

# Definición paramétrica de Estructuras Recíprocas Transformables con Nodos de tres barras

## *Parametric definition of Transformable Reciprocal Frame Structures with three-bars Nodes*

Cristina Martínez Arias <sup>(\*)</sup>, Jesús Anaya Díaz <sup>(\*\*)</sup>

### RESUMEN

En este artículo, se aborda la determinación de las condiciones de equilibrio de Superficies de Geometría Variable definidas por Estructuras Recíprocas mediante el estudio de un campo de fuerzas actuantes y del lugar geométrico que describen los elementos de tales estructuras a través de los diferentes estados de transformación. Se establecen las propiedades geométricas y estructurales de un Nodo Recíproco de estas estructuras con tres barras cilíndricas iguales, mediante el desarrollo de una formulación matemático-paramétrica, con el objetivo de deducir el proceso de equilibrio para la obtención analítica de sistemas de estabilización de Superficies de Geometría Variable conformadas por Estructuras Recíprocas Transformables. La finalidad de la investigación presentada aquí es la aplicación de dicho sistema de estabilización mediante un software geométrico-estructural de nueva creación, al diseño y cálculo de distintas tipologías de superficies en la configuración de arquitecturas de geometría transformable.

**Palabras clave:** estructuras recíprocas; geometrías transformables; estructuras espaciales; cálculo paramétrico; herramienta computacional.

### ABSTRACT

*This article researches the determination of the equilibrium conditions of Variable Geometry Surfaces defined by Reciprocal Frame Structures by means of a study of the acting force field and the locus that describe the elements of these structures through the different states of transformation. It is established, through the development of a mathematic-parametric formulation, geometric and structural properties of an equal cylindrical three-bar Reciprocal Frame Node, with the objective of deducing the balance mechanism for obtaining the stabilization systems of Variable Geometry Surfaces made up of Transformable Reciprocal Frame Structures. The aim of this research is the application of the said stabilization system by means of a newly created structural-geometric software, to the design and calculation of different transformable geometry typologies of architectural surfaces*

**Keywords:** reciprocal frame structures; transformable geometries; spatial structures; parametric calculation; computational tool.

(\*) Arquitecta. Estudiante Doctorado ETSAM. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (España).

(\*\*) Dr. Arquitecto. Profesor ETSAM. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (España).

Persona de contacto/Corresponding author: [cristina.martineza@upm.es](mailto:cristina.martineza@upm.es) (C. Martínez Arias)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6434-6524> (C. Martínez Arias); <https://orcid.org/0000-0001-7160-7449> (J. Anaya Díaz)

---

**Cómo citar este artículo/Citation:** Cristina Martínez Arias, Jesús Anaya Díaz (2022). Definición paramétrica de Estructuras Recíprocas Transformables con Nodos de tres barras. *Informes de la Construcción*, 74(565): e437. <https://doi.org/10.3989/ic.86227>

**Copyright:** © 2022 CSIC. Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos de la licencia de uso y distribución Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

Recibido/Received: 24/11/2020  
Aceptado/Accepted: 23/09/2021  
Publicado on-line/Published on-line: 05/04/2022

## 1. INTRODUCCIÓN

Hemos estudiado las Estructuras Recíprocas Transformables (ERT) con el objetivo de establecer un sistema estructural para la caracterización (topología de la malla, condición invariante-relacional), expresión (geometría de la malla, condición espacial-dimensional) y estabilización (equilibrio de la malla, condición físico-estructural) de la transformación de superficies activas móviles capaces de generar geometrías continuas de formas libres.

Se parte de la hipótesis de que toda superficie abierta continua puede aproximarse a través de una Malla Recíproca Transformable (MRT), compuesta por un entramado de nodos recíprocos transformables, de forma que la modificación geométrica de los nodos componentes o módulos de ésta generen una transformación global, que a su vez derive en una variación de la superficie asociada. La MRT se establece, por lo tanto, como un proceso de parametrización, definición espacial y estabilización de superficies de geometría transformable; como un medio para la consecución del paso de una homografía geométrica a una geometría de forma estructural. Por homografía entendemos la correspondencia biunívoca entre dos geometrías que cumplen unas mismas leyes topológicas-relacionales, de forma que exista correspondencia elemento a elemento, punto a punto, conservando características geométricas como intersecciones o tangencias. Una estructura de geometría transformable puede entenderse como la materialización de un proceso homográfico de cambio geométrico.

Para el desarrollo de una MRT, es necesario el estudio y análisis de su célula o sistema base: el nodo recíproco transformable. En este artículo, estudiamos con formulación matemático-paramétrica dichas estructuras, de modo que nos permita proponer el desarrollo de un futuro entorno digital integrado para el diseño, cálculo, simulación, construcción y uso de espacios arquitectónicos adaptativos construidos mediante MRT.

### 1.1. Estructuras Recíprocas

Las Estructuras Recíprocas (ER) son sistemas formados por elementos (barras) conectados entre sí a través de apoyos simples por tangencia y sin intersección material; es decir, con continuidad parcial entre ellos. El concepto de apoyo mutuo o tangencia entre barras, definitorio de este tipo de estructuras, las incluye dentro del grupo de sistemas estructurales fuera del plano o sistemas espaciales. Se enmarcan en el ámbito de las estructuras entretejidas (como el punto, los textiles o la cestería) (1). Este tipo de sistemas se caracteriza por la carencia de elementos de unión entre sus componentes, reduciendo al rozamiento interno de sus uniones su capacidad de estabilización. Sus nudos básicos son, pues, contactos de fricción unilaterales con únicamente transmisión de fuerzas tangentes a la superficie de contacto dentro de los límites impuestos por la Ley de Coulomb de Rozamiento. Debido a esta propiedad, para maximizar la cohesión del conjunto, una Estructura Recíproca optimizada es aquella que maximiza el cortante en los puntos de unión entre elementos y minimiza los esfuerzos axiales, teniendo un comportamiento similar al mecanismo de la palanca (2) (funcionamiento a flexión); en oposición a otras estructuras con las que a priori guardarían similitudes, como los gridshells, que seguirían el principio portante de la catenaria invertida. Cuando se usan

las estructuras recíprocas para la generación de superficies de gran curvatura, aumentan los esfuerzos normales y en la mayoría de los casos se requiere de uniones mecánicas que garanticen la estabilidad que no es capaz de conseguir el simple rozamiento entre componentes.

Thomas Kohlhammer y Toni Kotnik, (3) establecen una jerarquía de sistemas en una Estructura Recíproca en la que distinguen:

- a. *El elemento* o la barra
- b. *El sistema básico*, compuesto por elementos, (al que denominamos *Nodo Recíproco*)
- c. *El sistema componente*, compuesto por sistemas básicos y elementos.
- d. *El sistema global*, compuesto por sistemas componentes, sistemas básicos y elementos (al que nos referimos por *Malla Recíproca MR*)

En analogía con una teselación poligonal, podríamos expresar que el elemento es el equivalente al lado de las teselas, el sistema básico, a la tesela misma y el sistema componente, a la agrupación de varias teselas patrón o subunidad que conforma por repetición toda la teselación, que sería el sistema global.

Una Unidad o *Nodo recíproco* es un sistema tridimensional de tres o más elementos (barras) mutuamente soportados en circuito estructural cerrado (4). El concepto de *Nodo*, por lo tanto, refiere a un subtipo de estructuras caracterizadas por dos propiedades (5):

- a. En todo elemento estructural, los puntos de soporte y apoyo NO son coincidentes.
- b. Todos y cada uno de los elementos de la estructura está soportado por el elemento al que soporta (circularidad).

En la Figura 1 observamos dos ejemplos de nodos recíprocos con sus barras en apoyo mutuo.

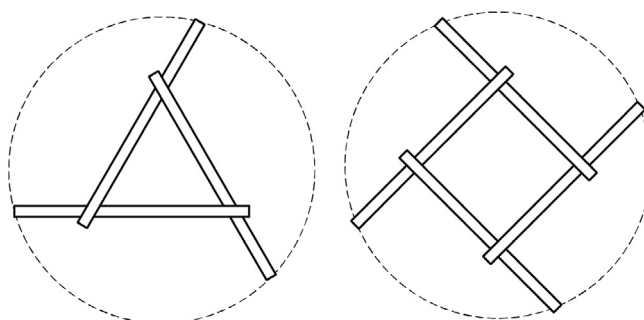


Figura 1. Nodos recíprocos de tres y cuatro barras.

Consideramos de interés apuntar la diferencia entre los conceptos de *Nodo Recíproco* y *nudo*. Entendemos por *nudo* el lugar de encuentro entre elementos de una estructura. Según esto, a lo largo de cada una de las barras que conforman un único *Nodo Recíproco*, existen varios nudos, con la particularidad de que cada nudo del *Nodo* está definido por la unión de únicamente dos barras.

El principio de reciprocidad (barras tangentes entre sí en circuito geométrico-estructural cerrado) posibilita que cualquier punto del elemento estructural de un Nodo sea susceptible de convertirse en nudo, por lo que estos sistemas básicos pueden conformarse como sistemas móviles, sin afectar a sus leyes de configuración, al permitir la modificación de la posición de sus puntos de apoyo mutuo o tangencias. Esta propiedad del Nodo, derivada de su condición geométrico-estructural, hace de las Estructuras Recíprocas en general, un campo de investigación propicio para la concepción de Superficies de Geometría Variable, capaces de configurar espacios arquitectónicos adaptativos.

