



# Etude preliminaire d'un systeme d'imagerie par diffusion de muons cosmiques

D. Cellier, J.-M. Letang, Gerard Montarou, A. Lyoussi

## ► To cite this version:

D. Cellier, J.-M. Letang, Gerard Montarou, A. Lyoussi. Etude preliminaire d'un systeme d'imagerie par diffusion de muons cosmiques. 2005, pp.1-43. <in2p3-00024413>

**HAL Id: in2p3-00024413**

**<http://hal.in2p3.fr/in2p3-00024413>**

Submitted on 22 Sep 2005

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Laboratoire de Physique Corpusculaire  
de Clermont-Ferrand

## Étude préliminaire d'un système d'imagerie par diffusion de muons cosmiques

David Cellier<sup>†</sup>, Jean M. Létang<sup>†</sup>, Gérard Montarou<sup>‡</sup> et Abdallah Lyoussi<sup>\*</sup>

<sup>†</sup> Laboratoire de Contrôle Non Destructif par Rayonnements Ionisants,  
INSA-Lyon, 69621 Villeurbanne Cedex

<sup>‡</sup> Laboratoire de Physique Corpusculaire de Clermont-Ferrand,  
IN2P3/CNRS, Université Blaise Pascal, 63177 Aubière Cedex

<sup>\*</sup> Laboratoire de Mesures Nucléaires,  
CEA Cadarache DEN/DTN, 13108 Saint-Paul-lez-Durance Cedex

PCCF RI 0503

## Résumé

Un dispositif d'imagerie pour contrôler les containers aux frontières est en développement au États Unis. Il utilise la diffusion Coulombienne des muons, particules naturelles très énergétiques. Elles présentent l'avantage d'être quasiment sans danger pour le corps humain et de pouvoir traverser facilement des objets massifs. En mesurant leur énergie et leur déviation à travers la matière, il est possible dans une certaine mesure de remonter au numéro atomique du matériau. Ainsi on peut distinguer les métaux lourds comme l'uranium ou le plomb des métaux plus légers comme le fer ou le cuivre. Le dispositif minimal se compose de deux détecteurs en entrée du volume à radiographié et deux autres en sortie pour mesurer l'angle de diffusion de la particule.

Un modèle analytique basée sur la propagation des erreurs, quantifie le poids des différents paramètres influents du dispositif. Le nombre de muons nécessaire, la résolution des détecteurs et le nombre de mesure de l'impulsion conditionnent la fiabilité de la mesure. La précision à laquelle on estime la longueur de radiation peut ainsi être évaluée pour un matériau donné.

Une méthode de simulation Monte Carlo (code Geant4) génère les interactions des muons à travers la matière et leur passage dans le dispositif d'imagerie. L'implantation de l'algorithme PoCA de reconstruction d'image quantifie et localise les interactions importantes. La discrimination selon  $Z$  des matériaux présents dans le volume en au moins 3 classes est validée sur un objet test.

La confrontation du modèle analytique et les résultats de simulation, démontrent l'influence des paramètres important de l'étude. Ainsi le nombre de muons traversant l'objet ainsi que la résolution minimale des plan des détection sont précisément déterminés. La mesure du moment de chaque muon est obligatoire pour un spectre large et nécessite six mesures de déviation. La validation des résultats permet de réaliser dans des conditions optimales, la radiographie d'un container de taille standard. Les temps d'acquisition d'image obtenus sont tout à fait acceptables pour l'application souhaitée.

### Mots clefs :

muons, diffusion Coulombienne, modèle analytique, résolution des détecteurs, longueur de radiation, simulation de Monte Carlo, reconstruction d'image, classification en numéro atomique, radiographie.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Principe de l'imagerie par diffusion de muons cosmiques</b>	<b>5</b>
1.1 Contexte de l'étude . . . . .	5
1.2 Les aspects nouveaux de cette technique d'imagerie muonique . . . . .	6
1.2.1 L'utilisation des muons cosmiques . . . . .	6
1.2.2 La diffusion Coulombienne multiple . . . . .	7
1.3 Le dispositif expérimental permettant la mesure de la longueur de radiation . . . . .	9
1.4 But et déroulement de l'étude . . . . .	11
<b>2 Étude analytique de l'incertitude sur la longueur de radiation</b>	<b>12</b>
2.1 Erreur sur la variance de l'angle de diffusion à impulsion fixée . . . . .	12
2.1.1 Formulation statistique . . . . .	12
2.1.2 Erreur de discrétisation du détecteur . . . . .	13
2.1.3 Erreur totale . . . . .	15
2.2 Erreur sur la variance de l'angle de diffusion à impulsion inconnue . . . . .	15
2.2.1 Formulation statistique . . . . .	15
2.2.2 Estimation de l'impulsion . . . . .	16
2.2.3 Erreur totale . . . . .	16
2.3 La précision sur la mesure de l'épaisseur de matériau traversé . . . . .	17
2.4 Incertitude sur la longueur de radiation . . . . .	17
<b>3 Implantation algorithmique de reconstruction d'image</b>	<b>19</b>
3.1 Simulation de Monte Carlo des muons à travers un matériau . . . . .	19
3.2 Utilisation du code de calcul Geant4 . . . . .	19
3.3 Algorithme de reconstruction PoCA . . . . .	20
3.3.1 Les fondements de l'algorithme PoCA . . . . .	20
3.3.2 La programmation algorithmique . . . . .	21
3.4 L'imagerie par diffusion des muons réalisée avec PoCA . . . . .	24
<b>4 Résultats</b>	<b>28</b>
4.1 Présentation du dispositif et des conditions de simulation . . . . .	28
4.2 L'approximation Gaussienne de la déviation standard . . . . .	29
4.3 L'intervalle de confiance en fonction du nombre de muons analysés . . . . .	29
4.4 L'intervalle de confiance en fonction du rapport $l_{pixel}/\Delta_Z$ . . . . .	31
4.5 Réalisation et confrontation de plusieurs tests prenant en compte la mesure du moment . . . . .	31
4.5.1 Détermination de $L_{rad}$ lorsque l'impulsion $p$ n'est pas mesurée . . . . .	31
4.5.2 Recherche de la mesure du moment . . . . .	33
4.5.3 Test sur le nombre de mesures de moment à prendre en compte . . . . .	34
4.6 Conclusion de la confrontation entre l'étude analytique et la simulation de Monte Carlo . . . . .	34
4.7 Étude d'une situation réelle : la radiographie d'un container de taille standard . . . . .	35
4.7.1 Les caractéristiques du container et de son dispositif . . . . .	35
4.7.2 Résultats de l'évolution du nombre de muons par voxel sur un container . . . . .	37
4.7.3 Résultats de simulation portant sur l'évolution du rapport $l_{pixel}/\Delta_Z$ . . . . .	38
4.7.4 Résultats de l'évolution du nombre de mesures du moment sur un container . . . . .	39
4.7.5 Résultats de l'évolution de la taille des voxels de l'image d'un container . . . . .	40
4.7.6 Durée d'acquisition d'un dispositif réel d'imagerie muonique . . . . .	41
<b>Conclusion</b>	<b>43</b>
<b>A Muons et imagerie : rappels et historique</b>	
<b>Bibliographie</b>	<b>ii</b>

## Introduction

Les milliers des containers qui entrent en France chaque jour par la route, les ports et les aéroports ne font pas l'objet d'une surveillance systématique. Seulement une part infime est contrôlée. En effet, les techniques actuelles par rayonnements X et gamma sont très coûteuses, dangereuses pour le corps humain, et pas toujours fiables. D'épaisses parois en acier peuvent masquer la présence d'éléments lourds comme l'uranium. Mais une récente étude américaine a proposé d'utiliser les muons, particules issues du rayonnement cosmique pour inspecter ces cargaisons.

L'étude réalisée au CNDRI consiste dans un premier temps à étudier la faisabilité de ce dispositif d'imagerie muonique. Plus particulièrement, il s'agit de déterminer quelle sera la résolution minimum des plans de détections pour reconstruire au mieux la distribution des matériaux dans le volume radiographié. Les caractéristiques générales du dispositif devront aussi être établies.

Dans une première partie, le contexte de l'étude, ses particularités et ses moyens de mise en œuvre seront décrits. Cette étape est nécessaire pour savoir comment traiter correctement le problème.

Pour répondre à la problématique, deux modèles différents seront étudiés. Dans un premier temps, l'étude analytique de l'incertitude sur la longueur de radiation permettant de discriminer le numéro atomique des matériaux contrôlés sera réalisée. Les paramètres influents seront alors rigoureusement étudiés.

Ensuite, nous implanterons un algorithme de reconstruction d'image appliqué aux muons et utilisant la simulation de Monte Carlo. Il permettra la réalisation d'images virtuelles dans des conditions proches de la réalité.

Pour finir, les deux modèles seront confrontés afin de tirer toutes les conclusions sur les capacités de ce dispositif d'imagerie. Les images d'un container de taille standard valideront nos résultats.

# 1 Principe de l'imagerie par diffusion de muons cosmiques

Lorsqu'une particule chargée pénètre dans la matière, elle perd de l'énergie et dévie de sa trajectoire incidente. Ces deux effets résultent des multiples interactions avec les constituants de la matière. En ce qui concerne la radiographie par rayons cosmiques, la perte d'énergie du muon a été le phénomène le plus utilisé pour réaliser des radiographies. La déviation des particules permet de réaliser un autre type de radiographie : la radiographie par diffusion. Grâce aux progrès de l'électronique de détection et de l'informatique, ces procédés devraient permettre de réaliser une imagerie tridimensionnelle quasi quantitative. C'est dans ce contexte d'imagerie par diffusion muonique que se déroule cette étude.

## 1.1 Contexte de l'étude

Les méthodes de mesures non destructives sont très largement utilisées aujourd'hui. On peut citer les mesures par ultrasons, par rayonnements ionisants, les mesures optiques, calorimétriques ou encore acoustiques. Ces techniques sont en pleine expansion pour répondre aux contraintes spécifiques de certaines applications.

C'est le cas des milliers de containers qui entrent en France chaque jour par la route, les ports et les aéroports. Leur contrôle est essentiellement réalisé par des sources de rayonnements X très énergétiques pour traverser jusqu'à 410 mm d'acier typiquement [1].

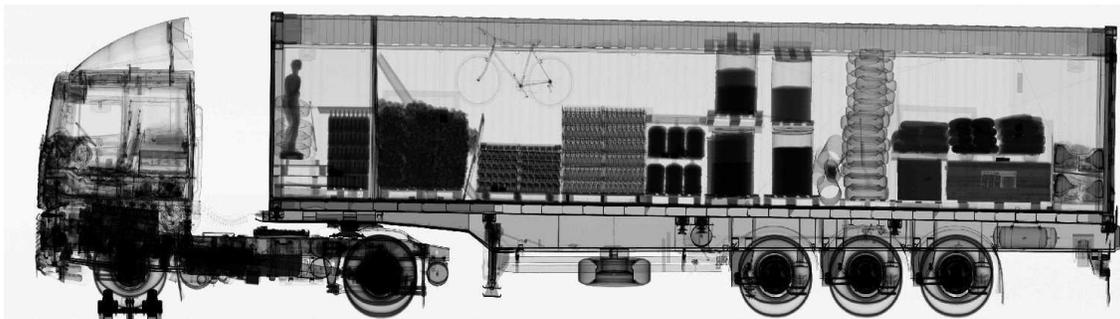


FIG. 1 – Radiographie d'un camion réalisée par la société Smith Heimann [1].

Ce genre de technique, bien qu'efficace et rapide (moins d'une minute pour un camion [1]), présente de multiples inconvénients. Les analyses sont coûteuses en équipement, et demandent une source artificielle de rayonnements de très important débit de dose. Le risque pour un humain présent durant l'irradiation est donc important. Les contrôles restent de toutes façons infimes et ont lieu la plupart du temps sur des cargaisons douteuses. Une récente étude américaine réalisée dans le cadre de la surveillance nationale de leur territoire, a proposé un nouveau dispositif utilisant des particules issues du rayonnement cosmique pour faire de l'imagerie : les muons. Les muons cosmiques, qui sont des particules naturelles chargées ont été utilisées la première fois en 1955 pour réaliser de la radiographie basée sur l'absorption des muons par la matière (une présentation ainsi qu'un historique sont présentés en annexe A). En revanche la radiographie par diffusion est une technique nouvelle dont une étude américaine a récemment démontré la faisabilité. Elle n'est pas encore mise en œuvre aujourd'hui mais toujours en phase de développement. En France trois laboratoires, le LMN (Laboratoire de Méthodes Nucléaires) du CEA de Cadarache, le LPC (Laboratoire de Physique Corpusculaire) de Clermont-Ferrand et le CNDRI (Laboratoire de Contrôle non Destructif par rayonnements ionisants) de Lyon, ont décidé de s'intéresser à ce sujet. C'est dans cette optique que je réalise cette étude préliminaire au CNDRI. À partir d'une étude bibliographique, ce procédé va maintenant être développé en montrant son mode d'application, ses avantages et ses limites. Ensuite, les objectifs et la problématique seront définis.

## 1.2 Les aspects nouveaux de cette technique d'imagerie muonique

Ce type d'imagerie est particulièrement intéressant car à l'inverse des techniques actuelles, il utilise les particules naturelles. De plus, l'interaction utilisée étant la diffusion muonique, un dispositif particulier est nécessaire pour reconstruire l'image radiographique.

### 1.2.1 L'utilisation des muons cosmiques

Une description des muons et plus particulièrement des muons cosmiques est présentée en annexe A. Le flux des muons au niveau de la mer, mesuré par des détecteurs horizontaux, est d'environ  $1 \text{ cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}$ . Il est maximum au Zénith et, pour des particules de 3 GeV, il diminue approximativement comme  $\cos^2(\theta)$ , où  $\theta$  est l'angle par rapport à la verticale [2]. En effet, l'impulsion de la particule et sa distribution angulaire sont étroitement liés. Cette valeur de flux qui devrait nous permettre de réaliser de l'imagerie, va être étudiée dans ce travail.

Le spectre, c'est à dire le nombre de muons en fonction de l'énergie, est continu. Il varie entre autre avec l'altitude et la situation géophysique. Cette distribution est plate pour des énergies inférieures à 1 GeV. Entre 1 et 10 GeV puis elle décroît ensuite pour atteindre une allure en  $p^{-2.7}$  entre 10 et 100 GeV où  $p$  est l'impulsion de la particule. La moyenne se situe à 4 GeV ce qui fait du muon cosmique une particule très énergétique. La figure 2 représente le spectre énergétique des muons à 2 angles donnés. De plus, les muons ne subissent pas d'interaction forte avec la matière, ainsi un muon de 3 GeV pourra traverser des épaisseurs très importante de matériaux. Le tableau ci-dessous représente l'énergie perdue par un muon de 3 GeV à travers 10 cm de différents matériaux.

Matériau	Densité du matériau ( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ )	Énergie perdue par le muon (MeV)	Pourcentage d'énergie perdue
Eau ( $\text{H}_2\text{O}$ )	1	55	0.7%
Fer	78.7	173.1	5.8%
Plomb	113.5	249.7	8.3%
Uranium	189.5	416.9	13.9%

TAB. 1 – Énergies perdues par un muon de 3 GeV à travers 10 cm de divers matériaux [3].

On voit très bien que le muon est capable de parcourir une distance importante dans un matériau. L'épaisseur traversée dans un matériau lourd reste relativement importante, le muon de 3 GeV sera difficilement arrêté. Cette caractéristique est nécessaire pour pénétrer à travers des parois d'acier épaisses ou des matériaux lourds clandestins. C'est le critère important qui a permis d'étudier l'intérieur des pyramides d'Égypte qui sont des édifices très imposants que seule une particule de très haute énergie peut traverser.

Sur cette figure on aperçoit les courbes en trait continu correspondent au modèle informatique du générateur de Blanpied [3] qui permet de générer un spectre de muons avec une distribution angulaire dans des conditions très proches de la réalité. Il est parfaitement décrit pour les muons allant d'environ 500 MeV à 3 TeV.

