Journal of Early Childhood Education Research
Volume 10, Issue 2, 2021, 165–179

jecer.

Matemaattisen ajattelun tuki ja opetus *

Arto Mutanen

Merisotakoulu & Maanpuolustuskorkeakoulu, s-posti: arto.mutanen@gmail.com

TIIVISTELMÄ: Ihmisen toimintakykyä määrittävät hänen taitonsa, samoin yksilön matemaattista taitavuutta määrittävät hänen matemaattiset taitonsa. Siten on erittäin tärkeää pohtia mitä matemaattiset taidot ovat. Pyrittäessä selkeyttämään matemaattisten taitojen luonnetta, joudumme pohtimaan myös matemaattisia tietoja. Matemaattiset tiedot ja taidot kohtaavat matemaattisessa käytännössä. Matemaattista käytäntöä ei voi määrittää tietämättä tarkemmin käytäntöä määrittäviä seikkoja, joita ovat mm. siihen osallistuvat henkilöt, ympäristö ja matemaattinen teema, jota tarkastellaan. Yleisesti voi luonnehtia matemaattisen ongelmanratkaisun logiikkaa, analyysin ja synteesin menetelmä. Konkreettisin esimerkein voidaan antaa malleja, joiden johdattamina on mahdollista luoda hedelmällisiä käytäntöjä. Artikkelissa tarkastellaan kahta esimerkkiä, jotka soveltuvat hyvin esiopetuksen matematiikan opetuksen suunnitteluun. Platonin *Menon* kuvaa, miten oppimiskeskustelua voidaan ohjata, ja satataulun avulla kuvataan, miten matematiikan perustietoja ja -taitoja on mahdollista oppia havainnoiden.

Asiasanat: *matemaattinen taito, matemaattinen tieto, matematiikan käytäntö, analyysi*

ABSTRACT: Skills function as foundation of human action competence. Just similarly mathematical skills function as foundation of mathematical competence. So, it is extraordinary important to specify the character of mathematical skills. However, in the analysis of mathematical skills we face also mathematical knowledge. Mathematical skills and mathematical knowledge meet each other in mathematical practise. Mathematical practise can be specified only if the basic factors of the practise are given which are persons participating into it, environment, and the mathematical topic under study. In general, it is possible to characterize general logic of mathematical problem solving which is the method of analysis and synthesis. Concrete examples help to construct practises. In the article, the examples of Plato's Meno and "satataulu" are considered. These show how one can construct fruitful mathematical dialog at the pre-primary education.

Keywords: *mathematical skills, mathematical knowledge, mathematical practise, analysis*

**** Tämä artikkeli kuuluu JECER-lehden vertaisarvioimattomiin kirjoituksiin***

© 2021 Arto Mutanen. Peer-review under responsibility of the editorial board of the journal. Publication of the article in accordance with the Creative Commons Non-Commercial license. ISSN 2323-7414; ISSN-L 2323-7414 online. Suomen Varhaiskasvatus ry – Early Childhood Education Association Finland.

Johdanto

Matematiikan erityisluonne on tärkeää huomioida. Erityisesti varhaiskasvatuksessa tämä on olennaisen tärkeää, jotta voidaan luoda ”pohjaa matemaattisen ajattelun kehittymiselle ja matematiikan oppimiselle” (Opetushallitus, 2016, s. 36). Esiopetuksen tavoitteet liittyvät ”ihmisyyteen ja eettisesti vastuukykyiseen yhteiskunnan jäsenyyteen” (emt., s. 13) kasvamiseen, joten matematiikan opetuksen ollakseen lapsen kasvua tukevaa tulee kehittää menetelmiä aidosti dialogiseen suuntaan. Matematiikka ei tarkastele reaalisen maailman tiettyjä tosiasiallisia ilmiöitä samalla tavoin kuin fysiikka, biologia tai historia. Tällaiset ns. reaaliaineet tarkastelevat niille ominaisia reaalistodellisuuden puolia. Matematiikka tarkastelee ihmisten tekemää käsitteellistä todellisuutta, mikä tekee siitä abstraktia. Tämä on yhtäältä selvä ja ilmeinen asia: ei yhteenlaskua tai kertolaskua löydy todellisuudesta. Kuitenkin tämä on toisaalta vaikea asia: matematiikan lukuisat sovellutukset saattavat ilmentää matematiikan muistuttavan reaaliaineita, vaikkakin olevan abstraktimpi, kuten esimerkiksi Russell (1919) tuo esiin.

Matematiikkaan suhtaudutaan varsin kaksijakoisesti (Liuttu & Pasanen, 2015; Väisänen, 2017). Ei ole selvää, mistä tällainen johtuu. Kuitenkin matematiikkaan suhtaudutaan aina kauhusta ihastukseen, mihin opettajan persoonallisuus voi vaikuttaa voimakkaasti (Lehtinen ym., 2019). Toisaalta matematiikan opetukseen liittyy piirteitä, jotka korostavat matematiikan erityisluontoisuutta. Santaharjun (2016) uutiseen haastateltu Tossavainen luonnehtii tätä hyvin todetessaan, ettei sinillä ja kosinilla ”ole valtaosalle kansaa tuon taivaallisen merkitystä, vaikka niitä yläkoululaisten päähän enemmän tai vähemmän huonolla menestyksellä tahkotaankin”. Lisäksi hän vahventaa sanomistaa toteamalla, ettei hän ”niitä arjen hallintaan ole tarvinnut”. Tietysti tämä jälkimmäinen riippuu osin siitä, millainen henkilön arki on.

