ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2022 Управление, вычислительная техника и информатика № 58
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

Научная статья
УДК 519.2
doi: 10.17223/19988605/58/5

Исследование СМО вида MMPP|M|N с обратной связью методом асимптотического анализа

Анатолий Андреевич Назаров[1], Екатерина Алексеевна Павлова[2]

[1, 2] Томский государственный университет, Томск, Россия
[1] nazarov.tsu@gmail.com
[2] pavlovakatya_2010@mail.ru

Аннотация. Рассматривается система массового обслуживания с N обслуживающими приборами с обратной связью и орбитой. Считается, что ограничений на количество заявок, поступающих на орбиту, нет. Входящий поток является марковски модулированным пуассоновским (MMPP). Методом асимптотического анализа находятся распределения вероятностей числа занятых приборов в системе и числа заявок на орбите.

Ключевые слова: многоканальная система массового обслуживания; орбита; мгновенная обратная связь; отложенная обратная связь; метод асимптотического анализа

Для цитирования: Назаров А.А., Павлова Е.А. Исследование СМО вида MMPP|M|N с обратной связью методом асимптотического анализа // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2022. № 58. С. 47–57. doi: 10.17223/19988605/58/5

Original article
doi: 10.17223/19988605/58/5

Asymptotical analysis of queueing system MMPP|M|N with feedback

Anatoly A. Nazarov[1], Ekaterina A. Pavlova[2]

[1, 2] Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation
[1] nazarov.tsu@gmail.com
[2] pavlovakatya_2010@mail.ru

Abstract. Let us consider a queueing system MMPP|M|N with two types of feedback. Customer, entering the system in accordance with the MMPP flow, is sent to the server if at least one of the N servers is idle, otherwise it goes into the orbit, where it delays for a random time distributed exponentially with the parameter σ. Customer services during a random time exponentially distributed with the parameter μ; at the moment of service completion, customer may leave the system with probability r_0; perform instantaneous feedback with probability r_1 or perform delayed feedback with probability r_2. The problem is to obtain the probability distribution of the process $n(t)$ is the number of occupied servers in the system and process $i(t)$ is the number of customers in the orbit.

In Section 2, we write system of Kolmogorov differential equations for stationary probability distribution $P\{k(t)=k,n(t)=n,i(t)=i\}=P(k,n,i)$ and a system of Kolmogorov differential equations is written in matrix form for a vector of partial characteristic functions.

Section 3 contains an asymptotic analysis of the matrix equation for the vector of partial characteristic functions of the number of customers in the orbit. The main results of the research are the following theorems.

Theorem 1. In the considered feedback system under asymptotic condition $\varepsilon \to 0$ asymptotic characteristic function of the normalized number $i(t)$ of customers has the form

$$\lim_{\sigma\to 0} M\{e^{jw\sigma i(t)}\} = e^{jw\kappa},$$

where parameter κ is a positive root $x = \kappa$ of the scalar equation

$$\mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I_0})\mathbf{e} = 0,$$

where row-vector $\mathbf{R} = \{R(0), R(1), ..., R(N)\}$ is probability distribution of number of occupied servers in the system, and is a solution of the system of equations

$$\mathbf{R}\left\{(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - x(\mathbf{I_0} - \mathbf{I_1})\right\} = 0,$$

$$\mathbf{Re} = 1.$$

Theorem 2. In the considered feedback system asymptotic characteristic function of centered and normalized number of customers in the orbit has the form

$$\lim_{\sigma\to 0} M\{e^{jw\sqrt{\sigma}(i(t)-\frac{\kappa}{\sigma})}\} = \Phi(w) = e^{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2},$$

where

$$\kappa_2 = \frac{\kappa\mathbf{RI_0e} + \mathbf{g}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I_0})\mathbf{e}}{\mathbf{RI_0e} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B} - \kappa\mathbf{I_0})\mathbf{e}},$$

row-vectors $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{g}$ are solutions of the following systems of equations:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I_0} - \mathbf{I_1})) = \mathbf{R}(\mathbf{I_0} - \mathbf{I_1}),$$

$$\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e} = 0;$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{A} + \mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I_0} - \mathbf{I_1})) = \mathbf{R}\kappa(\mathbf{I_1} - \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{ge} = 0.$$

Section 4 presents the results of a numerical experiment, performing its accuracy and area of applicability of the proposed asymptotic method comparing with the results of simulation.

Keywords: multi-channel queueing system; orbit; instantaneous feedback; delayed feedback; asymptotic analysis

For citation: Nazarov, A.A., Pavlova, E.A. (2022) Asymptotical analysis of queueing system MMPP|M|N with feedback. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 58. pp. 47–57. doi: 10.17223/19988605/58/5

Обратная связь в контексте систем массового обслуживания понимается как повторное обращение заявки к обслуживающему устройству. Считается, что качество предоставленного обслуживания определяется интенсивностью повторного обращения заявок. Клиент может вернуться в систему за повторным обслуживанием по разным причинам: качественное первичное обслуживание, как гарантия качества последующих обращений или, наоборот, прерванное обслуживание или по каким-либо причинам не удовлетворяющее требованиям клиента. Самым очевидным примером таких систем являются сети коммуникации, при использовании которых искажение данных приводит к повторному отправлению данных адресату.