Existen tres parámetros que determinan la geometría de los Nodos Recíprocos:

- *La excentricidad*, que mide la distancia entre los ejes centrales de dos barras conectadas.
- *La longitud de entramado*, que denota la distancia entre los puntos de apoyo y soporte de cada barra, medida sobre su directriz.
- *El signo del nodo*, positivo o negativo si el nodo entraña convexidad o concavidad, respectivamente, con relación a un sistema de referencia dado.

Los Nodos Recíprocos pueden agruparse en sistemas componentes, que a su vez pasan a conformar sistemas globales, por expansión de su perímetro (teselación espacial), o por densificación interior (fractalización) para formar grandes estructuras recíprocas sin la necesidad de apoyos centrales que garanticen su equilibrio: Mallas Recíprocas (Figuras 2.1 y 2.2).

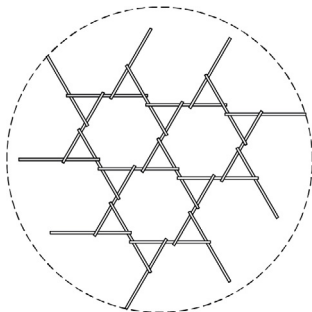


Figura 2.1. Agrupaciones planas de Nodos por expansión.

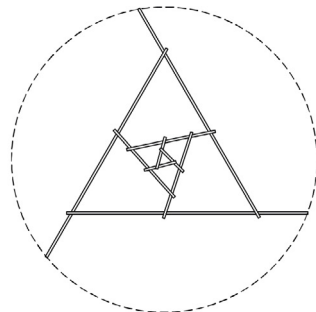


Figura 2.2. Agrupaciones planas de Nodos por densificación.

Las Mallas Recíprocas formadas por agrupación, son de naturaleza no-jerárquica: poseen un comportamiento continuo estructural sin jerarquías de elementos estructurales. Las generadas por densificación, por su parte, pueden entenderse como organización jerárquica de sistemas básicos.

La geometría de las Mallas Recíprocas es de compleja definición: la posición de cada elemento determina y está determinada por la posición de todo el conjunto y puede ser entendida como una característica que emerge de la interacción compleja entre la forma, la topología y la posición de los elementos (6).

Su capacidad para construir formas complejas con escasa técnica y bajo coste y en especial su capacidad de transformación, hacen de este tipo de estructuras un campo de investigación

atractivo para el estudio de Superficies para Arquitecturas de Geometría Transformable, que a día de hoy sólo ha sido explorado en sistemas retráctiles diafragmáticos mono-nodales, en configuraciones recíprocas articuladas que permiten el plegado de superficies o en sistemas de elementos definidos a posteriori a través de las curvas optimizadas de sus uniones deslizantes. Aquí, proponemos el estudio de las posibilidades espaciales y estructurales de superficies de geometría transformable compleja, conformadas por sistemas de Nodos Recíprocos de barras cilíndricas rectas iguales, definidas a priori en número y dimensión. La condición de tangencia entre los elementos de la MRT hacen que ésta pueda abstraerse en un conjunto de segmentos de rectas no secantes en el espacio con una distancia dos veces el radio.

## 1.2. Antecedentes

La reciprocidad ha sido usada en todo el mundo desde tiempos inmemoriales. Ha estado presente incluso en algunos refugios neolíticos o tiendas esquimales. Aunque existen muestras de ER tanto en occidente como en oriente, han sido más comúnmente usadas en el segundo, sobre todo en la arquitectura tradicional china y japonesa (4). Artistas contemporáneos japoneses como K. Ishii, Y. Kijima y Y. Kan, todavía utilizan este tipo de sistemas estructurales en sus construcciones. Cabe destacar también el Rokko Mountain Observatory, diseñado por el arquitecto H. Sambuichi en colaboración con la firma ARUP (7) y los pabellones “Plate” y “Kreod”, diseñados por el arquitecto C.Q. Li, los ingenieros Ramboll y los consultores Evolute (8) y el Foster Park Pavilion, de S. Ban junto con C. Balmond (9).

En la mayoría de los casos, el principio de reciprocidad se ha asociado a la cubrición de luces con elementos estructurales de menor dimensión que la luz a salvar (1). Un ejemplo clásico son los diseños de L. Da Vinci (10). Igualmente, debido a las configuraciones formales fruto de este sistema constructivo, el principio de reciprocidad ha estado relacionado con conceptos espirituales y religiosos como en los techos en forma de Mandala de los templos budistas.

### 1.2.1. Estudios de búsqueda de forma

Aunque originalmente las Mallas Recíprocas se utilizaron para conformar superficies regulares, estudios recientes demuestran que pueden definir cualquier superficie de formas libres modificando parámetros geométricos de sus Nodos. Sin embargo, su complejidad relacional geométrica hace necesario recurrir a procedimientos de *form-finding*. Hoy en día, existen tres procesos básicos de análisis:

#### - Métodos Analíticos:

Se trata de un acercamiento numérico exacto a la forma de una Malla Recíproca a través de ecuaciones geométricas. La dificultad que conlleva la definición de dichas ecuaciones para el diseño de superficies de formas libres o simplemente estructuras no regulares, hace que este método sólo haya sido aplicado en la búsqueda de forma de la deformación de los Sólidos platónicos en poliedros recíprocos regulares (11, 12) o en Nodos aislados.

#### - *Bottom-Up*, de abajo a arriba o a posteriori:

La forma final es el resultado de la composición o modificación de unidades mínimas o elementales. Se concibe la geo-

metría desde el resultado de la propia condición recíproca de la estructura y sus elementos. El elemento de estudio es el Nodo y la relación de él con otros nodos en la generación de la Malla. En consecuencia, la geometría del conjunto es un resultado difícil de controlar que depende de parámetros a nivel elemento. Probablemente, el proceso más difundido de este acercamiento sea la adición iterativa, donde se van añadiendo barras o nodos a la estructura manteniendo la reciprocidad de sus elementos y siguiendo unas direcciones predefinidas a partir de una unidad básica (13).

- *Top-Down*, de arriba a abajo o a priori:

Se parte de una forma de referencia y se sobrepone su definición con Nodos. En este proceso, primeramente, se tesela la superficie de partida con teselas poligonales considerando un conjunto de puntos sobre la geometría base. Partiendo de una teselación no recíproca de la forma objetivo, se transforma dicha teselación en recíproca a través de la traslación, rotación o la combinación de ambos movimientos, de sus elementos o a través de la unión de los centros de los lados de cada tesela poligonal y su desplazada, pudiendo dejar las longitudes de los componentes, distancias de entramado y/o las excentricidades como variables (14), optimizables a través de solucionadores iterativos (Algoritmos genéticos (15); mínimos cuadrados (16); Newton-Raphson (7) o de su modelización como sistemas partícula-resorte (método de relajación dinámica (17)).

Sin embargo, todas las aproximaciones al problema de *form-finding* efectuadas hasta la fecha parten de geometrías de superficies no transformables; o de nodos con determinadas características como regularidad o una distancia de entramado determinada a priori. No se establece un sistema que permita conocer qué diversidad de formas pueden llegar a construir unas determinadas composiciones recíprocas de elementos de dimensiones fijas.

### 1.2.2. Estudio estructural

Si atendemos al estudio del comportamiento estructural de este tipo de sistemas, en 1699, J. Wallis escribe su “Opera Mathematica” (18) donde, además de describir configuraciones recíprocas planas para combinaciones de vigas en el diseño de forjados, resuelve una serie de 25 ecuaciones para obtener las fuerzas necesarias para la estabilización de una malla recíproca.

Como tema de investigación más reciente, D.L. Dean en 1997 (19) estudia el comportamiento estructural de matrices unidimensionales circulares de ER., T. Kohlhammer y T. Kotnik desarrollan un análisis de composiciones planas de ER dividiéndolas en sistemas básicos (3). S. Gelez, S. Aubry y B. Vaudeville (20) utilizan métodos analíticos para el estudio de la resistencia a flexión y la rigidez de un entramado recíproco plano. J. Sánchez y F. Escrig analizan estructuralmente los diseños recíprocos de L. Da Vinci (21). E. Garavaglia y otros (22) estudian el comportamiento de colapso de una estructura recíproca plana con Métodos de Elementos Finitos. L. Greco, A. Lebé y C. Douthe (23), estudian la respuesta estructural fuera del plano de sistemas de ER mediante técnicas de homogenización.

Por su parte, la aplicación del ya mencionado método de relajación dinámica a estructuras recíprocas propuesto

por C. Douthe y O. Baverel desarrolla también el comportamiento estructural de la forma resultante, siendo ésta la que minimiza las tensiones internas de los elementos de la estructura (17).

Es destacable el resultado teórico expuesto por M. Brocato (2) quien afirma que el funcionamiento estructural de los nodos recíprocos básicos es similar al funcionamiento de la palanca.

Como puede observarse, la mayoría de las aproximaciones al estudio del comportamiento estructural de este tipo de sistemas, parte de configuraciones de modelos singulares y mayoritariamente planas. El acercamiento que proponemos en este artículo es el estudio de una geometría transformable y la obtención del campo de fuerzas variable que en cada momento garantizará la estabilidad de la superficie, en base a las propiedades características de las Estructuras Recíprocas.

