math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Geometrija na grupama

Geometrija na grupama

Rebeka Gašparić[*] i Vera Tonić[⋆]

[*] Diplomantica Sveučilišnog studija Diskretna matematika i primjene, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci, *email*: rebeka.gasparic@gmail.com

[⋆] Docentica na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci, *email*: vera.tonic@math.uniri.hr

Sažetak: U članku uvodimo osnovne koncepte geometrijske teorije grupa: opisujemo kako grupu možemo shvatiti kao geometrijski objekt (Cayleyev graf) te kako na grupi uvodimo metriku. Također definiramo pojam kvazi-izometrije između metričkih prostora, pa ga koristimo između grupa i njihovih Cayleyevih grafova, te između grupa i prostora. Navodimo i vrlo važan rezultat u geometrijskoj teoriji grupa – Švarc-Milnorovu lemu.

1 Uvod

Ideja vodilja ovog članka je – kako proučavati grupe kao geometrijske objekte, to jest, kako bazirano na algebarskim svojstvima grupe doći do geometrijskog objekta, točnije Cayleyevog grafa, koji tu grupu predstavlja, te na njemu uvesti metriku. Ujedno ćemo objasniti kako možemo uvesti ekvivalenciju (kvazi-izometriju) između različitih geometrijskih predstavnika iste grupe, te na koji način možemo poistovjetiti određeni metrički prostor s grupom koja na njemu djeluje na ``lijep'' način. Sve je ovo zapravo uvod u područje matematike poznato pod imenom *geometrijska teorija grupa*.

Od čitatelja očekujemo poznavanje pojmova grupe i metričkog prostora, pa te pojmove u članku ne definiramo.

2 Grupe i metrički prostori

2.1 Djelovanje grupe na metričkim prostorima

Za početak ćemo se prisjetiti definicije izometrije i definirati djelovanje grupe izometrijama na metričkom prostoru.

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. *Izometrija* s prostora X na prostor Y je bijektivno preslikavanje f : $X \to Y$ za koje vrijedi

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y), \text{ za svaki } x, y \in X,$$

tj., to je bijektivno preslikavanje koje čuva udaljenosti. Izometrija prostora X je izometrija : $X \to X$. Skup svih izometrija metričkog prostora X s operacijom kompozicije čini grupu koju ćemo označavati s $\mathrm{Isom}(X)$. Na primjer, rotacije oko neke točke u $\mathbb{R}^n$ i translacije za neki vektor u $\mathbb{R}^n$ primjeri su izometrija od $\mathbb{R}^n$ s

Euklidskom metrikom.

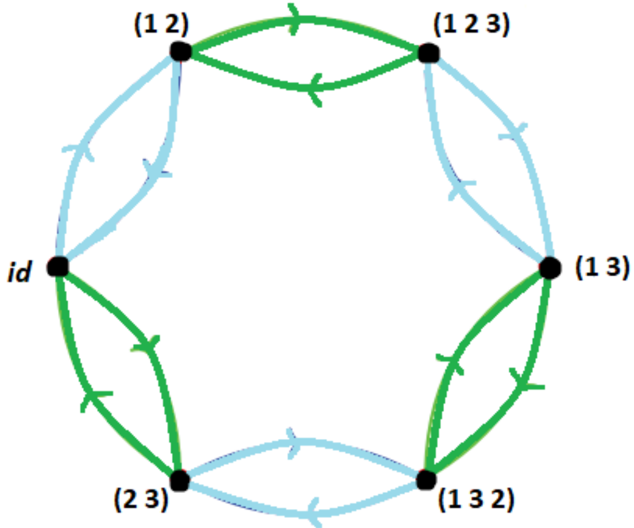
Definicija 1. *Djelovanje grupe*$(G,\cdot)$ *izometrijama na metrički prostor* (X,d)*}* *definiramo kao preslikavanje* $\mu : G\times X\to X$ *(uz oznaku* $\mu(g,x)=g(x)$*) sa svojstvima:*

(1) $e(x)=x$*,* $\forall x\in X$*, gdje je* e *neutralni element grupe* G*,*
(2) $(g\cdot h)(x)=g(h(x))$*,* $\forall g,h\in G$*,* $\forall x\in X$*, te*
(3) $d(g(x),g(y))=d(x,y)$*,* $\forall g\in G$*,* $\forall x,y\in X$*.*