Pour la tomographie classique utilisant les rayons X, on utilise une source localisée que l'on doit déplacer autour de l'objet pour reconstruire des images en 3 dimensions. Avec les muons, le flux arrive pratiquement dans toutes les directions, donc il est possible d'obtenir une image avec des détecteurs horizontaux qui vont détecter les muons d'une large gamme d'incidence. Il n'y a donc pas de limitation de taille d'objet pour la source, c'est le système de détection qui en imposera les limites. Pour finir, les muons étant très énergétiques, ils interagissent peu avec le corps humain ; ainsi la dose efficace, reçue « naturellement » que l'on fasse la détection des muons ou pas, est négligeable, contrairement au contrôle par rayons X et  $\gamma$ .

Les muons cosmiques constituent donc une source naturelle suffisamment énergétique et quantitative, et possèdent les propriétés nécessaires pour la radiographie appliquée aux containers ou aux poids lourds. Il est possible d'utiliser la perte d'énergie comme source d'information car l'énergie perdue est proportionnelle au type de matériau traversé. Mais des mesures précises pour déterminer l'énergie incidente et de sortie sont nécessaires et les moyens actuels restent complexes et coûteux. Avec la diffusion

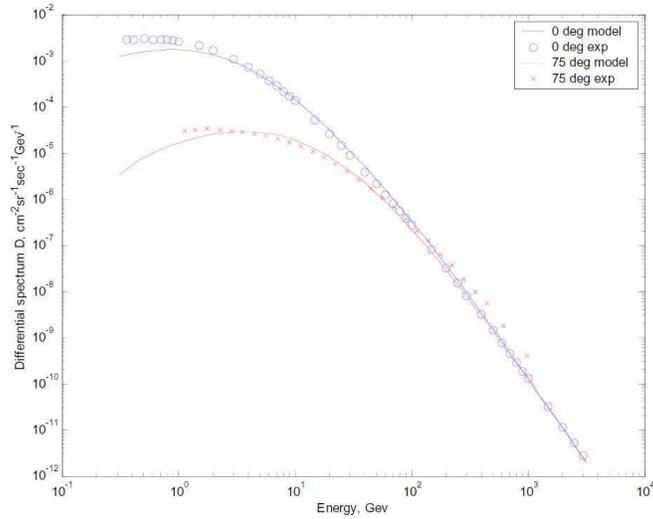


FIG. 2 – Distribution du spectre différentiel des muons à 0 [4] et 75° [5] [3].

Coulombienne multiple, une imagerie précise est possible et nécessite moins de moyen même si, comme nous allons le voir, le dispositif peut s’avérer très encombrant.

### 1.2.2 La diffusion Coulombienne multiple

En règle générale, lorsqu’une particule lourde chargée traverse un matériau, elle subit deux types d’interactions : des collisions inélastiques avec les électrons liés aux atomes (la particule perd alors de l’énergie), et des diffusions élastiques Coulombiennes en heurtant les noyaux. Dans ce dernier cas, on considère que l’énergie perdue par la particule est négligeable. Cette diffusion à travers un matériau est montrée dans la figure ci-dessous. Dans cette figure le phénomène de diffusion multiple Coulombienne a été exagéré afin de visualiser plus facilement cette interaction.

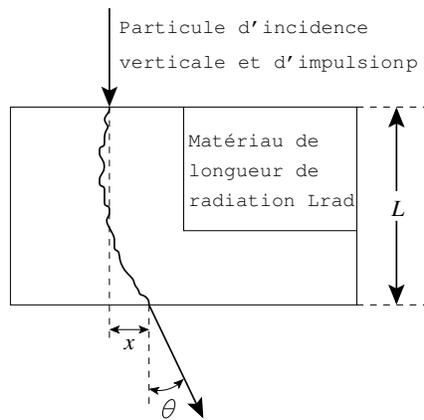


FIG. 3 – Diffusion multiple à travers un matériau

La distribution de cette diffusion Coulombienne multiple est très difficile à décrire mathématiquement. C’est pourquoi il existe de nombreux modèles permettant de la calculer. Elle est très bien représentée par la théorie de Molière [6] [7]. Mais lorsque la déviation est faible (inférieure à 10°), c’est à dire que l’on néglige la probabilité que la particule soit déviée d’un grand angle, on peut utiliser l’approximation

gaussienne. Cette approximation est valable pour 98% des déviations les plus faibles [8]. La distribution du nombre de particules en fonction de l'angle de diffusion est de moyenne nulle avec un écart-type angulaire dans le plan noté  $\theta_0$ . L'angle de diffusion  $\theta_{plane}$  dans le plan peut donc être approximé par la loi suivante :

$$\frac{dN}{d\theta_{plane}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_0} \exp\left(-\frac{\theta_{plane}^2}{2\theta_0^2}\right) \quad [9] \quad (1)$$

Mais dans cette étude nous choisissons de nous intéresser au cas d'une déviation dans l'espace que nous allons généraliser à toute cette étude. Dans ce cas, on a pour la distribution angulaire projeté dans l'espace :

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi\theta_0^2} \exp\left(-\frac{\theta_{space}^2}{2\theta_0^2}\right) \quad [9] \quad (2)$$

où,

$$\theta_0^2 = \text{Var}[\theta_{plane}] = \frac{1}{2}\text{Var}[\theta_{space}] \quad [9] \quad (3)$$

Dans cette approximation,  $\theta_{space}^2 = \theta_{plane,x}^2 + \theta_{plane,y}^2$  et  $d\Omega = d\theta_{plane,x}d\theta_{plane,y}$ . De plus les diffusions selon x et y sont indépendantes et identiquement distribuées. L'approximation gaussienne à 98% de la distribution angulaire [7] nous permet de définir l'écart-type  $\theta_0$ , aussi appelée déviation standard, par la relation 4 :

$$\theta_0 = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta cp} z \sqrt{\frac{L}{L_{rad}}} \left[1 + 0.038 \ln\left(\frac{L}{L_{rad}}\right)\right] \quad [9] \quad (4)$$

où  $\beta c$  représente la vitesse de la particule (exprimée en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ),  $p$  l'impulsion (exprimé en  $\text{GeV}\cdot\text{c}^{-1}$ ),  $L$  l'épaisseur de matériau traversé et  $L_{rad}$  la longueur de radiation du matériau traversé (toutes les deux exprimées en cm). Cette relation se simplifie car  $\beta \cong 1$  pour un muon et la charge  $z$  du muon vaut aussi 1 (voir annexe A). On obtient alors cette relation simplifiée pour la déviation standard dans le plan :

$$\theta_0 \cong \frac{15}{p} \sqrt{\frac{L}{L_{rad}}} \quad [10] \quad (5)$$

où 15 et  $p$  sont exprimés en  $\text{GeV}/c$ , et  $L$  et  $L_{rad}$  en cm.

La longueur de radiation est une grandeur caractéristique du matériau traversé. En effet elle diminue globalement quand le numéro atomique  $Z$  augmente. Cela signifie que pour une profondeur donnée, plus la particule va pénétrer un matériau lourd, plus son écart-type de déviation sera important (la déviation est de moyenne nulle). Dans la figure (4), le graphique représente la longueur de radiation en fonction du numéro atomique du matériau. En pointillé la longueur de radiation est exprimée en cm et en trait continu, elle est exprimée en  $\text{g}\cdot\text{cm}^{-1}$ .

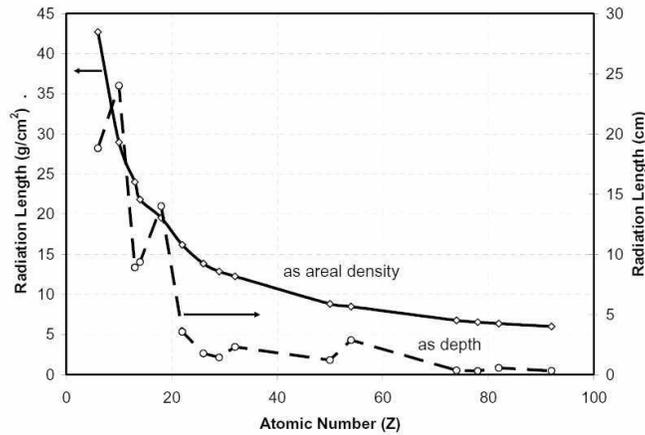


FIG. 4 – Longueur de radiation en fonction du numéro atomique des matériaux [3].

On voit que la longueur de radiation exprimée en  $\text{g}\cdot\text{cm}^{-1}$  suit une loi régulière monotone décroissante avec le numéro atomique du matériau. Malheureusement cette grandeur n'est pas exploitable directement car elle nécessite la connaissance de la densité des matériaux pénétrés. En revanche la longueur de radiation exprimée en  $\text{cm}$  n'est malheureusement pas régulière : on observe des pics pour certaines valeurs. Il sera donc difficile d'établir une imagerie quantitative très fiable en numéro atomique, étant donné l'absence de relation simple entre  $L_{rad}$  et  $Z$ . Il devrait toutefois être possible de cartographier un milieu inconnu en plusieurs groupes, triés selon leur classe de numéro atomique.

Dans son étude [3] [11], L. Schultz (voir figure 5), a proposé de séparer le numéro atomique en trois classes. Il ne semble pas possible de séparer les éléments plus précisément. Ceci est bien visible sur la figure 4. Dans sa classification, il distingue les matériaux très lourds (plomb, uranium, tungstène), les matériaux lourds (fer, cuivre) et les matériaux légers (aluminium, plastique, liquides). Afin de visualiser cette classification, un histogramme est présenté sur la figure 5 Cette classification nous permettrait de

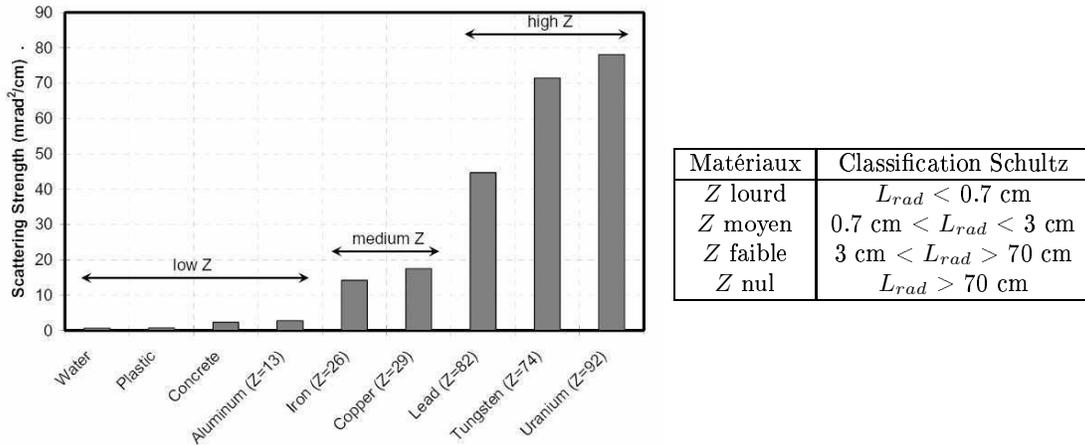


FIG. 5 – La classification en 3 (+1) classes proposée par Schultz. [3].

séparer les métaux appartenant à deux classes différentes, mais il ne serait pas possible de distinguer le plomb de l'uranium, tout deux appartenant à la même classe. Nous essaierons dans notre étude de tester cette classification en évaluant notamment jusqu'où la discrimination des métaux est possible.

### 1.3 Le dispositif expérimental permettant la mesure de la longueur de radiation

Pour exprimer la longueur de radiation, il suffit de reprendre l'équation (5) :

$$L_{rad} \cong \frac{15^2 L}{p^2 \theta_0^2} \quad [10] \quad (6)$$

La mesure de  $L_{rad}$  dépend donc de l'estimation des grandeurs suivantes : l'écart-type de l'angle de diffusion  $\theta_0$ , la longueur  $L$  de matériau traversé, et l'impulsion  $p$  du muon. Ce dispositif est maintenant présenté.

Nous allons tout d'abord chercher à mesurer les déviations que subissent les muons afin d'en déterminer l'écart-type. La déviation globale  $\theta$  que l'on mesure peut être visualisée la figure (3). Pour mesurer la déviation de chaque muon, deux paires de détecteurs vont être placées à l'entrée et à la sortie du volume à radiographier. Les détecteurs vont définir précisément les coordonnées  $x$  et  $y$  points d'impact de chaque muon afin de déterminer le changement de trajectoire. L'écart-type  $\theta_0$  sera calculé par la formule suivante :

$$\theta_0^2 = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\theta_{plane,x}^2 + \theta_{plane,y}^2)_i = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\theta_{space}^2)_i \quad (7)$$

où,  $\theta_{plane,x}^2$  et  $\theta_{plane,y}^2$  représentent la déviation selon  $x$  et  $y$ , puis  $\theta_{space}$  représente la déviation dans l'espace qui tient compte des 2 coordonnées  $x$  et  $y$ .

Pour mesurer  $L_{rad}$ , il faut aussi déterminer  $L$  qui représente l'épaisseur de matériau traversé dans la direction incidente. Pour un matériau d'épaisseur  $e$ , la distance traversée ne sera pas la même pour un muon d'incidence nulle et d'incidence égale à 45 degrés. Elle va donc dépendre de l'angle incident. Dans

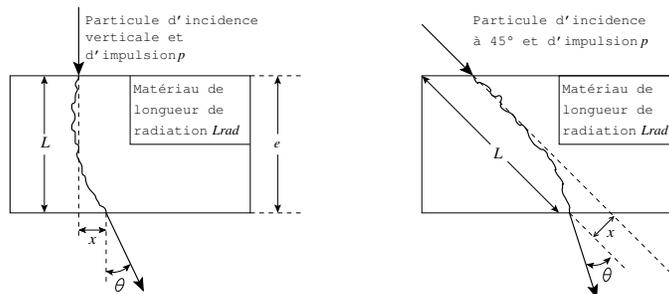


FIG. 6 – Diffusion multiple dans un matériau à deux incidences 0 et 45°.

les deux illustrations de la figure 6, les déviations ont été exagérées afin de visualiser plus facilement ce phénomène. On voit très bien que la distance  $L$  parcourue par la particule à travers le matériau est différente selon l'angle incident. Quand cet angle est nul, l'épaisseur de matériau est égal à  $L$ , en revanche, plus cet angle sera proche de 90°, plus cette longueur  $L$  sera élevée. La longueur  $L$  est calculée par la relation suivante :

$$L = \frac{e}{\cos(\theta_{in})} \quad (8)$$

La valeur de  $L$ , problématique à estimer dans le cas de la radiographie 2D, devient triviale en 3D : il s'agit simplement de la taille du voxel, le volume élémentaire de matière.

Il faut encore mesurer l'impulsion de chaque muon traversant l'objet radiographié. La méthode la plus courante consiste à appliquer un champ magnétique au passage d'une particule chargée pour la dévier de sa trajectoire. Cette particule chargée sera déviée par le champ électrique de façon proportionnelle à son énergie : plus la particule possède une énergie élevée moins elle sera détournée. Ces méthodes peuvent être précises mais aussi coûteuses à cause du matériel électronique mais aussi de l'alimentation permanente nécessaire pour créer un champ électrique [10]. Dans son étude, L. Schultz a proposé une autre manière de mesurer  $p$ . À partir de l'équation (6) que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$p \cong \frac{15}{\theta_0} \sqrt{\frac{L}{L_{rad}}} \quad (9)$$

Si un muon traverse plusieurs plaques de fer d'épaisseurs connues, son impulsion est directement proportionnelle à l'écart-type  $\theta_0$  de ses déviations. Ainsi, en mesurant les déviations  $\theta_{space}$  à travers ces plaques, on peut mesurer l'impulsion  $p$  du muon.  $\theta_0$  étant un écart-type, il faudra un nombre suffisant de plaque de matériau. Il serait également possible de s'affranchir de la connaissance de l'impulsion  $p$  en filtrant les énergies faibles des muons en aval du dispositif. Nous étudierons donc aussi la sensibilité au spectre incident.

Le dispositif global nécessaire pour l'imagerie muonique est présenté sur la figure 7 : avec un tel dispositif, il est donc possible de radiographier l'intérieur d'un container contenant des éléments lourds. L'encombrement étant important, la possibilité de mesurer directement l'impulsion des muons par un seul détecteur spécifique serait un atout important. Après cette partie bibliographique ou le contexte de l'étude a été présenté, je vais désormais définir les objectifs de l'étude qui m'ont été demandés, ainsi que le déroulement de mon travail au sein du laboratoire.