### 1.2.3. Estructuras Recíprocas Transformables

Los Nodos, y por extensión las Mallas, pueden considerarse mecanismos si se permite la modificación de la posición de sus puntos de apoyo mutuo (nudos) entre barras cuando son afectados por fuerzas externas que interfieran en su equilibrio estático. Entendemos por mecanismos aquellos sistemas transformables conformados por elementos rígidos unidos a través de nudos móviles, de modo que la estructura resultante posea al menos un grado de libertad.

A pesar de ello, son sistemas prácticamente estudiados e implementados en configuraciones estáticas. Una excepción a ello son las investigaciones llevadas a cabo por John C. Chilton y otros de la Universidad de Nottingham sobre techos recíprocos retráctiles (24) (Soluciones Mononodales regulares donde distingue entre mecanismos con nudos articulados en el contorno exterior y deslizantes en los apoyos entre barras; mecanismos con nudos deslizantes pivotantes en el perímetro externo y deslizamiento por rail rectilíneo interno; y mecanismos híbridos entre los anteriores). Las investigaciones realizadas por Dario Parigi y otros (25) sobre “Estructuras Recíprocas Cinéticas Planas” o Mallas bidimensionales planas de elementos con nudos deslizantes, rotacionales o mixtos, donde trasladan el concepto de conjuntos “pin-joint” articulaciones pasador o nudos de revolución de Sergio Pellegrino y Calladine a las estructuras recíprocas (26), distinguiendo entre mallas totalmente regulares; mallas regulares de elementos que permiten su cambio de longitud y posición de los nudos; y mallas irregulares (20).

Como puede observarse, la investigación existente en torno a las Estructuras Recíprocas Transformables adolece de la dificultad que entraña la resolución del complejo problema geométrico y estructural de los sistemas espaciales transformables de principio recíproco y las respuestas que se han dado se han limitado a soluciones nodales retráctiles regulares, planas o tendentes a la planitud, o a la definición de Mallas exclusivamente de superficies transformables planas.

El objetivo principal de esta investigación es sentar las bases necesarias para la búsqueda de la expresión de la variación de un lugar geométrico, que conserva una serie de invariantes relacionales entre sus elementos, a la definición de la estructura que lo materializa desde el establecimiento de su condición de equilibrio.

## 2. DESARROLLO DE UN ENTORNO DIGITAL PARA ESTRUCTURAS RECÍPROCAS TRANSFORMABLES

Existe una gran dificultad para la representación y estabilización de superficies móviles generadas mediante estructuras recíprocas transformables a través de medios manuales convencionales. Para la resolución del problema, se plantea el desarrollo de una aplicación gráfica en la que el usuario pueda dar una respuesta numérica y visual de las estructuras objeto de diseño, transformación y cálculo estructural, partiendo de una disposición inicial de distintas topologías de mallas recíprocas espaciales y variando una serie de parámetros que modifiquen controladamente su geometría.

### 2.1. Metodología

Para la representación gráfica a tiempo real de la transformación y estabilización de la malla recíproca, se inició el desarrollo de un software escrito en lenguaje C# haciendo uso del motor para videojuegos *Unity 3D*. Este método, si bien es gráficamente efectivo e intuitivo visualmente de cara a un usuario externo, debido al uso que realiza del motor *Unity*, no común en el campo arquitectónico, resulta menos accesible a implementaciones posteriores. Por esta razón, se ha optado por la realización de la aplicación a través de *scripts* o secuencias de comandos para el programa *Grasshopper 3D*.

La base del desarrollo de esta aplicación consiste en tres consideraciones iniciales:

1. Las Mallas Recíprocas son agrupaciones espaciales de Nodos Recíprocos, conformados por elementos iguales, de las mismas dimensiones y características, todos tangentes entre sí. (Sistema básico).
2. Las Mallas consideradas, tal y como se muestra en la Figura 3, parten de una agrupación de tres nodos en torno a un nodo recíproco de tres barras, que consideraremos “nodo

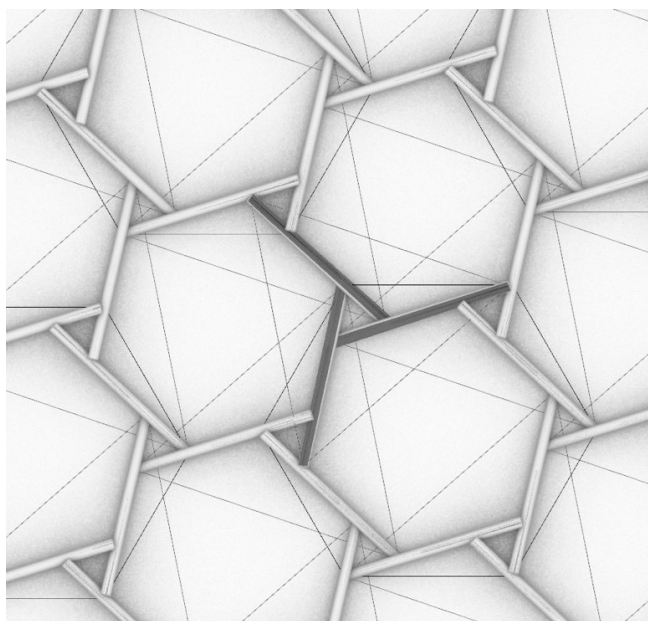


Figura 3: Disposición inicial de malla recíproca de nodos de 6 elementos en torno a un “nodo clave”.

clave”. Los tres nodos forman otros tres nodos triangulares dos a dos. Esta disposición de nodos en torno a nodos triangulares es la que posibilita la posterior rigidización de la estructura. (Sistema componente).

3. La estructura está sometida únicamente a su peso propio y los puntos de tangencia entre barras (nodos de la estructura), para todo instante  $t$ , estructuralmente se consideran apoyos continuos.

Para definir la geometría de una determinada topología de MRT, primeramente, se establece una disposición inicial de los elementos que sea coherente recíprocamente con las dimensiones de las barras. Después, se permite el movimiento de dicha configuración inicial en base a parámetros controlables por el usuario de la aplicación. Por último, se analizan las fuerzas que estabilizan las geometrías transformadas. En la Figura 4, se representa la deformación de la malla de la Figura 3, de curvatura cero, en un casquete esférico.

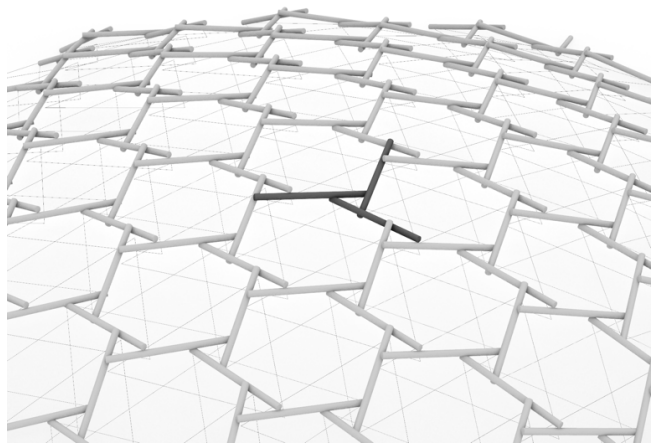


Figura 4: Deformación de malla recíproca de Nodos de 6 elementos donde señalamos uno de los “nodo clave”.

Para ello, partiendo del nodo clave, y de los otros tres nodos triangulares, se optimiza la geometría para que, manteniendo la tangencia mutua de todos los elementos, en una primera posición compatible de la malla recíproca, se generen los nodos más regulares posibles (conserven todas sus distancias de entramado y ángulos iguales). (En este proceso, se hace uso de la parametrización expuesta en el apartado “3.1. Geometría del nodo” del presente artículo). El proceso se reitera considerando como nodo clave cualquiera de los nodos contiguos definidos.

Posteriormente, y conocidas las posiciones iniciales de todos y cada uno de los elementos de la malla, se permite la movilidad de éstos partiendo de un vector fijo y añadiendo parámetros en base a los giros permitidos, tal y como se describe para el caso de un solo nodo en el apartado “3.1.3. Geometría del nodo en transformación partiendo del caso regular” de este estudio y estableciendo condiciones de cierre de circuitos para seguir asegurando la tangencia mutua entre elementos. En la Figura 5, se ejemplifican dos posibles geometrías de una Malla Recíproca Transformable.

Una vez modificados los parámetros por el usuario para obtener la forma deseada, la aplicación estudia la geome-

tría resultante y determina el campo de fuerzas actuantes que garantiza la estabilidad de la forma dada, (haciendo uso de las demostraciones del apartado “3.2 Estabilidad del nodo” del presente documento) analizando la resistencia de la estructura y los puntos estructuralmente críticos.

La forma final de la Malla depende de decisiones tomadas a nivel nodo, permitiéndose un control unitario de cada uno de los sistemas básicos componentes, gracias a la herencia de una parametrización de éstos en base a su movilidad.

Esta aproximación a la MRT desde la propia definición del principio de reciprocidad, el establecimiento del sistema relacional propio de cada tipo de Malla objeto de estudio y desde la materialización con elementos dimensionalmente concretos, es una aproximación basada en la definición de un módulo básico: el Nodo, cuya descripción geométrico-paramétrica y estructural se expone en el presente artículo.