Prva dva svojstva definiraju djelovanje grupe G na skup X, dok tre\-će svojstvo definira djelovanje izometrijama, tj., možemo poistovjetiti svaki element grupe G s nekom izometrijom iz $\mathrm{Isom}(X)$, čime dobivamo homomorfizam $G\to\mathrm{Isom}(X)$. Kao primjer ovakvog djelovanja navedimo djelovanje grupe D_n izometrijama na pravilan $n-$terokut u ravnini. Primijetimo da svaka grupa djeluje izometrijama na svaki metrički prostor trivijalnim djelovanjem, to jest djelovanjem u kojem svaki element grupe G fiksira svaku točku metričkog prostora X, no takvo nam djelovanje nije odviše zanimljivo, jer nam ne daje nikakvu informaciju ni o grupi ni o metričkom prostoru. Općenito, možemo očekivati da djelovanje grupe G na X daje više informacija ako je jezgra koja odgovara homomorfizmu $G\to\mathrm{Isom}(X)$ mala. Time želimo reći da je djelovanje grupe na prostor najznačajnije ako većina elemenata te grupe učini ``nešto'' točkama prostora.

2.2 Cayleyevi grafovi

Neka je $(G,\cdot)$ grupa i neka je S njen skup generatora. Zbog jednostavnosti, pretpostavit ćemo da skup S ne sadrži neutralni element e. *Cayleyev graf*[1] grupe G obzirom na skup S je usmjereni, označeni graf $\Gamma(G,S)$ definiran ovako: vrhovi grafa su elementi od G, te postoji usmjereni brid od g prema gs, za svaki $g\in G$ i za svaki $s\in S$ (taj brid označavamo sa s). Ako je skup S malen, bridovi se mogu označiti bojama umjesto elementima iz S. Na slici 1 prikazan je Cayleyev graf simetrične grupe S_3 obzirom na skup generatora $\{(12),(23)\}$. U tom su prikazu bridovi koji odgovaraju generatoru (12) obojani plavo, a bridovi koji odgovaraju generatoru (23) obojani su zeleno.



Slika 1: Cayleyev graf $\Gamma(S_3,\{(12),(23)\})$

Navedimo još jedan primjer Cayleyevog grafa, i to za *slobodnu grupu ranga* 2, koju ćemo prvo definirati. Za početak definiramo *riječ* sa slovima a i b kao proizvoljan konačan niz sačinjen od simbola a, b, a^{-1} i b^{-1}. Primjeri riječi su:

$$ababab a, aaaaaaaa, aba^{-1}b^{-1}, aa^{-1}.$$

Također uvodimo i *praznu riječ*, odnosno niz koji ne sadrži nijedno slovo iz skupa $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ i označimo ga s e. Dvije riječi možemo *konkatenirati*, tj., nadovezati jednu na drugu, na primjer:

$$(ab, b^{-1}a) \mapsto abb^{-1}a.$$

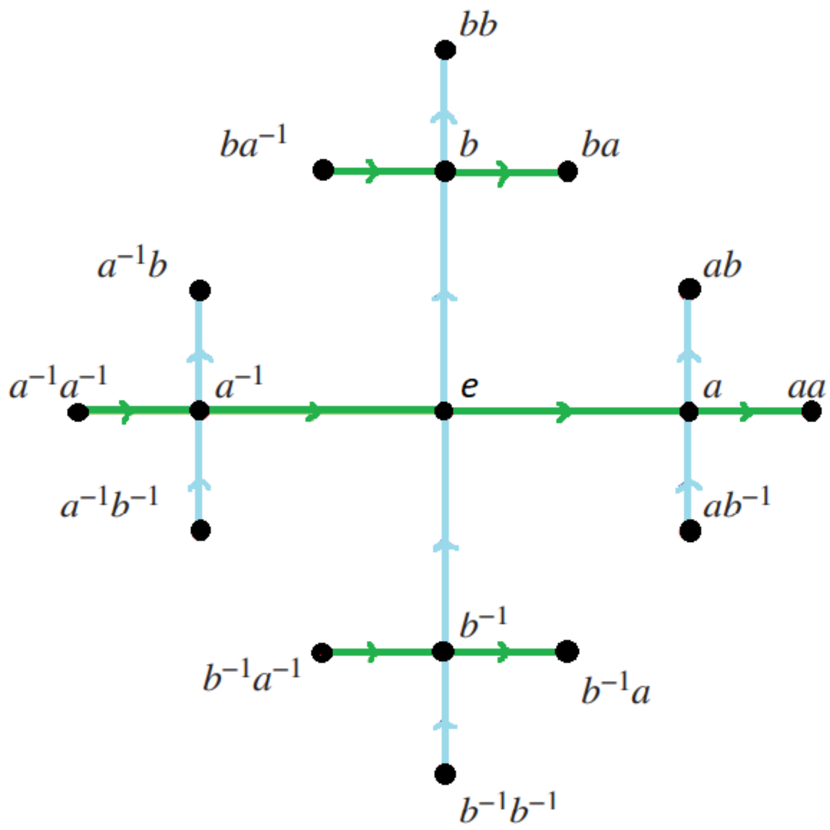
Zatim, definiramo *reduciranu riječ* kao riječ sa svojstvom da se poslije a ne nalazi a^{-1} (i obrnuto) te da se poslije b ne nalazi b^{-1} (i obrnuto). Ako imamo nereduciranu riječ, možemo je skratiti tako da obrišemo par simbola koji ju ne čine reduciranom. Na primjer:

$$aa^{-1}abb^{-1}a \rightsquigarrow abb^{-1}a.$$

Ponavljajući takav postupak, u konačnici dolazimo do reducirane riječi. U prethodno navedenom primjeru, reducirana riječ do koje tim postupkom dolazimo je aa. Dodajmo da se npr. riječ aa^{-1} reducira u praznu riječ e. Sada možemo definirati *slobodnu grupu ranga* 2 kao

$$F_2 = \text{skup svih reduciranih riječi na slovima } a, b \text{ (uključujući riječ } e)$$

zajedno s operacijom koja kombinira konkatenaciju i redukciju.
Izradimo sada Cayleyev graf $\Gamma(F_2, \{a, b\})$ grupe F_2. Započinjemo s vrhom koji će predstavljati neutralni element od F_2, to jest, praznu riječ e. Četiri brida koja su incidentna s e povezuju vrh e s vrhovima a, b, a^{-1} i b^{-1}. Zatim analogno dodajemo bridove na te nove vrhove. Ovaj postupak ponavljamo i budući da različite reducirane riječi daju različite elemente od F_2, nikad nećemo dobiti isti vrh. Dakle, Cayleyev graf grupe F_2 je stablo i ono je prikazano na slici 2.



Slika 2: Cayleyev graf $\Gamma(F_2, \{a, b\})$

Možemo se pitati: ako uzmemo dva različita skupa generatora iste grupe G, u kakvom su odnosu dobiveni Cayleyevi grafovi? Oni ne moraju biti izomorfni, primjerice, ako za istu grupu promatramo skupove generatora različite kardinalnosti. No, postoji način na koji možemo smatrati te grafove ekvivalentnima, a to je preko kvazi-izometrija. Ali vidjet ćemo da se kvazi-izometrije definiraju na metričkim prostorima, pa prvo trebamo naći način za uvođenje metrike na grafu.

Zato krenimo od povezanog grafa Γ, to jest grafa u kojem postoji put između svaka dva vrha, pa definirajmo udaljenost između dva vrha grafa kao duljinu najkraćeg puta (puta na grafu koji se sastoji od najmanjeg broja bridova) između ta dva vrha, pri čemu smatramo da je svaki brid duljine 1. Primijetimo da smo na ovaj način zapravo graf geometrijski realizirali, tj., *geometrijska realizacija* X grafa $\Gamma = \Gamma(V, E)$ je metrički prostor definiran na sljedeći način: svaki vrh iz V predstavimo jednom točkom, svaki brid iz E jednom kopijom jediničnog intervala $[0, 1]$, te formiramo X identifikacijom krajnjih točaka svakog intervala s odgovarajućim elementima iz V. Što se tiče metrike na X, već smo objasnili kako se definira udaljenost dvaju vrhova, a ako su x i y dvije točke na istom bridu od X (pod pretpostavkom da krajnje točke brida nisu identificirane), tada, budući da smo brid identificirali sa segmentom $[0, 1]$, izraz za Euklidsku udaljenost $|x - y|$ u $[0, 1]$ ima smisla i u X pa ga uzmemo za udaljenost između x i y u X. Za x i y na različitim bridovima, njihovu udaljenost definiramo (opet) kao duljinu najkraćeg puta između njih. Metriku koju smo ovdje opisali zovemo *metrikom puteva* i možemo je promatrati i samo na vrhovima grafa Γ.