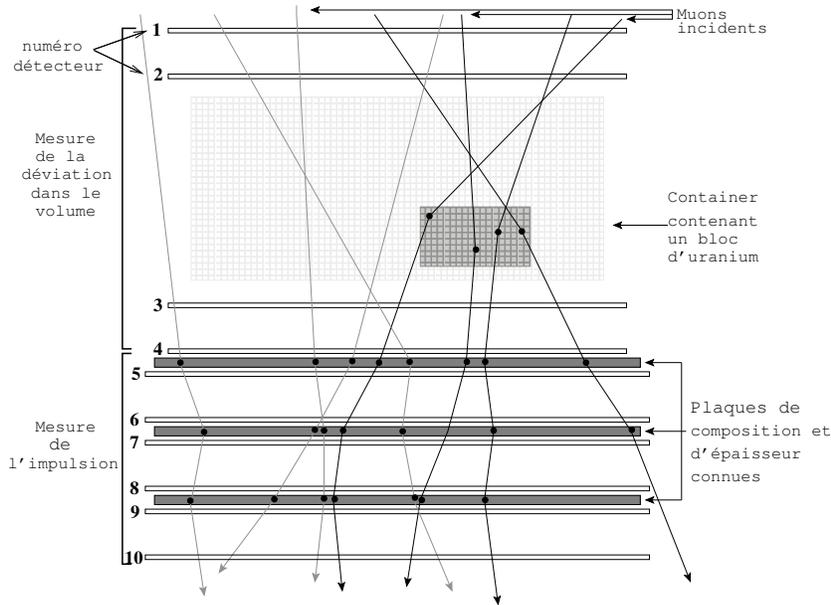


FIG. 7 – Dispositif permettant de réaliser de l'imagerie muonique.

#### 1.4 But et déroulement de l'étude

La thèse de L. Schultz réalisée au laboratoire de Los Alamos a déjà démontré la faisabilité de cette méthode. Mais certains aspects sont très peu abordés dans cette thèse [3] notamment ce qui concerne la mesure de l'impulsion. De plus les détecteurs utilisés pour son étude sont des détecteurs à chambres à fils alors que le CEA et le LPC envisage plutôt d'utiliser d'autres types de détecteurs notamment des détecteurs RPC "Resistive Plate Chamber" qui n'ont pas les mêmes propriétés.

Les objectifs de mon étude sont de vérifier la faisabilité de la méthode en étudiant précisément le travail réalisé par L. Schultz durant sa thèse. L'objectif final consiste à déterminer les caractéristiques du détecteur à utiliser. Cette démarche implique de déterminer quelle sera la résolution minimale nécessaire des détecteurs afin de radiographier avec une précision suffisante le volume étudié. De cette résolution va dépendre le type de détecteur et la configuration du dispositif, notamment la distance entre les détecteurs mesurant les angles de déviation. Tous ces paramètres doivent être étudiés et fixés afin de donner les caractéristiques physiques du dispositif.

Pour répondre à ces objectifs, deux aspects bien distincts seront abordés. Dans un premier temps une étude analytique de l'incertitude sur la mesure de la longueur de radiation sera réalisée. Puis dans un deuxième temps une étude par simulation de Monte Carlo sera faite. L'implantation d'un algorithme simple permettra de réaliser de la reconstruction d'image. Enfin, nous confronterons nos deux modèles afin de voir leurs limites et de tirer les conclusions de cette étude.

## 2 Étude analytique de l'incertitude sur la longueur de radiation

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la détermination du numéro atomique du matériau passe par la détermination de la longueur de radiation de celui-ci. Au cours de ce chapitre, l'influence des différents paramètres permettant le calcul de la longueur de radiation du matériau radiographié va être développée. Cette étude va devoir prendre en compte le maximum de paramètres qui entrent en compte dans le dispositif d'imagerie. On peut citer le nombre de muons traversant l'objet, leur distribution angulaire, la résolution des détecteurs et le dimensionnement du dispositif ainsi que le nombre de mesures de l'impulsion qui seront réalisées pour chaque muon. Je rappelle la formule (6) écrite au chapitre précédent :

$$L_{rad} \cong \frac{15^2}{p^2} \frac{L}{\theta_0^2} \quad [10]$$

Il est nécessaire d'étudier l'impact des paramètres  $\theta_0^2$ ,  $L$  et  $p^2$ , sur  $L_{rad}$ . Étant donné que  $L_{rad}$  est une quantité mesurée déduite de ces variables, on va utiliser la formule de propagation des erreurs [12] afin de déterminer l'incertitude sur la longueur de radiation. En considérant les grandeurs  $\theta_0^2 p^2$  et  $L$  indépendantes ( $\theta_0^2$  et  $p^2$  sont liées car le produit  $\theta_0^2 p^2$  est une constante pour un échantillon de composition et de géométrie données), on obtient :

$$\text{Var}[L_{rad}] = \left( \frac{\partial L_{rad}}{\partial (\theta_0^2 p^2)} \right)^2 \text{Var}[\theta_0^2 p^2] + \left( \frac{\partial L_{rad}}{\partial L} \right)^2 \text{Var}[L] \quad (11)$$

Pour déterminer la variance de  $L_{rad}$ , nous allons tout d'abord rechercher la variance de  $\theta_0^2 p^2$  à impulsion fixée ou non, puis nous nous intéresserons à la variance de  $L$ .

### 2.1 Erreur sur la variance de l'angle de diffusion à impulsion fixée

Lorsque l'impulsion est fixée, il n'est pas nécessaire d'avoir un estimateur du produit  $\theta_0^2 p^2$ , seul un estimateur de  $\theta_0^2$  est nécessaire pour calculer l'erreur sur  $L_{rad}$  par l'équation 11.

#### 2.1.1 Formulation statistique

Étant donné  $N$  muons et leurs déviations angulaires mesurées par les plaques de détections sur chaque axe  $\theta_{mesure,x}$  et  $\theta_{mesure,y}$ , nous définissons à partir de la relation 7 un estimateur  $\theta_0^{2*}$  de  $\theta_0^2$  défini par la relation suivante

$$\theta_0^{2*} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\theta_{mesure,x}^2 + \theta_{mesure,y}^2)_i - b \quad (12)$$

où  $b$  est une valeur à déterminer pour que l'estimateur soit sans biais. Nous pouvons alors écrire que

$$\text{E}[\theta_0^{2*}] = \text{E}[\theta_{mesure,x|y}^2] - b \quad (13)$$

où  $x|y$  signifie  $x$  ou  $y$ . Les mesures de déviation angulaire se décomposent, par exemple pour l'axe  $x$ , en une composante de diffusion Coulombienne  $\theta_{plane,x}$  (introduite au chapitre précédent) et une composante de quantification spatiale du détecteur  $\theta_{pixel,x}$ . La déviation  $\theta_{plane,x}$  est indépendante de  $\theta_{plane,y}$ , mais leur espérance est identiquement nulle. Idem pour  $\theta_{pixel,x}$  et  $\theta_{pixel,y}$ . On a donc

$$\text{E}[\theta_0^{2*}] + b = \text{Var}[\theta_{plane,x|y}] + \text{Var}[\theta_{pixel,x|y}] = \theta_0^2 + \text{Var}[\theta_{pixel,x|y}] \quad (14)$$

Il est clair que pour que cet estimateur soit sans biais, c'est-à-dire

$$\text{E}[\theta_0^{2*}] = \theta_0^2 \quad (15)$$

il faut prendre  $b = \text{Var}[\theta_{pixel,x|y}]$  dans l'équation 12; l'estimateur devient alors

$$\theta_0^{2*} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\theta_{mesure,x}^2 + \theta_{mesure,y}^2)_i - \text{Var}[\theta_{pixel,x|y}] \quad (16)$$

Pour calculer la variance de l'estimateur  $\theta_0^{2*}$ , sous l'hypothèse de distribution gaussienne de  $\theta_{mesure,x|y}$ , nous pouvons utiliser l'expression de la variance d'une loi du  $\chi^2$  à  $2N$  degrés de liberté et nous obtenons

$$\text{Var} [\theta_0^{2*}] = \left( \frac{1}{2N} \text{Var} [\theta_{mesure,x|y}] \right)^2 4N \quad (17)$$

En utilisant la décomposition de la mesure de déviation angulaire, la variance de l'estimateur est ainsi

$$\text{Var} [\theta_0^{2*}] = \frac{1}{N} (\theta_0^2 + \text{Var} [\theta_{pixel,x|y}])^2 \quad (18)$$

Cette équation nous indique que la variance de  $\theta_0^{2*}$ , l'estimateur de la variance de l'angle de diffusion, diminue proportionnellement avec le nombre de muons traversant le volume radiographié. Donc plus le nombre de muon sera important, meilleure sera la précision.

Pour déterminer l'expression de  $\text{Var} [\theta_{pixel,x|y}]$ , nous allons désormais étudier l'erreur engendrée par la discrétisation des coordonnées de détection en pixels dans les plaques.

### 2.1.2 Erreur de discrétisation du détecteur

La déviation angulaire à l'intérieur du matériau traversé est représentée sur la figure 8. Ce schéma illustre le parcours d'un muon à travers un matériau. La déviation est volontairement exagérée pour visualiser plus facilement ce phénomène.

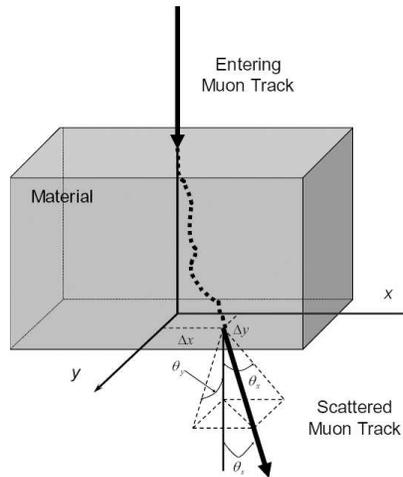


FIG. 8 – Déviation tridimensionnelle d'un muon à travers un matériau [3].

Pour calculer la déviation qui se produit, chaque détecteur va définir le point d'impact de chaque muon. Ensuite il suffira de déterminer les angles incidents et les angles de sortie pour évaluer les déviations suivant la coordonnée  $x$  et la coordonnée  $y$ . Ces déviations sont données par les expressions suivantes :

$$\theta_{mesure,x} = \theta_{mesure,x_{out}} - \theta_{mesure,x_{in}} \quad (19)$$

de même :

$$\theta_{mesure,y} = \theta_{mesure,y_{out}} - \theta_{mesure,y_{in}} \quad (20)$$

Pour chaque muon détecté, la précision sur la mesure des incidences va dépendre de la discrétisation en pixels des détecteurs et de la distance entre ces mêmes détecteurs. Les points d'impacts seront notés  $x_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$ ,  $i$  allant de 1 à 4 et correspondant au numéro du détecteur : Les indices 1 et 2 pour la mesure de l'incidence  $\theta_{x|y_{in}}$  et les indices 3 et 4 pour  $\theta_{x|y_{out}}$ . Les erreurs de mesure dues à l'impact du muon sur un endroit du pixel seront matérialisées par  $\varepsilon_i$ . La figure ci dessous représente une partie agrandie du détecteur, où les pixels sont bien délimités.

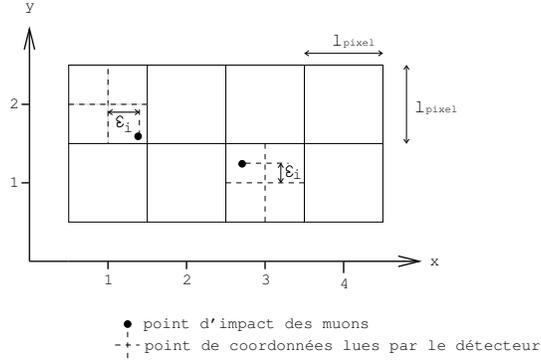


FIG. 9 – Représentation de l’erreur engendrée par la taille du pixel.

On voit sur cette figure, que l’erreur est engendrée par le fait que la position du muon est différente de la position détectée par le pixel du détecteur. En effet la position exacte est représentée par le milieu du pixel (intersection des traits en pointillé).  $\varepsilon_i$  correspond à l’erreur en  $x$  où l’erreur en  $y$  car pour des raisons de visibilité, l’erreur n’est représentée que sur une seule direction pour chaque impact. On peut alors écrire pour l’angle correspondant à l’incidence en entrée du dispositif :

$$\theta_{mesure,x_{in}} = \tan^{-1} \left( \frac{(x_2 + \varepsilon_2) - (x_1 + \varepsilon_1)}{(z_2 - z_1)} \right) \quad (21)$$

où,  $z_2 - z_1$  représente la distance entre les deux détecteurs situés en entrée (voir la figure 7 du dispositif),  $x_i$  la position exacte et  $\varepsilon_i$  l’erreur associée à cette position. Sous l’hypothèse que  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$  est très petit par rapport à  $z_2 - z_1$ , on peut reprendre l’expression de l’angle en entrée de la manière suivante

$$\theta_{mesure,x_{in}} = \tan^{-1} \left( \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} \right) + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{z_2 - z_1} = \theta_{plane,x_{in}} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{z_2 - z_1} \quad (22)$$

Une expression similaire peut être écrite pour l’angle de sortie du dispositif, la mesure de la déviation angulaire s’exprime alors

$$\theta_{mesure,x|y} = \theta_{plane,x|y} + \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_3}{z_4 - z_3} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{z_2 - z_1} \quad (23)$$

On peut désormais définir  $\theta_{pixel,x|y}$ , introduit dans la section précédente, par l’expression

$$\theta_{pixel,x|y} = \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_3}{z_4 - z_3} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{z_2 - z_1} \quad (24)$$

La probabilité pour un muon de se situer en n’importe quel point du pixel, est la même partout. La distribution de  $\varepsilon$  suit donc une distribution uniforme continue à l’intérieur du pixel de dimension  $l_{pixel} \times l_{pixel}$ . La variance dépend alors uniquement de la longueur du pixel et elle est identique pour tous les  $\varepsilon$ . Elle est donnée par la relation suivante :

$$\text{Var} [\theta_{pixel,x|y}] = 4 \text{Var} \left[ \frac{\varepsilon}{\Delta_Z} \right] = \frac{l_{pixel}^2}{3 \Delta_Z^2} \quad (25)$$

où  $\Delta_Z$  représente les distances  $z_2 - z_1$  et  $z_4 - z_3$ , si on les suppose égales (voir figure 7) et toujours identiques. Cette erreur dépend uniquement des caractéristiques du dispositif, c’est-à-dire de la résolution des détecteurs et de la distance entre deux détecteurs consécutifs mesurant les angles d’incidence et de sortie. On voit donc comment il va falloir jouer sur ces paramètres pour obtenir une bonne qualité de radiographie.

### 2.1.3 Erreur totale

En injectant l'expression de la variance de  $\theta_{pixel,x|y}$  donnée dans l'équation 25, on aboutit à l'expression de l'estimateur sans biais  $\theta_0^{2*}$  de  $\theta_0^2$  suivante

$$\theta_0^{2*} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (\theta_{mesure,x}^2 + \theta_{mesure,y}^2)_i - \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta_Z^2} \quad (26)$$

et pour sa variance

$$\text{Var} [\theta_0^{2*}] = \frac{1}{N} \left( \theta_0^2 + \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta_Z^2} \right)^2 \quad (27)$$

et pour l'écart-type on aura :

$$\sigma [\theta_0^{2*}] = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \theta_0^2 + \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta_Z^2} \right) \quad (28)$$

L'incertitude totale, pour une impulsion donnée, sur la variance  $\theta_0^2$  de l'angle de diffusion dépend de 4 paramètres : le nombre  $N$  de muons traversant l'objet à étudier, la variance elle-même de l'angle de diffusion, la taille du pixel des détecteurs et  $\Delta_Z$  la distance entre les deux détecteurs mesurant les angles incidents ou de sortie.

## 2.2 Erreur sur la variance de l'angle de diffusion à impulsion inconnue

Dans le cas où l'impulsion n'est pas donnée, nous ne pouvons plus estimer directement la variance de l'angle de diffusion dans le matériau indépendamment de l'impulsion des muons. Étant donné que, pour un matériau à composition et géométrie fixées, le produit  $p\theta_0$  est une constante, il convient donc de généraliser l'estimateur de la section précédente  $\theta_0^{2*}$  de la variance de l'angle de diffusion à un nouvel estimateur  $(\theta_0 p/p_E)^2$ , où  $p_E$  est une impulsion moyenne fixée servant de normalisation.