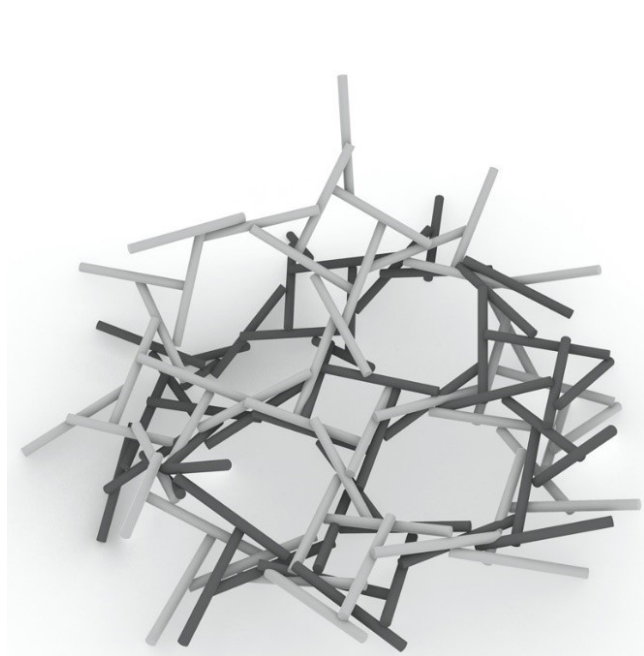


Figura 5: Modificación de la geometría de una MRT causada por la variación del valor de dos de sus parámetros (inicial en color gris claro, modificada en color gris oscuro).

### 3. DESCRIPCIÓN PARAMÉTRICA DE LA ESTRUCTURA RECÍPROCA TRANSFORMABLE

#### 3.1. Geometría del Nodo

La reciprocidad es, al igual que la tensegridad, una condición geométrica con implicación estructural. Su expresión formal es exclusivamente de lenguaje matemático y vectorial, por lo que su traducción a esos términos se convierte en condición necesaria para su manejabilidad. Para definir analíticamente el sistema básico de las MRT, es necesaria la traducción a lenguaje matemático-matricial de la condición de reciprocidad del Nodo: barras tangentes entre sí en circuito geométrico-estructural cerrado. Para ello, y con el objetivo de favorecer la posterior transformabilidad, estudiamos dicha condición aplicada a sistemas básicos conformados por barras de sección circular; en particular, estudiamos el Nodo triangular.

Consideramos tres barras cilíndricas,  $C_1, C_2$  y  $C_3$  con radio  $R$ , longitud  $L$  y directrices  $e_1, e_2$  y  $e_3$  respectivamente, conformando un nodo con excentricidad  $2R$ . En la Figura 6, se muestra una abstracción geométrica del Nodo objeto de estudio. Denotamos por  $a_i$  la distancia entre los puntos de apoyo y de soporte de cada barra  $C_i$  componente del Nodo, medida sobre su directriz (longitud de entramado). Para determinar la localización de los diferentes puntos de tangencia,  $T_1, T_2$  y  $T_3$ , consideramos  $\{V_1, V_2, V_3\}$  vectores unitarios ortogonales a las barras dos a dos (vectores binormales) de modo que el vector  $V_1$  es el ortogonal a las barras  $C_2$  y  $C_3$ , el vector  $V_2$  es el ortogonal a las barras  $C_3$  y  $C_1$  y el vector  $V_3$  es el ortogonal a las barras  $C_1$  y  $C_2$ , lo que puede expresarse matemáticamente por:

$$[1] \quad V_i \wedge (e_j \wedge e_k) = 0, \quad \|V_i\| = 1$$

para toda permutación positiva  $(i, j, k)$  de  $(1, 2, 3)$ .

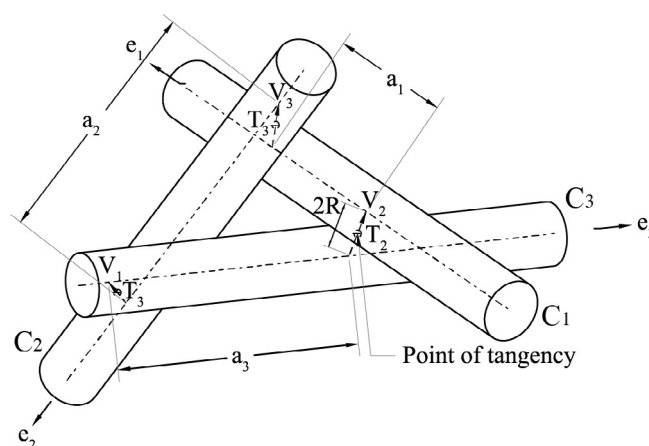


Figura 6: Nodo recíproco de tres barras: descripción geométrica.

La condición de reciprocidad implica que la suma (vectorial) de las distancias de entramado entre barras en la dirección de sus ejes más las excentricidades entre barras ( $2R$ ) en la dirección de los vectores binormales entre ellas, se anula (circuito cerrado de barras tangentes). Para expresarlo matricialmente, es necesario considerar las matrices  $E = (e_1, e_2, e_3)$  y  $V = (V_1, V_2, V_3)$  cuyos vectores columna son, respectivamente, los ejes del cilindro y los vectores  $V_1, V_2$  y  $V_3$ ; y el vector  $\vec{a}$  columna, compuesto por las distancias de entramado  $a_1, a_2, a_3$ . Podemos escribir:

$$[2] \quad E\vec{a} + 2RV\vec{u} = 0,$$

donde  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,

Para expresar esta condición matricial en términos geométricos más intuitivos, definimos las matrices  $D$  y  $G$ , enunciables en términos de los ángulos  $\phi_i$  formados por los vectores  $V_j$  y  $V_k$  como:

$$[3] \quad D = V^t E,$$

$$[4] \quad G = V^t V$$

Considerando [3] y [4], la ecuación [2] puede escribirse:

$$[5] \quad D\vec{a} + 2RG\vec{u} = 0$$

De la ecuación [5] podemos deducir que la distancia entre puntos de apoyo sólo depende de  $G$ , que es la matriz usual del producto escalar en la base  $\{V_1, V_2, V_3\}$ . De hecho, podemos escribir:

$$[6] \quad \vec{a} = -2RD^{-1}G\vec{u}.$$

Esta ecuación matricial definitoria del principio de reciprocidad implica que la transformabilidad del Nodo conlleva una transformabilidad en la distancia de entramado en base a los ángulos formados por las direcciones de apoyo mutuo entre elementos. En consecuencia, si fijamos una posición concreta del cilindro  $C_1$  y una dirección perpendicular a él,  $V_1$ , entonces los ejes  $e_2$  y  $e_3$  están unívocamente determinados por la matriz  $G$ .

### 3.1.1. Geometría del Nodo Regular

Las ecuaciones [1-5] son generalizables a Nodos de más de tres barras, sin embargo, en estos casos, no se puede determinar la relación existente entre las distancias de entramado y los ángulos entre direcciones de apoyo mutuo como se ha hecho en [6]. No obstante, en el caso particular de los Nodos regulares, podemos proceder analíticamente a la deducción de toda su geometría a partir de la inclinación de dichas direcciones de apoyo en relación con el plano de tangencia. Entendemos por Nodo Recíproco regular aquel en el que las distancias de entramado de todos sus elementos son la misma, así como también son iguales los ángulos formados entre cada barra y su barra adyacente. Una particularidad de este tipo de nodos es que los puntos de tangencia entre barras están en un mismo plano y forman los vértices de un polígono regular de tantos lados como barras tenga el nodo. En la Figura 7 se representa el heptágono regular de tangencia de un nodo recíproco regular de 7 barras.

Tomando como sistema de referencia dicho plano, podemos considerar que sus puntos de tangencia vienen dados por:

$$[7] \quad T_k = m \left( -\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), 0 \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Todos los vectores  $V_k$  están inclinados un mismo ángulo  $g \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$  con respecto al plano de tangencia, y podemos expresarlos por:

$$[8] \quad V_k = \left( \cos(g) \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \cos(g) \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \sin(g) \right),$$

Al ser los  $V_k$  perpendiculares dos a dos a las barras del nodo, sabemos que el producto vectorial normalizado de  $V_k$  con  $V_{k+1}$  nos da el correspondiente eje  $-e_k$ ,

$$[9] \quad e_k = \frac{-\sin(g)}{\sqrt{\cos^2(g) \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin^2(g)}} \left( \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{n}\right), \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{n}\right), -\cot(g) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right),$$

Usando la condición de reciprocidad:

$$[10] \quad a \sum_{k=1}^n e_k + 2R \sum_{k=1}^n V_k = 0,$$

se deduce que:

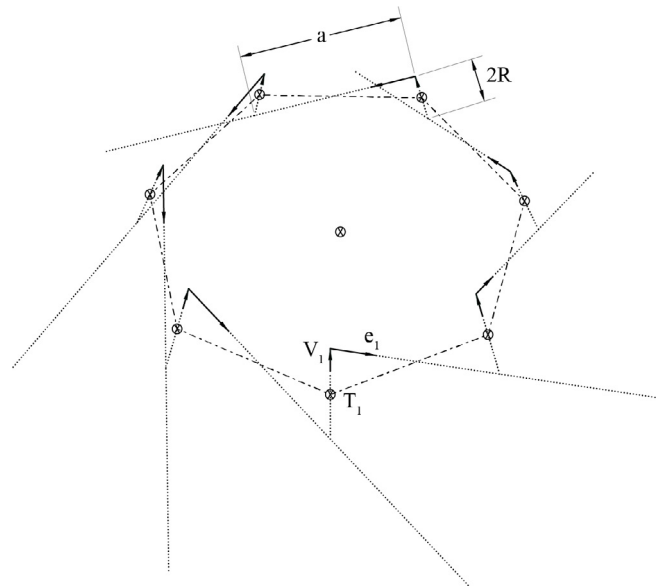


Figura 7: Nodo Recíproco regular, disposición de ejes, vectores binormales sobre plano de tangencia.

