

Iako veoma liči na izvođenje paradoksa, navedeno rasuđivanje ne tretira se kao paradoks, već kao argument koji pokazuje da je neka od pretpostavki od kojih se polazi pogrešna. Zaključak do kojeg se na osnovu njega dolazi jeste da nisu sve izračunljive funkcije totalne, tj. definisane za svaki argument (na primer, funkcija f_a neće biti definisana za argument a). Kontradikcija je tako izbegnuta prihvatanjem mogućnosti da neke primene izračunljive funkcije nemaju vrednost.

Osim kao dokaz parcijalnosti određenih izračunljivih funkcija, argumenti koji po strukturi podsećaju na paradokse tipično se koriste u ovoj teoriji i za dokaz da određene funkcije ne mogu biti izračunljive. Naime, jedno od glavnih pitanja kojim se možemo baviti unutar teorije izračunljivosti jeste ono koje se tiče toga da li je neka funkcija izračunljiva pomoću odgovarajućeg algoritma. Ako je funkcija u pitanju karakteristična funkcija nekog skupa, onda se to pitanje naziva i *problemom odlučivosti*, pošto, ako je izračunljiva, data funkcija može za svaki objekat da odluči da li je on u skupu ili ne, tj. da li ima svojstvo koje taj skup predstavlja. Ako i samo ako je karakteristična funkcija datog skupa izračunljiva, njemu odgovarajući *problem odlučivosti* jeste rešiv.

Način na koji se dokazuje da neki problem nije rešiv vrlo je sličan načinu na koji se dolazi do paradoksa. Naime, pretpostavi se da postoji izračunljiva funkcija koja rešava taj problem, a onda se, tipično dijagonalizacijom, pomoću nje definiše funkcija koja bi tada takođe bila izračunljiva. Pomoću te funkcije se tada dolazi do fiksne tačke određene funkcije ili predikata koji ne mogu imati fiksnu tačku (kao što je funkcija sledbenika).

Među problemima odlučivosti čija je nerešivost dokazana na taj način je i jedan od najznačajnijih problema u teoriji izračunljivosti - takozvani *halting problem* koji se tiče pitanja da li je neka funkcija definisana za određeni argument, tj. da li se njeno izračunavanje za taj argument završava i daje određenu vrednost. Kada bi funkcija koja daje odgovor na to pitanje bila izračunljiva, onda bismo koristeći nju mogli da definišemo funkciju koja je definisana za određeni argument ako i samo ako nije definisana za isti taj argument. Pošto je to kontradikcija, moramo zaključiti da takva funkcija ne može postojati.

Teorija dokaza

Pod teorijom dokaza ovde podrazumevamo oblast koja se naziva još i reduktivnom teorijom dokaza, a koja je nastala u pokušaju rešavanja Hilbertovog problema dokazivanja konzistentnosti formalne aritmetike sredstvima strogo slabijim od onih koja ona sama nudi. Najveće rezultate u toj oblasti ostvario je Gedel, koji je zapravo pokazao da traženi dokaz ne može postojati. Ovaj Gedelov rezultat, poznat je kao njegova *druga teorema o nepotpunosti*. Ona zapravo predstavlja posledicu Gedelove *prve teoreme o nepotpunosti* - jednog od najznačajnijih rezultata u logici i matematici uopšte. Ta teorema tvrdi da formalizacija aritmetičkog dokaza koju pruža formalna aritmetika, kao što je *Peanova aritmetika* (*PA*), ne omogućava dokazivanje svih i samo istinitih rečenica formulisanih na jeziku te teorije. Naime, uvek će postojati neka rečenica na njenom jeziku koja je istinita ali nedokaziva u toj teoriji.

Dokaz ove Gedelove teoreme često se poredi sa *paradoksom lažljivca*. Taj dokaz prati način rasuđivanja korišćen u izvođenju tog paradoksa, pri čemu se u njemu umesto o lažnosti rečenica, govori o njihovoj nedokazivosti. Posmatrajmo rečenicu, po pretpostavci formulisanu unutar *PA*, koja za sebe kaže da je nedokaziva u *PA*. Ta rečenica biće istinita ako i samo ako je nedokaziva u *PA*. Pretpostavimo da je dokaziva u *PA*. Tada će, na osnovu date ekvivalencije, ta rečenica biti neistinita. Međutim, u valjanim formalnim teorijama, kakva je *PA*, dokazive su samo istinite rečenice. Zato moramo zaključiti da data rečenica ipak nije dokaziva u *PA* i da je, samim tim, istinita. To je čini primerom istinite rečenice teorije *PA* koja nije dokaziva u toj teoriji.