### 2.2.1 Formulation statistique

Pour  $N$  muons d'impulsion  $p_i$ , avec  $i \in [1, N]$ , on obtient pour le nouvel estimateur :

$$\left( \theta_0 \frac{p}{p_E} \right)^{2*} = \frac{a}{2N} \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{p_E^2} (\theta_{mesure,x}^2 + \theta_{mesure,y}^2)_i - b \quad (29)$$

avec  $a$  et  $b$  deux facteurs à déterminer pour que l'estimateur soit sans biais. Il permet d'associer à chaque muon, leur angle de diffusion avec leur valeur de l'impulsion. Ainsi, la normalisation par  $p_E^2$  permet d'obtenir un estimateur de la variance de l'angle de diffusion pour cette impulsion arbitrairement fixée (typiquement à 3 ou 4 GeV, la moyenne du flux incident). En utilisant la même démarche que pour l'estimateur à impulsion connue, nous obtenons

$$\text{E} \left[ \left( \theta_0 \frac{p}{p_E} \right)^{2*} \right] = a \text{E} [\theta_{mesure,x|y}^2] * \text{E} \left[ \frac{p^2}{p_E^2} \right] - b \quad (30)$$

ou encore en décomposant  $\theta_{mesure,x|y}$

$$\text{E} \left[ \left( \theta_0 \frac{p}{p_E} \right)^{2*} \right] = a \left( \theta_0^2|_{p=p_E} + \text{Var} [\theta_{pixel,x|y}] \right) \text{E} \left[ \frac{p^2}{p_E^2} \right] - b \quad (31)$$

Pour que l'estimateur soit sans biais, c'est-à-dire

$$\text{E} \left[ \left( \theta_0 \frac{p}{p_E} \right)^{2*} \right] = \theta_0^2|_{p=p_E} \quad (32)$$

il faut prendre tout d'abord

$$a = \text{E} \left[ \frac{p^2}{p_E^2} \right]^{-1} \quad (33)$$

et, comme dans le cas à impulsion connue  $b = \text{Var} [\theta_{pixel,x|y}]$ . L'expression finale de cet estimateur sans biais est alors

$$\left(\theta_0 \frac{p}{p_E}\right)^{2*} = \frac{1}{2N \mathbb{E} \left[ \frac{p^2}{p_E^2} \right]} \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{p_E^2} (\theta_{mesure,x}^2 + \theta_{mesure,y}^2)_i - \text{Var} [\theta_{pixel,x|y}] \quad (34)$$

Pour calculer la variance de cet estimateur, il suffit d'utiliser la formule de la variance d'un produit de variable aléatoire [13, 12] pour obtenir

$$\text{Var} \left[ \left(\theta_0 \frac{p}{p_E}\right)^{2*} \right] = \frac{1}{2N} \text{Var} [\theta_{mesure,x|y}]^2 \left( 3 \mathbb{E} \left[ \frac{p^4}{p_E^4} \right] \mathbb{E} \left[ \frac{p^2}{p_E^2} \right]^{-1} - 1 \right) \quad (35)$$

On retrouve une formule proche de celle donnée par Schultz dans sa thèse [3]. En décomposant la mesure de déviation angulaire, la variance s'écrit :

$$\text{Var} \left[ \left(\theta_0 \frac{p}{p_E}\right)^{2*} \right] = \frac{1}{2N} \left( \theta_0^2|_{p=p_E} + \text{Var} [\theta_{pixel,x|y}] \right)^2 \left( 3 \mathbb{E} \left[ \frac{p^4}{p_E^4} \right] \mathbb{E} \left[ \frac{p^2}{p_E^2} \right]^{-1} - 1 \right) \quad (36)$$

Nous avons déjà calculé la variance de  $\theta_{pixel,x|y}$  dans la section précédente. Il reste maintenant à expliciter les moments d'ordre 2 et 4 sur l'estimation relative de l'impulsion du muon.

### 2.2.2 Estimation de l'impulsion

L'impulsion du muon est estimée dans le dispositif décrit par Schultz (figure 7) par des mesures de déviation angulaire dans  $P$  plaques de fer d'épaisseur calibrée. Il faut noter que pour une seule plaque de fer il y a deux mesures, car une mesure suivant  $x$  et une autre suivant  $y$  sont en général possibles dans un détecteur (bandes parallèles dans des directions différentes sur chaque face du RPC par exemple). Schultz a calculé les moments de l'estimateur normalisé du muon (voir l'annexe B de sa thèse [3])

$$\mathbb{E} \left[ \frac{p^2}{p_E^2} \right] = F^2 \frac{P}{P-1} \quad (37)$$

et

$$\mathbb{E} \left[ \frac{p^4}{p_E^4} \right] = F^4 \frac{P^2}{(P-2)(P-1)} \quad (38)$$

où  $F$ , facteur de correction pondérant l'estimateur de l'impulsion pour le rendre sans biais, est

$$F = \frac{\Gamma(P)}{\Gamma(P - \frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{P}} \quad (39)$$

Ces expressions nous indiquent qu'il faut au moins  $P = 3$  plaques de fer en dessous du dispositif 7 pour mesurer l'impulsion de chaque muon. Il faut toutefois noter que ce système de mesure de l'impulsion proposé par Schultz pourrait avantageusement être remplacé par un détecteur directement résolu en énergie, comme une chambre à dérive avec plans de fils (estimation de l'impulsion autour de 10% typiquement à partir de 1GeV/c et sur deux ordres de grandeurs selon A. Walenta).

### 2.2.3 Erreur totale

En injectant dans l'expression de l'estimateur 34 l'expression de la variance de  $\theta_{pixel,x|y}$  donnée dans l'équation 25 et celle du moment de l'impulsion normalisée, on aboutit à l'expression suivante de l'estimateur sans biais à impulsion inconnue

$$\left(\theta_0 \frac{p}{p_E}\right)^{2*} = \frac{1}{2N} \frac{(P-1) \Gamma(P - \frac{1}{2})^2}{\Gamma(P)^2} \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{p_E^2} (\theta_{mesure,x}^2 + \theta_{mesure,y}^2)_i - \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta_Z^2} \quad (40)$$

Pour  $P = 3$ , le facteur correctif en  $P$  est proche de  $\sqrt{\pi}/2$  et tend vers 1 lorsque  $P$  tend vers l'infini. L'expression de sa variance est

$$\text{Var} \left[ \left( \theta_0 \frac{p}{p_E} \right)^{2*} \right] = \frac{1}{N} \left( \theta_0^2|_{p=p_E} + \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta_Z^2} \right)^2 \frac{2P-1}{2(P-2)} \quad (41)$$

et pour l'écart-type on aura :

$$\sigma \left[ \left( \theta_0 \frac{p}{p_E} \right)^{2*} \right] = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \theta_0^2|_{p=p_E} + \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta_Z^2} \right) \sqrt{\frac{2P-1}{2(P-2)}} \quad (42)$$

### 2.3 La précision sur la mesure de l'épaisseur de matériau traversé

La nature du matériau traversé, tout comme son épaisseur, sont les deux paramètres que l'on veut déterminer grâce à ce dispositif d'imagerie. On ne connaît à l'avance ni la nature ni les dimensions des matériaux radiographiés. Ce sont des grandeurs inconnues. C'est donc l'algorithme de reconstruction qui va nous permettre de déterminer  $L$ . Néanmoins nous avons essayé d'estimer sa précision en faisant l'hypothèse que l'objet radiographié est un matériau uniforme compris dans la totalité du volume situé entre les détecteurs 2 et 3 (voir la figure du dispositif 7). Avec cette hypothèse la longueur  $L$  vaut :

$$L = \frac{z_3 - z_2}{\cos(\theta_{in})} \quad (43)$$

On voit que sa précision de mesure dépend uniquement de  $\cos(\theta_{in})$ , où :

$$\theta_{in} = \sqrt{\theta_{x_{in}}^2 + \theta_{y_{in}}^2} \quad (44)$$

Comme  $\theta_{x_{in}}$  et  $\theta_{y_{in}}$  sont indépendants, on peut établir

$$\text{Var}[\theta_{in}] = \text{Var}[\theta_{x_{in}}] = \text{Var}[\theta_{y_{in}}] \quad (45)$$

Ainsi, on a

$$\text{Var}[L] = \left( \frac{(z_3 - z_2) \sin(\theta_{in})}{\cos^2(\theta_{in})} \right)^2 \text{Var}[\theta_{in}] \quad (46)$$

et

$$\text{Var}[L] = L^2 \tan^2(\theta_{in}) \text{Var}[\theta_{in}] \quad (47)$$

Pour des incidences proches de la verticale, l'erreur sur  $L$  est ainsi négligeable. Il faut de plus noter que, dans le cas d'une reconstruction 3D,  $L$  représente le trajet du muons dans le voxel, ce qui reste à peu près constant quelle que soit l'incidence pour des voxels isotropes. Dans la suite de cette étude, nous pourrons donc sans difficulté prendre  $L$  connu. Pour estimer l'incertitude sur l'estimation de  $L_{rad}$ , il reste maintenant à synthétiser les différents résultats.

### 2.4 Incertitude sur la longueur de radiation

Tout d'abord, on va supposer que l'impulsion de la particule est connu parfaitement. D'après l'expression (6), l'erreur ne va dépendre que de l'erreur sur  $\theta_0^2$ . On a donc en utilisant l'estimateur  $\Theta$  de la variance de l'angle de diffusion à impulsion fixée :

$$\text{Var}[L_{rad}] = L_{rad}^2 \frac{\text{Var}[\theta_0^{2*}]}{E[\theta_0^{2*}]^2} \quad (48)$$

c'est-à-dire, comme l'estimateur est sans biais,

$$\text{Var}[L_{rad}] = L_{rad}^2 \frac{1}{N} \left( 1 + \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta_Z^2 \theta_0^2} \right)^2 \quad (49)$$

De la même façon, lorsque l'impulsion n'est pas connue, il est possible d'écrire une relation semblable en utilisant l'estimateur  $S$

$$\text{Var}[L_{rad}] = L_{rad}^2 \frac{\text{Var} \left[ \left( \theta_0 \frac{p}{p_E} \right)^{2*} \right]}{E \left[ \left( \theta_0 \frac{p}{p_E} \right)^{2*} \right]^2} \quad (50)$$

ou encore

$$\text{Var}[L_{rad}] = L_{rad}^2 \frac{1}{N} \left( 1 + \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta_Z^2 \theta_0^2|_{p=p_E}} \right)^2 \frac{2P-1}{2(P-2)} \quad (51)$$

Lorsque  $P$  est grand, les équations 49 et 51 sont identiques. Cette relation (51) permet de faire les affirmations suivantes :

- Quand le nombre de muons augmente, la variance diminue ;
- Si la largeur du pixel augmente la variance augmente ;
- Si l'écart entre les détecteurs 2 et 3 augmente la variance diminue ;
- Lorsque  $\theta_0^2$  augmente la variance diminue ;
- Lorsque le nombre  $P$  de détecteurs mesurant l'impulsion varie de 3 à l'infini, le rapport  $\frac{2P-1}{2(P-2)}$  évolue de manière monotone entre 1.25 et 1 : la diminution de variance n'est donc pas significative vis-à-vis du nombre de plaques.

Toutes ces affirmations sont logiques et vont dans le bon sens. Ce sont ces paramètres qu'il faudra optimiser par la suite pour déterminer la résolution des détecteurs afin de reconstruire au mieux la répartition des matériaux dans le volume radiographié. Par contre, le fait de devoir connaître  $L_{rad}$  montre la limite de cette étude statistique. À titre indicatif, nous donnons quelques valeurs d'incertitudes dans 2 dispositifs choisis :

1. Paramètres du premier dispositif :
  - Objet radiographié : cube d'uranium de 10 cm<sup>3</sup>
  - Largeur du pixel des détecteurs : 1 mm<sup>2</sup>
  - Écart  $\Delta_Z$  entre les détecteurs : 1000 mm
  - Nombre de plaques de fer : 3
  - Nombre de muons traversant l'uranium ainsi que tous les détecteurs :1000
  - Impulsion moyenne  $p_E = 3$  GeV
  - On obtient  $\sigma[L_{rad}] = 0.016$  cm pour  $L_{rad} = 0.320$  cm
2. Paramètres du deuxième dispositif :
  - Objet radiographié : cube d'aluminium de 20 cm<sup>3</sup>
  - Largeur du pixel des détecteurs : 1 mm<sup>2</sup>
  - Écart  $\Delta_Z$  entre les détecteurs : 100 mm
  - Nombre de plaques de fer : 4
  - Nombre de muons traversant l'uranium ainsi que tous les détecteurs :300
  - Impulsion moyenne  $p_E = 3$  GeV
  - On obtient  $\sigma[L_{rad}] = 1.7$  cm pour  $L_{rad} = 8.90$  cm

Cette étude analytique nous a permis de déterminer l'incertitude sur la longueur de radiation des matériaux radiographiés grâce à notre dispositif d'imagerie par diffusion de muons cosmiques. Il reste maintenant à savoir si notre incertitude est suffisamment faible pour classifier de la manière la plus sûre possible, les matériaux en 3 catégories. nous allons maintenant, en utilisant la simulation de Monte Carlo nous intéresser à l'imagerie et l'algorithme de reconstruction.

### 3 Implantation algorithmique de reconstruction d'image

Pour valider les résultats obtenus par modèle analytique, l'implantation d'un algorithme de reconstruction d'image est nécessaire. Cet algorithme va s'appuyer sur la simulation de Monte Carlo pour reproduire les particules et leurs interactions de manière aléatoire.

#### 3.1 Simulation de Monte Carlo des muons à travers un matériau

La simulation numérique permet de démultiplier à l'infini des expérimentations analytiques. Elle est très utilisée aujourd'hui dans de nombreux secteurs.

Les études de simulation ont pour objet de démontrer la faisabilité d'un dispositif donné. Pour générer des particules ainsi que toutes les interactions avec la matière des codes de calcul de transport multiparticules de type Monte Carlo ont été développés.

Les méthodes de Monte Carlo sont des méthodes numériques utilisant la technique familière du sondage. Le principe est de recommencer un grand nombre de fois une expérience en variant de façon aléatoire les paramètres de départ. Le résultat final provient d'une statistique sur les résultats élémentaires. Par exemple, l'expérience peut consister à évaluer le parcours individuel d'une particule dans la matière, parcours régi par une chaîne de collisions qui vont dévier sa trajectoire [14].

Cette méthode est ainsi mise en œuvre pour étudier la réponse des détecteurs en physique des particules, contrôler des colis de déchets radioactifs, interpréter l'imagerie médicale, prédire le comportement de matériaux irradiés ou dimensionner des protections contre le rayonnement dans des installations nucléaires. Mais les simulations de Monte Carlo s'appliquent également à la reconnaissance de la parole, l'analyse des séquences d'ADN, la simulation des structures moléculaires, la circulation routière ou l'analyse de risques par les compagnies d'assurances [14].

#### 3.2 Utilisation du code de calcul Geant4

Geant4 est le fruit d'une collaboration internationale réunissant une centaine de physiciens et informaticiens dans le but de mettre en œuvre un logiciel pour la simulation des interactions particules-matières à différentes échelles d'énergie. Ses domaines d'application incluent la physique de haute énergie, le domaine nucléaire, le domaine médical et l'étude de la physique dans l'espace. Géant 4 fournit un ensemble complet d'outils pour tous les domaines de la simulation de détecteurs : la géométrie, les trajectoires, la gestion de réponse des détecteurs, des événements, avec une visualisation et une interface utilisateur [15].

Ce puissant outil est aussi capable de gérer un nombre très importants de processus physiques régissant les multiples interactions des particules avec la matière dans une large gamme d'énergie. Pour beaucoup de processus physiques, le choix de différents modèles mathématiques est possible. Un grand nombre de fonctionnalités sont aussi présentes : de puissants modèles de générateurs de nombre aléatoire, d'unités de physique et de constantes ainsi que des données permettant la gestion des particules [15].

La conception de Geant4 est orientée objet. Elle permet à l'utilisateur de comprendre, d'adapter ou de prolonger les outils selon les besoins et ce dans tous les domaines. En même temps, son architecture modulaire permet de charger et d'employer seulement les composants requis. Grâce à toute cette richesse, Geant4 a vite été adopté par de nombreux projets expérimentaux à travers le monde [15]. Le code source de Geant4 est disponible librement, accompagné d'un guide d'installation et d'un ensemble de documentation.