$$[11] \quad a = \frac{2R \sin(g) \sqrt{\cos^2(g) \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin^2(g)}}{\cos(g) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

De la expresión [11] también podemos determinar en términos de la distancia de entramado:

$$[12] \quad \sin^2(g) = \frac{\cot^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \left( \sqrt{(a^2+4R^2)^2 + 16a^2R^2 \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} - (a^2+4R^2) \right)}{8R^2}$$

Por otro lado, conocidos los  $V_k$ ,  $e_k$  y el valor  $a$ , podemos establecer la relación existente entre el polígono de tangencia y el ángulo  $g$ :

$$[13] \quad m = -R \left( 1 + \sin^2(g) + \cos^2(g) \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \csc\left(\frac{2\pi}{n}\right) \sec(g) \right).$$

Como las distancias de entramado entre barras tienen que ser menores a la longitud de ésta, de la ecuación [12] se sigue que, para que un nodo regular sea geoméricamente construible, se ha de verificar:

$$[14] \quad \pi > \arcsin \left( \sqrt{\frac{\cot^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \left( \sqrt{(L^2+4R^2)^2 + 16L^2R^2 \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} - (L^2+4R^2) \right)}{8R^2}} \right) > \frac{\pi}{2}.$$

Estas ecuaciones permiten recuperar analíticamente la geometría del nodo regular a partir de: las distancias de entramado entre componentes, la inclinación deseada en los vectores binormales o el polígono descrito por sus puntos de tangencia.

### 3.1.2. Geometría del nodo en transformación

En los Nodos, la conservación de la tangencia mutua entre elementos deriva en una serie de relaciones de ortogonalidad. Podemos asimilar cada uno de los vectores que definen su geometría a una articulación de perno alrededor de la que giran ortogonalmente las otras dos direcciones a las que dicho vector es normal. Teniendo en cuenta esta simi-

litud, y partiendo de dos vectores de referencia,  $V_1$  y  $e$ , tal y como se muestra en la Figura 8, podemos considerar que los vectores  $e_3$  y  $e_2$  son rotaciones del vector  $e$  en torno a  $V_1$  un determinado ángulo  $\gamma$  y  $\delta$ , respectivamente. Por su parte, los vectores  $V_2$  y  $V_3$  pueden considerarse rotaciones de  $V_1$  en torno a dichos ejes  $e_3$  y  $e_2$  un determinado ángulo  $\phi_3$  y  $\phi_2$  respectivamente. Conocidos  $V_2$  y  $V_3$ , el vector  $e_1$  puede deducirse. Tal y como hemos demostrado en [6], conocidos los ángulos entre vectores del Nodo y las distancias entre puntos de tangencia, la geometría global del Nodo queda unívocamente definida. De este modo, podemos establecer una parametrización de la geometría transformable en el tiempo en función de los ángulos de giro relativo entre componentes:

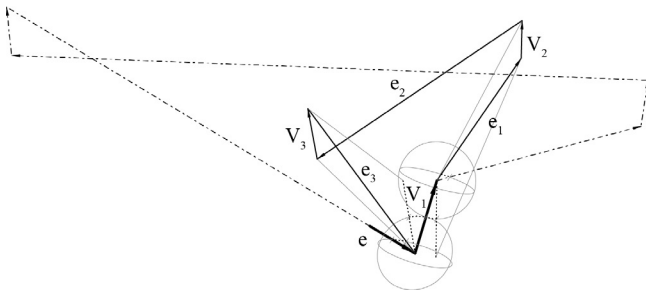


Figura 8: Transformación del Nodo Recíproco. Ángulos de rotación en torno a un vector  $V_1$  invariante y a los vectores  $e_3(t)$  y  $e_2(t)$ .

$$\begin{aligned}
 [15] \quad & V_1(t) = V_1(0) = V_1, \\
 & e_3(t) = \mathfrak{R}_{V_1, \gamma(t)}(e), \\
 & e_2(t) = \mathfrak{R}_{V_1, \delta(t)}(e), \\
 & V_2(t) = \mathfrak{R}_{e_3, \phi_3(t)}(V_1), \\
 & V_3(t) = \mathfrak{R}_{e_2, \phi_2(t)}(V_1), \\
 & O_1(t) = O_1(0) = O_1, \\
 & O_3(t) = O_1 - 2R V_1 - a_2(t) e_2(t), \\
 & O_2(t) = O_1 + a_3(t) e_3(t) + 2R V_2(t), \\
 & e_1 = \frac{V_2 \wedge V_3}{|\sin(\phi_1)|}, \\
 & \cos(\phi_1) = \cos(\phi_2) \cos(\phi_3) + \\
 & \quad \sin(\phi_2) \sin(\phi_3) \cos(\delta - \gamma),
 \end{aligned}$$

donde

$$[16] \quad \mathfrak{R}_{A, \theta}(v) = \cos(\theta) v + \sin(\theta) A \wedge v$$

denota la rotación ortogonal de un vector  $v$  en torno a un eje unitario  $A$  un ángulo  $\theta$ .

Como puede observarse, se trata de una parametrización en base a cuatro parámetros independientes (el movimiento del nodo recíproco transformable de tres barras posee cuatro grados de libertad):  $\gamma(t)$ ,  $\delta(t)$ ,  $\phi_3(t)$  y  $\phi_2(t)$ .

Asimismo, podemos determinar la curva descrita por los puntos de tangencia de un cilindro sobre otro durante el movimiento del Nodo, bajo determinados condicionantes de partida y que en coordenadas cilíndricas sobre  $Ci$  son:

$$[17] \quad r_i = (R \cos(\phi_i), R \sin(\phi_i), a_i)$$

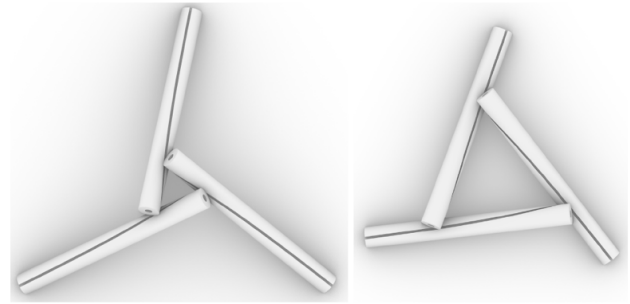


Figura 9: Raíles de tangencia asociados al movimiento de un Nodo Triangular Transformable con conservación de regularidad.

La Figura 9 muestra los raíles de tangencia, lugares geométricos que describen los puntos de tangencia de un Nodo, asociados al movimiento de un Nodo Transformable donde se conservan los ángulos que forman sus barras entre sí.

### 3.1.3. Geometría del nodo en transformación partiendo del caso regular.

Teniendo en cuenta la parametrización anterior, podemos reparametrizar la geometría del Nodo de forma que el origen de las transformaciones (parámetros igualados a cero), sea la del Nodo Triangular regular. Asociamos los parámetros  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\phi_3$  y  $\phi_2$  a los parámetros  $p$ ,  $q$ ,  $s$  y  $t$ , respectivamente, de modo que:

$$\begin{aligned}
 [18] \quad & \gamma = p \\
 & \delta = \alpha + q \\
 & \phi_3 = \beta + s \\
 & \phi_2 = \beta + t
 \end{aligned}$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos constantes que cumplen:

$$\begin{aligned}
 [19] \quad & \cos(\alpha) = \langle e_2, e_3 \rangle = \frac{\cos^2(g) - 2 \sin^2(g)}{\cos^2(g) + 4 \sin^2(g)}, \\
 & \cos(\beta) = \langle V_2, V_3 \rangle = -\frac{1}{2} \cos^2(g) + \sin^2(g), \\
 & \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \frac{4\sqrt{3} \sin(g)}{5 - 3 \cos(2g)}, \\
 & \sin(\beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\beta)} = -\cos(g) \sqrt{\frac{3(5 - 3 \cos(2g))}{8}},
 \end{aligned}$$

Por [15] y [18], y considerando los  $V_1$  y  $e$  de referencia los del Nodo regular:

$$[20] \quad V_1 = \left\{ \frac{-1}{2} \cos(g), \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(g), \sin(g) \right\},$$

$$[21] \quad e = \left\{ \frac{2 \sin(g)}{\sqrt{\cos^2(g) + 4 \sin^2(g)}}, 0, \frac{\cos(g)}{\sqrt{\cos^2(g) + 4 \sin^2(g)}} \right\},$$

Podemos determinar las distancias de entramado entre barras del Nodo en base a los parámetros  $p$ ,  $q$ ,  $s$  y  $t$ , por

$$\begin{aligned}
 [22] \quad & a_1 = 2R \frac{(\cos(\beta+s) + \cos(\beta+t) + 1) \sin(\phi_1)}{\sin(\beta+s) \sin(\beta+t) \sin(\alpha+q+p)} \\
 & a_3 = 2R \frac{\cos(\phi_1) + \cos(\beta+t) + 1}{\sin(\beta+t) \sin(\alpha+q+p)} \\
 & a_2 = 2R \frac{\cos(\phi_1) + \cos(\beta+s) + 1}{\sin(\beta+s) \sin(\alpha+q+p)},
 \end{aligned}$$



En la Figura 10, se muestran varias geometrías adoptables por el Nodo recíproco de tres barras de radio  $R$  y longitud  $L$  modificadas con los parámetros  $p, q, s$  y  $t$ .

