ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 Управление, вычислительная техника и информатика № 58
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 519.21
doi: 10.17223/19988605/58/4

Вероятностная модель системы совместного доступа с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами

Анна Васильевна Полховская[1], Елена Юрьевна Данилюк[2], Светлана Петровна Моисеева[3], Ольга Сергеевна Бобкова[4]

[1, 2, 3, 4] Томский государственный университет, Томск, Россия
[1] anya.polxovskaya00@mail.ru
[2] daniluc.elena.yu@gmail.com
[3] smoiseeva@mail.ru
[4] osia153@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается математическая модель системы совместного доступа с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами в виде системы массового обслуживания с повторными вызовами вида M|M|1 и проводится анализ ее вероятностных характеристик. Разработан рекуррентный алгоритм вычисления вероятностей числа заявок на орбите, проведена численная реализация нахождения допредельного распределения вероятностей числа заявок на орбите, технических характеристик функционирования системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания с повторными вызовами, коллизии, *H*-настойчивость, отказы, рекуррентный алгоритм

***Благодарности*:**
Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Томской области в рамках научного проекта № 19-41-703002.

Для цитирования: Полховская А.В., Данилюк Е.Ю., Моисеева С.П., Бобкова О.С. Вероятностная модель системы совместного доступа с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 35–46. doi: 10.17223/19988605/58/4

Original article
doi: 10.17223/19988605/58/4

The probabilistic model of sharing system with collisions, *H*-persistence and rejections data processing

Anna V. Polkhovskaya[1], Elena Y. Danilyuk[2], Svetlana P. Moiseeva[3], Olga S. Bobkova[4]

[1, 2, 3, 4] Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
[1] anya.polxovskaya00@mail.ru
[2] daniluc.elena.yu@gmail.com
[3] smoiseeva@mail.ru
[4] osia153@yandex.ru

Abstract. A queuing system with repeated calls, one server, collisions (conflicts) of calls, *H*-persistence and rejections is considered. The input flow of calls is the Poisson process with an intensity λ. A call that found the device free occupies it, and service begins, which ends successfully if no other requests were received during it.

If the server is busy, then a conflict (collision) arises between the call that has come for service and the ones being serviced, and in the general case, both calls instantly go to the orbit and repeat the attempt to successfully serve after a random time. In this article, in the event of a collision, one of the calls, for example, which was in service (on the device), goes into orbit with probability 1, the other goes into orbit with probability H, and with probability $(1–H)$ refuses service and leaves the system.

We have two types of arriving calls: primary and repeated. Primary calls are calls received from the outside into the system; repeated calls are calls in the orbit after the collision and making a repeated attempt to occupy the device for servicing. When building models with repeated calls, it is usually assumed that the arrival of primary calls obeys Poisson's law. Nevertheless, this does not mean that the incoming flow of calls in the analyzed system is Poisson, we are talking only about the flow of primary calls. The total incoming arrival flow consists of a Poisson flow of primary calls and a flow of repeated calls.

The service time of a primary or repeated claim does not depend on its type and has an exponential distribution with the parameter μ, and one unit of line resource is used to service requests. The random delay that a call carries out in orbit is exponentially distributed with the parameter σ.

The problem is to find the probabilities distribution of the calls number in the orbit. We write the Kolmogorov differential equations system for the stationary regime and then construct a recurrent algorithm to solve it. The numerical results obtained with recurrent algorithm made it possible to conclude that with a decrease in the random delay, which is carried out by a call in orbit under a conflict, the distribution of the number of calls in the orbit has the form of a Gaussian. The technical characteristics of the system, which are of practical importance for its design, are found.

Keywords: retrial queueing system; collisions; rejections; *H*-persistence; recurrent algorithm

***Acknowledgments*:**
The research was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research and the Tomsk Region as part of a scientific project № 19-41-703002.

***For citation*:** Polkhovskaya, A.V., Danilyuk, E.Yu., Moiseeva, S.P., Bobkova O.S. (2022) The probabilistic model of sharing system with collisions, *H*-persistence and rejections. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 35–46. doi: 10.17223/19988605/58/4

Развитие современных инфокоммуникационных систем и сетей связи открывает множество различных услуг для использования абонентами. В современных условиях пользователем выступает не только человек, но и многообразие устройств, подключенных к сети. Стремительный рост генерируемой нагрузки при этом вызывает перегрузки на отдельных участках сети, что ведет к ухудшению качества предоставляемых услуг.

Пользователь имеет все больше возможностей влиять своим поведением на формирование входящих потоков, частоту посылки вызова, длину сообщений, их количество и т.д. В условиях, когда возникает временная недоступность сервиса, важным фактором становится повторный запрос (вызов) на предоставление услуги или сервиса. Множество мультимедийных и служебных приложений на абонентских устройствах может в автоматическом режиме генерировать подобные запросы, не имея при этом каких-либо ограничений, связанных, например, с временем набора номера или терпеливостью абонента. Такой неучтенный трафик будет занимать канальный ресурс сверх запланированного под нагрузку от первичных потоков вызовов. На участках сети возможны переполнения, которые приводят к отказу в обслуживании заявок, что порождает, в свою очередь, множество повторных обращений к системе. Нагрузка от потока повторных вызовов, как правило, не является учтенной, что приводит к выходу из строя сегментов сети до полного отказа ее работы. Выявление и исследование влияния подобных аспектов поведения на качество работы сети позволяет заранее спланировать и подготовить сеть таким образом, чтобы снизить потери вызовов на ее участках. Наибольший интерес для практики представляет рассмотрение экстремальных условий работы, т.е. условий перегрузки, отличающих ее от нормального (планируемого) состояния.

Все это определяет актуальность создания теоретических основ для построения математических моделей, позволяющих модифицировать, совершенствовать и разрабатывать методы анализа и расчета показателей качества обслуживания в инфокоммуникационных системах и сетях связи.