Matematiikka jää helposti arkielämälle vieraaksi. Kuitenkaan esimerkiksi historian merkitystä arkielämän kannalta ei arvioida samalla tavoin kuin matematiikan merkitystä. Tämän artikkelin keskeinen tavoite on tarkastella matematiikkaa sisällöllisenä päättelynä. Esimerkit, joita artikkelissa tarkastellaan, soveltuvat nimenomaan varhaiskasvatukseen ja peruskoulun alaluokille. Tätä teemaa on tarkasteltu tässä lehdessä eri näkökulmista esimerkiksi Björklundin (2015), Monosen, Aunion ja Koposen (2014), Väisäsen ja Aunion (2014) sekä Parviaisen (2019) artikkeleissa. Tässä artikkelissa nojaudutaan paljon Parviaisen (2019) artikkeliin, mutta kiinnostavia yhteyksiä löytyy myös muihin mainittuihin artikkeleihin.

Matemaattinen taito

Parviainen (2019) tarkastelee matemaattisia taitoja osana inhimillisiä taitoja, mikä tekee hänen lähestymistapansa erittäin hedelmälliseksi. Yksilön aidon kansalaisuuden ehtona on tietyn sivistystason omaaminen, joka pitää sisällään myös matemaattisia taitoja. Tällainen luonnehdinta ei viittaa joihinkin tiettyihin koulumatematiikan osa-alueiden hallintaan, vaan tiettyihin yleisiin matemaattisiin taitoihin.

Parviainen (2019) nimeää kolme erilaista yleistä matemaattista taitoa: numeeriset taidot, avaruuden hahmottamisen taidot sekä matemaattisen ajattelun ja päättelyn taidot. Se, että Parviainen puhuu nimenomaan taidoista (skills), on tärkeää. Matemaattiset taidot ovat sekä käsitteellisiä että proseduraalisia, mikä tulee hyvin esiin Parviaisen (2019, s. 166) luonnehdinnasta. Kuitenkin kukin taito voi olla enemmän tai vähemmän käsite- tai teoriapitoinen. Perustaitoina niiltä ei edellytetä raskasta käsitteellistä tai teoreettista perustaa. Siten myös näiden taitojen kehittyminen on asteittaista, joka alkaa varsin nuorena (emt., s. 163).

Parviaisen (2019) artikkeliin nojautuen voidaan havaita seuraavaa. Numeeriset taidot perustuvat ei-formaaliin ja formaaliin numeeriseen käsitykseen, jossa yksilön kyky hahmottaa määriä (kardinaalit) ja järjestystä (ordinaalit)[1], on olennaista. Matematiikan opetuksessa nämä perustaidot ovat kaiken aikaa läsnä, mutta koulumatematiikassa niitä ei erityisesti huomioida. Numeeriset taidot konkretisoituvat koulumatematiikassa laskentoon, joka on luontevilla tavoilla kytkeytynyt matemaattisen ajattelun ja päättelyn taitoihin. Usein koulumatematiikasta jää koululaisille kuva, että juuri laskento on keskeisin asia.

Avaruuden hahmottamisen taidot pitävät sisällään laajan kirjon avaruuden hahmotuskykyjä pitäen sisällään myös ajanhahmotuksen kyvyn. Kyky poikkeaa numeerista taidoista siinä, että kyse on pitkälle laadullisista teemoista, joihin liittyvät taidot ovat luonteeltaan analyyttisia. Näin matemaattiseen päättelyyn tulee mukaan vahva analyyttinen piirre. Se, miten tämä tulee huomioiduksi laajemmin, on olennaista niin matematiikan kuin opetuksen kannalta. (Parviainen, 2019.)

Parviainen (2019) muotoilee matemaattisen ajattelun ja päättelyn taidot, jotka kytkevät edellä olevat numeeriset taidot ja avaruuden hahmottamisen taidot yhteen. Tällä kohdin Parviainen tuo esiin erityisen kiinnostavia piirteitä matematiikan luonteesta.

[1] Näiden määritelmistä, ks. Russell (1903, s. 111, 239).

Matemaattisen ajattelun ja päättelyn taidot eivät ole tietty formaali päättelyproseduuri, vaan matematiikkaan luonnehtiva rationaliteetti, joka kytkeytyy eri tavoin eri matematiikan osa-alueisiin (Parviainen, 2019, s. 177). Matemaattisen ajattelun ja päättelyn taidoissa formaali päättely (matemaattis-looginen päättely) on vain tietty osa kokonaisuudesta. Oppikirjoissa matemaattis-looginen päättely painottuu tehtävien ratkaisussa. Kuitenkin esimerkiksi geometriassa, joka voidaan rakentaa myös puhtaan aksiomaattisesti (Nevanlinna, 1973), painottuvat formaalin päättelyn sijaan ne piirteet, joita Parviainen (2019) kutsuu matemaattiseksi päättelyksi ja analyyttiseksi ajatteluksi.

Laaja käsitys matemaattisen ajattelun ja päättelyn taidoista tekee oikeutta matematiikalle. On selvää, että aritmeettiseen ja geometriseen päättelyyn liittyy niille ominaisia piirteitä. Laskentaan liittyvä numeerinen kalkylointi on esimerkki algoritmisesta ajattelusta, jota koulussa opittavat laskusäännöt ilmentävät. Geometriaan liittyvä kuvioiden piirtäminen ja niistä havainnointi puolestaan ovat luonteeltaan kuvion analyysin kautta tapahtuvaa (laadullista) päättelyä. Kuitenkin näitä yhdistää tietty strateginen orientaatio. (Hintikka & Remes, 1974; Parviainen, 2019.)

Matemaattinen taito ei ole vain kykyä kasata matemaattisia tosiasioita, vaan strategisesti jäsentynyt käsitteellisen ja algoritmisen ajattelun kokonaisuus. Parviainen (2019) tuo tämän strategisuuden esiin painottamalla ongelmanratkaisustrategioita. Strategiat ovat tiedon rakentumista ohjaavia periaatteita. Ongelmanratkaisustrategiat ovat kiinnostava strategisen tiedon luokka (Hintikka & Remes, 1974; Niiniluoto, 2018). Siten matemaattisessa tiedonhankinnassa olennaista on strateginen ongelmanratkaisutaito.