Voilà de nombreuses raisons pour lesquelles le logiciel Geant4 est l'outil parfaitement adapté pour réaliser la simulation de l'imagerie muonique. En effet, il est capable de générer un flux de muons où le spectre en énergie, la distribution angulaire ainsi que le positionnement, sont des paramètres qu'il est possible d'ajuster suivant l'application voulue. Il est donc tout à fait flexible et nous permet d'envisager tous les cas de figure. Il va nous permettre de faire évoluer tous nos paramètres en partant de cas simples (impulsion et incidence imposées, flux de muon localisé en un seul point), pour au final se placer dans des conditions les plus proches possibles de la réalité.

Geant4 nous permet aussi de configurer toute la géométrie du dispositif en choisissant les détecteurs et les matériaux voulus. On peut ainsi créer et modifier un nombre quelconque de matériaux et de détecteurs dans un volume choisi. Ces détecteurs sont capables de localiser de façon précise les impacts

de chaque muon. De plus, lors du passage d'un muon à travers un matériau, le logiciel va déterminer toutes les interactions qui ont lieu et ainsi, modifier, la trajectoire et l'énergie des particules.

Grâce à toutes ces informations données par la simulation, il est possible de programmer un algorithme de reconstruction d'image. Pour toutes les simulations que nous réaliserons, le dispositif générique type sera celui qui est présenté en figure 7.

### 3.3 Algorithme de reconstruction PoCA

Dans sa thèse concernant la radiographie par muons cosmiques, Larry Schultz a proposé deux algorithmes : l'algorithme PoCA (Point of Closest Approach) et l'algorithme MLSD (Maximum Likelihood Scattering Reconstruction). Lors de mon stage nous avons choisi d'implanter l'algorithme PoCA qui est moins difficile à mettre en place. Il va nous permettre de réaliser des images pendant la durée de mon stage. En effet, l'implantation d'un algorithme performant de reconstruction d'image en 3 dimensions demande beaucoup de temps, et ce n'est pas l'objet de mon travail.

#### 3.3.1 Les fondements de l'algorithme PoCA

Le moyen de mesurer la déviation du muon à travers d'un matériau, ainsi que le dispositif approprié ont été présentés au paragraphe 1.3. Il est important de rappeler que cette déviation de la particule à travers la matière provient des nombreuses interactions du muon avec les noyaux de la matière. C'est la diffusion Coulombienne multiple. Il en résulte un grand nombre de très faibles déviations qui sont difficiles à caractériser.

L'algorithme PoCA est basé sur l'hypothèse suivante : il n'y a un seul événement qui dévie la particule de sa trajectoire incidente. Ainsi, on ne tient pas compte des multiples déviations qui ont réellement lieu à l'intérieur. On admet que la déviation globale résulte d'une seule interaction importante. Donc en mesurant pour chaque muon, l'angle incident, puis l'angle une fois le matériau traversé, il est possible de localiser le point où s'est produite la déviation. Cet endroit est appelé le point d'approche le plus près. La figure 10 expose clairement cette hypothèse. Sachant que la déviation augmente avec le numéro

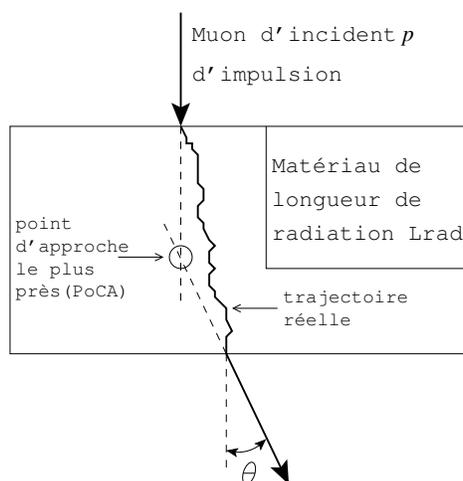


FIG. 10 – Illustration de l'hypothèse du point d'approche le plus près.

atomique du matériau, on peut évaluer la position et l'importance de la déviation qui s'est produite en ce point. Avec un nombre de muon suffisamment élevé, on aura une précision suffisante sur l'écart-type de déviation  $\theta_0$  qui nous permet de déterminer la longueur de radiation du matériau traversé.

La figure 10 représente le point d'approche le plus près en deux dimensions. Mais dans l'espace, les trajectoires d'entrées et de sorties risquent de ne pas être concourantes en un même point. C'est la raison pour laquelle, il faut dans ce cas, définir le point d'approche le plus près comme étant le point qui se

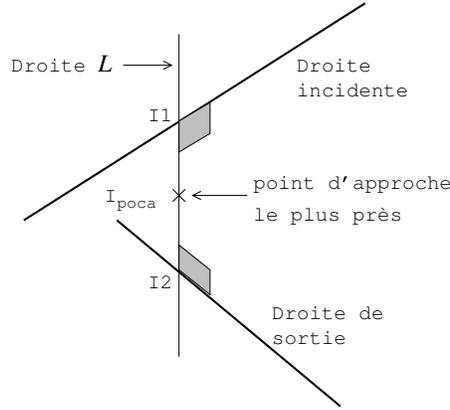


FIG. 11 – Localisation du PoCA en 3 dimensions.

rapproche le plus possible des deux trajectoires. Ses coordonnées doivent être calculées. Le schéma de la figure 11 décrit ce point d'approche.

Pour mesurer les coordonnées de  $I_{poca}$ , la solution consiste à déterminer le point situé au milieu du segment  $[I1, I2]$ . C'est le segment le plus court reliant la droite incidente  $D_{in}$  à la droite de sortie  $D_{out}$ . Il correspond aussi au milieu du segment formé par les points d'intersection de la droite qui est à la fois perpendiculaire à  $D_{in}$  et à  $D_{out}$ . Pour déterminer le vecteur directeur de cette droite  $L$ , il faut déterminer les deux points d'intersection  $I1$  et  $I2$ . Mais il existe tout de même un cas où cet algorithme ne fonctionne pas. En effet, si les droites  $D_{in}$  et  $D_{out}$  sont parallèles, il n'y a aucun point  $I_{poca}$ . De plus, elles peuvent être confondues et dans ce cas il y aura une infinité de points  $I_{poca}$ . Ces deux cas de figures devront être gérés par le programme.

L'algorithme PoCA nécessite de mesurer et localiser la déviation de chaque muon dans le volume. Les informations recueillies vont ensuite permettre la reconstruction d'images tridimensionnelles des matériaux présents.

### 3.3.2 La programmation algorithmique

Au cours de ce paragraphe, les différentes étapes du cheminement suivi pour programmer en langage C cet algorithme vont être présentées.

Pour commencer, il est nécessaire de lire le fichier de sortie donné par Geant4 et contenant tous les points d'impacts des différents muons simulés. Chaque point d'intersection du muon avec un détecteur est donné avec une très grande précision. Chaque muon va désormais être traité indépendamment. Une boucle permettant d'effectuer plusieurs opérations pour chaque muon est réalisée.

Tout d'abord un sous programme est chargé d'arrondir les coordonnées de chaque muon. Pour tenir compte de la résolution des détecteurs, les coordonnées d'impact sont ajustées de façon à ce que la précision de leur mesure soit identique à la résolution des détecteurs. L'origine  $O(0, 0)$  de chaque détecteur se situe en leur centre (voir figure 12). On aura autant de valeur coordonnées positives que de coordonnées négatives. Suivant la parité du nombre total de pixel sur les détecteurs les arrondis vont être différents. Le schéma 12 illustre ce principe.

Lorsque le nombre total de pixel du détecteur suivant la direction  $x$  et  $y$  est pair, il faut arrondir les valeurs  $(x, y)$  lues de la manière suivante : pour une résolution des détecteurs de 1 mm la valeur  $x = -1.250$  mm deviendra  $x = -1.5$  mm et la valeur  $y = 0.250$  mm deviendra  $y = 0.5$  mm (voir figure 12). Ces nouvelles coordonnées ont une précision équivalente à la moitié de la largeur d'un pixel soit dans ce cas à une précision de 0.5 mm. En revanche si les détecteurs contiennent un nombre impair de pixel dans la coordonnée  $x$  ou  $y$  (voir figure 12) la valeur  $x = 1.75$  mm est arrondie à 2 mm et la valeur  $y = 0.75$  mm à 1 mm. Ces deux cas de figure sont à prendre en compte car on va être amené à modifier très souvent la taille de pixel des détecteurs.

Il se peut qu'un impact de muon soit manquant sur un ou plusieurs détecteurs (un muon trop dévié peut sortir du volume ou même être arrêté s'il a perdu toute son énergie). À ce moment là, il n'est pas

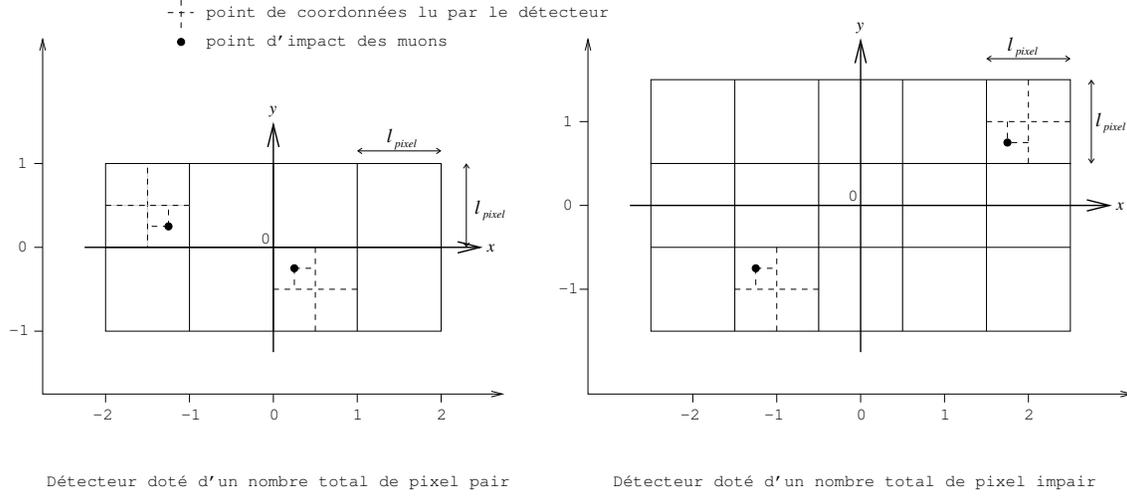


FIG. 12 – Coordonnées des muons lues par le détecteur dans 2 cas différents.

comptabilisé dans la statistique. Le programme doit appeler les coordonnées du prochain muon. Une partie de l'information est ainsi perdue.

Par la suite, le calcul de l'angle d'incidence et de sortie sur chaque paire de détecteur doit être effectué afin de déterminer la déviation dans l'espace. On rappelle la formule de la déviation dans l'espace :

$$\theta_{plane} = \sqrt{\theta_{plane,x}^2 + \theta_{plane,y}^2} \quad (52)$$

Pour chaque muon, la déviation produite à l'intérieur du volume de l'image est noté  $\theta_{plane}$ , alors que celles produites dans les plaques de fer sont notées  $\theta_{plane,j}$ ,  $j$  correspondant au nombre de plaque de fer. Avec les déviations à travers le fer, on mesure le moment de chaque muon par la formule suivante :

$$p_i = \frac{15}{\sqrt{\frac{1}{2P} \sum_1^P (\theta_{plane,x}^2 + \theta_{plane,y}^2)_j}} \sqrt{\frac{L}{L_{rad}}} \quad (53)$$

Si toutes les déviations  $\theta_{plane,j}$ , sont nulles (par exemple si le muon est de très haute énergie, la particule ne sera quasiment pas déviée), alors d'après la formule précédente  $p_i = \infty$ . Si le moment reste indéterminé (déviation nulle à travers les plaques de fer, muon trop dévié ou arrêté car il a perdu toute son énergie) il est nécessaire de ne pas comptabiliser la mesure. Elle peut fausser le résultat final. En revanche, il est important de comptabiliser les déviations nulles dans l'objet. Elles sont fréquentes. C'est le cas lorsque le muon traverse de l'air mais aussi parfois quand il traverse un matériau car on sait que la déviation moyenne est nulle. Si les informations sont valables, pour chaque muon incident, on introduit la variable :  $S_i = \theta_{plane}^2 p_i^2 / p_E^2$  correspondant à l'estimateur du chapitre précédent. Elle permettra de déterminer  $L_{rad}$  par la suite.

L'étape suivante consiste à calculer les coordonnées ( $x$ ,  $y$  et  $z$ ) du point d'approche le plus près décrit sur les figures 10 et 11. Pour déterminer les coordonnées de  $I_{poca}$  il faut tout d'abord déterminer les coordonnées de  $I_1$  et  $I_2$  figurant sur la figure 11. Pour les coordonnées de  $I_1$ , on définit 3 plans  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  dont  $I_1$  sera l'intersection. On a :

- Le plan  $P_1$  contenant  $D_{in}$  et  $L$
- Le plan  $P_2$  contenant  $D_{out}$  et  $L$
- Un plan  $P_3$  quelconque, différent de  $P_2$  et contenant  $D_{in}$

En utilisant les propriétés du déterminant, il est possible de déterminer les équations caractéristiques de ces 3 plans. Avec les 3 équations caractéristiques, on obtient système de 3 équations à 3 inconnues que l'on résout à l'aide d'un algorithme basée sur la méthode du pivot de Gauss.

- La même démarche est ensuite effectuée pour le point  $I_2$ , le point d'intersection des 3 plans suivants :
- Le plan  $P_1$  contenant  $D_{in}$  et  $L$

- Le plan  $P2$  contenant  $D_{out}$  et  $L$
- Un plan  $P3bis$  quelconque, différent de  $P2$  et contenant  $D_{out}$

Dans ce cas, seul le troisième plan va être modifié.

Une fois les coordonnées  $x_{I1}$ ,  $y_{I1}$ ,  $z_{I1}$ ,  $x_{I2}$ ,  $y_{I2}$  et  $z_{I2}$  calculées, les coordonnées du point d'approche le plus près  $I_{poca}$  sont facilement déterminées par les relations suivantes :

$$x_{I_{poca}} = \frac{x_{I1} + x_{I2}}{2} y_{I_{poca}} = \frac{y_{I1} + y_{I2}}{2} z_{I_{poca}} = \frac{z_{I1} + z_{I2}}{2} \quad (54)$$

Si certaines coordonnées se trouvent en dehors du volume de l'image, ou alors que le point  $I_{poca}$  n'a pas pu être déterminé (les droites  $D_{in}$  et  $D_{out}$  sont parallèles), le muon n'est pas pris en compte. Une partie de l'information est perdue de cette manière.

La suite du programme consiste à voxeliser le volume afin d'accumuler dans une même zone de l'espace, les déviations qui ont lieu. Chaque déviation va être placée dans un voxel. Les valeurs de  $S_i$  appartenant au même voxel vont s'incrémenter. De plus, tous les autres voxels du volume situés sur le trajet du muon vont être affecté d'une valeur 0. En effet comme l'on considère que les autres voxels situés sur le trajet du muon ne le dévient pas, Il est donc logique de leur affecter la valeur 0. La figure 13 illustre cette étape de voxelisation du volume image.

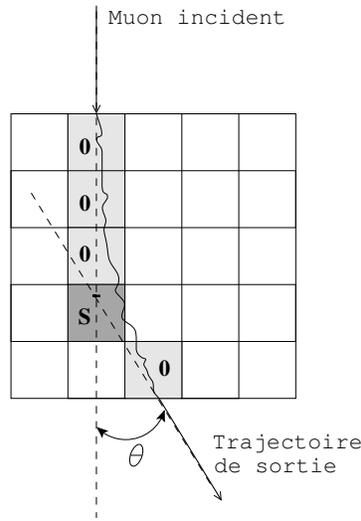


FIG. 13 – Principe de voxelisation caractéristique de l'algorithme PoCA.