Теория систем массового обслуживания с повторными вызовами (Retrial Queueing Systems; RQ-системы) является важным разделом современной теории телетрафика: актуальность обусловлена широкими практическими приложениями в области оценивания производительности и проектирования широковещательных и мобильных сотовых радиосетей, локальных вычислительных сетей с протоколами случайного множественного доступа. В таких системах запрос, поступивший в систему (запрос на соединение с сотой) и не получивший обслуживания, не уходит из системы (как в системах с отказами) и не становится в очередь (как в системах с ожиданием), а повторяет попытки через случайное время, пока не поступит на обслуживание. Явление повторных попыток является неотъемлемой чертой вышеуказанных систем передачи данных, и игнорирование его может привести к значительным погрешностям при принятии инженерных решений.

Исследованию RQ-систем посвящено большое количество работ. Например, в монографии J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral [1] приведено более семисот ссылок на публикации по этой тематике. В работах R. Wilkinson, J. Cohen, G. Gosztony и др. [2–5] отмечено, что математические модели RQ-систем применяются для проектирования и оптимизации реальных информационно-коммуникационных систем различного уровня (локальных, глобальных), управляемых протоколами случайного множественного доступа, цифровых сетей связи, а также сетей сотовой связи, вычислительных кластеров, call-центров и др. Имеющиеся на сегодняшний день научные публикации в данной области предлагают достаточно много различных задач и подходов к их решению. Наиболее полно исследованы марковские и немарковские RQ-системы с настойчивыми повторными заявками (базовая модель), получены рекуррентные формулы для вычисления распределения вероятностей числа заявок на орбите как для конечного, так и для бесконечного размера орбиты. Основными методами исследования RQ-систем являются матричные методы, численные методы, имитационное моделирование, так как точные аналитические формулы удается получить лишь для самых простых моделей [6–8].

Более сложными для исследования являются модели с конфликтами заявок. Рассмотрение RQ-систем с ситуацией конфликта заявок подразумевает, что заявка, нашедшая прибор занятым в момент прибытия ее в систему, и заявка, находящаяся на обслуживании, вступают в конфликт [9–13]. RQ-системы с конфликтами заявок имитируют поведение многих реальных ситуаций, например в телекоммуникационных сетях с протоколами множественного доступа с обнаружением коллизий (CSMA-CD), где передача данных должна быть гарантирована с безошибочной точностью с некоторой заданной вероятностью [14–18].

RQ-системы с нетерпеливостью заявок возникают при моделировании процессов обращения в call-центры [16–18]. Для характеристики поведения нетерпеливых клиентов помимо терминов «нетерпеливость», «p-настойчивость» используется термин «отказ», понимаемый как решение не присоединяться к линии (прибору) после неудачной попытки получить обслуживание с последующим уходом из системы. Учет таких особенностей существенно усложняет математическую модель и ограничивает возможность получения аналитических выражений, поэтому применяют аппроксимационные методы [19–25].

Настоящая статья посвящена исследованию RQ-системы с одним обслуживающим прибором с коллизиями (конфликтами) заявок, H-настойчивостью и отказами.

1. Функциональная модель системы совместного доступа с коллизиями и отказами

Прежде чем построить математическую модель анализируемой системы связи, определим функциональную модель, являющуюся ее функциональным прототипом. Формализуем работу системы: выделим перечень событий, которые имеют существенное значение при использовании анализируемого ресурса передачи информации [26].

Рассмотрим однолинейную (с одним обслуживающим прибором) систему с конфликтами заявок, H-настойчивостью и отказами.

На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его, и начинается обслуживание, которое заканчивается успешно, если во время него другие заявки не поступали. Если прибор занят, то между пришедшей на обслуживание и обслуживаемой заявками возникает конфликт (коллизия), и в общем случае [16–17] обе заявки мгновенно переходят на орбиту и повторяют попытку успешно обслужиться через случайное время. В настоящей статье в случае возникновения коллизии заявка, находившаяся на обслуживании (на приборе), уходит на орбиту с вероятностью 1, а поступившая на прибор и вызвавшая конфликт заявка с вероятностью H уходит на орбиту, а с вероятностью $(1 - H)$ отказывается от обслуживания и покидает систему.