Neformalno, graf Γ i njegovu geometrijsku realizaciju X možemo smatrati jednakima. Intuitivno Γ shvaćamo kao listu uputa za izgradnju metričkog prostora i X kao krajnji rezultat tog procesa.

2.3 Grupe kao metrički prostori

Neka je G grupa i S neki njezin skup generatora. Označimo sa S^{-1} skup inverza svih elemenata iz S. Primijetimo da svaki element grupe G možemo promatrati kao riječ zapisanu u alfabetu $S \cup S^{-1} \cup \{e\}$ (ako operaciju $``\cdot''$ na G pišemo tako da se ne vidi). Za $g \neq e \in G$, definirajmo duljinu od g kao minimalan broj elemenata iz $S \cup S^{-1}$ potrebnih da se g zapiše kao njihov produkt (to zovemo *duljinom riječi* g), a za duljinu neutralnog elementa e uzima se 0. Definiramo udaljenost između $g, h \in G$ kao duljinu riječi $g^{-1}h$. Posebno, udaljenost između e i g je duljina riječi g. Ovime smo definirali metriku na grupi G koju ćemo nazivati *metrikom riječi*, koja se često označava s d_S, jer ovisi o izboru skupa generatora S.

Na primjer, u slobodnoj grupi F_2 generiranoj skupom $\{a, b\}$, udaljenost između ab i aa je po ovoj definiciji jednaka duljini riječi $(ab)^{-1}aa = b^{-1}a^{-1}aa$ obzirom na $\{a, b\}$. Riječ $b^{-1}a^{-1}aa$ na najkraći način pomoću elemenata iz $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ zapisujemo kao $b^{-1}a$, odnosno tu smo riječ reducirali. Zaključujemo da je udaljenost između ab i aa jednaka 2.

Primjedba 2. *Metrika riječi na grupi G (sa skupom generatora S) jednaka je metrici puteva na skupu vrhova Cayleyevog grafa $\Gamma(G, S)$ grupe G, točnije, udaljenost između dva elementa grupe u metrici riječi je jednaka duljini najkraćeg puta između odgovarajućih vrhova Cayleyevog grafa, pa obje ove metrike možemo označiti s d_S. To nam potvrđuje i prethodni primjer u usporedbi sa slikom 2: duljina najkraćeg puta između vrhova ab i aa u $\Gamma(F_2, \{a, b\})$ ponovo je 2.*

Dakle, zaključujemo da na svaku grupu možemo gledati kao na metrički prostor (čija metrika ovisi o izboru skupa generatora). Razmišljanje o grupama na takav način središte je geometrijske teorije grupa.

3 Kvazi-izometrije

Vidjeli smo da postoji prirodan način na koji se o grupi može razmišljati kao o metričkom prostoru, odnosno, grupu možemo zamijeniti s njezinim Cayleyevim grafom, tj., promatrajući samo vrhove Cayleyevog grafa dobivamo metriku na početnoj grupi. Iako je ova konstrukcija prirodna, ona nije kanonska. Naime, postoji mnogo različitih skupova generatora S za istu grupu i svaki S zadaje svoju metriku d_S.

Sada želimo naći dobru definiciju ekvivalencije kojom bismo izjednačili metrike riječi definirane obzirom na različite skupove generatora na istoj grupi. No moramo biti oprezni, želimo da dobivena definicija ekvivalencije bude dovoljno precizna da uoči razliku između bitno različitih grupa. Taj ćemo zadatak riješiti *kvazi-izometrijama*.

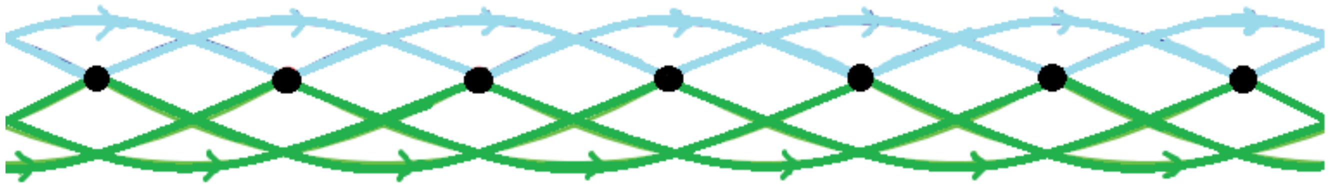
Kvazi-izometrija se ponekad naziva i *gruba izometrija*, budući da je njena definicija vrlo slična klasičnoj definiciji izometrije, no dopušta ograničene multiplikativne i aditivne greške.