Matemaattista tiedonhankintaprosessi on strateginen prosessi, joten on hedelmällistä lyhyesti tarkastella strategisen taidon luonnetta. Edellä on viitattu Hintikan ja Remeksen (1974) sekä Niiniluodon (2018) kirjoihin, joissa molemmissa tarkastellaan analyysin ja synteesin menetelmää, jossa on kyse strategisen analyysin ja loogisen synteesin vuorotteluun perustuvasta tiedonrakentamisesta.

Kirjallisuudessa tuskin on yhtä selkeästi ja hauskasti esitettyä esimerkkiä kuin Platonin (1978) dialogissa *Menon* esitetty matemaattisen tiedon rakentumisprosessin kuvaus. Tieto rakentuu Sokrateen ja orjapojan välisessä strategisessa keskustelussa. Esimerkissä tulee hyvin esiin, miten käsitteellinen ja proseduraalinen tieto sekä numeerinen ja avaruudellinen tieto kohtaavat ja yhdistyvät ymmärrykseksi.[2]

---

[2] Tarkemmin ks. Hintikka ja Bachman (1991, s. 21-27).

Sokrates ohjaa orjapojan kanssa käymäänsä keskustelua. Hän aloittaa sanomalla ”Sanohan poika, tiedätkö, että tämä kuvio on neliö?” (*Menon* 82b). Tässä tarkoitus on luoda yhteistä käsiteellistä perustaa. Siten tulee varmistaa, että kaikki ymmärtävät samalla tavoin peruskäsitteet. Keskustelu etenee siten, että orjapoika myöntää tietävänsä ja Sokrates jatkaa täsmentämällä, että ”Neliö on siis kuvio, jossa on neljä samanmittaista sivua, nämä tässä?” (*Menon* 82c), jonka orjapoika myös myöntää. Näin käsitteellinen ymmärrys syvenee. Keskustelu ei ole vain lingvististä, vaan keskustelussa käytetään asian käsitteellistämisen myös piirroksia. Sanallisen keskustelun ja piirrosten avulla yhteinen käsitys hiljalleen rakentuu. Keskustelussa rakennetaan tieto askel askeleelta: esimerkiksi peruskysymyksen järkevyys[3] osoitetaan piirtämällä, miten sivujen puolittajien avulla saadaan jaettua neliö neljäksi yhtä suureksi neliöksi.

Tietoa etsittäessä on tärkeää tietää sekä mitä tiedetään että mitä ei tiedetä, kuten Sokrates (84a-b) tuo esiin sanomalla, että ”nyt hän sitä vastoin on selvillä tietämättömyydestään eikä enää luule tietävänsä, kun ei kerran tiedä” ja jatkaa, että ”hänellä on nyt parempi ote siihen asiaan, jota hän ei tiedä”. Ymmärrys edellyttää sekä käsitteellistä tietoa (”neliö on siis kuvio, jossa on neljä samanmittaista sivua”, *Menon* 82c) että laskennallista tietoa (”Eikö se ole neljä kertaa niin suuri? (…) Onko neljä kertaa niin suuri kaksinkertainen?”, *Menon* 83b). Tämä tulee selkeästi esiin *Menonissa* esiintyvässä keskustelussa.

Tiedon rakentamisessa oppijalla tulee olla aktiivinen rooli. *Menonissa* orjapoika esittää Sokrateelle omia käsityksiään, joiden analyysin kautta keskustelu etenee. Esimerkiksi orjapoika esittää, että tuplaamalla sivu saadaan etsitty neliö. Tätä ehdotusta ryhdytään yhdessä tarkastelemaan, jolloin piirros osoittaa, että ehdotettu ratkaisu ei ole oikea, vaan kaksinkertainen etsittyyn nähden. Löytääkseen etsityn vastauksen tulee huomata, että piirtämällä viiva neliön kulmasta kulmaan (*Menon* 85a), jota kutsutaan lävistäjäksi, saadaan puolitettua neliö. Siten kuviosta huomataan, että piirtämällä orjapojan ehdottamaan kuvioon apukuvina neljä alkuperäistä neliötä ja kullekin näistä lävistäjä siten, että kuvioon muodostuu neliö, jonka sivuina nämä lävistäjät ovat. Kuviosta *näkee*, että näin saadaan etsitty neliö. Siten vastauksena saadaan, että halutessamme kaksinkertaistaa neliön pinta-ala, tulee piirtää neliö, jonka sivun pituus on alkuperäisen neliön lävistäjä. (Tuloksen merkityksestä, ks. Hintikka & Bachman, 1991; Russell, 1919, s. 4.)

Tämä esimerkki on kiinnostava monessa mielessä. Yhtäältä olennaista on strateginen etsintä sokraattisen kyselymenetelmän ohjaamana. Toisaalta on olennaista kuvioiden rooli päättelyprosessissa. Dialogissa esiintyvän päättelyn seuraaminen ilman, että itse

[3] Kysymys on järkevä, jos sille on olemassa vastaus (ks. Hintikka & Bachman 1991).

piirtää kuvat näkyviin, on erittäin vaikeaa. Ratkaisu edellyttää myös kvantitatiivista tietoa lisäävää numeerista päättelyä. Näin havaitaan, että eri matematiikan tiedon lajit yhdistyvät matemaattisessa päättelyssä ja ongelmanratkaisussa (Parviainen, 2019, s. 178).

Matemaattinen tieto

Matematiikka mielletään usein formaaliksi aineeksi, jossa luvut, kaavat ja tehtävän ratkaisu ovat keskeisessä roolissa (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). On oikeastaan tärkeä tarkastella, miten luvut, kaavat ja tehtävien ratkaisut muotoutuvat osaksi matematiikkaa. Edellä oleva Sokrateen ja orjapojan keskustelu tuo esiin monia kiinnostavia puolia, mutta oppikirjoissa ei keskustelevuus juuri näy; tosin Platonin *Menonissa* esittämä elävä keskustelu tuskin on mahdollista ja tarkoituksenmukaistakaan.[4] Tarkastellaan toista esimerkkiä, jonka avulla saamme kuvan tästä käsillämme olevasta teemasta. Matematiikan varhaiskasvatukseen kuuluu yleisesti ns. satataulu, jossa on esitettynä luvut 1, 2, 3, …., 100 (ks. kuvio 1).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Kuvio 1 Satataulu[5]

[4] Platon esitti kritiikkinään kirjoitetulle tekstille sen, että se ei tuo esiin keskustelevaa puolta, mikä tässä meilläkin on käsillä.