В исследуемых системах существует два типа обратной связи, которые называют мгновенной и отсроченной обратной связью. После завершения обслуживания заявка может покинуть систему или потребовать повторного обслуживания мгновенно. Отсроченная связь реализуется посредством отправки заявки на орбиту, где она ожидает повторного обращения к обслуживающему устройству в течение случайного времени.

Одни из первых публикаций, представляющих результаты исследований систем с повторными обращениями, принадлежат Л. Такачу [1, 2]. В них исследованы одноканальные системы массового обслуживания с неограниченной очередью и орбитой методом производящих функций.

Исследования Такача в свое время были уникальными в данной тематике, и после его работ длительное время новые публикации не появлялись. В последние три десятилетия СМО с обратной связью активно исследуются. Отметим, что в [1, 3–10] представлены результаты исследований СМО с мгновенной обратной связью, а в [2, 11–21] изучены СМО с отстроченной, или отложенной, обратной связью. Также ряд работ [22–25] посвящен исследованию систем с обоими типами связей (в [22] имеется обзор публикаций до 2015 г.).

Основная задача исследования систем массового обслуживания с обратной связью заключается в получении распределения вероятностей для многомерных цепей Маркова, представляющих математический смысл моделей. При исследовании моделей умеренной размерности с этой задачей помогают справиться программные средства, основанные на решении балансовых уравнений [26–27]. Также, используя различные подходы в решении основной задачи, ученые применяют матрично-геометрический метод [28] и спектральный метод [29], а также их модификации. Следует отметить, что в использовании вышеуказанных методов встречаются и достаточно серьезные вычислительные проблемы, что серьезно повышает сложность решения.

В настоящей работе при изучении СМО с мгновенной и отложенной обратной связью использован метод асимптотического анализа.

1. Математическая модель и постановка задачи

Рассмотрим систему массового обслуживания с N обслуживающими устройствами и обратной связью (рис. 1). На вход системы поступает MMPP-поток заявок, заданный диагональной матрицей условных интенсивностей $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_k],\ k = 1, 2, ..., K$, матрицей инфинитезимальных характеристик $\mathbf{Q} = [q_{ij}],\ i, j = 1, 2, ..., N$, управляющей цепи Маркова $k(t) = 1, 2, ..., K$.

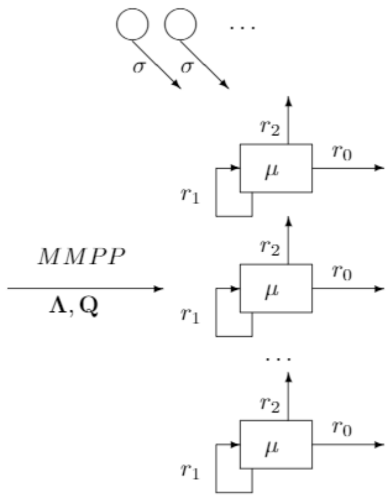

Рис. 1. СМО вида MMPP|M|N с обратной связью
Fig. 1. Queueing system MMPP|M|N with feedback

При поступлении в систему заявка занимает свободный прибор, где получает обслуживание в течение случайного времени, распределенного экспоненциально с параметром μ. Если в момент поступления в систему заявка обнаружит прибор занятым, она немедленно отправляется на орбиту, где осуществляет задержку в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром σ.

В момент окончания обслуживания заявка может покинуть систему с вероятностью r_0, отправиться на повторное обслуживание, осуществляя мгновенную обратную связь, с вероятностью r_1, отправиться на орбиту, осуществляя отсроченную обратную связь с вероятностью r_2, где она задерживается в течение случайного времени, экспоненциально распределенного с параметром σ, после чего требует повторного обслуживания. Если в момент поступления заявки с орбиты устройство оказывается свободным, то она занимает его в течение случайного времени, которое имеет экспоненциальное распределение с тем же параметром μ. Иными словами, первичные (заявки, которые поступают извне) и повторные заявки (заявки, которые поступают с орбиты) являются идентичными по времени их обслуживания, т.е. первичные и повторные заявки в приборах не различаются. Если в момент поступления повторной заявки с орбиты все приборы заняты, то она остается на орбите для повторения своего запроса. Предполагается, что возможны многократные повторения запросов для обслуживания, т.е. не имеется ограничений на число повторений обслуживания.

Обозначим $k(t)=k$ – состояние цепи Маркова, управляющей MMPP-потоком в момент времени t, $k=1,2,...,K$, $n(t)$ – число занятых приборов в системе в момент времени t, $n=0,1,...,N$, $i(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t.