Prije ove definicije, pogledajmo na primjeru grupe $(\mathbb{Z},+)$ koje bismo situacije htjeli smatrati ekvivalentnima.

Primjer 3. *Uzmemo li na $\mathbb{Z}$ skup generatora $\{1\}$, Cayleyev graf $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$ je pravac (s usmjerenim bridovima), to jest, za svaki $n \in \mathbb{Z}$ postoji brid koji povezuje n i $n+1$. Taj je graf prikazan na slici 3. Označimo metriku puteva na $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$ s $d_{\{1\}}$.*

Slika 3: Cayleyev graf $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$

No, grupa $\mathbb{Z}$ može biti generirana i skupom $\{2, 3\}$. Kako izgleda Cayleyev graf grupe $\mathbb{Z}$ obzirom na taj skup generatora? Vrhovi grafa $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ su isti kao i kod grafa $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$, budući da su vrhovi bilo kojeg Cayleyevog grafa grupe $\mathbb{Z}$ upravo njezini elementi. No, u ovom slučaju, umjesto brida koji povezuje n s $n+1$, postojat će bridovi koji će povezivati n s $n+2$ i n s $n+3$, za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Dobiveni graf, koji je prikazan na slici 4, nije pravac kao u prvom slučaju, no nije ni znatno različitiji od njega (npr. gledano iz daleka). Na $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ označimo metriku puteva s $d_{\{2,3\}}$.



Slika 4: Cayleyev graf $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$

Kod metrike puteva na Cayleyevim grafovima svaki je brid duljine 1. Radi jednostavnosti crtanja, na skici grafa $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ ne izgleda kao da su svi bridovi iste duljine, no smatramo da su svi oni duljine 1.

Promotrimo udaljenost između dva vrha, na primjer između vrhova -2 i 5, na prethodno opisanim Cayleyevim grafovima.

- *Na grafu $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$, udaljenost između -2 i 5 je 7, jer postoji (jedinstveni) najkraći put između danih vrhova i taj se put sastoji od 7 bridova.*
- *Na grafu $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2,3\})$, udaljenost između vrhova -2 i 5 je 3, jer možemo pronaći put između tih vrhova duljine 3 (postoji nekoliko takvih puteva), ali možemo se i uvjeriti se da ne postoji kraći put između njih.*

Dakle, vrijedi $d_{\{1\}}(-2,5) = 7$ i $d_{\{2,3\}}(-2,5) = 3$, tj., udaljenost između -2 i 5 u dvijema metrikama riječi nije jednaka. Sada, ako je $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ identiteta, možemo razmišljati o f kao o preslikavanju između skupa vrhova grafa $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$ i grafa $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2,3\})$. Preslikavanje f ne čuva udaljenost, budući da $d_{\{1\}}(-2,5) \neq d_{\{2,3\}}(-2,5)$, no vidimo da preslikavanje f ne može ni previše iskriviti udaljenost. Pokazat ćemo da je f primjer za kvazi-izometriju od $\mathbb{Z}$.

3.1 Definicija kvazi-izometrije

Sada ćemo definirati pojam kvazi-izometrije i vidjeti da su bilo koja dva Cayleyeva grafa konačno generirane grupe kvazi-izometrična.

Definicija 4. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Funkcija $f : X \to Y$ naziva se kvazi-izometričko ulaganje ako postoje realne konstante $K \geq 1$ i $C \geq 0$ takve da za svaki $x_1, x_2 \in X$ vrijedi*

$$\frac{1}{K} \cdot d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K \cdot d_X(x_1, x_2) + C. \quad (1)$$

Kada je $C = 0$ u nejednakosti (1), takvu funkciju f nazivamo *bi-Lipschitz\-o\-vo ulaganje*, a slučaj u kojem je $C = 0$ i $K = 1$ nazivamo *izometričko ulaganje*. O izrazu $C > 0$ možemo razmišljati kao o``grešci'' koja dopušta da $f$ bude``oša'' na manjim razmjerima. Iako koristimo izraz ``ulaganje'', kvazi-izometričko ulaganje ne mora nužno biti injektivno. Primijetimo ovdje i da kvazi-izometričko ulaganje ne mora biti neprekidna funkcija.