[5] Taulu on LUMA-keskuksen sivuilta (https://ouluma.fi/2012/10/satataulu-paketti/). LUMA-keskuksen sivuilla on tehtäviä, joiden avulla voi lähteä tutustumaan satatauluun osana opetusta.

Tämä yksinkertainen kuva on erittäin kiehtova: mitä kaikkea siitä voikaan *nähdä*! Yhtäältä satataulusta näkee vain katsomalla, miten lukujen *järjestys* muotoutuu 1, 2, 3, 4, …., 10, ja uusi rivi ja järjestys jatkuu 11, 12, 13, …. Näin voidaan jatkaa aina sataan saakka. Tästä ei näe eroa järjestystä merkitsevän järjestysluvun ja määrää ilmaisevan kardinaaliluvun välillä. (Ks. Russell, 1919, s. 11, 195.) Äärellisten lukujen kohdalla tämä ei olekaan näkyvissä, vaan käsitteellisenä erotteluna se tulee tietää. Toki monissa käytännön tilanteissa teemme erottelun esimerkiksi sanoessamme, että X oli kilpailussa 4. tai että kilpailussa oli 15 osallistujaa. Merkintätapa osoittaa, kummasta on kyse: piste lukumerkin perässä ilmaisee, että kyseessä on järjestysluku.

Satataulusta näkee yhteenlaskun muotoutumisen. 1+1=2, 1+2=3, jne., mikä on samalla myös loogisesti oivallinen tapa nähdä yhteenlaskun määrittyminen (Cutland, 1980, s. 17; Miettinen , 1995, s. 90; Russell, 1919). Satataulun vahvuus havainnollistajana tulee hyvin esiin, kun siirrytään riveistä sarakkeisiin. Tällöin nähdään heti, miten lukuun lisätään 10: 1+10=11, 2+10=12, … ja samoin kun lukuun lisätään 20, 30, … Näitä yhdistämällä havaitsemme lisää kiinnostavia laskentaan liittyviä seikkoja. Lisäksi lävistäjät tuovat lisää kiinnostavia asioita näkyviin. Samalla tavoin voidaan oppia näkemään myös kertotaulun muotoutuminen. Tämä antaa hyvän kuvan, miten 10-kantajärjestelmä rakentuu. Satataulun rikkaus liittyy siihen, että monet lukujärjestelmämme perusominaisuudet ovat *nähtävissä*. Opetuksessa on hyvä tuoda mukaan myös laskusäännöt, jotka *ilmaisevat* havaittuja ominaisuuksia.[6] Tällöin laskusäännöt tulevat luontevalla tavalla tulkituiksi – eikä niitä siten tarvitse opetella ulkoa. Tällöin keskustelu voi edetä, kuten edellä kuvatussa *Menon*-esimerkissä, *havaintojen* saattelemana, joten keskustelu voisi sujua luontevalla tavalla ilman, että tarvitsisi välttää tai hylätä yllättäviä kysymyksiä (Gaspard & Gainsburg, 2020).

Satataulusta voidaan havaita, että jokainen kymmen alkaa luvusta 1. Siten esimerkiksi nyt vuonna 2021 elämme ensimmäistä vuotta kolmatta vuosikymmentä tällä vuosituhannella. Satataulua katsoessa ei voi olla miettimättä, mitä on tapahtunut nollalle, tuolle niin tärkeälle pienelle luvulle. Pieniä ei saisi sorsia! Nolla on tärkeä luku itsessään; se on tärkeä yhteenlaskussa, mutta kertolaskussa sen rooli on olennainen, mutta varsin kummallinen. Jos nolla otetaan mukaan, niin sen tulisi sijaita ensimmäisessä ruudussa, joten moni asia muuttuisi; esimerkiksi satataulu olisikin satayksitaulu, ellei taulua päätettäisi lukuun 99, mikä toisi näkyviin monia olennaisia matemaattisia piirteitä. Esimerkiksi tällöin havaitsisimme taulusta, että jokaisen rivin viimeisen luvun

[6] Voisimme myös sanoa, että laskusäännöt representoivat havaittuja säännönmukaisuuksia. Laskusäännöt mahdollistavat symbolimanipulaatiolla tehdä sen, mitä satataulusta havaitaan.

numeromerkintä päättyy numeromerkkiin 9 ja seuraavalla rivillä kymmeniä ilmaisemaan numeromerkkiin lisätään yksi. Siten helposti näkee, että esimerkiksi laskussa 9+1 siirrytään uudelle kymmenluvulle, joka on kymmenjärjestelmän olennainen piirre. Tämä ei tule kuvassa olevasta satataulusta selkeästi näkyviin, vaikka onkin siitä helposti pääteltävissä. Esimerkiksi kiinalaisessa helmitaulussa tällaiset kymmenjärjestelmän laskentaan liittyvät rakenteelliset piirteet ovat selkeästi ja luontevasti esitettyinä (Popotis & Konstatinos, 2019).