Ставится задача получения трехмерного стационарного распределения вероятностей

$$P(k,n,i)=P\{k(t)=k,n(t)=n,i(t)=i\}.$$

2. Система уравнений Колмогорова

Рассмотрим трехмерный марковский процесс $\{k(t),n(t),i(t)\}$, для его стационарного распределения вероятностей $P\{k(t)=k,n(t)=n,i(t)=i\}=P(k,n,i)$ запишем систему уравнений Колмогорова:

$$\begin{gathered}
-(\lambda_k+(1-r_1)n\mu+i\sigma)P(k,n,i)+\lambda_k P(k,n-1,i)+\\
+(i+1)\sigma P(k,n-1,i+1)+(n+1)r_0\mu P(k,n+1,i)+\\
+(n+1)r_2\mu P(k,n+1,i-1)+\sum_{\nu}q_{\nu k}P(\nu,n,i)=0, 0\le n\le N-1,\\
-(\lambda_k+(1-r_1)N\mu)P(k,N,i)+\lambda_k P(k,N-1,i)+\\
+\lambda_k P(k,N,i-1)+(i+1)\sigma P(k,N-1,i+1)+\sum_{\nu}q_{\nu k}P(\nu,N,i)=0.
\end{gathered} \tag{1}$$

Введем частичные характеристические функции вида

$$H(k,n,u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(k,n,i),$$

где $j=\sqrt{-1}$ мнимая единица. Тогда можем переписать систему (1):

$$\begin{gathered}
-(\lambda-k+n\mu(1-r_1))H(k,n,u)+\lambda_k H(k,n-1,u)+j\sigma\frac{\partial H(k,n,u)}{\partial u}+\\
+(n+1)\mu(r_0+r_2e^{ju})H(k,n+1,u)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H(k,n-1,u)}{\partial u}+\\
+\sum_{\nu}q_{\nu k}H(\nu,n,u)=0, 0\le n\le N-1,\\
(\lambda_k(e^{ju}-1)-N\mu(1-r_1))H(k,N,u)+\\
+\lambda_k H(k,N-1,u)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H(k,N-1,u)}{\partial u}+\sum_{\nu}q_{\nu k}H(\nu,N,u)=0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Обозначим вектор-строки

$$\mathbf{H}(n,u)=\{H(1,n,u),...,H(K,n,u)\},$$

$$\frac{\partial\mathbf{H}(n,u)}{\partial u}=\left\{\frac{\partial H(1,n,u)}{\partial u},...,\frac{\partial H(K,N,u)}{\partial u}\right\}$$

и перепишем (2) в матричном виде с учетом введенных обозначений:

$$\begin{gathered}
\mathbf{H}(n,u)(\mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-n\mu(1-r_1)\mathbf{I})+\mathbf{H}(n-1,u)\mathbf{\Lambda}+j\sigma\frac{\partial\mathbf{H}(n,u)}{\partial u}+\\
+(n+1)\mu(r_0+r_2e^{ju})\mathbf{H}(n+1,u)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{H}(n-1,u)}{\partial u}=0, 0\le n\le N-1,\\
\mathbf{H}(N,u)(\mathbf{Q}-(1-e^{ju})\mathbf{\Lambda}-N\mu(1-r_1)\mathbf{I})+\mathbf{H}(n-1,u)\mathbf{\Lambda}-\\
-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial\mathbf{H}(N-1,u)}{\partial u}=0,
\end{gathered} \tag{3}$$

здесь $\mathbf{I}$ – единичная матрица размерности $K\times K$.

Введем следующие векторные обозначения:

$$\mathbf{H}(u)=\{\mathbf{H}(0,u),\mathbf{H}(1,u),...,\mathbf{H}(N,u)\},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u}=\left\{\frac{\partial \mathbf{H}(0,u)}{\partial u},\frac{\partial \mathbf{H}(1,u)}{\partial u},...,\frac{\partial \mathbf{H}(N,u)}{\partial u}\right\},$$

и перепишем уравнения (3) в новой матричной форме:

$$\mathbf{H}(u)\left(\mathbf{A}+e^{ju}\mathbf{B}\right)+j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u}\left(\mathbf{I_0}-e^{-ju}\mathbf{I_1}\right)=0,$$

где

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda} & \mathbf{\Lambda} & 0 & ... & 0 \\ \mu r_0\mathbf{I} & \mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-\mu\mathbf{I}(r_0+r_2) & \mathbf{\Lambda} & ... & 0 \\ 0 & 2\mu\mathbf{I}r_0 & \mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-2\mu\mathbf{I}(r_0+r_2)) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \mathbf{Q}-\mathbf{\Lambda}-N\mu\mathbf{I}(r_0+r_2)) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \mu\mathbf{I}r_2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu\mathbf{I}r_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & N\mu\mathbf{I}r_2 & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I_0}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I_1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Умножим матричное уравнение на единичный вектор-столбец $\mathbf{e}$, принимая во внимание $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{e}=0$ и $(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})\mathbf{e}=0$, получим

$$\mathbf{H}(u)\mathbf{Be}+j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u}\mathbf{I_0e}=0.$$

Таким образом, матричная система (3) и скалярное уравнение примут вид:

$$\mathbf{H}(u)\left(\mathbf{A}+e^{ju}\mathbf{B}\right)+j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u}\left(\mathbf{I_0}-e^{-ju}\mathbf{I_1}\right)=0,$$

$$\mathbf{H}(u)\mathbf{Be}+j\sigma e^{-ju}\frac{\partial \mathbf{H}(u)}{\partial u}\mathbf{I_0e}=0. \tag{4}$$

Будем искать решение задачи (4) методом асимптотического анализа в условии большой задержки заявки на орбите, т.е. $\sigma\to 0$.