Kvazi-izometričko ulaganje $f : X \to Y$ naziva se *kvazi-izometrička ekvivalencija* ili kraće *kvazi-izometrija* ako postoji konstanta $D \geq 0$ takva da za svaku točku $y \in Y$, postoji točka $x \in X$ za koju je $d_Y(f(x), y) \leq D$. Drugim riječima, svaka točka u Y je na udaljenosti manjoj ili jednakoj D od neke točke u slici od f. Ako je $D = 0$, tada je prethodnom definicijom opisana surjektivnost. U ostalim slučajevima f možemo smatrati ``grubo surjektivnom'': slika od f obuhvaća skup točaka čije D-okoline pokrivaju Y. Kažemo da su metrički prostori (X, d_X) i (Y, d_Y) *kvazi-izometrični* ako postoji kvazi-izometrija $f : X \to Y$. Biti kvazi-izometričan je relacija ekvivalencije na familiji svih metričkih prostora.

Primjedba 5. *Ako je G grupa sa skupom generatora S, iz definicije metrike puteva na grafu odmah vidimo da je inkluzija skupa vrhova Cayleyevog grafa $\Gamma(G, S)$ u Cayleyev graf $\Gamma(G, S)$ kvazi-izometrija s konstantama $C = 0, K = 1$ i $D = 1$. To znači da je grupa G s metrikom riječi d_S (koju možemo poistovjetiti s vrhovima Cayleyevog grafa $\Gamma(G, S)$, po primjedbi 2) kvazi-izometrična sa svojim Cayleyevim grafom $\Gamma(G, S)$ s metrikom puteva.*

Spomenimo ovdje da se, kada je f surjektivna i zadovoljava nejednakost (1) sa $C = 0, K \geq 1$, funkcija f naziva *bi-Lipschitzova ekvivalencija*, dok surjektivnost od f i zadovoljavanje nejednakosti (1) sa $C = 0, K = 1$ daje definiciju izometrije (čuvanje udaljenosti povlači injektivnost).

Za identitetu $f : (\mathbb{Z}, d_{\{1\}}) \to (\mathbb{Z}, d_{\{2,3\}})$ iz primjera 3 može se pokazati da je kvazi-izometrija: f je surjekcija i vrijedi nejednakost (1) s konstantama $C = 0$ i $K = 3$. Ujedno, kako je $C = 0$, primijetimo da je identiteta $f : (\mathbb{Z}, d_{\{1\}}) \to (\mathbb{Z}, d_{\{2,3\}})$ bi-Lipschitzova ekvivalencija sa skupa vrhova Cayleyevog grafa $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$ na skup vrhova Cayleyevog grafa $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$, gdje su ti grafovi snabdjeveni metrikom puteva $d_{\{1\}}$ i $d_{\{2,3\}}$, respektivno. Štoviše, vrijedi teorem koji kaže da, ako je G

konačno generirana grupa i ako su S i S' dva različita konačna skupa generatora grupe G, tada je identiteta $id : G \to G$ bi-Lipschitzova ekvivalencija s metričkog prostora (G, d_S) na metrički prostor $(G, d_{S'})$.

No što se događa na bridovima dvaju različitih Cayleyevih grafova za istu grupu? Može se pokazati da su Cayleyevi grafovi $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$ i $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ kvazi-izometrični, iako nisu bi-Lipschitz-ekvivalentni. Naime, vrijedi

Teorem 6. *Neka je G konačno generirana grupa i neka su S i S' dva konačna skupa generatora od G. Tada je geometrijska realizacija Cayleyevog grafa $\Gamma(G, S)$ kvazi-izometrična geometrijskoj realizaciji Cayleyevog grafa $\Gamma(G, S')$.*

To znači da kada želimo provjeriti je li Cayleyev graf grupe G (ili njegova geometrijska realizacija) kvazi-izometričan nekom metričkom prostoru X, neće biti bitno koji Cayleyev graf grupe promatramo. A obzirom na primjedbu 5, umjesto Cayleyevog grafa od G možemo promatrati samo G s metrikom riječi. Iz tog se razloga možemo pitati o kvazi-izometričnosti grupe G s metričkim prostorom X, bez preciziranja koji ćemo Cayleyev graf grupe G koristiti kao predstavnika te grupe.