Nollasta alkavan satataulun viimeisen luvun 99 kohdalla voi yhdessä pohtia, mikä on seuraava luku, jolloin havaitaan, että joudutaan ensimmäiseen kolminumeroiseen lukuun 100, joka ei luontevasti kuulu satatauluun, vaan se aloittaa uuden taulun, jota tulisi kutsua tuhattauluksi, joka on rakenteeltaan satataulua monimutkaisempi. Esimerkiksi siinä jokaisella rivillä esiintyy satataulu. Näin tulee selvästi näkyviin lukujen rakenteellinen piirre, jota kutsutaan ordinaaliksi (Rogers, 1967, s. 219). Lisäksi havaitsemme tuhattaulusta, että voimme järjestää satataulun yhdelle riville, jolla esiintyy kaikki satataulun ominaisuudet, mikä tuo esiin erään perusajatuksen Turingin (1936) ihmislaskennan analyysistä. Turingin muotoilu on erittäin abstrakti, mutta se on osoittautunut sekä teoreettisesti että käytännöllisesti erittäin hedelmälliseksi. Tällainen erilaisten merkintätapojen tiedostaminen antaa opettajalle horisonttia keskustelun johdatteluun. Lienee selvää, että keskustelun tulee edetä rauhassa lasten tiedon rakentumisen tahtiin.

Opettajan on hyvä tietää, että näin harjoittelemalla nähdään matematiikan keskeisiä piirteitä. Matematiikkaa voi nähdä ja tehdä ilman raskasta matemaattista symboliikkaa. Tuhattaulusta voidaan monet seikat havaita suoraan samalla tavoin kuin satataulusta. Kuitenkin tuhattaulun kompleksisuus tekee sen, että monet siitä tehtävät havainnot ovat epäsuoria ja teoriapitoisia (Mutanen & Halonen, 2018). Edelleen on hyvä huomata, että edellä oleva kertoo matematiikasta paljon: matematiikassa ei ole niinkään kyse absoluuttisesta totuudesta, kuin asioiden johdonmukaisesta ja täsmällisestä valaisemisesta. Tämä tulee esiin Parviaisen (2019) mallissa, jossa luonnehditaan matemaattisesta ajattelua ja päättelyn taitoa.

Nyt voimme ymmärtää, että matematiikan peruskäsitteet, kuten luvut ja geometriset kuviot, muodostavat käsitteellisen perustan, joiden varaan rakentuu matematiikan käsitteellinen rakenne. Tätä koskevaa tietoa voidaan kutsua käsitteelliseksi tiedoksi (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018). Matematiikka ei ole vain tietoa käsitteellisestä rakenteesta ja sen ominaisuuksista, vaan taitoa laskea ja ratkoa matemaattisia ongelmia. Tällaista ongelmanratkaisutaitoa kutsutaan proseduraaliseksi tiedoksi (emt.). Kuitenkaan ei ole riittävää, että tiedetään käsitteellinen rakenne ja että tiedetään ongelmanratkaisumenetelmiä. Lisäksi tarvitaan tietoa, joka ohjaa ongelmien jäsennys- ja ratkaisuprosesseja. Tällaista ohjaavaa tietoa kutsutaan strategiseksi tiedoksi (emt.).

Tiedon ja toiminnan suhde ei ole kuitenkaan selvä tai ongelmaton. Se, että henkilö tietää jotain, ei välttämättä saa häntä toimimaan. Kuitenkin on selvää, että tiedon ja toiminnan välillä on yhteys. Mutta millainen tämä yhteys oikein on? Toiminta kytkeytyy taitoihin. Siten matematiikkaa tehtäessä nimenomaan taidoilla on keskeinen merkitys. Kuitenkin matemaattiset taidot ovat käsite- ja teoriapitoisia. (Parviainen, 2019.)

Eräs olennainen ero taidossa ja tiedossa liittyy ensimmäisen dynaamisuuteen ja jälkimmäisen staattisuuteen. Vaikka tiedän, miten ongelma ratkaistaan, en välttämättä ryhdy sitä ratkaisemaan: ei ole välttämätöntä, että edes osaisin ratkaista sitä. Voin tietää, miten jokin asia tehdään, vaikkapa miten hyppyrimäestä hypätään, mutta en kuitenkaan kykenisi tekemään kyseistä asiaa. Proseduraalinen taito liittyy ongelmien ratkaisemiseen ja proseduraalinen tieto niihin algoritmeihin, joilla ongelmia ratkaistaan. Siten matemaattiset taidot toteuttavat matemaattisen tiedon. Laskettavuuden teoriassa käsitellään algoritmeja koskevaa tietoa, mutta kyse ei ole algoritmisesta ajattelusta, vaan sen taustalla olevien algoritmien luonteen tarkastelusta (Rogers, 1967).

Matemaattinen käytäntö

Matemaattinen tieto on tärkeä tavoite matematiikan opiskelussa. Kuitenkaan pelkkä tieto ei riitä. Tulee osata muotoilla ja ratkoa matemaattisia ongelmia; tulla taitavaksi matematiikassa. Tähän päästäkseen tulee harjaantua tekemällä matematiikkaa. Matematiikkaa tehdään matematiikan käytännössä, joka on luonteeltaan konstruktiivista. Konstruktiot tehdään käsitteellisesti eli luonnollisen kielen, symbolikielen ja kuvien avulla. Konstruktiot johdattavat tietämättömyydestä tietoon. Kuten edellä kuvatusta *Menon*-esimerkistä havaitaan matematiikan oppiminen voi luontevasti tapahtua konstruktiivisena keskusteluna.

Kitcher (1986, s. 229) määrittää matemaattisen käytännön viiden parametrin avulla. Matematiikka on aina myös symbolista, joten kieli on olennainen osa matematiikan käytäntöä. Kieli ei kuitenkaan rajoitu matemaattiseen formalismiin, vaan siihen kuuluu myös luonnollinen kieli sekä kuvia ja muita ilmaisuja (Priest ym., 2018). Edelleen matematiikan käytäntöön kuuluu yleinen käsitys matematiikasta, jota Kitcher (1986) kutsuu metamatemaattiseksi näkemykseksi. Kitcherin mukaan matematiikan käytäntöön kuuluu edellisten lisäksi vielä tietty joukko lauseita, jotka on hyväksytty osaksi matematiikkaa. Koulumatematiikassa tämä saa joskus dogmaattisia piirteitä opettajan vaatiessa ilman mitään perusteluja, ja mahdollisesti vielä sallimatta keskustelua asiasta, joidenkin tiettyjen merkintätapojen käyttöä. On selvää, että matematiikan käytäntöön kuuluu päättelyä, kuten Parviainen (2019) tuo selkeästi esiin.