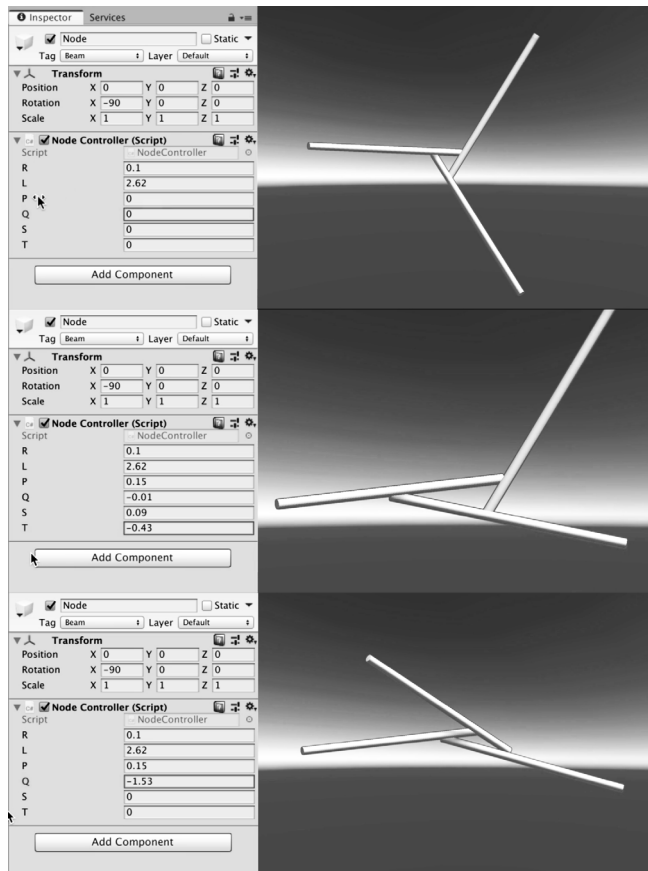


Figura 10: Transformación del Nodo Recíproco en función de la modificación de los parámetros  $p, q, s$  y  $t$ .

Además, de la ecuación [22] y sabiendo que todas las distancias de entramado han de ser inferiores a la longitud de la barra, deducimos que los límites de movilidad de los parámetros  $p, q, s$  y  $t$  son los que verifican:

$$[23] \quad \begin{cases} 2R \frac{\cos(\beta+s)+\cos(\beta+t)+1}{\sin(\beta+s) \sin(\beta+t) \sin(\alpha+q+p)} \sin(\phi_1) - L < 0 \\ 2R \frac{\cos(\phi_1)+\cos(\beta+t)+1}{\sin(\beta+t) \sin(\alpha+q+p)} - L < 0 \\ 2R \frac{\cos(\phi_1)+\cos(\beta+s)+1}{\sin(\beta+s) \sin(\alpha+q+p)} - L < 0 \end{cases}$$

### 3.2. Estabilidad del Nodo

Si bien el estudio de la geometría de este tipo de estructuras es imprescindible para la consecución de Mallas geoméricamente coherentes, la finalidad de esta investigación es deducir el proceso para la obtención analítica de sistemas de estabilización de Superficies de Geometría Variable conformadas por ERT.

El concepto de transformación geométrica de una ERT se produce desde un estado de equilibrio inicial hasta un estado final con una configuración geométrica transformada también en equilibrio. Con el objetivo de estudiar el equilibrio de este tipo de estructuras, consideraremos un sistema ideal de barras infinitamente rígidas, cuyos puntos de tangencia mutuos para un instante  $t$  son apoyos continuos.

Para cualquier configuración geométrica del Nodo, podemos establecer un sistema de fuerzas como el indicado en la Figura 11.

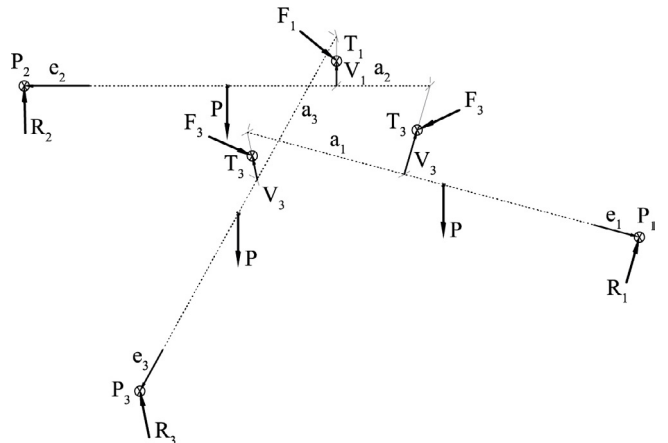


Figura 11: Nodo Recíproco de tres barras: Fuerzas actuantes.

Se trata de un sistema estructural estáticamente indeterminado, con más reacciones (fuerzas actuando en los puntos de tangencia y en el contorno del Nodo) de las que podrían deducirse de las ecuaciones mecánicas de equilibrio, y habría que recurrir a ecuaciones adicionales de compatibilidad para la determinación total de las fuerzas actuantes. Este hecho iría en contra de la premisa de partida de que estos nudos dependen exclusivamente de su geometría (equilibrio) y entraría en juego el campo de desplazamientos de la estructura.

Al considerar cada una de las barras componentes del nodo recíproco independientemente, tal y como queda expuesto en la Figura 12, se concluye que la nulidad de la resultante de fuerzas [24] y momentos respecto del punto de contorno  $P_k$  [25] de uno de los cilindros  $C_k$ , determina las siguientes ecuaciones:

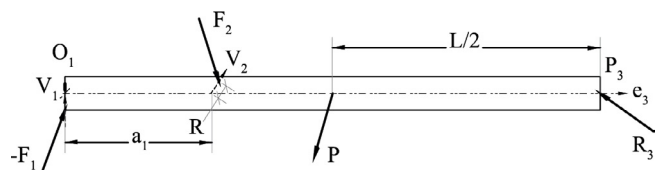


Figura 12: Nodo Recíproco de tres barras: Disposición de fuerzas actuantes en  $C_1$ .

Cilindro  $C_k$ , con  $(i, j, k)$  permutación positiva de  $(1, 2, 3)$ :

$$[24] \quad P + R_k + F_i - F_j = 0$$

$$[25] \quad F_i \wedge \overline{P_k T_i} - F_j \wedge \overline{P_k T_j} = \frac{L}{2} P \wedge e_k$$

El conjunto de ecuaciones de [25] para cada barra, conforma un sistema con incógnitas exclusivamente las fuerzas  $F_i, i = 1, 2, 3$ , actuantes en los nudos o puntos de tangencia de la estructura. Conocidos estos valores, [24] proporciona la determinación de las fuerzas de reacción en los puntos de contorno del nodo para su estabilización. La compatibilidad y determinación del sistema conformado por [25] implica, por lo tanto, el equilibrio del Nodo.

Para el estudio de su compatibilidad y para simplificar el proceso de cálculo, disponemos referenciar las coordenadas de los vectores  $F_i$ , en una base distinta a la del sistema cartesiano. Para ello, como  $\{V_1, V_2, V_3\}$  son vectores linealmente independientes, se tiene que para toda permutación  $(i, j, k)$  de  $(1, 2, 3)$  los puntos  $\{P_i, T_j, T_k\}$  no son colineales y determinan un plano  $\Pi_i$  con normal  $N_i, i = 1, 2, 3$ . Si consideramos  $D = Det(N_1, N_2, N_3) \neq 0$  y escribimos unos vectores  $W_i$ , intersección de dichos planos de modo que:

$$[26] \quad W_i = N_j \wedge N_k,$$

El conjunto  $\{W_1, W_2, W_3\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$  que satisface:

$$[27] \quad DN_i = W_j \wedge W_k,$$

para toda permutación positiva  $(i, j, k)$  de  $(1, 2, 3)$ .

Todo vector  $X$  puede expresarse en dicha base por:

$$[28] \quad X = \frac{\langle X, N_1 \rangle}{D} W_1 + \frac{\langle X, N_2 \rangle}{D} W_2 + \frac{\langle X, N_3 \rangle}{D} W_3.$$

Esta ecuación implica que, conocidos los valores escalares  $\langle F_i, N_1 \rangle, \langle F_i, N_2 \rangle$  y  $\langle F_i, N_3 \rangle$ , podemos determinar el valor del vector fuerza  $F_i$  que actúa en el nudo  $i$ . Para ello, primeramente, multiplicamos vectorialmente en [25] por  $N_k$ , obteniendo:

$$[29] \quad \langle F_i, N_k \rangle \overrightarrow{P_k T_i} - \langle F_j, N_k \rangle \overrightarrow{P_k T_j} = \overrightarrow{A_k}$$

donde  $\overrightarrow{A_k} = \frac{L}{2} (\langle P, N_k \rangle e_k - \langle e_k, N_k \rangle P)$  sólo depende de la geometría y del peso propio de la estructura.