Ako primijenimo teorem 6 na do sada spomenute primjere, imamo:

(1) Za $G = \mathbb{Z}$, postoji kvazi-izometrija s Cayleyevog grafa $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$ na Cayleyev graf $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$. Štoviše, bilo koji Cayleyev graf grupe $\mathbb{Z}$ dobiven od konačnog skupa generatora je kvazi-izometričan grafu $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$. Također, dodajmo da je $(\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\}), d_{\{1\}})$ kvazi-izometričan s $(\mathbb{R}, d_E)$, gdje je $d_E(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, uobičajena Euklidska metrika. Dakle, zbog primjedbe 5 možemo reći da je grupa $\mathbb{Z}$ kvazi-izometrična s $(\mathbb{R}, d_E)$.

(2) Za $G = F_2$ (slobodna grupa ranga 2), vidjeli smo da je Cayleyev graf ove grupe, dobiven od skupa generatora $\{a, b\}$, stablo. Iz Teorema 6 slijedi da je bilo koji Cayleyev graf grupe F_2 kvazi-izometričan stablu.

Primjedba 7. *Budući da kvazi-izometrija između dva metrička prostora dozvoljava omeđene greške u odnosu na izometriju, kao i omeđeni odmak od surjektivnosti, dva kvazi-izometrična prostora možemo smatrati jednakima ako ih promatramo iz daleka. Na primjer, ako Cayleyev graf* $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2,3\})$ *grupe* $\mathbb{Z}$ *na slici 4 promatramo s velike udaljenosti, on će se \``stopiti'' u pravac* $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$ *sa slike 3. Ovo promatranje prostora ``iz daleka'' je temeljna ideja takozvane grube geometrije.*

Bitna posljedica primjedbe 5 i teorema 6 je:

Korolar 8. *Neka je* G *konačno generirana grupa i neka su* S *i* S' *dva konačna skupa generatora grupe* G*. Tada je grupa* G *s metrikom riječi* d_S *kvazi-izometrična grupi* G *s metrikom riječi* $d_{S'}$*.*

3.2 Kvazi-izometrije između grupa i prostora

Sad ćemo se dotaknuti fundamentalnog rezultata u geometrijskoj teoriji grupa koji nosi naziv *Švarc-Milnorova lema*[23]. Taj nam rezultat omogućava jednostavan prijelaz između grupa i prostora, prenoseći korisna svojstva s jednog na drugo. Ali za taj rezultat nam treba da grupa ``lijepo'' djeluje na ``dobrom'' metričkom prostoru. Uvedimo prvo svojstva za metrički prostor koja ga čine pogodnim za Švarc-Milnorovu lemu.

Za metrički prostor (X, d) kažemo da je *geodezijski metrički prostor* ako za proizvoljne točke $x_1 \neq x_2 \in X$ postoji *geodezijski segment* što ih povezuje, tj., postoji izometričko ulaganje $\gamma : [a, b] \to X$ takvo da je $\gamma(a) = x_1$ i $\gamma(b) = x_2$. Drugim riječima, metrički je prostor geodezijski ako su bilo koje dvije različite točke tog prostora povezane geodezijskim segmentom koji realizira njihovu udaljenost.

Mnogi važni metrički prostori su geodezijski. Na primjer, ravnina $\mathbb{R}^2$ s euklidskom metrikom d_E je geodezijski metrički prostor, jer za proizvoljne različite točke iz $\mathbb{R}^2$ postoji (jedinstveni) geodezijski segment koji realizira udaljenost između njih. Za primjer metričkog prostora koji nije geodezijski uzmimo ravninu kojoj je maknuto središte, to jest, prostor $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ s metrikom dobivenom restrikcijom euklidske metrike. Ovo nije geodezijski metrički prostor, jer npr. ne postoji geodezijski segment od točke $(1,0)$ do točke $(-1,0)$.