3. Метод асимптотического анализа

Обозначим $\sigma=\varepsilon$ и выполним следующие замены в (4):

$$u=\varepsilon w,\ \mathbf{H}(u)=\mathbf{F}(w,\varepsilon). \tag{5}$$

С учетом замен (5) перепишем уравнения (4):

$$\mathbf{F}(w,\varepsilon)\left(\mathbf{A}+e^{j\varepsilon w}\mathbf{B}\right)+j\frac{\partial \mathbf{F}(w,\varepsilon)}{\partial w}\left(\mathbf{I_0}-e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I_1}\right)=0,$$

$$\mathbf{F}(w,\varepsilon)\mathbf{Be}+je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial \mathbf{F}(w,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{I_0e}=0. \tag{6}$$

Для решения системы (6) в условии $\varepsilon\to 0$ особо важными являются следующие утверждения.

Теорема 1. В рассматриваемой системе с обратной связью в предельном условии $\varepsilon \to 0$ предельная характеристическая функция нормированного числа $i(t)$ заявок на орбите имеет вид:

$$\lim_{\sigma \to 0} M\{e^{jw\sigma i(t)}\} = e^{jw\kappa}, \tag{7}$$

где значением параметра κ является положительный корень $x = \kappa$ скалярного уравнения

$$\mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I_0})\mathbf{e} = 0, \tag{8}$$

где вектор-строка $\mathbf{R} = \{R(0), R(1), ..., R(N)\}$ – распределение вероятностей числа занятых приборов в системе, является решением системы уравнений

$$\begin{gathered} \mathbf{R}\left\{(\mathbf{A}+\mathbf{B}) - x(\mathbf{I_0} - \mathbf{I_1})\right\} = 0, \\ \mathbf{Re} = 1. \end{gathered} \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим первое равенство в системе (6) в предельном условии $\varepsilon \to 0$, обозначим $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathbf{F}(w, \varepsilon) = \mathbf{F}(w)$ и получим

$$\mathbf{F}(w)(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + j\frac{\partial \mathbf{F}(w)}{\partial w}(\mathbf{I_0} - \mathbf{I_1}) = 0. \tag{10}$$

Будем искать решение $\mathbf{F}(w)$ системы (10) в виде $\mathbf{F}(w) = \mathbf{R}e^{jwx}$, тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \mathbf{R}\left\{(\mathbf{A}+\mathbf{B}) - x(\mathbf{I_0} - \mathbf{I_1})\right\} = 0, \\ \mathbf{Re} = 1, \end{gathered} \tag{11}$$

что совпадает с (9) из формулировки теоремы.

Так как $F(w)\mathbf{e} = e^{jwx}$, необходимо найти значение $x = \kappa$ из (7). Рассмотрим теперь второе равенство (6) в предельном условии $\varepsilon \to 0$:

$$\mathbf{F}(w)\mathbf{Be} + j\frac{\partial \mathbf{F}(w)}{\partial w}\mathbf{I_0 e} = 0,$$

и подставим решение в виде $\mathbf{F}(w) = \mathbf{R}e^{jwx}$, тогда

$$\mathbf{R}(x)(\mathbf{B} - x\mathbf{I_0})\mathbf{e} = 0. \tag{12}$$

Таким образом, значением параметра κ является решение последнего скалярного уравнения, что совпадает с (8).

Для дальнейшего исследования системы с обратной связью в (4) выполним замену

$$\mathbf{H}(u) = e^{j\frac{u}{\sigma}\kappa}\mathbf{H}^{(2)}(u),$$

получим систему

$$\begin{gathered} \mathbf{H}^{(2)}(u)(\mathbf{A} + e^{ju}\mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I_0} - e^{-ju}\mathbf{I_1})) + j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u)}{\partial u}(\mathbf{I_0} - e^{-ju}\mathbf{I_1}) = 0, \\ \mathbf{H}^{(2)}(u)(\mathbf{Be} - \kappa e^{-ju}\mathbf{I_0 e}) + e^{-ju}j\sigma\frac{\partial \mathbf{H}^{(2)}(u)}{\partial u}\mathbf{I_0 e} = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и выполним в (13) следующие замены:

$$u = \varepsilon w, \mathbf{H}^{(2)}(u) = \mathbf{F}^{(2)}(w, \varepsilon), \tag{14}$$

получим

$$\begin{gathered} \mathbf{F}^{(2)}(w,\varepsilon)(\mathbf{A} + e^{j\varepsilon w}\mathbf{B} - \kappa(\mathbf{I_0} - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I_1})) + \\ + j\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}(\mathbf{I_0} - e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I_1}) = 0, \\ \mathbf{F}^{(2)}(w,\varepsilon)(\mathbf{Be} - \kappa e^{-j\varepsilon w}\mathbf{I_0 e}) + e^{-j\varepsilon w}j\varepsilon\frac{\partial \mathbf{F}^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}\mathbf{I_0 e} = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Основным результатом исследования рассматриваемой системы является следующее утверждение.