Como  $\{P_i, T_j, T_k\}$  no son colineales, si multiplicamos las ecuaciones de [29], primero vectorialmente por  $\overrightarrow{P_k T_j}$  y luego escalarmente por  $\overrightarrow{P_k T_i} \wedge \overrightarrow{P_k T_j}$ , deducimos que:

$$[30] \quad \langle F_j, N_k \rangle = \frac{\langle \overrightarrow{A_k} \wedge \overrightarrow{P_k T_i}, \overrightarrow{P_k T_i} \wedge \overrightarrow{P_k T_j} \rangle}{\|\overrightarrow{P_k T_i} \wedge \overrightarrow{P_k T_j}\|^2},$$

$$[31] \quad \langle F_i, N_k \rangle = \frac{\langle \overrightarrow{A_k} \wedge \overrightarrow{P_k T_j}, \overrightarrow{P_k T_i} \wedge \overrightarrow{P_k T_j} \rangle}{\|\overrightarrow{P_k T_i} \wedge \overrightarrow{P_k T_j}\|^2},$$

para toda permutación positiva  $(i, j, k)$  de  $(1, 2, 3)$ .

Las otras tres ecuaciones que van a permitir determinar  $\langle F_i, N_i \rangle, i = 1, 2, 3$  y con ello  $F_i, i = 1, 2, 3$  en la base  $\{W_1, W_2, W_3\}$  se obtienen al multiplicar escalarmente [25] por  $W_k$  respectivamente. Concretamente:

$$[32] \quad Det(F_i, \overrightarrow{P_k T_i}, W_k) - Det(F_j, \overrightarrow{P_k T_j}, W_k) = \frac{L}{2} Det(P, e_k, W_k).$$

De esta expresión y usando [26], [30] y [31] obtenemos:

$$[33] \quad \langle F_i, N_i \rangle \langle \overrightarrow{P_k T_j}, N_j \rangle + \langle F_j, N_j \rangle \langle \overrightarrow{P_k T_i}, N_i \rangle = B_k,$$

donde  $B_k$  solo depende de la geometría y del peso del nudo.

Si consideramos [33] como un sistema de ecuaciones lineal con incógnitas  $\langle F_1, N_1 \rangle, \langle F_2, N_2 \rangle$  y  $\langle F_3, N_3 \rangle$ , observamos que la matriz de coeficientes está dada por las coordenadas de los vectores  $\mathfrak{B} = \{\overrightarrow{P_2 P_3} \wedge W_1, \overrightarrow{P_3 P_1} \wedge W_2, \overrightarrow{P_1 P_2} \wedge W_3\}$  en la base  $\{N_1, N_2, N_3\}$  y por consiguiente [33] tiene una única solución si y sólo si los vectores de  $\mathfrak{B}$  son no coplanarios. En caso contrario, se tendría que cumplir:

$$[34] \quad \langle N, W_3 \rangle \langle N, W_2 \rangle \overrightarrow{P_2 P_3} \wedge W_1 + \langle N, W_3 \rangle \langle N, W_1 \rangle \overrightarrow{P_3 P_1} \wedge W_2 + \langle N, W_1 \rangle \langle N, W_2 \rangle \overrightarrow{P_1 P_2} \wedge W_3 = 0.$$

para toda permutación positiva  $(i, j, k)$  de  $(1, 2, 3)$ , siendo  $N$  el vector normal al plano que determinan los puntos de contorno  $P_1, P_2$  y  $P_3$ . De aquí, al multiplicar escalarmente por  $W_k$ , se tendría:

$$[35] \quad \langle W_j, N \rangle \langle \overrightarrow{P_k T_j}, N_j \rangle + \langle W_i, N \rangle \langle \overrightarrow{P_k T_i}, N_i \rangle = 0,$$

Teniendo en cuenta que los vectores son los normales de los planos  $\{P_i, T_j, T_k\}$  podemos expresar [35] por:

$$[36] \quad \langle W_j, N \rangle \langle \overrightarrow{P_k T_k}, N_j \rangle + \langle W_i, N \rangle \langle \overrightarrow{P_k T_k}, N_i \rangle = 0.$$

Usando las expresiones [27], [28] y [36] obtenemos:

$$[37] \quad \langle \overrightarrow{P_k T_k}, W_k \rangle - \langle \overrightarrow{P_k T_k}, N_k \rangle \langle W_k, N \rangle = 0, \\ \langle \overrightarrow{P_k T_k}, W_k \rangle - \langle \overrightarrow{P_k T_k}, N_k \rangle \langle W_k, N_k \rangle = 0,$$

y, por tanto,  $\{\overrightarrow{P_k T_k}, W_k, N \wedge N_k\}$  tendrían que ser vectores coplanarios, lo que contradice el hecho de que el plano  $\Pi$  que contiene los puntos de contorno y el que pasa por los puntos  $T_1, T_2$  y  $T_3$ , no pueden ser idénticos debido a la propia geometría del sistema.

Esta demostración implica la compatibilidad del sistema [33], que a su vez posibilita la obtención de las fuerzas  $F_i$ , y por ende la deducción de todas las fuerzas actuantes sobre el Nudo en un estado de equilibrio.

En la Figura 13, se representa la disposición de planos  $\Pi_i$   $\{P_i, T_j, T_k\}$  del nudo objeto de estudio, que expone que son planos no coincidentes, demostrando, según la tesis anterior, que, conocida la geometría de cada nudo, puede averiguarse el sistema de esfuerzos que garantiza la nulidad de fuerzas y momentos en la estructura.

Este hecho implica que la transformación de un nudo de tres barras en un nudo recíproco de tres barras conlleva el cambio de estructura estáticamente indeterminada a estructura isostática.

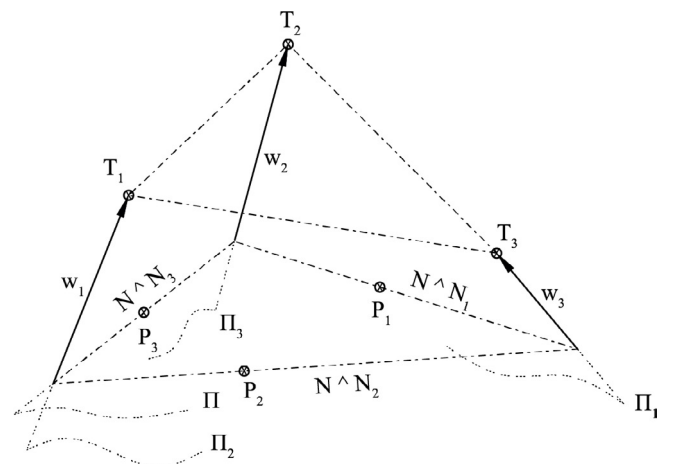


Figura 13: Nudo Recíproco de tres barras. Disposición de puntos, planos y vectores principales.

La estabilidad de los nodos recíprocos triangulares es pues, unívocamente dependiente de la geometría de este. En la Figura 14, puede verse una representación de las fuerzas que, actuando sobre los puntos de apoyo mutuo, estabilizan una geometría dada.

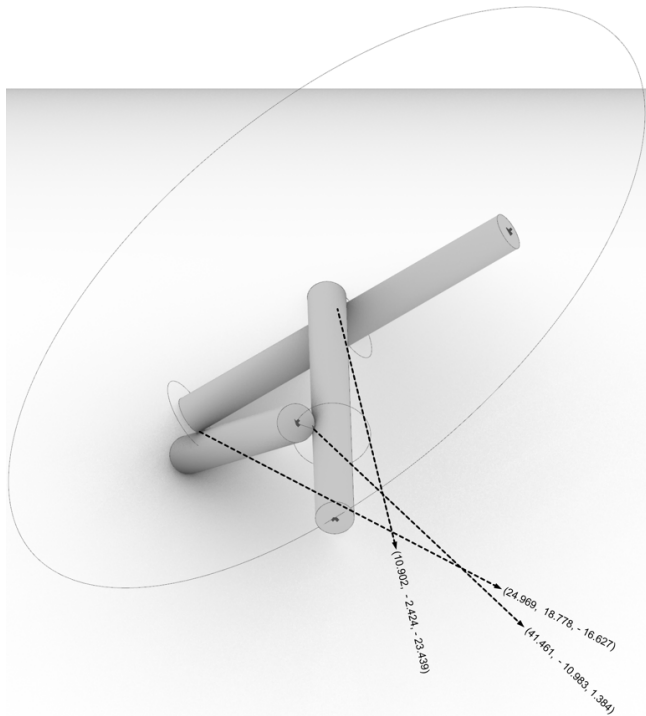


Figura 14: Nodo Recíproco triangular, fuerzas estabilizantes actuantes en los puntos de tangencia que estabilizan una geometría.

### 3.2.1. Estabilidad del nodo en transformación

Todo cambio de posición es fruto de las fuerzas actuantes en un sistema. Podemos suponer que el paso de una posición inicial de la ERT en equilibrio a una posición transformada en equilibrio es fruto de la actuación de unas fuerzas externas expresables, si consideramos cada barra un sólido rígido, en términos de la aceleración del sistema o la derivada segunda respecto al tiempo de su función posición.

$$[38] \quad F_i(t) = m\ddot{O}_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Dichas fuerzas, aplicadas sobre los puntos  $O_i$ , son las fuerzas externas que determinan la cinemática de la estructura.