Kako u paradoksu lažljivca, tako i ovde, glavnu ulogu ima formulisanje rečenice koja nešto govori o samoj sebi. Koristeći neke značajne tehničke rezultate, Gedel je opravdao pretpostavku o postojanju takve rečenice unutar *PA*. On je najpre pokazao kako se sintaktički objekti - simboli, formule i dokazi, koji pripadaju teoriji *PA* mogu kodirati prirodnim brojevima. Svakom sintaktičkom objektu pripisan je jedinstven prirodan broj, koji predstavlja njegovo ime ili kod. Zahvaljujući tome, Gedel je mogao da formalizuje dijagonalizaciju u *PA* u obliku primene formule ili predikata na sopstveni kod. Upravo ta dijagonalizacija omogućila mu je da dođe do rezultata o fiksnoj tački, prema kojem za svaki predikat teorije *PA* postoji rečenica ekvivalentna onoj koja tvrdi primenu datog predikata na istu tu rečenicu. Te rečenice bile bi formalni pandani rečenicama prirodnog jezika koje za sebe tvrde da imaju određeno svojstvo (kao što je ona iz *paradoksa lažljivca*). Pošto, kako je Gedel takođe pokazao, predikat nedokazivosti u *PA* može biti definisan unutar *PA*, dati rezultat garantuje da će postojati rečenica p u toj teoriji ekvivalentna onoj koja tvrdi da rečenica p nije dokaziva.

Na osnovu gore skiciranog dokaza, Gedel dolazi do zaključka da je svaka konzistentna formalna teorija u kojoj je teorija *PA* sadržana *nepotpuna*. Uvek će biti moguće formulisati rečenicu na jeziku te teorije koja je istinita, ali nedokaziva u toj teoriji. Negacija te rečenice takođe će biti nedokaziva, pošto će biti neistinita. Za takvu rečenicu kaže se da je *neodlučiva* u toj teoriji, pošto se ne može niti dokazati, niti opovrgnuti dokazom njene negacije.

Obe logičke teorije - teorija izračunljivosti i teorija dokaza, tako koriste *dijagonalizaciju* i postojanje *fiksnih tačaka* predikata ili funkcija za konstruisanje objekata i formulisanje dokaza unutar tih teorija. Kada se te fiksne tačke tiču određenih predikata i funkcija, kao što je ’nedokazivost’ ili funkcija sledbenika, njihovo postojanje ima posledice slične paradoksima. Međutim, umesto da se tretiraju kao paradoksi, te posledice se koriste za dolaženje do značajnih negativnih rezultata - onih koji govore da nisu sve izračunljive funkcije totalne, tj. da nisu svi problemi odlučivosti rešivi, ili onih koji pokazuju da nisu sve formule date formalne teorije odlučive u njoj.

Novo rešenje skupovno-teorijskih paradoksa

Primeri argumenata iz logike koji u značajnoj meri nalikuju paradoksima trebalo bi da motivišu drugi od dva alternativna pristupa paradoksima, koji podrazumeva usvajanje rasuđivanja o objektima u pitanju koje vodi paradoksu, i njegovo korišćenje za dolazak do određenih zaključaka o tim objektima. Taj pristup skupovno-teorijskim paradoksima može dovesti do njihovog rešavanja koje bi se sastojalo u utvrđivanju pogrešnih pretpostavki o izvornom pojmu skupa i, pre svega, o pojmovima koji su njegov sastavni deo, čijim bi se odbacivanjem sprečilo izvođenje kontradikcije. To rešenje moglo bi predstavljati korak ka zasnivanju *teorije pojmova* koja bi se bavila formalnim osobinama pojmova i relacije njihove primene. Gedel je verovao da bi upravo zasnivanje te teorije predstavljalo sledeći važan korak u razvoju logike i u više navrata je naglašavao njen značaj za buduću logiku (neke od referenci su: Gödel, 1944; Wang, 1996, poglavlje 8). Važno je naglasiti da nova teorija ni u kom slučaju ne bi trebalo da zameni *Cermelo-Frenkelovu teoriju skupova* ili da postane njen rival. Dok se današnja teorija skupova bavi skupovima kao kolekcijama objekata nezavisnim od pravila na osnovu kojih su one izgrađene, teorija pojmova bavila bi se upravo tim pravilima - svojstvima koja objekti iz te kolekcije dele, odnosno, pojmovima pod koje potpadaju. Ona bi tako trebalo da predstavlja intenzionalni pandan današnjoj teoriji skupova.