Теорема 2. Предельная характеристическая функция центрированного и нормированного числа заявок на орбите в рассматриваемой системе с обратной связью имеет вид:

$$\lim_{\sigma\to 0} M\{e^{jw\sqrt{\sigma}(i(t)-\frac{\kappa}{\sigma})}\} = \Phi(w) = e^{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2},$$

где

$$\kappa_2 = \frac{\kappa\mathbf{R}\mathbf{I_0}\mathbf{e} + \mathbf{g}(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I_0})\mathbf{e}}{\mathbf{R}\mathbf{I_0}\mathbf{e} - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I_0})\mathbf{e}}, \tag{16}$$

здесь вектор-строки $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{g}$ определяются соответственно следующими системами уравнений:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\kappa(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})) = \mathbf{R}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}), \quad \boldsymbol{\varphi}\mathbf{e} = 0; \tag{17}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\kappa(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})) = \mathbf{R}\kappa(\mathbf{I_1}-\mathbf{B}), \quad \mathbf{g}\mathbf{e} = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Запишем первое уравнение системы (15), используя разложение $e^{j\varepsilon w} = 1 + j\varepsilon w + O(\varepsilon^2)$:

$$\mathbf{F}^{(2)}(w,\varepsilon)[\mathbf{A}+\mathbf{B}+j\varepsilon w\mathbf{B}-\kappa(\mathbf{I_0}-(1-j\varepsilon w)\mathbf{I_1})] + j\varepsilon\frac{\partial\mathbf{F}^{(2)}(w,\varepsilon)}{\partial w}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}) = O(\varepsilon^2).$$

Решение будем искать в виде:

$$\mathbf{F}^{(2)}(w,\varepsilon) = \Phi(w)\{\mathbf{R}+j\varepsilon w\mathbf{f}\} + O(\varepsilon^2), \tag{19}$$

здесь $\Phi(w)$ – некоторая скалярная функция, которую определим ниже.

Получаем

$$\Phi(w)\{\mathbf{R}+j\varepsilon w\mathbf{f}\}[\mathbf{A}+\mathbf{B}+j\varepsilon w\mathbf{B}-\kappa(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}+j\varepsilon w\mathbf{I_1})] + j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w)}{\partial w}\mathbf{R}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}) = O(\varepsilon^2),$$

тогда, принимая во внимание (11), получим

$$\mathbf{R}j\varepsilon w(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I_1}) + j\varepsilon w\mathbf{f}[\mathbf{A}+\mathbf{B}-\kappa(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})] + j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w)/\partial w}{\Phi(w)}\mathbf{R}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}) = O(\varepsilon^2).$$

Разделим последнее уравнение на $j\varepsilon w$ и, устремляя $\varepsilon\to 0$, получим

$$\mathbf{R}(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I_1}) + \mathbf{f}[\mathbf{A}+\mathbf{B}-\kappa(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})] + \frac{\partial\Phi(w)/\partial w}{w\Phi(w)}\mathbf{R}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}) = 0.$$

Из последней системы следует, что выражение $\frac{\partial\Phi(w)/\partial w}{w\Phi(w)}$ не зависит от *w*, поэтому обозначим

$$\frac{\partial\Phi(w)/\partial w}{w\Phi(w)} = -\kappa_2,$$

перепишем систему с учетом нового обозначения:

$$\mathbf{f}[\mathbf{A}+\mathbf{B}-\kappa(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})] = \kappa_2\mathbf{R}(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}) + \mathbf{R}\kappa(\mathbf{I_1}-\mathbf{B}). \tag{20}$$

Решение $\mathbf{f}$ последней системы можем записать в виде:

$$\mathbf{f} = C\mathbf{R} + \mathbf{g} + \kappa_2\boldsymbol{\varphi}. \tag{21}$$

Подставив это разложение в (20), для векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{g}$ получим системы

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-x(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1})) = \mathbf{R}(\mathbf{I_1}-\mathbf{I_0}),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-x(\mathbf{I_0}-\mathbf{I_1}))=\mathbf{R}\kappa(\mathbf{I_1}-\mathbf{B}),$$

совпадающие с (17) и (18). Векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{g}$ являются частными решениями неоднородных систем (17) и (18), поэтому они удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, которые выберем в виде $\boldsymbol{\varphi}\mathbf{e}=0$ и $\mathbf{g}\mathbf{e}=0$. Тогда решения φ и $\mathbf{g}$ систем (17) и (18), удовлетворяющие этим условиям, определяются однозначно.

Теперь рассмотрим второе уравнение (15) и подставим в него разложение (19), принимая во внимание (8), можем записать

$$\mathbf{R}\kappa\mathbf{I_0}\mathbf{e}+\mathbf{f}(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I_0})\mathbf{e}+\frac{\partial\Phi(w)/\partial w}{w\Phi(w)}\mathbf{R}\mathbf{I_0}\mathbf{e}=0. \tag{22}$$

Так как

$$\frac{\partial\Phi(w)/\partial w}{w\Phi(w)}=-\kappa_2,$$

то

$$\mathbf{f}(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I_0})\mathbf{e}+\kappa\mathbf{R}\mathbf{I_0}\mathbf{e}-\kappa_2\mathbf{R}\mathbf{I_0}\mathbf{e}=0, \tag{23}$$

вектор $\mathbf{f}$ в полученном равенстве запишем в виде (21). Принимая во внимание (8) и преобразовывая (23), запишем равенство

$$\kappa_2[\mathbf{R}\mathbf{I_0}\mathbf{e}-\varphi(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I_0})]\mathbf{e}=\kappa\mathbf{R}\mathbf{I_0}\mathbf{e}+\mathbf{g}(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I_0})\mathbf{e},$$

откуда получаем выражение для κ_2

$$\kappa_2=\frac{\kappa\mathbf{R}\mathbf{I_0}\mathbf{e}+\mathbf{g}(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I_0})\mathbf{e}}{\mathbf{R}\mathbf{I_0}\mathbf{e}-\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I_0})\mathbf{e}},$$

которое совпадает с (16) в формулировке теоремы. Теорема доказана.