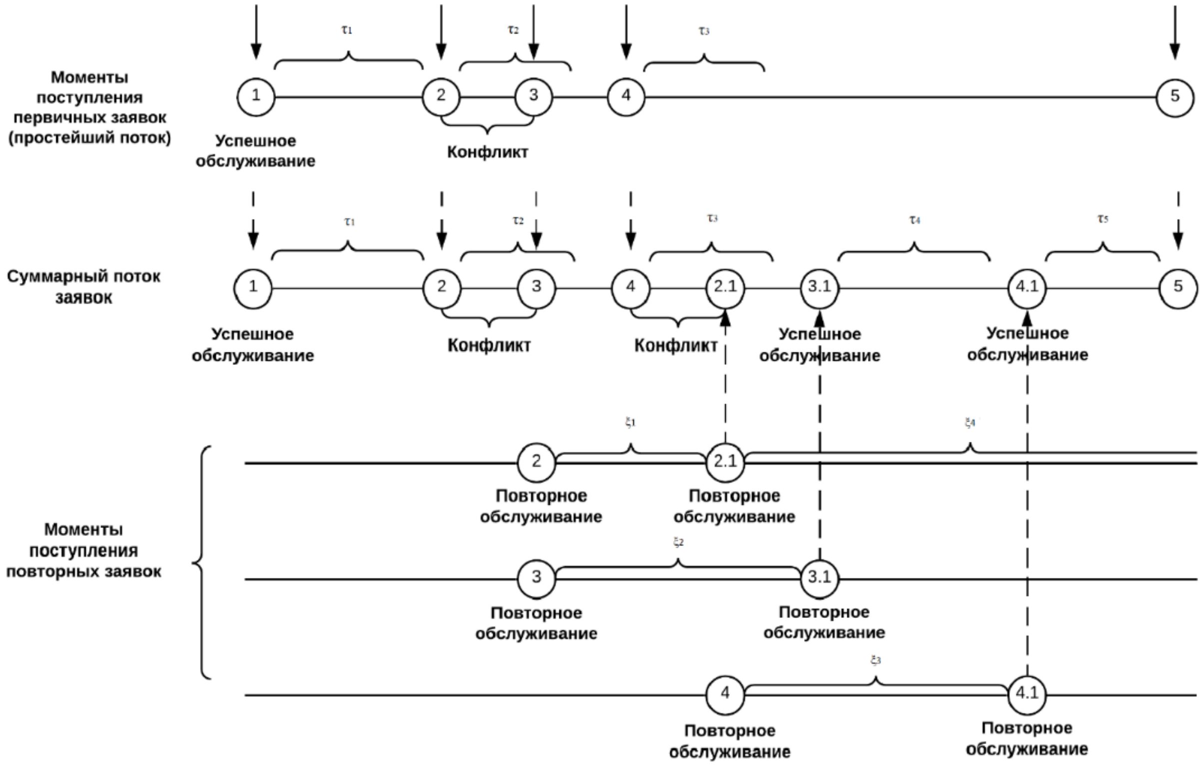


Рис. 1. Схема моделирования суммарного входящего потока заявок
Fig. 1. Scheme for modeling the total incoming arrival process

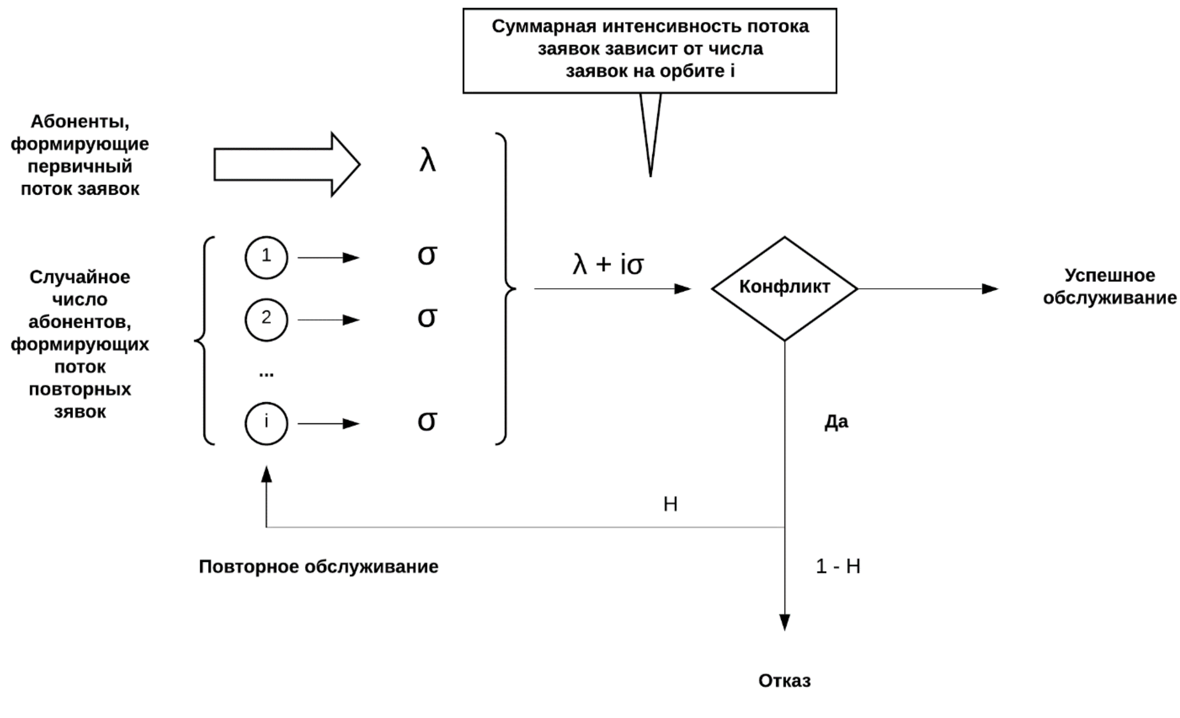


Рис. 2. RQ-система с коллизиями, H-настойчивостью и отказами
Fig. 2. RQ-system with collisions, H-persistence and rejections

Будем разделять поступающие на прибор заявки на две категории: первичные и повторные. Первичные – это заявки, поступившие в систему извне; повторные – заявки, оказавшиеся на орбите системы в результате коллизии и осуществляющие повторную попытку занять прибор для обслуживания. Суммарный входящий поток обращений в систему состоит из потока первичных заявок и потока повторных заявок. На рис. 1 приведена схема формирования суммарного входящего потока.

Время обслуживания первичной или повторной заявки не зависит от ее типа и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ, и для обслуживания заявок используется одна единица ресурса линии. Случайная задержка, которую осуществляет заявка на орбите, экспоненциально распределена с параметром σ.

Описанная процедура доступа к канальному ресурсу (обсуживающему прибору) и образования орбиты показана на рис. 2 как модель RQ-системы с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами.

В работе решается задача определения вероятностных характеристик работы системы: среднего числа повторных попыток соединения на одну первичную; среднего числа отказов на одно установленное соединение; доли повторных вызовов в общем потоке поступающих, – которые позволяют оценить работоспособность системы.

2. Математическая модель

Обозначим $i(t)$ – случайный процесс, который описывает число заявок на орбите в момент времени t и задается следующим образом: $i(t) = 0, 1, 2, \ldots$, $k(t)$ – случайный процесс, определяющий состояние прибора в момент времени t:

$$k(t) = \begin{cases} 0, \text{ если прибор свободен,} \\ 1, \text{ если прибор занят.} \end{cases}$$

Так как входящий поток – простейший, а время обслуживания – экспоненциальное, то случайный процесс $\{k(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной RQ-системы является двумерной цепью Маркова с непрерывным временем.