Osim što motivišu određeni pristup paradoksima koji se tiču izvornog pojma skupa, gore navedeni primeri logičkih rezultata do kojih formalni ekvivalenti paradoksa vode mogu i da sugerišu vrstu zaključka koji bi iz njih mogao biti izveden. Taj zaključak ticao bi se pojma pojma na kojem je izvorni pojam skupa zasnovan i relacije primene pojma. Kao što smo videli, navedeni rezultati tvrde postojanje nekih negativnih svojstava objekata na koje se odnose - funkcija i formula. U slučaju funkcija to je njihova parcijalnost, tj. činjenica da nije svaka izračunljiva funkcija definisana za svaki argument. U slučaju formula određene formalne teorije, to je njihova neodlučivost, tj. činjenica da neke od njih ne mogu biti ni dokazane ni opovrgnute u datoj teoriji. Analogni rezultat koji bi se ticao pojmova bio bi da nije svaki pojam definisan za svaki objekat. Zaključak bi bio da postoje pojmovi - kao što je pojam neprimenljivosti na sebe, čijom se primenom na neki objekat ne dobija nužno iskaz koji je istinit ili lažan. To bi, konkretno, mogao da bude slučaj sa primenom datog pojma na samog sebe. Ukoliko rečenicu koja tvrdi da se taj pojam primenjuje na sebe shvatimo kao rečenicu koja nije ni istinita ni lažna, onda navodni paradoks koji nastaje ispitivanjem te dve mogućnosti ne vodi kontradikciji.

Teorija pojmova zasnovana na ovom rešenju paradoksa uzimala bi za ozbiljno pitanje smisla rečenica koje opisuju neku primenu pojma, i formulisala uslove za to da primena pojma na određeni objekat bude smislena. Ona bi tako sledila osnovnu ideju *teorije tipova* predložene od strane Rasela, prema kojoj pojmovi (ili iskazne funkcije) imaju ograničeni domen smislenosti. Prema toj teoriji, za svaki pojam postojao bi unapred određen domen objekata na koje se on može smisleno primeniti i koji određuje njegov nivo. Primena pojma na sebe ili na bilo koji drugi pojam koji se primenjuje na njega, bila bi besmislena prema ovoj teoriji. Sa druge strane, rešenje paradoksa ne zahteva tako drastično ograničavanje smislene primenljivosti pojma. Prema Gedelovom mišljenju, moguće je da bi za rešavanje paradoksa i zasnivanje teorije pojmova bilo dovoljno proglasiti besmislenim samo pojedinačne primene određenih pojmova, koje bi u suprotnom vodile kontradikcijama (cf. Gödel, 1944, p. 138).

Do danas nije razvijena teorija zasnovana na takvom rešenju paradoksa koja bi se bavila formalnim svojstvima pojmova i relacijom njihove primene. Ideja o rešavanju paradoksa koji se tiču izvornog pojma skupa, tj. pojma pojma, ograničavanjem smislene primenljivosti pojmova predstavlja, međutim, koristan fokus u istraživanju koje bi moglo voditi uspostavljanju te teorije. Ono što bi bilo značajno utvrditi jeste na koji način bi ta ideja mogla da bude pretočena u aksiome koji se tiču relacije primene pojma, i kako bi se na njoj mogla zasnovati razlika između teorije pojmova i teorije skupova koja se bavi ekstenzionalnim pandanom te relacije - relacijom pripadnosti skupu. Data osobina relacije primene pojma, otkrivena zahvaljujući samoprimeni pojmova i paradoksima kojima ona vodi, može predstavljati osobinu na kojoj se temelje i ostale formalne osobine te relacije koje je razlikuju od relacije pripadnosti skupu. Na njenoj formalizaciji bi tada potencijalno mogla biti zasnovana buduća teorija pojmova.