Cette figure représente une coupe du matériau traversé par un muon. Le carré grisé correspond au voxel localisé par le point d'approche le plus près. Au passage de ce muon, le voxel concerné est incrémenté de la valeur  $S_i$  correspondante à la déviation. Les autres voxels situés sur le trajet du muon sont eux incrémentés de la valeur 0. On introduit  $S[X][Y][Z]$  qui correspond aux variables d'addition des déviations et  $P[X][Y][Z]$  qui correspond aux variables d'addition du nombre de déviation à l'intérieur des voxels. Plus simplement il correspond au poids par voxel.  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  représentent les coordonnées des positions de la totalité des voxels de l'espace. Ainsi le voxel où a lieu la déviation est incrémenté d'une valeur  $S_i$ . On aura :  $S[X][Y][Z] = S[X][Y][Z] + S_i$ , où  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  représentent les coordonnées du voxel fortement grisé de la figure 13. Pour les autres voxels ils sont incrémentés de la valeur 0. Le poids de tous les voxels situés sur la trajectoire du muon sont incrémenté :  $P[X][Y][Z] = P[X][Y][Z] + 1$ . La valeur de l'épaisseur de matériau  $L_i$  traversée par le muon  $i$  est égale à la largeur du voxel traversée dans la direction incidente. Dans ce cas, on incorpore  $L_i$  à la variable  $S_i$  afin de prendre en compte les différentes valeurs de  $L_i$ . La variable  $S_i$  devient alors :

$$S_i = \frac{1}{L_i} \left( \theta_{plane}^2 \frac{p_i^2}{p_E^2} \right) \quad (55)$$

Une autre solution consiste à faire l'hypothèse suivante : on considère que pour chaque muon,  $L_i$  correspond à la largeur du voxel en supposant que les voxels sont de formes sphériques. Dans ce cas,  $L_i = L$  est constante.

Toutes les opérations décrites au dessus vont être effectuées pour la totalité des muons. À la fin de cette boucle, les variables restantes sont  $S[X][Y][Z]$ , la somme des  $S_i$  de chaque voxel et  $P[X][Y][Z]$ , le poids de chaque voxel c'est-à-dire le nombre de  $S_i$  par voxel. On va enfin pouvoir mesurer la longueur de radiation  $L_{rad}$  pour chaque voxel. Si  $L$  est constant on a :

$$L_{rad} = \frac{15^2 L P[X][Y][Z]}{S[X][Y][Z]} \quad (56)$$

Ainsi on a déterminé pour chaque voxel de l'espace une valeur de  $L_{rad}$  associée. En utilisant les seuils décrits par L. Schultz dans sa thèse, le numéro atomique de chaque voxel se détermine de la façon suivante :

- lorsque  $L_{rad} < 0.7$  cm, le voxel est affecté à un matériau à Z fort ;
- lorsque  $0.7$  cm  $< L_{rad} < 3.0$  cm le voxel est affecté à un matériau à Z moyen ;
- lorsque  $3.0$  cm  $< L_{rad} < 70.0$  cm le voxel est affecté à un matériau à Z faible ;
- lorsque  $L_{rad} > 70.0$  cm le voxel est constitué par un gaz ou le vide (Z quasiment nul).

Il faut aussi noter que la plupart des paramètres de ce programme sont ajustables. Cette caractéristique est nécessaire pour choisir la taille du voxel, la taille du pixel, la taille du volume image, le nombre de voxel, le nombre de muons à prendre en compte et le nombre de mesures du moment.

Certains paramètres sont modifiables à partir du logiciel Geant4. On peut noter tout ce qui concerne la géométrie des détecteurs, le dimensionnement du dispositif, le nombre de plaque de fer mesurant l'impulsion de la particule, le nombre de muons générés, la nature des matériaux présents dans le volume image, l'impulsion des muons, ainsi que la localisation du flux de muon. Ainsi il sera possible de générer toutes sortes de configurations de simulation différentes.

Afin de créer des images, la dernière étape de l'algorithme consiste à écrire dans deux fichiers, les valeurs de  $L_{rad}$  et de  $Z$ . Ces fichiers pourront ensuite être lus par un logiciel permettant la visualisation et le traitement des images. Le logiciel que nous avons utilisé est ImageJ. Il permet de visualiser des images en 3 dimensions sous la forme de coupes. Les coupes de nos images sont réalisées suivant la coordonnée  $z$ . Le nombre de coupes correspond au nombre total de voxel dans cette direction verticale. Une fois le programme opérationnel, il suffit de lancer une simulation sous Geant4 puis d'exécuter notre programme afin de réaliser la reconstruction de l'image.

### 3.4 L'imagerie par diffusion des muons réalisée avec PoCA

Pour étudier l'efficacité de l'algorithme PoCA, on utilise un spectre monochromatique de muons d'énergie égale à 3 GeV. La partie inférieure du dispositif qui mesure l'impulsion de la particule, n'a pas besoin d'être utilisée. Comme l'impulsion du muon est parfaitement connue, cette simulation ne nécessite que les 4 premiers détecteurs visibles sur le schéma de la figure 7. Des détecteurs de grandes dimensions sont utilisés afin de ne pas perdre d'information suite aux muons qui seraient trop déviés. Seuls des muons d'incidence verticale ( $\theta = 0^\circ$  par rapport à la verticale) sont générés. Ainsi les coordonnées d'intersection selon  $x$  et  $y$  normalement calculées par notre algorithme, peuvent être considérées égales aux coordonnées de départ (les déviations sont faibles). La position en  $x$  et  $y$  du voxel où se produit la déviation est donc connue dès l'impact du muon avec le premier détecteur. Avec une incidence nulle, l'épaisseur de matériau traversé  $L$  est directement égale à l'épaisseur de notre matériau. Une simulation avec 50000 muons est ensuite lancée. Tous les paramètres fixés pour cette simulation figurent sur le tableau 2.

Les résultats de cette simulation sont présentés en 3 séries d'image. Les volumes sont affichés comme une séquence de coupes selon la coordonnée  $z$  du volume. Pour chaque série, il y a autant d'images que de coupes suivant  $z$ . Le fantôme de l'image reconstruite avec PoCA est présenté sur la figure 3.4. Cette image correspond au cube d'uranium servant d'objet test pour cette simulation. D'après les paramètres de simulation donnés au tableau 2, l'uranium doit être composé de (5\*5\*5) voxels. L'uranium est centrée en 0, sur une image composée de (25\*25\*15) voxels, soit 15 images de (25\*25) voxels selon la coordonnée  $z$ .

Voici désormais les résultats de la reconstruction PoCA, exprimés en longueur de radiation pour chaque voxel. Ces résultats sont présentés sur la figure 15. Au niveau des niveaux de gris, plus le voxel

Paramètres de la simulation	Valeurs
Objet étudié	Cube d'uranium de $(20*20*20)$ cm <sup>3</sup> dans de l'air
Moment des muons	$p_E = 3$ GeV/c
Incidence des muons	Verticale
Volume de l'image	$(100*100*60)$ cm <sup>3</sup>
Taille du pixel	1 mm
Taille du voxel	$(4*4*4)$ cm <sup>3</sup>
Taille des détecteurs	$(200*200*1)$ cm <sup>3</sup>
Position sur l'image	Le matériau est centré en $(0,0,0)$

TAB. 2 – Paramètres de simulation d'un bloc d'uranium dans l'espace.

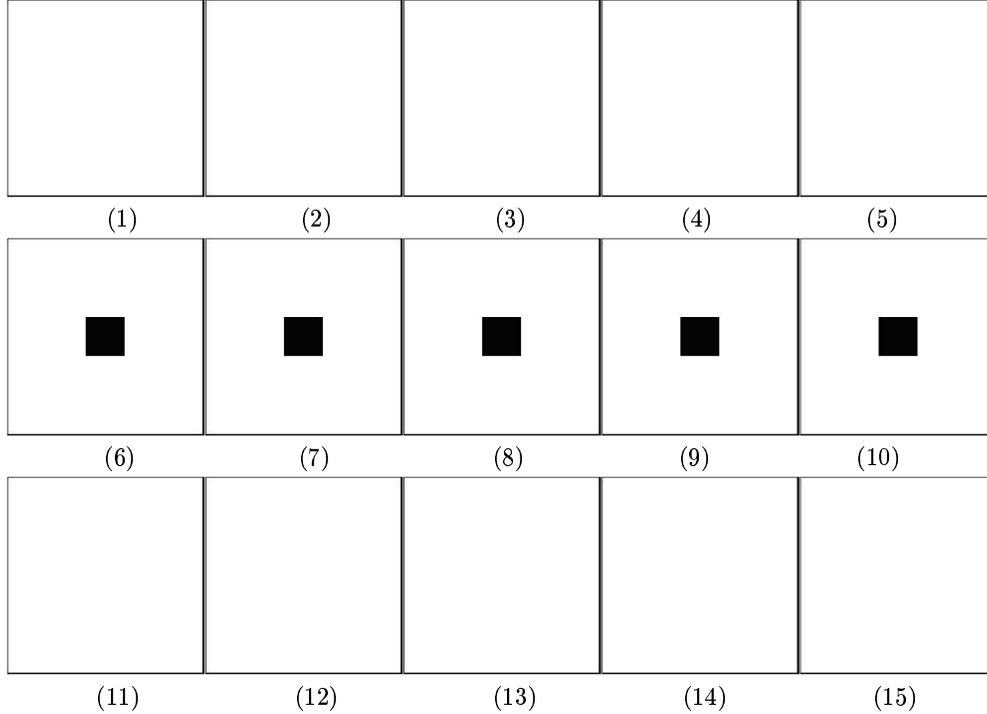


FIG. 14 – Coupes selon  $z$  du fantôme correspondant à un cube d'uranium servant à la simulation : en noir l'uranium, en blanc l'air.

est foncé plus la déviation est importante donc plus la longueur de radiation est faible. À la vue de ces résultats on s'aperçoit que la forme du cube d'uranium est globalement retrouvée. Mais les images représentant les coupes des plans  $z = 5$  et  $z = 11$  sont celles qui s'éloignent le plus de la réalité. De plus sur la coupe n°4, certains voxels sont grisés alors qu'ils ne sont plus directement en contact avec l'uranium. La localisation géographique est donc assez bonne suivant  $x$  et  $y$ , mais se dégrade suivant  $z$ . La valeur théorique de la longueur de radiation de l'uranium est de 0.32 cm. Pour vérifier la justesse de notre dispositif d'imagerie, on affiche les valeurs expérimentales de  $L_{rad}$  et son écart-type pour les voxels de chaque coupe ne contenant que de l'uranium. D'après le tableau 3, on voit très bien que les valeurs numériques trouvées ne correspondent pas à la réalité. La valeur expérimentale de  $L_{rad}$  s'étend de 0.44 cm à 1.61 cm. La longueur de radiation est sous évaluée pour toutes ces valeurs de longueur de radiation. Plus on se rapproche de la limite entre l'uranium et l'air, plus la mesure est sous évaluée. On va maintenant observer l'impact des résultats sur le numéro atomique correspondant.

Pour finir, la cartographie reconstruite en numéro atomique  $Z$  est réalisée d'après la classification donnée au paragraphe (3.3.2). Cette classification est capable de séparer le numéro atomique en 4 classes

distinctes. Un code des couleurs est utilisé pour la classification du numéro atomique. Ce code des couleurs présenté sur la figure 17 restera identique pour toute la suite de cette étude. La couleur noire représente les matériaux à  $Z$  lourds (uranium, plomb), le gris foncé représente les matériaux à  $Z$  moyen (fer, cuivre) et le gris clair représente les matériaux à  $Z$  léger (aluminium, liquides). La couleur blanche apparaît aussi lors de l'absence de matériau. C'est le cas lorsque nous serons placé dans le vide ou dans un gaz comme par exemple l'air qui possède des longueurs de radiation qu'il est impossible de distinguer car la déviation est inexistante. Les résultats sont présentés sur la figure 16 pour le cube d'uranium. On observe les mêmes dérives. Ceci est tout à fait normal car le numéro atomique ne dépend que de la longueur de radiation.

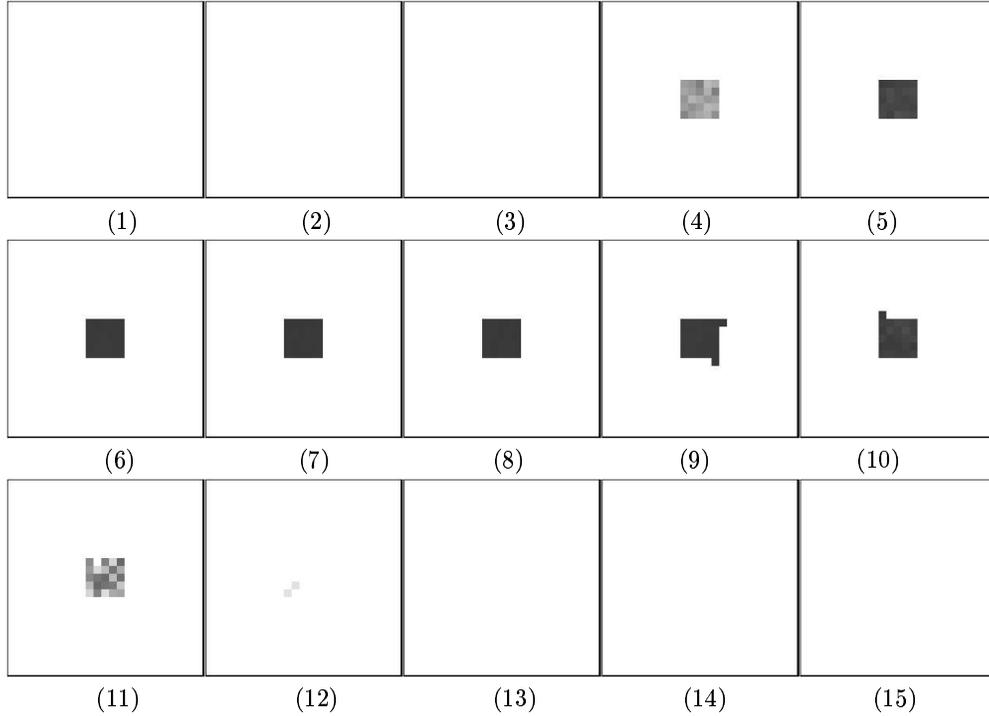


FIG. 15 – Reconstruction PoCA selon la longueur de radiation d'un cube d'uranium vue en coupe. Visualisation de  $L_{rad}$  en niveaux de gris.

Numéro de l'image	Valeur moyenne De $L_{rad}$ (en cm)	Écart-type de $L_{rad}$ (cm)
6	0.777068	0.187240
7	0.439952	0.064516
8	0.477374	0.077492
9	0.872035	0.258293
10	3.143736	1.607139

TAB. 3 – Valeur moyennes de  $L_{rad}$  reconstruites par PoCA pour le bloc d'uranium. La valeur théorique est de 0.32 cm.

Ces mauvais résultats viennent en partie du fait que pour l'algorithme PoCA, on considère qu'il n'y a qu'un seul événement qui va dévier la trajectoire. Les autres voxels traversés situés en amont et en aval sont eux mis à zéro. En mettant ces voxels à 0, on entraîne une sous-évaluation de la déviation standard moyenne et donc une surévaluation de la longueur de radiation.

Ce sont les voxels suivant  $z$  qui sont le plus touchés par l'hypothèse faite par PoCA. En effet lorsque la déviation est très faible, le point d'approche le plus près peut se situer sur une coordonnée  $z$  très

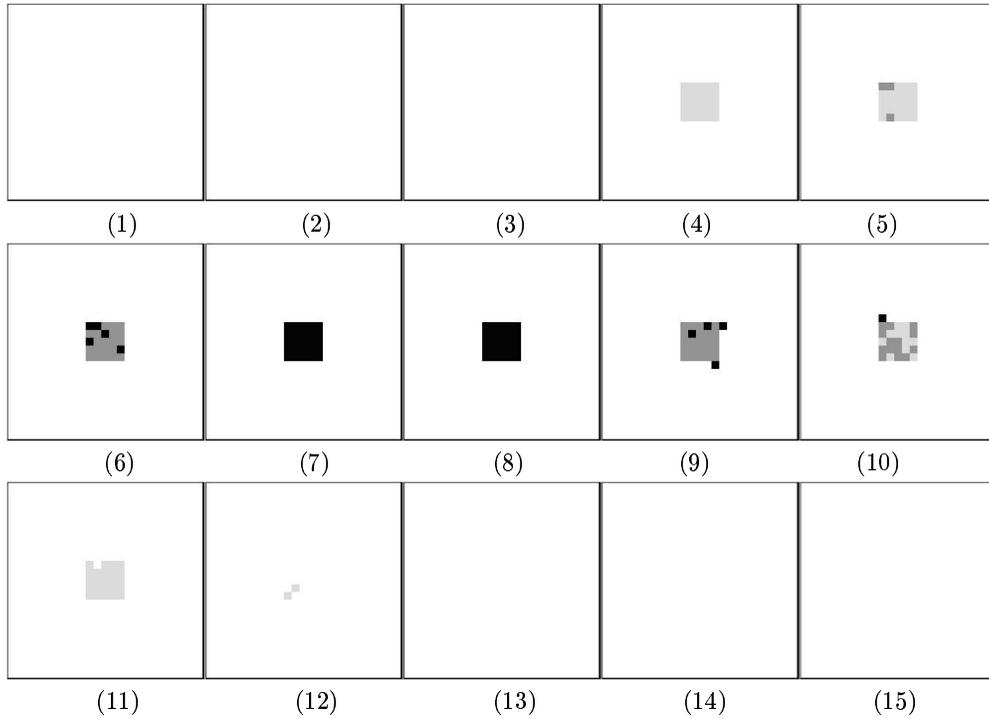


FIG. 16 – Classification en  $Z$  par reconstruction PoCA du cube d’uranium (série de vue en coupes selon  $z$ ).