4. Асимптотически гауссовская аппроксимация

Обозначим $G(x)$ – функцию гауссовского распределения с параметрами $\frac{\kappa}{\sigma}$ и $\sqrt{\frac{\kappa_2}{\sigma}}$. Дискретное распределение вероятностей

$$P_1(i)=(G(i+0{,}5)-G(i-0{,}5))(1-G(-0{,}5))^{-1} \tag{24}$$

будем называть асимптотически гауссовской аппроксимацией распределения вероятностей $P(i)=P\{i(t)=i\}$ числа $i(t)$ заявок на орбите для рассматриваемой системы MMPP|M|N с обратной связью.

Нетрудно показать, что условием существования стационарного режима рассматриваемой системы является неравенство

$$\lambda<r_0\mu N,$$

которое запишем в виде

$$\lambda=\rho r_0\mu N,\quad 0<\rho<1. \tag{25}$$

При любой аппроксимации, в том числе и для (24), принципиально важным является определение ее точности и области применимости, т.е. области тех значений сетевых параметров загрузки ρ и параметра σ, значения которого в теоретических исследованиях являются бесконечно малыми ($\sigma\to 0$).

Точность аппроксимации будем определять расстоянием Колмогорова

$$\Delta=\max_{0\le i<\infty}\Big|\sum_{n=0}^{i}(P(n)-P_1(n))\Big|. \tag{26}$$

Для нахождения значений величины Δ необходимо знать исходное распределение вероятностей $P(i)$. Это распределение вероятностей найдем в частном случае для рассматриваемой системы с обратной связью при N = 5, т.е. для системы M|M|5 с обратной связью в результате имитационного моделирования. Матрицы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{\Lambda_1} = \rho\mathbf{\Lambda}$, определяющие входящий MMPP-поток, заданы следующим образом:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0,7 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & -0,8 \end{bmatrix}, \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ 0 & 2,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Для $\mu = 1$, $r_0 = 0,5$, $r_1 = 0,2$, $r_2 = 0,3$ в нижеприведенной таблице указаны значения Δ из (26) при указанных значения параметров ρ и σ.

Расстояние Колмогорова

	σ = 0,5	σ = 0,2	σ = 0,1	σ = 0,05
ρ = 0,6	0,083	0,047	0,038	0,030
ρ = 0,7	0,098	0,069	0,049	0,038
ρ = 0,8	0,114	0,094	0,079	0,056
ρ = 0,9	0,179	0,123	0,100	0,074

Предположим, что приближение $P_1(n)$ приемлемо, если его точность составляет $\Delta < 0,05$. Таким образом, можно сделать вывод: предложенное приближение $P_1(n)$ приемлемо практически во всем диапазоне значений параметров ρ и σ. Точность аппроксимации возрастает (Δ уменьшается) с уменьшением значения параметра σ, что довольно естественно из-за условия $\sigma \to 0$.

Заключение

В данной работе рассмотрена система вида MMPP|M|N с обратной связью. В предельном условии большой задержки $(\sigma \to 0)$ заявок на орбите с возможностью осуществить отложенную обратную связь получены распределения вероятностей числа занятых приборов в системе и предельное гауссовское распределение вероятностей нормированного числа заявок на орбите. Предложена асимптотически гауссовская аппроксимация для дискретного распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Список источников

1. Takacs L. A single-server queue with feedback // Bell System Technical Journal. 1963. V. 42. P. 505–519.
2. Takacs L. A queuing model with feedback // Operations Research. 1977. V. 11. P. 345–354.
3. Назаров А.А., Моисеева С.П., Морозова А.С. Исследования СМО с повторным обслуживанием и неограниченным числом обслуживающих приборов методом предельной декомпозиции // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, вып. 5. С. 88–92.
4. Моисеева С.П., Захорольная И.А. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок с повторными обращениями // Автометрия. Т. 47, вып. 6. С. 51–58.
5. Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., Breuer L., Krieger U. The queuing model MAP/PH/1/N with feedback operating in a Markovian random environment // Austrian Journal of Statistics. 2005. V. 34, is. 2. P. 101–110.
6. Wortman M.A., Disney R.L., Kiessler P.C. The M/GI/1 Bernoulli feedback queue with vacations // Queueing Systems. 1991. V. 9, is. 4. P. 353–363.
7. D'Avignon G.R., Disney R.L. Queues with instantaneous feedback // Management Sciences. 1997. V. 24, is. 2. P. 168–180.
8. Berg J.L., Boxma O.J. The M/G/1 queue with processor sharing and its relation to feedback queue // Queueing Systems. 1991. V. 9, is. 4. P. 365–402.
9. Hunter J.J. Sojourn time problems in feedback queue // Queueing Systems. 1989. V. 5, is. 1-3. P. 55–76.
10. Melikov A.Z., Zadiranova A., Moiseev A. Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback // Communications in Computer and Information Science. 2016. V. 678. P. 231–240.
11. Pekoz E.A., Joglekar N. Poisson traffic flow in a general feedback // Journal of Applied Probability. 2002. V. 39, is. 3. P. 630–636.
12. Lee H.W., Seo D.W. Design of a production system with feedback buffer // Queueing Systems. 1997. V. 26, is. 1. P. 187–198.
13. Lee H.W., Ahn B.Y. Analysis of a production system with feedback buffer and general dispatching time // Mathematical Problems in Engineering. 2000. V. 5. P. 421–439.