Zaključak

Cilj ovog rada je da se istakne razlika između dva moguća pristupa paradoksima: onog koji se zasniva na iznalaženju načina za izbegavanje njihove formulacije (najčešće odbacivanjem mogućnosti samoprimene objekata u pitanju) i onog koji se zasniva na prihvatanju paradoksa kao metode dokazivanja da određene pretpostavke o datim objektima ili način rasuđivanja o njima nisu ispravni. Iako je kroz istoriju matematike i logike preovladao prvi pristup, novije istorijske rekonstrukcije pokazuju da je i drugi pristup paradoksima imao zagovornike među istaknutim matematičarima. Ono što takođe govori u prilog tom pristupu jeste i činjenica da su formalni ekvivalenti paradoksa naširoko korišćeni u određenim logičkim disciplinama.

Taj pristup skupovno-teorijskim paradoksima bi, umesto ekstenzionalizacije pojma skupa i zasnivanja teorije koja se bavi novim, ekstenzionalnim pojmom, doveo do preispitivanja izvornog pojma skupa i to pre svega njegovih intenzionalnih aspekata sadržanih u pojmu pomoću kojeg je skup napravljen i njegovoj primeni. Saznanja o prirodi pojmova i relaciji njihove primene kojima bi rešavanje tih paradoksa potencijalno vodilo mogla bi predstavljati začetke nove teorije koja bi bila intenzionalni pandan teoriji skupova.

Jovana Kostić
Institut za filozofiju
Filozofski fakultet Univerziteta u Beogradu

Literatura

Cantini, A., (2009), "Paradoxes, Self-Reference and Truth in the 20th Century", in Gabbay, D. & Woods, J. (editors), *Handbook of the History of Logic*, North-Holland, Amsterdam, pp. 875-1013.
Gödel, K., (1944) "Russell's Mathematical Logic", in Gödel, K., (1990) *Kurt Gödel Collected works II: Publications 1938 - 1974*, Feferman, S., et al. (editors), Oxford University Press, Oxford., pp. 119-141.
Kripke, S., (1975) "Outline of a Theory of Truth", *The Journal of Philosophy*, Vol. 72, No. 19, pp. 690-716.
Moore, G. H. & Garciadiego, A., (1981) "Burali-Forti's Paradox: A Reappraisal of its Origins", *Historia Mathematica*, Vol. 8, pp. 319-350.
Peckhaus, V., (2004) "Paradoxes in Göttingen", in Link, G. (editor), *One Hundred Years of Russell's Paradox: Mathematics, Logic, Philosophy*, De Gruyter, Berlin, pp. 501-515.
Peckhaus, V. & Kahle, R., (2002) "Hilbert's Paradox", *Historia Mathematica*, Vol. 29, pp. 157-175.
Smullyan, R. M., (1978) *What is the Name of This Book: The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
Tait, W. W., (2000) "Cantor's Grundlagen and the Paradoxes of Set Theory", in Sher, G. & Tieszen, R. (editors), *Between Logic and Intuition: Essays in Honor of Charles Parsons*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 269-290.
Wang, H., (1996) *A Logical Journey: From Gödel to Philosophy*, The MIT Press, Cambridge (MA).

Jovana Kostić

Two Ways of Approaching the Paradoxes in Logic and Mathematics
(*Summary*)

It is usual to think of the paradoxes appearing inside a particular logical or mathematical theory as the serious obstacles hindering any further development of that theory. Paradoxes are supposed to show that a theory in question is built on an unstable, or even contradictory foundation, and thus point the need for its complete revision. However, a different view on the paradoxes is also possible. They could instead be understood as the arguments which show that some particular assumptions concerning the objects with respect to which they appear, or the ways of reasoning about them, are wrong. If treated in that way, paradoxes or their solutions could lead to some new insights into the nature of objects they concern. They could thus turn out to make a useful focus in developing the understanding of these objects. In this work, the effect that the first approach towards the paradoxes had on development of logic and mathematics, in particular set theory, will be described. Using some examples, we will try to show that the alternative view on the paradoxes or their formal equivalents actually leads to some important results in logic, and at the same time, opens the door to a new logical theory - the so-called theory of concepts.

KEYWORDS: paradox, set, concept, self-reference, partiality