Обозначим через $P\{k(t) = k, i(t) = i\} = P_k(i,t)$, $i = 0,1,2,\ldots$, $k = 0,1$, вероятность того, что в момент времени t прибор находится в состоянии k и на орбите i заявок. Ставится задача нахождения распределения вероятностей случайного процесса – числа абонентов, повторяющих вызов, и состояния прибора в стационарном режиме функционирования системы.

Для распределения вероятностей $P_k(i,t)$ согласно теореме о полной вероятности можно составить равенства:

Для $i = 0$:

$$\begin{cases} P_0(0,t+\Delta t) = P_0(0,t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(0,t)\mu\Delta t + o(\Delta t), \\ P_1(0,t+\Delta t) = P_1(0,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_0(0,t)\lambda\Delta t + P_0(1,t)(1-\lambda\Delta t)\sigma\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Для $i = 1$:

$$\begin{cases} P_0(1,t+\Delta t) = P_0(1,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\sigma\Delta t) + P_1(1,t)\mu\Delta t + P_1(0,t)\lambda\Delta t(1-H) + P_1(1,t)\sigma\Delta t(1-H) + o(\Delta t), \\ P_1(1,t+\Delta t) = P_1(1,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)(1-\sigma\Delta t) + P_0(1,t)(1-\sigma\Delta t)\lambda\Delta t + P_0(2,t)(1-\lambda\Delta t)2\sigma\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Для $i \geq 2$:

$$\begin{cases} P_0(i,t+\Delta t) = P_0(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) + P_1(i,t)\mu\Delta t + P_1(i-2,t)\lambda\Delta tH + P_1(i-1,t)\lambda\Delta t(1-H) \\ + P_1(i-1,t)(i-1)\sigma\Delta tH + P_1(i,t)i\sigma\Delta t(1-H) + o(\Delta t), \\ P_1(i,t+\Delta t) = P_1(i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) + P_0(i,t)(1-i\sigma\Delta t)\lambda\Delta t + P_0(i+1,t)(1-\lambda\Delta t)(i+1)\sigma\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Отсюда нетрудно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{cases} \text{Для } i=0: \\ \dfrac{\partial P_0(0,t)}{\partial t} = -\lambda P_0(0,t) + \mu P_1(0,t), \\ \dfrac{\partial P_1(0,t)}{\partial t} = -(\lambda+\mu) P_1(0,t) + \lambda P_0(0,t) + \sigma P_0(1,t). \\ \text{Для } i=1: \\ \dfrac{\partial P_0(1,t)}{\partial t} = -(\lambda+\sigma) P_0(1,t) + \mu P_1(1,t) + \lambda(1-H) P_1(0,t) + \sigma(1-H) P_1(1,t), \\ \dfrac{\partial P_1(1,t)}{\partial t} = -(\lambda+\mu+\sigma) P_1(1,t) + \lambda P_0(1,t) + 2\sigma P_0(2,t). \\ \text{Для } i \ge 2: \\ \dfrac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda+i\sigma) P_0(i,t) + \mu P_1(i,t) + \lambda H P_1(i-2,t) + \lambda(1-H) P_1(i-1,t) \\ +(i-1)\sigma H P_1(i-1,t) + i\sigma(1-H) P_1(i,t), \\ \dfrac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\lambda+\mu+i\sigma) P_1(i,t) + \lambda P_0(i,t) + (i+1)\sigma P_0(i+1,t). \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим через $\Pi_k(i)$ стационарные вероятности случайного процесса $\{k(t), i(t)\}$, перепишем для них систему (1).

$$\begin{cases} \text{Для } i=0: \\ -\lambda\Pi_0(0) + \mu\Pi_1(0) = 0, \\ -(\lambda+\mu)\Pi_1(0) + \lambda\Pi_0(0) + \sigma\Pi_0(1) = 0. \\ \text{Для } i=1: \\ -(\lambda+\sigma)\Pi_0(1) + \lambda(1-H)\Pi_1(0) + [\mu+\sigma(1-H)]\Pi_1(1) = 0, \\ -(\lambda+\mu+\sigma)\Pi_1(1) + \lambda\Pi_0(1) + 2\sigma\Pi_0(2) = 0. \\ \text{Для } i \ge 2: \\ -(\lambda+i\sigma)\Pi_0(i) + [\mu+i\sigma(1-H)]\Pi_1(i) + [\lambda(1-H)+(i-1)\sigma H]\Pi_1(i-1) + \lambda H\Pi_1(i-2) = 0, \\ -(\lambda+\mu+i\sigma)\Pi_1(i) + \lambda\Pi_0(i) + (i+1)\sigma\Pi_0(i+1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Для решения системы (2) построим итерационный (рекуррентный) алгоритм. Положим $\Pi(0) = a$, где a – некоторая произвольная положительная константа, $\Pi(i) = \Pi_0(i) + \Pi_1(i)$, $i = 0,1,2\ldots$, и запишем следующие равенства:

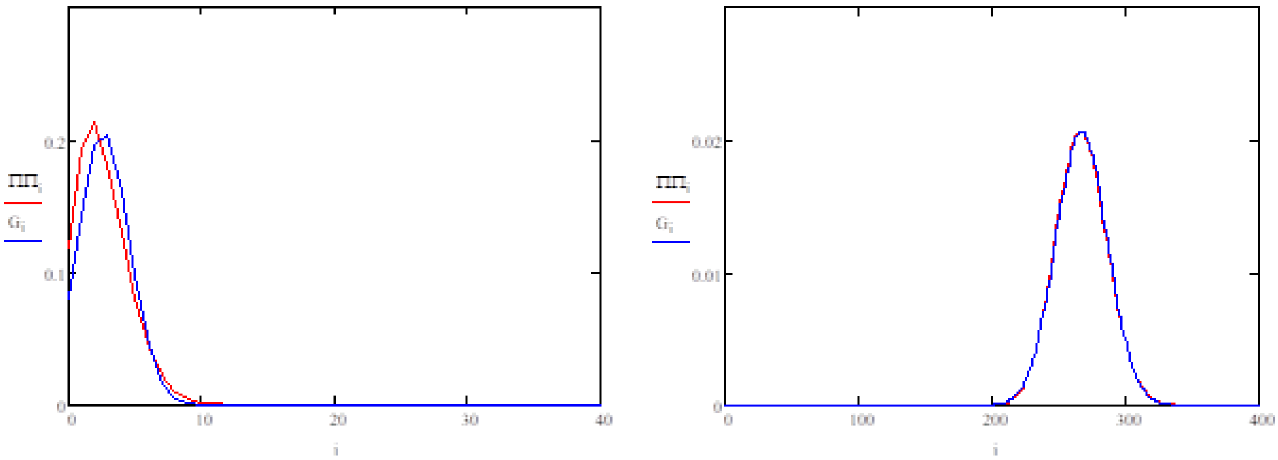
$$\begin{cases} \text{Для } i=0: \\ \Pi_1(0) = \dfrac{\lambda}{\mu}\Pi_0(0), \\ \Pi_0(1) = \dfrac{1}{\sigma}\{(\lambda+\mu)\Pi_1(0) - \lambda\Pi_0(0)\}. \\ \text{Для } i=1: \\ \Pi_1(1) = \dfrac{1}{\mu+\sigma(1-H)}\{(\lambda+\sigma)\Pi_0(1) - \lambda(1-H)\Pi_1(0)\}, \\ \Pi_0(2) = \dfrac{1}{2\sigma}\{(\lambda+\mu+\sigma)\Pi_1(1) - \lambda\Pi_0(1)\}. \\ \text{Для } i \ge 2: \\ \Pi_1(i) = \dfrac{1}{\mu+i\sigma(1-H)}\{(\lambda+i\sigma)\Pi_0(i) - [\lambda(1-H)+(i-1)\sigma H]\Pi_1(i-1) - \lambda H\Pi_1(i-2)\}, \\ \Pi_0(i+1) = \dfrac{1}{(i+1)\sigma}\{(\lambda+\mu+i\sigma)\Pi_1(i) - \lambda\Pi_0(i)\}. \end{cases} \tag{3}$$

С помощью системы (3) найдем $\Pi(i)=\Pi_0(i)+\Pi_1(i)$, $i=0,1,2\ldots$, после чего нормируем $\Pi\Pi(i)=\Pi(i)\Big/\sum_{i=0}^{N}\Pi(i)$.

Этот алгоритм довольно прост в реализации и позволяет численно получить допредельные характеристики исследуемой RQ-системы. Следует отметить, что алгоритм применим только для исследования RQ-системы с простейшим входящим потоком, но позволяет сделать предположения о виде распределения вероятностей числа заявок на орбите при различных параметрах системы.

3. Численный анализ

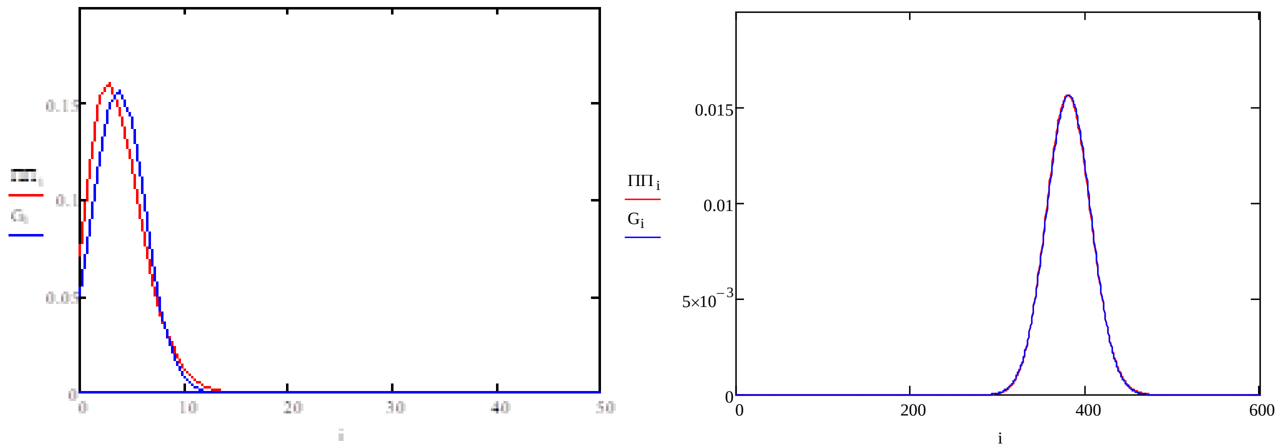
В результате численных экспериментов выявлено, что при уменьшении случайной задержки, которую осуществляет заявка на орбите в случае возникновения конфликта, распределение числа заявок на орбите имеет вид гауссовского. На рис. 3, 4 изображены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите, полученного с помощью рекуррентного алгоритма и дискретизированного нормального распределения при разных значениях вероятности *H* и параметра σ.



a *b*

Рис. 3. Изменение числа заявок на орбите для RQ-системы с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами при *H* = 0,4: *a* – λ = 0,4, μ = 1, σ = 0,1; *b* – λ = 0,4, μ = 1, σ = 0,001

Fig. 3. Variation the number of calls in orbit for RQ-system with collisions, *H*-persistence and rejections under *H* = 0,4: *a* – λ = 0,4, μ = 1, σ = 0,1; *b* – λ = 0,4, μ = 1, σ = 0,001



a *b*

Рис. 4. Изменение числа заявок на орбите для RQ-системы с коллизиями, *H*-настойчивостью и отказами при *H* = 0,6: *a* – σ = 0,1; *b* – σ = 0,001

Fig. 4. Variation the number of calls in orbit for RQ-system with collisions, *H*-persistence and rejections under *H* = 0,6: *a* – σ = 0,1; *b* – σ = 0,001

Для сравнения распределения вероятностей, полученного с помощью рекуррентного алгоритма $\Pi\Pi(i)$, и дискретизированного нормального распределения G_i воспользуемся расстоянием Колмогорова:

$$\Delta = \max_{v}\left\{\left|\sum_{i=0}^{v}\Pi\Pi(i) - \sum_{i=0}^{v}G_i\right|\right\}.$$