## 4. CONCLUSIONES

El presente estudio analítico sienta la base geométrico-matemática del principio de reciprocidad, definiendo una formulación matemática de compatibilidad o coherencia recíproca del sistema básico de las MRT. Se trata de una expresión (para nodos triangulares) en términos de la matriz usual del producto escalar en la base formada por los vectores binormales a las barras tangentes del nodo recíproco, de la que se deduce que la transformabilidad del nodo conlleva una transformabilidad en la distancia de entramado en base a los ángulos formados por las direcciones de apoyo mutuo entre elementos. Este hecho implica una

correspondencia unívoca entre los posibles movimientos de rotación y de desplazamiento entre barras de un nodo recíproco, que a su vez configura la curvatura de los posibles lugares geométricos de las tangencias de movimiento entre elementos. (Expresión 6).

Además del análisis del caso particular del nodo recíproco regular (Expresiones 7-14), se ha estudiado la parametrización de la geometría de una ER en base a su capacidad de Transformación, analizando qué implicaciones en el movimiento de los elementos tiene la conservación del principio recíproco. Se demuestra que el lugar geométrico descrito por la transformación de un Nodo Triangular es un conjunto fruto de la variación de cuatro parámetros (ángulos de giro entre los vectores de la geometría partiendo de dos vectores perpendiculares de referencia) (expresión 15). La parametrización propuesta permite también la obtención del lugar geométrico descrito por la sucesión de puntos de tangencia mutuos entre dos barras moviéndose dentro de un nodo recíproco, de forma que pueda describirse analíticamente la línea de movimiento que, trazada sobre cada uno de los elementos, permite la materialización de una transformación global conocida, dejando patente la dependencia de la propia geometría del elemento (radio de la barra) en la definición de estas curvas (Expresión 16). Igualmente, y uniendo el concepto de nodo regular con la parametrización anterior, se propone un cambio de variable sobre ellos en los parámetros  $p$ ,  $q$ ,  $s$  y  $t$ , de forma que la posición inicial o cero de la geometría quede asociada a la del nodo regular, partiendo ya de unos valores que garanticen la variación sobre una configuración geométrica que mantiene la coherencia recíproca del sistema (Expresiones 18-22). A su vez, se determina un primer límite y rango de movilidad de los Nodos en aquellos giros para los que las distancias de entramado entre barras que mantienen la coherencia son inferiores a la longitud misma de las barras que los conforman (Expresión 23).

Asimismo, en este estudio analítico, se formula una demostración de la isostaticidad (Expresiones 24-37) del Nodo Recíproco Triangular; una demostración de que, partiendo de una geometría determinada, podemos obtener de forma unívoca el campo de fuerzas que, actuando en los puntos de tangencia entre las barras que forman la ER, la estabilizan. Una demostración de que, efectivamente, son sistemas geométricos con implicación estructural. A su vez, se apunta el mecanismo de obtención de las fuerzas causa de la transformación del nodo recíproco en base a la segunda derivada respecto al tiempo de su cambio de posición (Expresión 38).

Se establece, por lo tanto, la descripción del proceso para el paso de la expresión de la variación del lugar geométrico asociado a un Nodo Recíproco, que conserva una serie de invariantes relacionales entre sus elementos, a la definición de la estructura que lo materializa desde el establecimiento de su condición de equilibrio.

Esta descripción ayuda al desarrollo de un entorno digital para el diseño de Superficies de Geometría Transformable construidas con ERT y el estudio de la morfogénesis asociada a ciertas topologías. De este modo, podemos explorar su capacidad de adaptación a circunstancias y requisitos cambiantes y construir estructuras capaces de responder a condicionantes externos.

## 5. REFERENCIAS

- (1) Baverel, O., & Larsen, O. P. (2011). A review of woven structures with focus on reciprocal systems - Nexorades. *International Journal of Space Structures*, 26(4), 281-288. <https://doi.org/10.1260/0266-3511.26.4.281>
- (2) Brocato, M. (2011). Reciprocal Frames: Kinematical Determinacy and Limit Analysis. *International Journal of Space Structures*, 26(4), 343-358. <https://doi.org/10.1260/0266-3511.26.4.343>
- (3) Kohlhammer, T., & Kotnik, T. (2011). Systemic behaviour of plane reciprocal frame structures. *Structural Engineering International*, 21(1), 80-86. <https://doi.org/10.2749/101686611X12910257102596>
- (4) Larsen, O. P. (2008). *Reciprocal Frame Architecture*. Oxford: Architecture Press, Elsevier.
- (5) Pugnale, A., & Sassone, M. (2014). Structural Reciprocity: Critical Overview and Promising Research/Design Issues. *Nexus Network Journal*, 16, 9-35. <https://doi.org/10.1007/s00004-014-0174-z>
- (6) Parigi, D., & Kirkegaard, P. H. (2014). Design and fabrication of free-form reciprocal structures. *Nexus Network Journal*, 16(1), 69-87. <https://doi.org/10.1007/s00004-014-0177-9>
- (7) Goto, K., Kidokoro, R., & Matsuo, T. (2011). Rokko mountain observatory. *The Arup Journal*, 46(2), 20-26.
- (8) Kohlhammer, T., Apolinarska, A. A., Gramazio, F., & Kohler, M. (2017). Design and structural analysis of complex timber structures with glued T-joint connections for robotic assembly. *International Journal of Space Structures*, 32(3-4), 199-215. <https://doi.org/10.1177/0266351117746268>
- (9) McQuaid, M. (2002). *Shigeru Ban*. Londres: Phaidon Press.
- (10) Sánchez, J., Escrig, F., & Rodríguez, M. T. (2010). Una aproximación analítica a las mallas recíprocas diseñadas por Leonardo. *Informes de la Construcción*, 62(518), 5-14. <https://doi.org/10.3989/ic.09.032>
- (11) Sénéchal, B., Douthe, C., & Baverel, O. (2011). Analytical investigation on elementary nexorades. *International Journal of Space Structures*, 26(4), 313-320. <https://doi.org/10.1260/0266-3511.26.4.313>
- (12) Rizzuto, J. P., & Hulse, R. (2007). Dodecahedral Mutually supported element space structure: experimental investigation. *International Journal of Space Structures*, 22(2), 107-121. <https://doi.org/10.1260/026635107781482640>
- (13) Gherardini, F. & Leali, F., (2017). Reciprocal frames in temporary structures: an aesthetically and parametric investigation. *Nexus Network Journal*, 19, 741-762. <https://doi.org/10.1007/s00004-017-0352-x>
- (14) Baverel, O. (2000). Nexorades: a family of interwoven spaces structures. *Ph.D. thesis University of Surrey*.
- (15) Baverel, O., & Nooshin, H. (2004). Configuration processing of nexorades using genetic algorithms. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 45(2), 99-108.
- (16) Song, P., Fu, C.-W., Goswami, P., Zheng, J., Mitra, N. J., & Cohen-Or, D. (2013). Reciprocal frame structures made easy. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 32(4). <https://doi.org/10.1145/2461912.2461915>
- (17) Douthe, C., & Baverel, O. (2009). Design of nexorades or reciprocal frame systems with the dynamic relaxation method. *Computers & Structures*, 87(21-22), 1296-1307. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.06.011>
- (18) Wallis, J. (1972). *Opera Mathematica* (Vol. 1). Teatro Sheldoniano.
- (19) Dean, D. L. (1997). One-dimensional circular arrays of Lamella Beams. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 38(1), 19-21.
- (20) Gelez, S., Aubry, S., & Vaudeville, B. (2011). Behaviour of a simple nexorade or reciprocal frame system. *International Journal of Space Structures*, 26(4), 331-342. <https://doi.org/10.1260/0266-3511.26.4.331>
- (21) Sánchez, J., & Escrig, F. (2011). Frames designed by leonardo with short pieces. An analytical approach. *International Journal of Space Structures*, 26(4), 289-302. <https://doi.org/10.1260/0266-3511.26.4.289>
- (22) Garavaglia, E., Pizzigoni, A., Sgambi, L., & Basso, N. (2013). Collapse behaviour in reciprocal frame structures. *Structural Engineering and Mechanics*, 46(4), 533-547. <https://doi.org/10.12989/sem.2013.46.4.533>
- (23) Greco, L., Lebé, A., & Douthe, C. (2013). Investigation of the elastic behaviour of reciprocal systems using homogenization techniques. *Proceedings of IASS Annual Symposia: IASS 2013 Beyond the Limits of Man*, (págs. 1-8). Wrocław.
- (24) Chilton J.C., Choo B.S. & Wilkinson D., (1998) A Parametric analysis of the geometry of retractable reciprocal frame structures. *Lightweight Structures In Architecture, Engineering And Construction*, 1, Sydney, 547-555.
- (25) Parigi, D., Sassone, M., Kirkegaard, P. H., & Napoli, P. (2014). Static and kinematic formulation of planar reciprocal assemblies. *Nexus Network Journal*, 16(1), 37-59. <https://doi.org/10.1007/s00004-014-0175-y>
- (26) Pellegrino, S., & Calladine, C.R. (1986). Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks. *International Journal of Solids and Structures* 22: 409-428. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(86\)90014-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(86)90014-4)