Edellä luonnehdittu Kitcherin (1986) tulkinta matemaattisesta käytännöstä on siinä mielessä kiinnostava, että siinä matematiikan käytäntö rinnastuu muuhun intellektuaaliseen käytäntöön. Kitcerin tarkastelu on luonteeltaan tieteenfilosofinen, joten hän kykenee tuomaan esiin rakenteellista samankaltaisuutta matematiikassa ja tieteessä. Kuitenkin matematiikan käytäntöä voi määrittää esimerkiksi spesifisti matematiikan käytäntönä (Parvianen, 2019; Wang, 1986) tai osana laajempaa kulttuurista käytäntöä (Radford, 2011; Wider, 1986). Spesifisti matematiikan käytäntönä tarkasteltaessa huomio kiinnittyy nimenomaan matematiikan erityispiirteiden luonnehdintaan (Parviainen, 2019). Jälkimmäinen tuo esiin matematiikan opetuksen osana laajempaa keskustelevaa perinnettä (Radford, 2011).

Edellä olevassa *Menon*-esimerkissä Sokrateen ja orjapojan välinen keskustelu ilmentää monia kiinnostavia matematiikan käytännön piirteitä. Matemaattinen ymmärrys rakentuu sekä käsitteellisen tiedon että proseduraalisen (tai laskennallisen) tiedon varaan. Strateginen tieto ohjaa koko prosessia. Satataulu avaa varhaiskasvatuksen opettajalle ja luokanopettajalle samanlaisen avoimen tilanteen kuin Sokrateella on aloittaessaan keskustelunsa orjapojan kanssa. Keskustelua ohjatessaan opettajan kannattanee luottaa lasten innokkuuteen, sillä ”rakkaimmat muistomme kouluvuosiltamme koskevat hetkiä, jolloin ajattelimme itse – emmekä tietenkään koulutusjärjestelmän ansiosta vaan siitä huolimatta” (Lipman, 2019, s. 13). Ohjaavina periaatteina tulee pitää Lipmanin (2019, s. 241) tiedollisen keskustelun megakriteerejä, jotka antavat tiedollisen, eettisen ja esteettisen relevanssin kriteeristön keskustelulle.

Lippman (2019, s. 116) painottaa nimenomaan sisällöllistä ajattelua - omien ideoiden kehittelyä. Tällainen edellyttää tutkivan asenteen herättämistä ja ylläpitämistä, jota voi ylläpitää strategisilla kysymyssarjoilla, jotka yhdessä tuottavat ymmärrystä (Hintikka ym., 2002). Esimerkiksi ei kysytä tiettyä asiaa satataulusta, vaan johdatellaan lapset pienten kysymyssarjojen avulla lopulta näkemään yleisiä matemaattisia faktoja, joita lapset ovat taitavia löytämään. Etsintä edellyttää, että lasten tulee olla keskeisessä roolissa kysymysten muotoilijoina. Näin saavutetaan kriittistä ajattelua, ”joka (1) edistää arvostelukykyä koska se (2) tukeutuu kriteereihin, (3) on itseään korjaavaa ja (4) kontekstille herkkää” (Lipman, 2019, s. 238).

Tilanteen jäsennys ja matemaattinen symbolismi

Megakriteerit luonnehtivat strategisesti mihin matemaattisen tiedon tavoittelussa tulisi pyrkiä. Strategisen tiedon tulisi ohjata konkreettista ja käytännöllistä matemaattista ajattelua. Joutsenlahti ja Tossavainen (2018, s. 410) luonnehtivat strategista matemaattista ajattelua seuraavalla tavalla: ”Matemaattisella ajattelulla tarkoitetaan tässä yhteydessä matemaattisen tiedon (konseptuaalisen, proseduraalisen tai strategisen tiedon) prosessointia, jota ohjaavat ajattelijan metakognitiot.” Metakognitioilla tarkoitetaan metamatemaattisia ajattelutapoja. Matemaattinen ajattelu on strategista, jossa yleisillä rationaalisilla kriteereillä on konstitutiivinen rooli (Lipman, 2019, s. 270, 289).

Edellä *Menon*-esimerkki kuvaa geometrisen ymmärryksen rakentumista strategisesti ohjatussa käsitteellisen ja laskennallisen tiedon vuoropuhelussa. Annettu tehtävä motivoidaan informatiivisin piirroksin (ks. Hintikka & Bachman, 1991, s. 23). Keskustelu etenee annetun tehtävän analyysillä siten, että askel askeleelta edetään ratkaisuun. Kuvilla on eri tehtäviä argumentaatiossa, jota ei aina ole helppoa tunnistaa. (Priest ym., 2018; Zimmermann & Cunningham, 1991.) Tällainen analyysin ja käsitteellis-laskennallisen jäsennyksen vuoropuhelu tunnetaan yleisemmin analyysin ja synteesin menetelmänä (Hintikka & Remes, 1974; Niiniluoto, 2018).