Результаты сравнения для различных значений параметра σ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Расстояние Колмогорова для RQ-системы с коллизиями при уменьшении σ

σ	σ = 0,1	σ = 0,05	σ = 0,01
Значение Δ для параметров λ = 0,4, μ = 1, *H* = 0,4	0,049	0,023	0,004
Значение Δ для параметров λ = 0,4, μ = 1, *H* = 0,8	0,022	0,01	0,0018
Значение Δ для параметров λ = 0,8, μ = 1, *H* = 0,4	0,010	0,005	0,0009
Значение Δ для параметров λ = 0,8, μ = 1, *H* = 0,8	0,002	0,01	0,0002

Приведенные в таблице значения показывают, что с уменьшением значения параметра σ точность аппроксимации возрастает.

Следует отметить, что существование стационарного режима в рассматриваемой системе зависит от значения *H*. Для *H* < 1 стационарный режим существует для любых значений интенсивности поступления первичных заявок. Если выполняется соотношение *H* = 1, то для существования стационарного режима необходимо ограничить поток первичных заявок [17].

4. Вероятностные характеристики и показатели качества

Выражения для вычисления показателей качества обслуживания заявок [27] следуют из их физического смысла и определяются через отношение интенсивностей анализируемых событий или суммирование стационарных вероятностей модели; к ним относятся: доля потерянных первичных и повторных заявок; среднее число повторных попыток соединения на одну первичную; среднее число отказов на одно установленное соединение; доля повторных вызовов в общем потоке поступающих заявок. Для анализа представляются технические характеристики рассматриваемой системы, значения которых приведены в табл. 2.

Таблица 2

Технические характеристики функционирования RQ-системы с коллизиями и отказами

Характеристики системы	Параметры входящего потока											
	λ = 0,2, μ = 1				λ = 0,4, μ = 1				λ = 0,6, μ = 1		λ = 1, μ = 1	
	σ = 0,1		σ = 0,001		σ = 0,1		σ = 0,001		σ = 0,1		σ = 0,1	
	H = 0,4	*H* = 0,8	*H* = 0,4	*H* = 0,8	*H* = 0,4	*H* = 0,8	*H* = 0,4	*H* = 0,8	*H* = 0,4	*H* = 0,8	*H* = 0,4	*H* = 0,8
Интенсивность суммарного потока поступающих заявок $\lambda + \sigma\sum_{i=0}^{N} i\Pi\Pi(i)$	0,264	0,308	0,264	0,303	0,665	1,005	0,667	1,000	1,176	2,288	2,363	5,833
Среднее число абонентов, повторяющих вызов $\sum_{i=0}^{N} i\Pi\Pi(i)$	0,644	1,080	63,769	102,83	2,651	6,053	266,648	600,045	5,756	16,877	13,629	48,327
Интенсивность отказов первичных и повторных заявок $(1-H)\left(\lambda + \sigma\sum_{i=0}^{N} i\Pi\Pi(i)\right)$	0,159	0,062	0,158	0,061	0,339	0,201	0,400	0,200	0,705	0,458	1,418	1,167

Окончание табл. 2

Характеристики системы	Параметры входящего потока											
	$\lambda = 0{,}2$, $\mu = 1$				$\lambda = 0{,}4$, $\mu = 1$				$\lambda = 0{,}6$, $\mu = 1$		$\lambda = 1$, $\mu = 1$	
	$\sigma = 0{,}1$		$\sigma = 0{,}001$		$\sigma = 0{,}1$		$\sigma = 0{,}001$		$\sigma = 0{,}1$		$\sigma = 0{,}1$	
	$H = 0{,}4$	$H = 0{,}8$	$H = 0{,}4$	$H = 0{,}8$	$H = 0{,}4$	$H = 0{,}8$	$H = 0{,}4$	$H = 0{,}8$	$H = 0{,}4$	$H = 0{,}8$	$H = 0{,}4$	$H = 0{,}8$
Среднее число повторных попыток соединения на одну первичную $\dfrac{\sigma\sum_{i=0}^{N} i\Pi\Pi(i)}{\lambda}$	0,322	0,540	0,319	0,514	0,663	1,513	0,667	1,500	0,959	2,813	1,363	4,833
Доля повторных вызовов в общем потоке поступающих заявок $\dfrac{\sigma\sum_{i=0}^{N} i\Pi\Pi(i)}{\lambda+\sigma\sum_{i=0}^{N} i\Pi\Pi(i)}$	0,243	0,351	0,242	0,340	0,399	0,602	0,400	0,600	0,490	0,738	0,577	0,829

Полученные данные показывают, что среднее число абонентов, повторяющих вызов, пропорционально растет с уменьшением значений параметра σ, на долю повторных вызовов в общем потоке этот параметр особого влияния не оказывает.

В области малых значений загрузки системы $(\rho = \lambda/\mu < 0{,}5)$ влияние повторных заявок несущественно, но при высокой загрузке и повышенной настойчивости абонента нарастающие потоки повторных вызовов, инициированные настойчивостью абонента в установлении соединения, приводят к лавинообразному росту трафика и переходу сети в состояние перегрузки. Это влияние становится особенно заметным, когда абонент абсолютно настойчив в установлении соединения, а значение интенсивности поступления первичных заявок близко к максимальной пропускной способности системы.

Заключение

В настоящей статье представлено исследование системы массового обслуживания с повторными вызовами и одним обслуживающим прибором, коллизиями заявок, H-настойчивостью и отказом от обслуживания. С помощью разработанного авторами рекуррентного алгоритма сделан вывод об асимптотически гауссовском распределении вероятностей числа заявок на орбите и найдены технические характеристики системы, имеющие практическое значение для ее проектирования. Полученные результаты будут полезны при проектировании реальных информационных и телекоммуникационных систем.