14. Foley R.D., Disney R.L. Queues with delayed feedback // Advances in Applied Probability. 1983. V. 15, is. 1. P. 162–182.
15. Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G. M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under non-pre-emptive priority service by matrix geometric method // Applied Mathematical Sciences. 2010. V. 4. P. 2379–2389.
16. Ayyapan G., Subramanian A.M.G., Sekar G. M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under pre-emptive priority service // International Journal of Computer Applications. 2010. V. 2. P. 27–34.
17. Bouchentouf A.A., Belarbi F. Performance evaluation of two Markovian retrial queuing model with balking and feedback // Acta Univ. Sapientiae. Mathematica. 2013. V. 5. P. 132–146.
18. Choi B.D., Kim Y.C., Lee Y.W. The M/M/c retrial queue with geometric loss and feedback // Computers and Mathematics with Applications. 1998. V. 36. P. 41–52.
19. Krishna Kumar B., Rukmani R., Thangaraj V. On multiserver feedback retrial queue with finite buffer // Applied Mathematical Modeling. 2009. V. 33. P. 2062–2083.
20. Do T.V. An efficient computation algorithm for a multiserver feedback retrial queue with a large queuing capacity // Applied Mathematical Modeling. 2010. V. 34. P. 2272–2278.
21. Mokaddis G.S., Metwally S.A., Zaki B.M. A feedback retrial queuing system with starting failures and single vacation // Tamkang Journal of Science and Engineering. 2007. V. 10. P. 183–192.
22. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Methods for analysis of queuing models with instantaneous and delayed feedbacks // Communications in Computer and Information sciences. 2015. V. 564. P. 185–199.
23. Koroliuk V.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Methods for analysis of multi-channel queuing models with instantaneous and delayed feedbacks // Cybernetics and System Analysis. 2016. V. 52, is. 1. P. 58–70.
24. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Hierarchical space merging algorithm to analysis of open tandem queuing networks // Cybernetics and System Analysis. 2016. V. 52, is. 6. P. 867–877.
25. Melikov A.Z., Aliyeva S.H. Refined approximate algorithm for steady-state probabilities of the large-scale queuing systems with instantaneous and delayed feedbacks // Communications in Computer and Information sciences. 2019. V. 1109. P. 188–201.
26. Sztrik J., Efrosinin D. Tool supported reliability analysis of finite-source retrial queues // Automation and Remote Control. 2010. V. 71. P. 1388–1393.
27. Berczes T., Sztrik J., Toth A., Nazarov A.A. Performance modeling of finite-source retrial queueing systems with collisions and non-reliable server using MOSEL // Communications in Computer and Information Science. 2017. V. 700. P. 248–258.
28. Neuts M.F. Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach. Baltimore : John Hopkins University Press, 1981. 332 p.
29. Mitrani I., Chakka R. Spectral expansion solution for a class of Markov models: application and comparison with the matrix-geometric method // Performance Evaluation. 1995. V. 23. P. 241–260.

References

1. Takacs, L. (1963) A single-server queue with feedback. *Bell System Technical Journal*. 42. pp. 505–519. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1963.tb00510.x
2. Takacs, L. (1977) A queuing model with feedback. *Operations Research*. 11. pp. 345–354.
3. Nazarov, A.A., Moiseeva, S.P. & Morozova, A.S. (2008) Analysis of RQ-system with an unlimited number of servers by the method of limiting decomposition. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computing Technology.* 13(5). pp. 88–92.
4. Moiseeva, S.P. & Zakhorolnaya, I.A. (n.d.) Mathematical model of parallel service of multiple customers with feedback. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 47(6). pp. 51–58.
5. Dudin, A.N., Kazimirsky, A.V., Klimenok, V.I., Breuer, L. &Krieger, U. (2005) The queuing model MAP/PH/1/N with feedback operating in a Markovian random environment. *Austrian Journal of Statistics*. 34(2). pp. 101–110. DOI: 10.17713/ajs.v34i2.403
6. Wortman, M.A., Disney, R.L. & Kiessler, P.C. (1991) The M/GI/1 Bernoulli feedback queue with vacations. *Queueing Systems*. 9(4). pp. 353–363. DOI: 10.1007/BF01159222
7. D'Avignon, G.R. & Disney, R.L. (1997) Queues with instantaneous feedback. *Management Sciences.* 24(2). pp. 168–180. DOI: 10.1287/mnsc.24.2.168
8. Berg, J.L. & Boxma, O.J. (1991) The M/G/1 queue with processor sharing and its relation to feedback queue. *Queueing Systems*. 9(4). pp. 365–402. DOI: 10.1007/BF01159223
9. Hunter, J.J. (1989) Sojourn time problems in feedback queue. *Queueing Systems*. 5(1–3). pp. 55–76.
10. Melikov, A.Z., Zadiranova, A. & Moiseev, A. (2016) Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback. *Communications in Computer and Information Science*. 678. pp. 231–240.
11. Pekoz, E.A. & Joglekar, N. (2002) Poisson traffic flow in a general feedback. *Journal of Applied Probability*. 39(3). pp. 630–636. DOI: 10.1239/jap/1034082133
12. Lee, H.W. & Seo, D.W. (1997) Design of a production system with feedback buffer. *Queueing Systems*. 26(1). pp. 187–198.
13. Lee, H.W. & Ahn, B.Y. (2000) Analysis of a production system with feedback buffer and general dispatching time. *Mathematical Problems in Engineering*. 5. pp. 421–439. DOI: 10.1155/S1024123X99001179
14. Foley, R.D. & Disney, R.L. (1983) Queues with delayed feedback. *Advances in Applied Probability*. 15(1). pp. 162–182.
15. Ayyapan, G., Subramanian, A.M.G. & Sekar, G. (2010) M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under non-pre-emptive priority service by matrix geometric method. *Applied Mathematical Sciences*. 4. pp. 2379–2389.