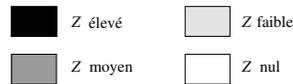


FIG. 17 – Légende des couleurs de la classification en  $Z$ .

loin du matériau. En effet lorsque 2 droites sont presque parallèles, il est très difficile de déterminer son point d’intersection. De plus, il faudrait une très bonne précision des détecteurs. Ainsi environ 10% de l’information est perdue car le point d’intersection selon  $z$  est en dehors du volume de l’image. PoCA ne prend pas en compte ces très faibles déviations. Or, on sait que la déviation moyenne à travers un matériau est de moyenne nulle, ce qui fait que l’on néglige les très faibles déviations alors qu’elles sont majoritaires. Pour finir, nous nous sommes placés dans des cas très simplifiés. On voit que même dans des conditions favorables (impulsion du muon connue, incidence verticale) il est difficile d’obtenir des résultats satisfaisants.

À la vue de ces résultats, il est possible d’affirmer que l’algorithme PoCA n’est pas très fiable. C’est pourquoi, par la suite nous décidons de ne réaliser que de la radiographie. Nous allons ainsi pouvoir supprimer tous les problèmes liés à la coordonnée  $z$  sans limiter la portée de notre réflexion quant à la faisabilité et au cahier des charges du système d’imagerie par diffusion muonique. Pour la radiographie, le programme est modifié dans le sens où l’on va s’intéresser qu’à une seule rangée horizontale de voxel. En utilisant la radiographie, nos simulations vont être plus fiables. Désormais, il est possible de confronter les résultats analytiques obtenus et de relaxer certaines hypothèses pour établir la sensibilité du système d’imagerie aux différents paramètres. C’est l’objet de ce dernier chapitre.

## 4 Confrontation des résultats du modèle analytique et de la simulation

Au cours de ce chapitre, les résultats des calculs statistiques réalisés au chapitre 2 vont être comparés avec les résultats de différentes simulations. Le premier objectif de cette confrontation est de vérifier que tous les termes qui forment la relation 51 exprimée au chapitre 2 évoluent convenablement avec la variance de  $L_{rad}$ . On rappelle cette formule finale donnant la variance de la longueur de radiation.

$$\text{Var}[L_{rad}] = L_{rad}^2 \frac{1}{N} \left( 1 + \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta_Z^2 \theta_0^2|_{p=p_E}} \right)^2 \frac{2P-1}{2(P-2)} \quad (57)$$

Dans cette relation, les grandeurs  $\theta_0$  et  $L_{rad}$  sont des constantes pour un matériau donné. La dépendance de chaque variable ( $N$ ,  $P$ ,  $l_{pixel}$ ,  $\Delta_Z$ ) sera étudiée dans ce chapitre. Par exemple, le nombre  $N$  de muon par voxel devra évoluer de manière inversement proportionnelle à la variance de  $L_{rad}$ . Les différents tests permettant de valider nos résultats statistiques avec les résultats de simulation vont tout d'abord être présentés. Ensuite, un cas concret matérialisant un container de dimension standard sera étudié, où de nombreuses images appuieront nos résultats.

### 4.1 Présentation du dispositif et des conditions de simulation

Durant toute la durée de ces tests, nous allons maintenir constant certains paramètres de simulation. Cela permet de ne pas observer de dérives conséquentes à une modification de l'environnement ou d'un paramètre qui agirait de manière néfaste sur nos résultats. Ces paramètres vont rester valables pour toutes les simulations nécessaires à la validation de notre modèle statistique.

En premier lieu, les muons vont tous être générés avec une incidence nulle par rapport à la verticale. Cette particularité nous permet de ne pas perdre trop d'information avec les muons de grande incidence. Les dimensions du volume de l'image sont maintenues à  $(1000*1000*600)$  mm<sup>3</sup>. Le matériau est centré en  $O(0,0,0)$  dans le plan médian du volume image. Ses dimensions restent toujours identiques à  $(360*360*40)$  mm<sup>3</sup>. Chaque voxel de forme cubique mesure 40 mm de côté. Ainsi le volume image est constitué de  $25*25*15$  voxels et le matériau de  $9*9$  voxels. Sur la vue en coupe, chaque carré représente un voxel. La figure 18 illustre ces caractéristiques.

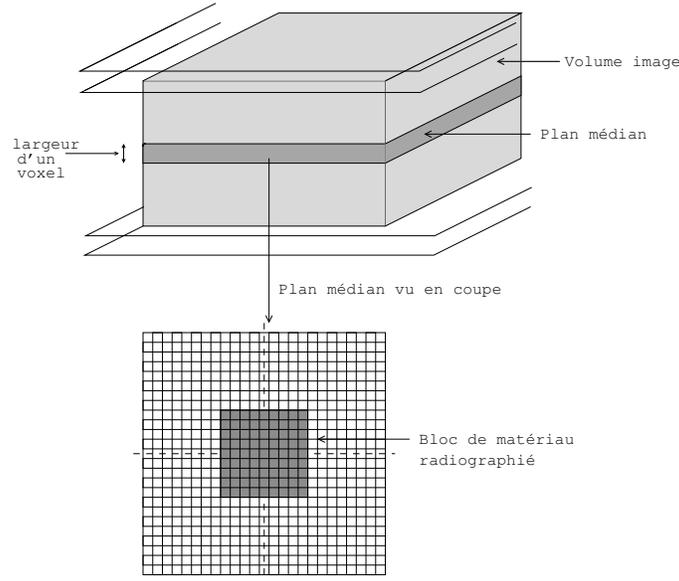


FIG. 18 – Présentation du dispositif utilisé pour nos simulations.

Comme on réalise de la radiographie, les images sont présentées en deux dimensions. L'épaisseur du matériau à laquelle on va s'intéresser, représente la largeur du voxel. Pour commencer, le premier test consiste à étudier trois matériaux différents, pour retrouver par la simulation, des valeurs de  $\theta_0$  proches de leurs valeurs théoriques.

## 4.2 L'approximation Gaussienne de la déviation standard

On rappelle la formule 5 énoncée au premier chapitre, applicable lorsque les fortes déviations sont négligées.

$$\theta_0 \cong \frac{15}{p} \sqrt{\frac{L}{L_{rad}}} \quad [10] \quad (58)$$

Cette approximation Gaussienne est valable pour environ 98% des déviations les plus faibles. Lors de notre étude de simulation, si l'on prend en compte toutes les déviations, la valeur trouvée pour  $\theta_0$  est supérieure à sa valeur théorique. En enlevant 2% des déviations les plus fortes on remarque que pour certains matériaux, les valeurs de  $\theta_0$  données par notre algorithme sont inexactes.

On étudie alors les résultats de 4 matériaux différents. En réalité, on recherche le pourcentage de fortes déviations à négliger afin d'obtenir une valeur de la déviation standard proche de la réalité. L'étude de ces pourcentages va de 95 à 99%. Le tableau 4 expose les résultats obtenus.

Matériau	$\theta_0^2$ théorique (mrad <sup>2</sup> )	$\theta_0^2$ (mrad <sup>2</sup> ) selon le pourcentage de muons compté				
		99%	98%	97%	96%	95%
uranium	312,50	389,87	359,89	336,62	318,04	302,26
plomb	178,57	220,16	201,76	189,65	180,37	172,74
fer	56,82	64,80	58,59	54,77	51,94	49,69
aluminium	11,24	10,91	9,93	9,30	8,84	8,47

TAB. 4 – Pourcentage de déviation à prendre en compte pour la recherche de  $\theta_0^2$ .

Ces résultats de simulation sont donnés pour des muons possédant tous une énergie égale à 3 GeV et un rapport  $\frac{l_{pixel}}{\Delta z} = \frac{1}{1000}$ .

On voit d'après sur le tableau 4, que le pourcentage de faibles déviations à prendre en compte est satisfaisant lorsque la valeur de  $\theta_0^2$  expérimentale correspondante est proche de la valeur théorique. Ce pourcentage dépend de la nature du matériau traversé. Il est d'environ 96% pour les éléments lourds, 98% pour les éléments à  $Z$  moyen et 99% pour les éléments légers. Ces valeurs de pourcentage constituent un étalonnage préalable. Il sera nécessaire par la suite ; car pour donner les valeurs correctes de l'intervalle de confiance il est obligatoire d'avoir une valeur correcte de  $\theta_0^2$ . Il serait également possible de seuiller directement l'angle de diffusion, typiquement au delà de 10°, et d'apprécier si le seuillage en angle est moins sensible que le seuillage en pourcentage de la population.

Nous allons désormais nous intéresser à l'impact de  $N$  sur la variance de  $L_{rad}$ . Il représente un paramètre très important pour la suite.

## 4.3 L'intervalle de confiance en fonction du nombre de muons analysés

$N$  représente le nombre de muon comptabilisé par voxel. Sachant que le flux de muons est uniforme, si l'on connaît le nombre total de muons qui vont traverser le volume ainsi que le nombre total de voxel, il sera facile de déterminer  $N$ . Pour étudier son évolution, on se place dans le cas où le moment est parfaitement connu. L'impulsion  $p$  est fixée à 3 GeV/c et le rapport  $\frac{l_{pixel}}{\Delta z}$  à une valeur très faible pour ne pas interférer sur la mesure. Alors, la variance de  $L_{rad}$  s'exprime par la relation (49) établie au chapitre 2.

$$\text{Var}[L_{rad}] = L_{rad}^2 \frac{1}{N} \left( 1 + \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta z^2 \theta_0^2} \right)^2 \quad (59)$$

Trois simulations différentes sont réalisées : une première avec un bloc d'uranium, une seconde avec un bloc de plomb et une troisième avec un bloc de fer. Les écarts type analytiques et simulés sont

Nombre de muons	U( $L_{rad}=0,32$ cm)		Pb( $L_{rad}=0,56$ cm)		Fe( $L_{rad}=1,76$ cm)	
	$\sigma$ ana	$\sigma$ sim	$\sigma$ ana	$\sigma$ sim	$\sigma$ ana	$\sigma$ sim
600	0,018	0,018	0,032	0,030	0,104	0,132
250	0,029	0,032	0,051	0,052	0,162	0,254
120	0,041	0,044	0,072	0,070	0,228	0,286
60	0,058	0,067	0,102	0,109	0,322	0,357
12	0,131	0,163	0,229	0,268	0,719	1,893
6	0,185	0,145	0,323	0,198	1,016	0,757

TAB. 5 – Écart type de  $L_{rad}$  pour 3 matériaux en fonction de  $N$ .

donnés dans le tableau 5. Pour chacun des matériaux, les pourcentages de muons pris en compte sont les suivants : 98% pour le fer et 96% pour l'uranium et le plomb.

Pour se rendre compte de l'évolution du nombre  $N$ , 2 graphiques représentant l'intervalle de confiance sur  $L_{rad}$  en fonction du nombre de muon par voxel sont tracés. L'intervalle de confiance sur la longueur de radiation est donné à 2 sigmas près. Cela correspond à un niveau de confiance de 95,4%. Le premier graphique représente les résultats analytiques donnés par les calculs d'incertitudes. Le second expose les résultats obtenus par simulation.

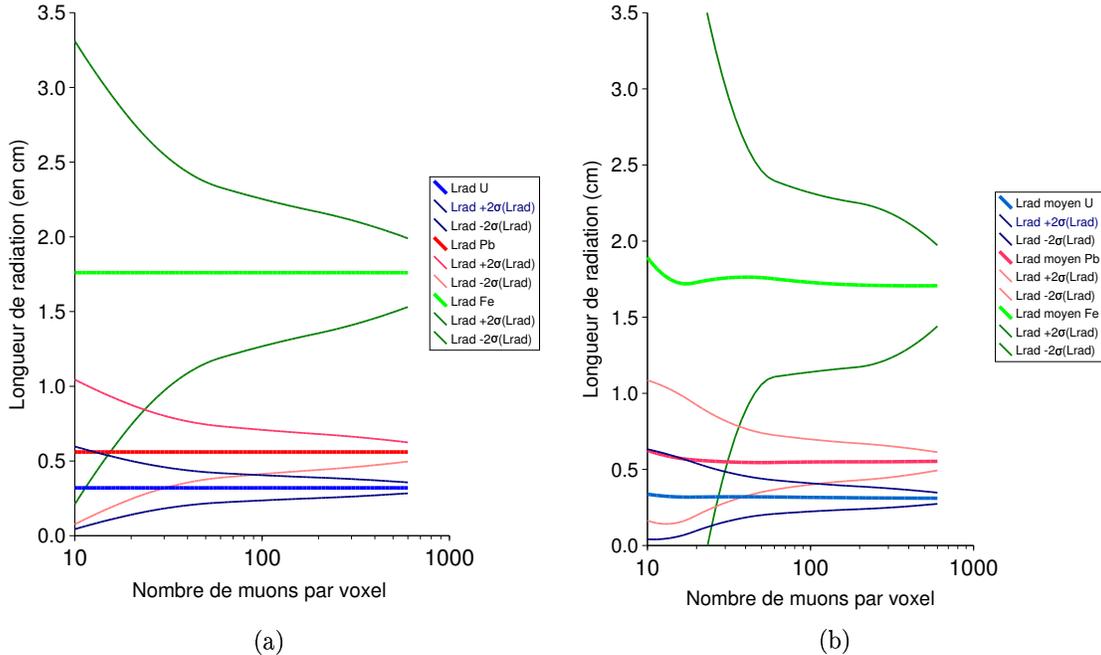


FIG. 19 –  $L_{rad}$  avec les intervalles de confiance analytiques (a) et simulés (b) pour 3 matériaux.

Sur ces deux figures, l'axe des abscisses est mis en échelle logarithmique. On voit que les allures simulées et analytiques sont assez proches pour un le nombre de muon supérieur à 50 muons par voxel. Comme  $\sigma[L_{rad}]$  dépend directement de  $L_{rad}$ , il est normal que  $\sigma[L_{rad}]$  augmente lorsque  $L_{rad}$  augmente. Pour  $N < 50$ , les intervalles de confiance s'élargissent fortement. De plus, la valeur trouvée pour  $L_{rad}$  jusque là très proche de la valeur analytique se dégrade. Mais pour  $N > 50$ , les valeurs des écarts type analytiques et simulés sont assez proches. La dépendance en  $\frac{1}{N}$  est vérifiée lorsque  $N$  est supérieure à cette valeur critique proche de 50. En dessous de celle-ci, la simulation ne paraît pas capable de séparer les matériaux à  $Z$  élevé et  $Z$  moyen. Il est possible de conclure que la précision suffisante pour séparer les éléments en 3 classes est atteinte à partir de  $N \cong 50$ . On remarque aussi que pour un nombre  $N > 200$ , le plomb et l'uranium peuvent être différencier alors qu'ils appartiennent à une même classe.

Ce nombre  $N$  est important car c'est lui qui va conditionner la durée d'acquisition des images dans un

dispositif réel. Nous allons maintenant étudier l'évolution de la taille du pixel sur l'intervalle de confiance de  $L_{rad}$ .