Вместе с тем следует отметить, что представленный алгоритм работает только для марковской модели, поэтому альтернативным подходом является применение метода асимптотического анализа, что позволяет найти асимптотическое распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов. В дальнейших работах планируется обобщение результатов на случай с различными вероятностями настойчивости заявок, а также применение метода асимптотического анализа для модели с непуассоновскими входящими потоками.

Список источников

1. Artalejo J.R., Gómez-Corral A. Retrial Queueing Systems: a Computational Approach. Berlin : Springer-Verlag, 2008. 318 p.
2. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // The Bell Syst. Techn. J. 1956. V. 35, № 2. P. 421–507.
3. Cohen J.W. Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls // Philips Telecommun. Rev. 1957. V. 18, № 2. P. 49–100.
4. Gosztony G. Repeated call attempts and their effect on traffic engineering // Budavox Telecommun. Rev. 1976. V. 2. P. 16–26.
5. Falin G.I., Templeton J.G.C. Retrial queues. London : Chapman & Hall, 1997. 320 p.

6. Artalejo J.R. Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue // Ann. Oper. Res. 2002. № 116. P. 41–56.
7. Neuts M.F., Rao B.M. Numerical investigation of a multiserver retrial model // Queueing Syst. 1990. V. 7, № 2. P. 169–189.
8. Dudin A.N., Klimenok V.I., Vishnevsky V.M. The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows. Cham : Springer International Publishing, 2020. 410 p. DOI: 10.1007/978-3-030-32072-0
9. Krishna Kumar B., Vijayalakshmi G., Krishnamoorthy A., Sadiq Basha S. A single server feedback retrial queue with collisions // Computer and operations research. 2010. № 37. P. 1247–1255. DOI: 10.1016/j.cor.2009.04.019
10. Lakaour L., Aïssani D., Adel-Aissanou K. M/M/1 Retrial Queue with Collisions and Transmission Errors // Methodol. Comput. Appl. Probab. 2019. V. 21. P. 1395–1406. DOI: 10.1007/s11009-018-9680
11. Aguir M.S., Aksin O.Z., Karaesmen F., Dallery Y. On the interaction between retrials and sizing of call centers // European Journal of Operational Research. 2008. V. 191, № 2. P. 398–408.
12. Gómez-Corral A. On the applicability of the number of collisions in p-persistent CSMA/CD protocols // Computers & Operations Research. 2010. V. 37, № 7. P. 1199–1211.
13. Artalejo J.R., Pla V. On the impact of customer balking, impatience and retrials in telecommunication systems // Computers and Mathematics with Applications. 2009. V 57, № 2. P. 217–229.
14. Choi B.D., Shin Y.W., Ahn W.C. Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol // Queueing systems. 1992. V. 11, № 4. P. 335–356.
15. Хомичков И.И. Расчет характеристик локальной сети с *p*-настойчивым протоколом случайного множественного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 1995. № 2. С. 67–80.
16. Назаров А.А., Судыко Е.А. Исследование марковской RQ-системы с конфликтами заявок и простейшим входящим потоком // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 3 (12). С. 97–106.
17. Назаров А.А., Судыко Е.А. Условия существования стационарного режима в немарковских RQ-системах с конфликтами заявок // Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. Т. 318, № 5. С. 166–168.
18. Kim J. Retrial queueing system with collision and impatience // Commun. Korean Math. Soc. 2010. № 4. P. 647–653.
19. Wang K., Li N., Jiang Z. Queueing system with impatient customers: A review // Service Operations and Logistics, and Informatics: Proc. of 2010 IEEE International Conference. 2010. P. 82–87. DOI: 10.1109/SOLI.2010.5551611
20. Kim C.S., Dudin S., Taramin O., Baek J. Queueing system MMAP/PH/N/N + R with impatient heterogeneous customers as a model of call center // App. Math. Model. 2013. V. 37, № 3. P. 958–976.
21. Danilyuk E.Y., Fedorova E.A., Moiseeva S.P. Asymptotic Analysis of an Retrial Queueing System M|M|1 with Collisions and Impatient Calls // Automation and Remote Control. 2018. V. 79, № 12. P. 2136–2146.
22. Nazarov A., Sztrik J., Kvach A. et al. Asymptotic analysis of finite-source M/M/1 retrial queueing system with collisions and server subject to breakdowns and repairs // Annals of Operations Research. 2019. V. 277. P. 213–229.
23. Danilyuk E., Moiseeva S., Nazarov A. Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/GI/1 with Collisions and Impatient Calls // Communications in Computer and Information Science. 2019. V. 1109. P. 230–242.
24. Danilyuk E.Yu., Moiseeva S.P., Sztrik Ja. Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Customers, Collisions and Unreliable Server // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. 2020. V. 13, № 2. P. 218–230.
25. Fedorova E., Danilyuk E., Nazarov A., Melikov A. Retrial Queueing System MMPP/M/1 with Impatient Calls under Heavy Load Condition // Lecture Notes in Computer Science. 2019. V. 11688 LNCS. P. 3–15.
26. Danilyuk E., Vygoskaya O., Moiseeva S. Retrial Queue M/M/N with Impatient Customer in the Orbit // Distributed Computer and Communication Networks. 2018. V. 919. P. 493–504.
27. Степанов С.Н. Теория телетрафика: концепции, модели, приложения. М. : Горячая линия–Телеком, 2015. 867 с.