16. Ayyapan, G., Subramanian, A.M.G. & Sekar, G. (2010) M/M/1 retrial queuing system with loss and feedback under pre-emptive priority service. *International Journal of Computer Applications*. 2. pp. 27–34. DOI: 10.5120/672-945
17. Bouchentouf, A.A. & Belarbi, F. (2013) Performance evaluation of two Markovian retrial queuing model with balking and feedback. *Acta Univ. Sapientiae. Mathematica*. 5. pp. 132–146. DOI: 10.2478/ausm-2014-0009
18. Choi, B.D., Kim, Y.C. & Lee, Y.W. (1998) The M/M/c retrial queue with geometric loss and feedback. *Computers and Mathematics with Applications*. 36. pp. 41–52. DOI: 10.1016/S0898-1221(98)00160-6
19. Krishna Kumar, B., Rukmani, R. & Thangaraj, V. (2009) On multiserver feedback retrial queue with finite buffer. *Applied Mathematical Modeling*. 33. pp. 2062–2083. DOI: 10.1016/J.APM.2008.05.011
20. Do, T.V. (2010) An efficient computation algorithm for a multiserver feedback retrial queue with a large queuing capacity. *Applied Mathematical Modeling*. 34. pp. 2272–2278. DOI: 10.1016/j.apm.2009.10.025
21. Mokaddis, G.S., Metwally, S.A. & Zaki, B.M. (2007) A feedback retrial queuing system with starting failures and single vacation. *Tamkang Journal of Science and Engineering*. 10. pp. 183–192.
22. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Rustamov, A.M. (2015) Methods for analysis of queuing models with instantaneous and delayed feedbacks. *Communications in Computer and Information Sciences*. 564. pp. 185–199. DOI: 10.1007/s10559-016-9800-y
23. Koroliuk, V.S., Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. & Rustamov, A.M. (2016) Methods for analysis of multi-channel queuing models with instantaneous and delayed feedbacks. *Cybernetics and System Analysis.* 52(1). pp. 58–70.
24. Melikov, A. Z., Ponomarenko, L.A. & Rustamov, A.M. (2016) Hierarchical space merging algorithm to analysis of open tandem queuing networks. *Cybernetics and System Analysis.* 52(6). pp. 867–877. DOI: 10.1007/s10559-016-9888-0
25. Melikov, A.Z. & Aliyeva, S.H. (2019) Refined approximate algorithm for steady-state probabilities of the large-scale queuing systems with instantaneous and delayed feedbacks. *Communications in Computer and Information Sciences.* 1109. pp. 188–201.
26. Sztrik, J. & Efrosinin, D. (2010) Tool supported reliability analysis of finite-source retrial queues. *Automation and Remote Control.* 71. pp. 1388–1393. DOI: 10.1134/S0005117910070118
27. Berczes, T., Sztrik, J., Toth, A. & Nazarov, A.A. (2017) Performance modeling of finite-source retrial queueing systems with collisions and non-reliable server using MOSEL. *Communications in Computer and Information Science.* 700. pp. 248–258.
28. Neuts, M.F. (1981) *Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach*. Baltimore: John Hopkins University Press.
29. Mitrani, I. & Chakka, R. (1995) Spectral expansion solution for a class of Markov models: application and comparison with the matrix-geometric method. *Performance Evaluation*. 23. pp. 241–260. DOI: 10.1016/0166-5316(94)00025-F

***Информация об авторах*:**

Назаров Анатолий Андреевич – профессор, доктор технических наук, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Павлова Екатерина Алексеевна – аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики Института прикладной математики и компьютерных наук Национального исследовательского Томского государственного университета (Томск, Россия). E-mail: pavlovakatya_2010@mail.ru

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации*. *Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the authors*:**

Nazarov Anatoly Andreevich – Doctor of Technical Sciences, Professor, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Pavlova Ekaterina Alekseevna – Post-graduate Student, National Research Tomsk State University (Tomsk, Russian Federation). E-mail: pavlovakatya_2010@mail.ru

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 08.11.2021; принята к публикации 28.02.2022

Received 08.11.2021; accepted for publication 28.02.2022