Analyysin ja synteesin menetelmän juuret ulottuvat antiikin geometriaan, joten edellä oleva *Menon*-esimerkki on erinomainen sekä sisällöllisesti että historiallisesti. Niiniluoto (1990, s. 155) erottelee teoreettisen analyysin (todistuksen etsiminen) ja problemaattisen analyysin (ongelman ratkaisu). Analyysi lähtee liikkeelle tavoitellusta lopputukoksesta ja etenee siitä askel askeleelta tehtävän edellytyksiin. Pappus kuvaa analyysia seuraavalla tavalla: ”Analyysi on menetelmä, jossa oletetaan annetuksi se, mitä etsitään, ja siitä lähtien siirrytään sen seurannaisista järjestyksessä toisiin seurannaisiin, kunnes saavutaan siihen, mikä on annettu synteesin tuloksena. Sillä analyysissa etsitty asia oletetaan jo suoritetuksi ja tutkitaan, mistä se syntyy, ja edelleen, mikä tämän syynä vuorostaan on, ja niin edelleen, kunnes taaksepäin kulkien saavumme johonkin joka jo tunnetaan …” (lainaus teoksesta Hintikka, 1969, s. 275). Analyysi on sisällöllistä päättelyä, joka auttaa ymmärtämään mistä annetussa tehtävässä on kyse, jonka jälkeen suoritetaan synteesi, joka antaa formaalin todistuksen. Sisällöllinen päättely on vain implisiittisesti formaalissa todistuksessa (synteesi) näkyvissä, sillä tarvittavat konstruktiot ovat suoritettu jo analyysivaiheessa.

Olennaista on, että matemaattisen (ja muunkin) tehtävän ratkaisemiseksi tulee ratkaisua lähteä etsimään analysoimalla ongelmatilannetta. Analyysissä eksplikoidaan ongelmaa jäsentävät perustavat tekijät (käsitteellinen tieto) ja näiden keskinäissuhteet (proseduraalinen tieto). Edelleen analyysi tulee olla strategisesti ohjattua (strateginen tieto). (Joutsenlahti & Tossavainen, 2018.) Satataulu tarjoaa opettajalle erinomaisen matemaattisen ajattelun harjoittelualustan, joka tuo matematiikkaan konkreettista sisältöä. Tällainen mahdollistaa välttämään ns. kaavataudin, joka on yhtä turmiollinen matematiikassa kuin fysiikassakin (Kurki-Suonio & Kurki-Suonio, 1994).

Analyysi on siinä merkityksessä luovaa, ettei ole olemassa (mekaanista) menetelmää, jota noudattamalla olisi mahdollista löytää kullekin ongelmatyypille ratkaisut (Hintikka, 1969). Tämä on opettajien hyvä pitää mielessä, sillä tämä on aidosti keskustelevaa ja hedelmällisiä ongelman jäsennyksiä etsivää toimintaa. Siten esimerkiksi pohdittaessa satataulua, on hyvä antaa mielikuvituksen vaellella vapaasti. Lisäksi on hyvä huomata, että vaikka synteesi on (usein) muotoiltu symbolisesti niin meillä ei ole yleistä ratkaisumenetelmää matematiikalle (Miettinen, 1995, s. 22, 96-97).

Näin voidaan ymmärtää, miten satataulua voidaan käyttää opetuksessa apuna. Lapset voivat analysoimalla satataulua nähdä lukujen ominaisuuksia, yhteen- ja kertolaskun systemaattisen rakentumisen. Näin myös kymmenjärjestelmän keskeiset ominaisuudet tulevat konkreettisiksi ja siten helposti lähestyttäviksi. Vaikka *Menon*-esimerkkiä voi käyttää mallina, niin keskustelun tulee olla elävää ja tilannesidonnaista. Joka tapauksessa lapsilla tulee tässä olla oma aktiivinen rooli, jolloin symbolisen ja kalkylatiivisen tiedon rooli tulee suhteuttaa lasten taitoihin ja tietoihin. (Parviainen, 2019).

Loppusanat

Opettajan tulee rohkaista lapsia etsimään ja kysymään, jolloin lapsi voi löytää ja nähdä kiinnostavia matemaattisia asioita. Matematiikan symbolismi on tapa ilmaista matemaattisia asioita, joita analyysi on tuonut esiin. Kyselemällä etsiminen tuo esiin sen, mistä matematiikassa on lopulta kyse. Matematiikka on parhaimmillaan luovuutta ja mielikuvitusta ruokkivaa.

Matematiikan opetuksessa on hyvä luoda kiinnostusta ja rohkeutta matematiikkaa kohtaan, mikä tukee myös lapsen tasapainoisen identiteetin kehittymistä (Opetushallitus, 2016, s. 13). Satataulu voi toimia moni-ilmeisen keskustelun pohjana, joka ilmentää matematiikan keskeisimpiä puolia. Samalla voidaan tuoda esiin, miksi matematiikan symbolismia tarvitaan. Tällainen voi samalla tuoda esiin matematiikan kiehtovaa visuaalista puolta.

Matematiikan opetus on hyvä aloittaa mahdollisimman varhaisessa vaiheessa; aloitus on hyvä tehdä jo esiopetuksessa (Mononen ym., 2014; Parviainen, 2019). Tällöin tietenkin tulee huomioida eritysesti lasten kehitystaso. Matemaattisten taitojen painotus tukee matematiikan opetusta kaikilla tasoilla. Kuitenkin matemaattisten sisältöjen kannalta analyysin menetelmä tuo mukanaan vivahteita, joilla matemaattisten taitojen kehittäminen voi tulla osaksi luokan keskustelevaa opiskelua, jolloin opettajan toiminta innoittajana voi toteutua (Björklund, 2015).

Matemaattiseen päättelyyn ja ajatteluun liittyy myös symbolinen puoli. Kuitenkaan matematiikkaa ei tule ymmärtää vain symbolien manipulaationa. Symboleja käytettäessä tulee ymmärtää, mitä symbolein halutaan ilmaista, mitä symbolit tarkoittavat ja mitä kaavat ja laskut ilmaisevat. Tämä edellyttää rikasta kieltä, jossa niin luonnollinen kieli, kuvat kuin symbolit ovat käytössä. Tällainen rikas ilmaisutapa on olennainen osa matemaattista päättelyä ja ajattelua. Matemaattinen taito liittyy luontevaan ja rikkaaseen matemaattiseen ilmaisuun.

Lähteet

Björklund, C. (2015). Pre-primary school teachers' approaches to mathematics education in Finland. *Journal of Early Childhood Education Research, 4*(2), 69–92.