References

1. Artalejo, J.R. & Gómez-Corral, A. (2008) *Retrial Queueing Systems: A Computational Approach*. Berlin: Springer-Verlag.
2. Wilkinson, R.I. (1956) Theories for toll traffic engineering in the USA. *The Bell System Technical Journal.* 35(2). pp. 421–507. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1956.tb02388.x
3. Cohen, J.W. (1957) Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls. *Philips Telecommunication Review.* 18(2). pp. 49–100.
4. Gosztony, G. (1976) Repeated call attempts and their effect on traffic engineering. *Budavox Telecommunication Review*. 2. pp. 16–26.
5. Falin, G.I. & Templeton, J.G.C. (1997) *Retrial Queues.* London: Chapman & Hall.
6. Artalejo, J.R. (2002) Numerical calculation of the stationary distribution of the main multiserver retrial queue. *Annals of Operations Research.* 116. pp. 41–56. DOI: 10.1023/A:1021359709489
7. Neuts, M.F. & Rao, B.M. (1990) Numerical investigation of a multiserver retrial model. *Queueing Systems: Theory and Applications.* 7(2). pp. 169–189. DOI: 10.1007/BF01158473
8. Dudin, A.N., Klimenok, V.I. & Vishnevsky, V.M. (2020) *The Theory of Queuing Systems with Correlated Flows.* Cham: Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-030-32072-0

9. Krishna Kumar, B., Vijayalakshmi, G., Krishnamoorthy, A. & Sadiq Basha, S. (2010) A single server feedback retrial queue with collisions. *Computer and Operations Research*. 37. pp. 1247–1255. DOI: 10.1016/j.cor.2009.04.019
10. Lakaour, L., Aïssani, D. & Adel-Aissanou, K. (2019) M/M/1 Retrial Queue with Collisions and Transmission Errors. *Methodology and Computing in Applied Probability*. 21. pp. 1395–1406. DOI: 10.1007/s11009-018-9680
11. Aguir, M.S., Aksin, O.Z., Karaesmen, F. & Dallery, Y. (2008) On the interaction between retrials and sizing of call centers. *European Journal of Operational Research*. 191(2). pp. 398–408. DOI: 10.1016/j.ejor.2007.06.051
12. Gómez-Corral, A. (2010) On the applicability of the number of collisions in p-persistent CSMA/CD protocols. *Computers & Operations Research*. 37(7). pp. 1199–1211.
13. Artalejo, J.R. & Pla, V. (2009) On the impact of customer balking, impatience and retrials in telecommunication systems. *Computers and Mathematics with Applications*. 57(2). pp. 217–229. DOI: 10.1016/j.camwa.2008.10.084
14. Choi, B.D., Shin, Y.W. & Ahn, W.C. (1992) Retrial queues with collision arising from unslotted CSMA/CD protocol. *Queueing Systems*. 11(4). pp. 335–356. DOI: 10.1007/BF01163860
15. Khomichkov, I.I. (1995) Computation of the characteristics of a local network with a p-persistent protocol of random multiple access. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika – Automation and Remote Control*. 2. pp. 67–80.
16. Nazarov, A.A. & Sudyko, E.A. (2010) Analysis of Markov RQ-system with conflicts of service requests and Poisson incoming flow. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 3(12). pp. 97–106.
17. Nazarov, A.A. & Sudyko, E.A. (2011) The Existence of a Stationary Regime for a non-Markov Systems with Conflicts of Requests. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universitet – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 318(5). pp. 166–168.
18. Kim, J. (2010) Retrial queueing system with collision and impatience. *Communications* of the *Korean Mathematical Society*. 4. pp. 647–653.
19. Wang, K., Li, N. & Jiang, Z. (2010) Queueing system with impatient customers: A review. *Service Operations and Logistics, and Informatics: Proc. of 2010 IEEE International Conference*. pp. 82–87. DOI: 10.1109/SOLI.2010.5551611.
20. Kim, C.S., Dudin, S., Taramin, O. & Baek, J. (2013) Queueing system MMAP/PH/N/N + R with impatient heterogeneous customers as a model of call center. *Applied Mathematical* Modelling. 37(3). pp. 958–976.
21. Danilyuk, E.Y., Fedorova, E.A. & Moiseeva, S.P. (2018) Asymptotic Analysis of an Retrial Queueing System M|M|1 with Collisions and Impatient Calls. *Automation and Remote Control – Automation and Remote Control*. 79(12). pp. 2136–2146. DOI: 10.31857/S000523100002856-5
22. Nazarov, A., Sztrik, J., Kvach, A. et al. (2018) Asymptotic analysis of finite-source M/M/1 retrial queueing system with collisions and server subject to breakdowns and repairs. *Annals of Operations Research*. 277. pp. 213–229.
23. Danilyuk, E., Moiseeva, S. & Nazarov, A. (2019) Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/GI/1 with Collisions and Impatient Calls. *Communications in Computer and Information Science*. 1109. pp. 230–242.
24. Danilyuk, E.Yu., Moiseeva, S.P. & Sztrik, Ja. (2020) Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Customers, Collisions and Unreliable Server. *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics*. 13(2). pp. 218–230.
25. Fedorova, E., Danilyuk, E., Nazarov, A. & Melikov, A. (2019) Retrial Queueing System MMPP/M/1 with Impatient Calls under Heavy Load Condition. *Lecture Notes in Computer Science*. 11688 LNCS. pp. 3–15.
26. Danilyuk, E., Vygoskaya, O. & Moiseeva, S. (2018) Retrial Queue M/M/N with Impatient Customer in the Orbit. *Distributed Computer and Communication Networks*. 919. pp. 493–504.
27. Stepanov, S.N. (2020) *Teoriya teletrafika: kontseptsii, modeli, prilozheniya* [Teletraffic Theory: Concepts, Models, Applications]. Moscow: Goryachaya liniya–Telekom.

***Информация об авторах*:**

Полховская Анна Васильевна – магистрант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: anya.polxovskaya00@mail.ru

Данилюк Елена Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: daniluc.elena.yu@gmail.com

Моисеева Светлана Петровна – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: smoiseeva@mail.ru

Бобкова Ольга Сергеевна – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: osia153@yandex.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the authors*:**
Polkhovskaya Anna Vasilievna – Student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: anya.polxovskaya00@mail.ru
Danilyuk Elena Yurievna – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: daniluc.elena.yu@gmail.com
Moiseeva Svetlana Petrovna – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: smoiseeva@mail.ru
Bobkova Olga Sergeevna – Post-Graduate Student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: osia153@yandex.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 29.09.2021; принята к публикации 28.02.2022

Received 29.09.2021; accepted for publication 28.02.2022