Za metrički prostor (X,d) kažemo da je *pravi* ako za svaki $x \in X$ i za svaki $r > 0$, vrijedi da je zatvorena kugla $\overline{B}(x,r)$ kompaktni podskup od X. Uočimo da je prije spomenuti $(\mathbb{R}^2, d_E)$ ujedno primjer pravog (i geodezijskog) metričkog prostora.

Sada neka je (X,d) pravi geodezijski metrički prostor. Švarc-Milnorova lema govori o grupi G koja ``lijepo'' djeluje na takvom prostoru $X$. Prvo što zahtijevamo od ``lijepog'' djelovanja grupe G na X je da ono čuva udaljenosti, odnosno da čuva metričku strukturu na X. Opisano djelovanje je *djelovanje izometrijama*, iz definicije 1. Dakle, ono što za početak želimo je postojanje homomorfizma s grupe G na grupu svih izometrija od X.

Zatim, želimo da djelovanje grupe G izometrijama bude *pravo diskontinuirano*, što znači da je za svaki kompaktan podskup $K \subseteq X$, skup $\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$ konačan. Kako je X pravi metrički prostor, za svaki $x \in X$ i za svaki $r > 0$, postojat će samo konačno mnogo elemenata $g \in G$ takvih da kugla $g(\overline{B}(x,r)) = \overline{B}(g(x),r)$ ima neko preklapanje s kuglom $\overline{B}(x,r)$. To jest, neovisno o tome koliko veliki uzmemo r, svi osim konačno mnogo elemenata od G će pomaknuti kuglu $\overline{B}(x,r)$ od same sebe.

Još jedno svojstvo koje želimo od djelovanja grupe G na prostor X je da to djelovanje pokrije cijeli prostor X, umjesto da su G-orbite elemenata od X ograničene na neki manji dio od X. Kažemo da je djelovanje grupe G na X *ko-kompaktno* ako za bilo koju točku $x_0 \in X$ postoji $R > 0$, takav da za svaki $x \in X$, postoji $g \in G$ takav da kugla $\overline{B}(g(x_0), R)$ sadrži x. Drugim riječima, zatvorena R-okolina G-orbite točke x_0 je cijeli X. (Prisjetimo se ovdje da je orbita točke

$x \in X$ obzirom na djelovanje grupe G na X skup $Gx = \{g(x) : g \in G\}$.)

Za djelovanje grupe G na X kažemo da je *geometrijsko djelovanje* ako je ono pravo diskontinuirano, ko-kompaktno djelovanje izometrijama. To je ono ``lijepo'' djelovanje koje nam treba za Švarc-Milnorovu lemu.

Neki primjeri geometrijskih djelovanja su:

(1) $G = \mathbb{Z}^2$, $X = \mathbb{R}^2$ s euklidskom metrikom, G djeluje na X translacijama.
(2) G je grupa izometrija euklidske ravnine $X = \mathbb{R}^2$, koja je generirana refleksijama preko strana jednakostraničnog trokuta.
(3) G je grupa s konačnim skupom generatora S, $X = \Gamma(G, S)$, G djeluje na X množenjem slijeva.

Sada možemo izreći tvrdnju Švarc-Milnorove leme.

Teorem 9. *[**Švarc-Milnorova lema**] Neka je (X, d) pravi geodezijski metrički prostor. Ako grupa G djeluje geometrijski na X, tada G mora biti konačno generirana grupa koja je kvazi-izometrična prostoru X.*

Dakle, samo iz činjenice da grupa G djeluje geometrijski na (dovoljno dobrom) metričkom prostoru X, izlazi da, po primjedbi 7, grupa G i prostor X izgledaju isto iz daleka. Rečeno preciznije, ako grupa G iz Švarc-Milnorove leme ima neko svojstvo koje se čuva kvazi-izometrijama, isto će svojstvo imati i prostor X na kojem ta grupa djeluje, i obratno. To je od fundamentalne važnosti u geometrijskoj teoriji grupa: koristimo grupe da bismo razumjeli metričke prostore i koristimo metričke prostore da bismo razumjeli grupe.

Bibliografija

[1] Matthew Clay i Dan Margalit, *Office Hours with a Geometric Group Theorist*, Princeton University Press, 2017.

---

[1]Arthur Cayley, britanski matematičar, 1821.–1895.
[2]Albert S. Švarc (ili Schwarz), rođ. 1934., rusko-američki matematičar i teorijski fizičar
[3]John Milnor, rođ. 1931., američki matematičar

ISSN 1334-6083