Cutland, N. J. (1980). *Computability*. Cambridge University Press

Gaspard, C., & Gainsburg, J. (2020). Abandoning questions with unpredictable answers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*, 555–577 https://doi.org/10.1007/s10857-019-09440-5

Hintikka, J. (1969). Tieteen metodi analyyttisena toimituksena. Teoksessa J. Hintikka (Toim.), *Tieto on valtaa* (s. 272-293). WSOY.

Hintikka, J., Halonen, I., & Mutanen, A. (2002). Interrogative logic as a general theory of reasoning. Teoksessa R. H. Johnson & J. Woods (Toim.), *Handbook of practical reasoning* (s. 295–337). Kluwer Academic Publishers.

Hintikka, J., & Remes, U. (1974). *The method of analysis: Its geometrical origin and its general significance*. D. Reidel Publishing Company

Joutsenlahti, J., & Tossavainen, T. (2018). Matemaattisen ajattelun kielentäminen ja siihen ohjaaminen koulussa. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silferberg & P. Räsänen (Toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen* (s. 410–430). Niilo Mäki Instituutti.

Kitcher, P. (1986). Mathematical change and scientific change. Teoksessa T. Tymoczko (Toim.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics* (s. 215–242). Birkhäuser.

Kurki-Suonio, K., & Kurki-Suonio, R. (1994). *Fysiikan merkitykset ja rakenteet*. Limes.

Lehtinen, M., Nevanlinna, H., & Tossavainen, T. (2019). Matematiikan opetuksen ihanteet. *Tieteessä tapahtuu,* 37(5), 3–10.

Lipman, M. (2019). *Ajattelu kasvatuksessa: kasvatusfilosofinen johdatus ajattelun taitojen opettamiseen*. Eurooppalaisen filosofian seura ry.

Liuttu, K., & Pasanen, S. (2015). *"Hei auta mua laskemaan": vanhemman osallisuus lapsen matematiikan opiskelussa* [Kasvatustieteen pro gradu –tutkielma, Jyväskylän yliopisto]. JYX Digital Repository. http://urn.fi/URN:NBN:fi:jyu-201504201622

Miettinen, S. K. (1995). *Logiikan peruskurssi*. Gaudeamus.

Mononen, R., Aunio, P., & Koponen, T. (2014). Investigating RightStart mathematics kindergarten Instruction in Finland. *Journal of Early Childhood Education Research, 3*(1), 2–26.

Mutanen, A., & Halonen I. (2018). Havainto ja interrogatiivimalli. Teoksessa H. Laiho & M. Tuominen (Toim.), *Havainto* (s. 119-130). Reports from the Department of Philosophy, University of Turku.

Nevanlinna. R. (1973). *Geometrian perusteet*. WSOY.

Niiniluoto, I. (1990). Edgar Allan Poe ja geometrinen analyysi. Teoksessa I. Niiniluoto (Toim.), *Maailma, minä ja kulttuuri* (s. 154–171). Otava.

Niiniluoto, I. (2018). *Truth-seeking by abduction*. Springer.

Opetushallitus (2016). *Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Määräykset ja ohjeet 2016:1. Opetushallitus.

Parviainen, P. (2019). The development of early mathematical skills – A theoretical framework for a holistic model. *Journal of Early Childhood Education Research, 8*(1), 162–191.

Platon, (1978). Menon. Teoksessa Platon, *Teokset osa 2*, (s. 107-148). Otava.

Popotis, A., & Nikolantonakis, K. (2019). The contribution of the Chinese abacus to the development of the number sense. Teoksessa C. Tzanakis, E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen & B. Smestad (Toim.), *History and epistemology in mathematics education: Proceedings of the 8th ESU* (s. 251–271). Oslo Metropolitan University.

Priest, G., De Toffoli, S., & Findlen, P. (2018). Tools of reason: The practice of scientific diagramming from antiquity to the present. *Endeavour, 42*, 49–59. https://doi.org/10.1016/j.endeavour.2018.07.001

Radford, L., (2011). Dialogism in absentia or the language of mathematics. In S. Sbaragli (Toim.), *La Mathematica e la sua Didattica Quarant'anni di Impegno; Mathematics and its Didactics: Forty Years of Commitment. In Occasion of the 65 Years of Bruno D'Amore* (s. 184–186). Pitagora Editirice Bologna.

Rogers, H. (1967). *Theory of recursive functions and effective computability*. MIT Press

Russell, B. (1903). *The principles of mathematics*. Merchant Books.

Russell, B. (1919). *Introduction to mathematical philosophy*. Dover Publications.

Santaharju, T. (2016, 23, helmikuu). *Mitä ihminen tekee sinillä ja kosinilla – paitsi kompastuu niihin yläkoulussa?* YLE. https://yle.fi/uutiset/3-8595388

Turing, A. (1936). On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. Teoksessa J. B. Copeland (Toim.) (2004), *The Essential Turing: The Ideas That Gave Birth to the Computer Age* (s. 58–90). Clarendon Press.

Väisänen, E. (2017). *Laskemisen sujuvuus osana matemaattisia taitoja: Sujuvuuden seuranta ja matemaattisten taitojen tukeminen alakoulussa*. Kasvatustieteellisiä tutkimuksia, numero 17. http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-51-3814-9

Väisänen, E., & Aunio, P. (2014). Matematiikkainterventio heikkojen ensiluokkalaisten oppimisen tukena. *Journal of Early Childhood Education Research* 3(2), 48–75.

Wang, H. (1986). Theory and practice in mathematics. Teoksessa T. Tymoczko (Toim.), *New directions in the philosophy of mathematics* (s. 129–152). Birkhäuser.

Wilder, R. L. (1986). The cultural basis of mathematics. Teoksessa T. Tymoczko (Toim.), *New directions in the philosophy of mathematics* (s. 185–214) Birkhäuser.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (Toim.) (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America.