#### 4.4 L'intervalle de confiance en fonction du rapport $l_{pixel}/\Delta_Z$

La première étape consiste à observer si le rapport  $l_{pixel}/\Delta_Z$  évolue de la même façon lorsque les termes  $l_{pixel}$  et  $\Delta_Z$  sont multipliés par un même coefficient. Pour cela, on choisit un rapport  $l_{pixel}/\Delta_Z$  de  $\frac{1}{1000}$  et l'on observe si la variance de  $L_{rad}$  reste la même. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

$l_{pixel}$ et $\Delta_Z$ (en mm)	$\sigma[L_{rad}]$	$\sigma[L_{rad}]$ théorique
$l_{pixel} = 1 \Delta_Z = 1000$	0,0184	0,0185
$l_{pixel} = 0,1 \Delta_Z = 100$	0,0179	0,0185
$l_{pixel} = 5 \Delta_Z = 5000$	0,0182	0,0185

TAB. 6 – Évolution de  $\sigma[L_{rad}]$  lorsque le rapport  $l_{pixel}/\Delta_Z$  reste identique.

Ce tableau montre très bien que les termes  $l_{pixel}$  et  $\Delta_Z$  évoluent de façon identique. En effet la valeur de  $\sigma[L_{rad}]$  est quasiment la même pour ces trois simulations.

Ainsi, nous pouvons maintenant étudier uniquement l'influence de la taille du pixel sur la variance de  $L_{rad}$ . Il n'est plus nécessaire d'étudier l'influence de  $\Delta_Z$  sur  $\sigma[L_{rad}]$ . Pour ce test, on choisit une valeur de  $\Delta_Z$  constante égale à 1000 mm. La taille du pixel va évoluer de 0,1 à 100 mm. Pour que les autres paramètres n'influencent pas les résultats de notre test, on se place dans le cas où les muons ont tous une impulsion égale à 3 GeV et sont générés en un même point. De plus, le nombre de muons est grand pour ne pas interférer avec la mesure. Le matériau utilisé pour cette simulation est le fer. Les résultats de cette simulation sont présentés sur la figure 20.

On remarque que la valeur critique de la courbe analytique se situe autour d'une valeur de pixel de 2 mm. Pour la courbe simulée, cette valeur est plus élevée mais on observe une dérive de la valeur calculée de  $L_{rad}$ . À partir de  $l_{pixel} = 5$  mm, la fluctuation se dégrade fortement.

Les intervalles de confiance donnés par ces deux modèles restent proches pour des rapports  $l_{pixel}/\Delta_Z < \frac{1}{200}$ . Ensuite ils ne sont plus comparables. Ce modèle présente donc, comme pour le nombre de muons par voxel, un cas limite. Ce point sera étudié dans la dernière partie de ce chapitre. Quoi qu'il en soit, d'après ces deux modèles, ce dispositif d'imagerie paraît capable de différencier les 3 classes de matériaux pour un rapport  $l_{pixel}/\Delta_Z = \frac{1}{500}$ .

Dans la suite nous allons tester l'influence de la mesure de l'énergie sur nos résultats statistiques. En effet pour l'instant nous avons travaillé à impulsion  $p$  connue. Or le fait de mesurer cette impulsion augmente l'intervalle de confiance sur la mesure de la longueur de radiation. Différents tests relatifs à la mesure du moment vont désormais être réalisés.

#### 4.5 Réalisation et confrontation de plusieurs tests prenant en compte la mesure du moment

Dans cette partie, nous allons étudier l'importance de la mesure du moment sur l'intervalle de confiance de la longueur de radiation. Dans un premier temps, nous allons voir si la mesure de l'impulsion de la particule est réellement nécessaire. En effet, connaissant l'énergie moyenne de la particule, il est peut être possible de déterminer la longueur de radiation du matériau traversé.

##### 4.5.1 Détermination de $L_{rad}$ lorsque l'impulsion $p$ n'est pas mesurée

Pour cette étude de simulation, on se place dans le cas où l'impulsion moyenne du muon est connue est égale à 3 GeV. En revanche, les impulsions de chaque particule sont inconnues. Le spectre des muons est polychromatique de moyenne 3 GeV. On réalise un Dirac de muons (cela signifie que les muons sont tous générés en direction du point  $O(0,0)$  de notre dispositif) sur un bloc de fer. Comme il n'y a qu'un seul voxel concerné, il est possible de réaliser des simulations très rapides avec un nombre  $N$  important.

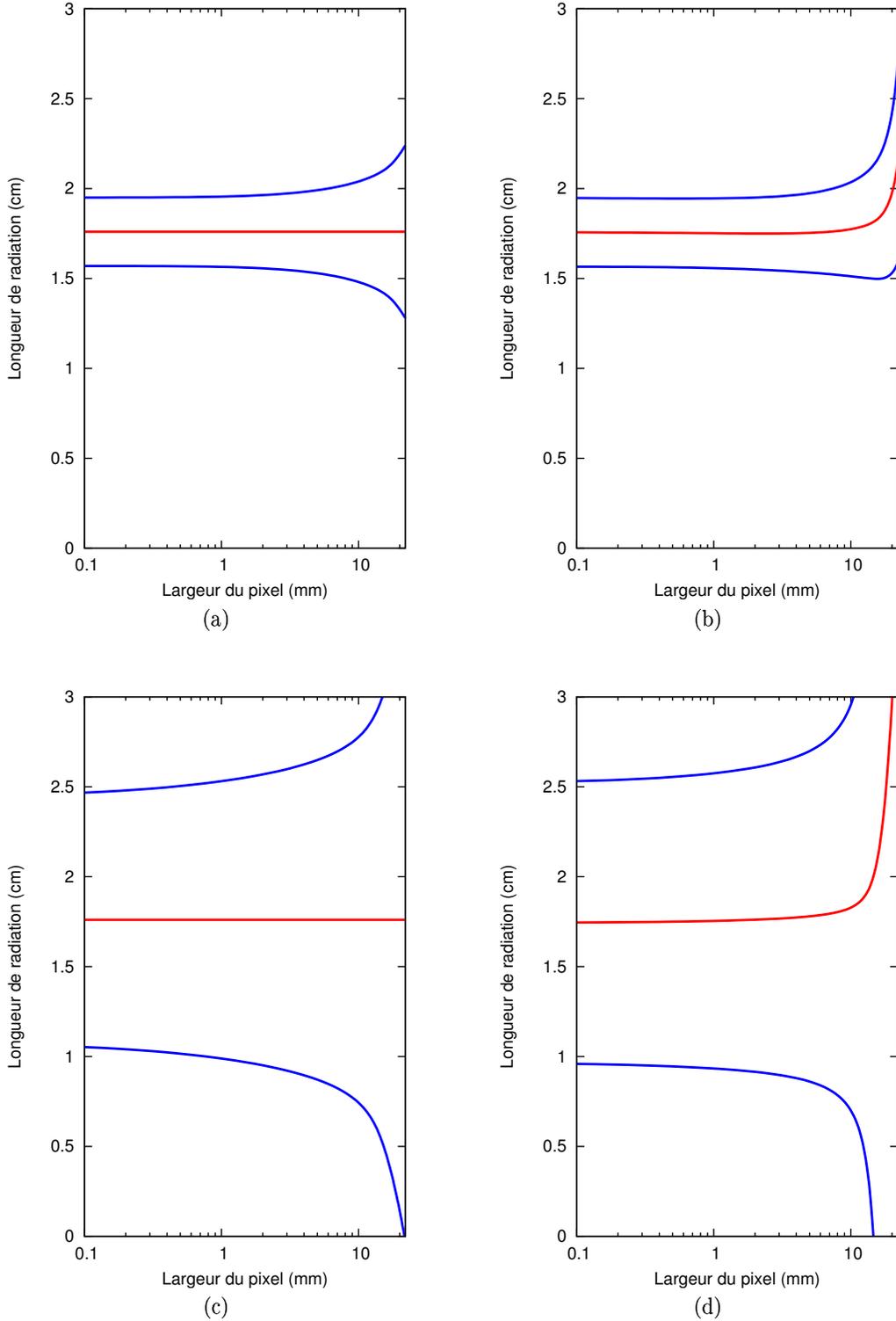


FIG. 20 – Évolution de l'intervalle de confiance à 2 écarts-types analytique (a) (c) et simulé (b) (d) en fonction de la taille du pixel du détecteur avec  $N = 700$  muons par voxel pour (a) (b) et  $N = 50$  pour (c) (d), muons de 3 GeV, plaque en fer de 4 cm d'écart-type de diffusion Coulombienne  $\theta_0 = 7.54$  mrad.

La formule utilisée pour déterminer la longueur de radiation est la suivante :

$$L_{rad} = \frac{15^2 L}{p_0^2 \theta_0^2} \quad (60)$$

$L$  correspond à la largeur du voxel soit 40 mm et  $\theta_0^2$  est donné par notre algorithme. Trois différents spectres de muons sont générés par Geant4. Ils sont générés de manière uniforme. Le rapport  $l_{pixel}/\Delta_Z$  est égal à  $\frac{1}{1000}$ . Les résultats sont consignés dans le tableau 7.

Flux	$L_{rad}$ exp	$L_{rad}$ th	Paramètres
2-4 GeV	1,57 cm	1,76 cm	$N = 1000(\text{Dirac})$
1-5 GeV	1,10 cm	1,76 cm	$p_0 = 3 \text{ GeV}$
0,1-5,9 GeV	0,54 cm	1,76 cm	$\frac{l_{pixel}}{\Delta_Z} = \frac{1}{1000}$

TAB. 7 – Valeurs de  $L_{rad}$  simulées et analytiques avec différents spectres de moyenne 3 GeV.

On voit sur ce tableau que les valeurs de longueur de radiation que l'on trouve sont en dessous de la valeur réelle de  $L_{rad}$ . Plus l'étendue énergétique du flux de muon devient importante, plus la valeur de  $L_{rad}$  donnée par la simulation se dégrade. Ceci provient du pourcentage de fortes déviations que l'on exclut. En effet, comme le matériau traversé est un bloc de fer, il est nécessaire de ne prendre en compte que 98% des déviations les plus faibles. Or on sait que plus l'énergie du muon est faible, plus il sera dévié. C'est pourquoi, notre algorithme va en réalité supprimer toutes les déviations des muons de faible énergie. Ces déviations supprimées ne sont pas nécessairement trop importantes vis à vis de l'énergie du muon dévié. C'est la raison pour laquelle, si l'on ne prend pas en compte l'énergie de chaque muon lorsque l'on mesure  $L_{rad}$ , nos mesures vont forcément être faussées par ce mauvais tri. Lorsque l'on ne connaît pas l'énergie des muons traversant l'objet à radiographier, il est impératif de mesurer chaque énergie pour l'incorporer à la valeur de déviation correspondante. Cela correspond à la variable que l'on a défini précédemment avec :

$$S_i = \theta_{0i}^2 \frac{p_i^2}{p_E^2} \quad (61)$$

Afin de s'assurer que la partie inférieure mesure correctement l'impulsion de chaque particule, un cas simple de simulation est étudié.

#### 4.5.2 Recherche de la mesure du moment

Le but de ce test est de déterminer si notre dispositif est capable de retrouver le moment de chaque muon traversant le dispositif. Pour cela on génère un spectre monochromatique de muon de 3 GeV et l'on observe les résultats de la mesure du moment. Le moment est mesuré par la formule ?? de l'approximation Gaussienne. Or il n'est pas possible de supprimer 2% des fortes déviations que le muon va subir lorsqu'il traverse les plaques de fer situées à la sortie du dispositif. En effet, pour cela il faudrait effectuer 50 mesures de déviations puis enlever la plus forte. Comme chaque déviation à l'intérieur des plaques de fer est comptabilisée, on observe une surévaluation de la déviation moyenne pour un muon ce qui sous-évalue l'impulsion de chaque particule.

Le test que nous allons réaliser consiste à générer 1000 muons d'énergie 3 GeV à travers les sandwiches de fer en mesurant leur impulsion. On regarde ensuite combien de muons vont devoir être comptabilisés pour le calcul de l'impulsion moyenne afin d'en retrouver une valeur bien égale à 3 GeV, on regarde combien il faut en prendre en compte si l'on veut retrouver une valeur correcte de l'impulsion. Ceci est réalisé pour  $P = 3$ ,  $P = 4$ ,  $P = 5$  mesures de déviations pour chaque muon incident. Les résultats sont présentés dans le tableau 8.

Plus le nombre  $P$  de plaques de fer est important, plus le nombre de muons à supprimer est grand. Ceci est logique car plus on rajoute de plaques de fer, plus le risque qu'un muon soit très fortement dévié augmente. Une seule forte déviation peut modifier considérablement la mesure de  $p$ .

Ce tableau nous conforte encore plus dans l'idée qu'il est nécessaire de réaliser un tri sur la variable  $S_i = \theta_{0i}^2 p_i^2 / p_E^2$  qui prend en compte la corrélation entre la valeur de la déviation et la valeur de l'énergie.

Nombre de plaques de fer	Pourcentages pris en compte
P = 3	90%
P = 4	86%
P = 5	80%

TAB. 8 – Pourcentages de faibles déviations à prendre en compte pour retrouver la valeur juste du moment.

#### 4.5.3 Test sur le nombre de mesures de moment à prendre en compte

Étant donné les résultats des tests du paragraphe précédent, il est nécessaire de réaliser un étalonnage sur les pourcentages de  $S_i = \theta_{0,i}^2 p_i^2 / p_E^2$  à prendre en compte suivant le nombre de mesures de  $2P$ . En réalisant ce test sur plusieurs matériaux, nous allons savoir si ce pourcentage est différent d'un matériau à l'autre. Le tableau 16 récapitule les résultats de cet étalonnage pour deux matériaux (uranium et fer) sont décrits. Seules les cases où les pourcentages sont proches de la valeur à obtenir pour  $L_{rad}$  sont remplies. On rappelle les valeurs théoriques des longueurs de radiation du fer et de l'uranium :  $L_{rad,Fe} = 1.76$  cm et  $L_{rad,U} = 0.32$  cm.

Pourcentages de déviations comptabilisées	P = 3		P = 4		P = 5	
	$L_{rad}$ fer	$L_{rad}$ uranium	$L_{rad}$ Fe	$L_{rad}$ U	$L_{rad}$ Fe	$L_{rad}$ U
93%						
94%		0.329				
95%	1.848	0.311				
96%	1.750			0.319		
97%			1.787	0.338		0.334
98%			1.652		1.862	0.310
99%					1.675	

TAB. 9 – Étalonage des pourcentages de faibles déviations à prendre en compte pour l'uranium et le fer.

D'après les résultats de ce tableau on peut conclure sur les pourcentages à utiliser par la suite. Il suffit de regarder le pourcentage pour lequel on a un bon compromis de la valeur de  $L_{rad}$  retrouvée. Le tri selon  $S_i$  permet d'obtenir une assez bonne harmonisation des pourcentages pour ces deux matériaux. Lorsque  $P = 3$ , il faudra négliger 5% des fortes déviations, pour  $P = 4$ , il faudra en négliger 3% et pour  $P = 5$ , 2%. On ne s'est pas intéressé aux valeurs de  $P$  inférieures à 3 car d'après la formule (51) le nombre minimum de plaques de mesures du moment est de 3. Pour un nombre de plaques  $P$  supérieure à 5, le dispositif approprié (voir figure 7) serait vraiment trop encombrant.

Avec la réalisation de cet étalonnage, il n'est pas possible de vérifier l'évolution de la variance de  $L_{rad}$  avec le nombre de mesure du moment augmente. En effet, si l'on mesure les variances par la simulation en utilisant les pourcentages déterminés (95%, 97% et 98%), le cas où l'on néglige le plus de fortes déviations va favoriser l'écart type correspondant. À l'inverse, si l'on enlève très peu de fortes déviations la valeur de l'écart type restera élevé. C'est pourquoi, la dépendance de  $P$  dans la relation (51) ne sera étudiée que de façon visuelle, avec les images que nous présenterons par la suite. Maintenant nous allons tirer les conclusions de ces différentes confrontations

## 4.6 Conclusion de la confrontation entre l'étude analytique et la simulation de Monte Carlo

Les différents tests réalisés au cours de ce chapitre nous ont permis de d'étudier par la simulation l'évolution des différentes variables de l'expression suivante :

$$\text{Var}[L_{rad}] = L_{rad}^2 \frac{1}{N} \left( 1 + \frac{l_{pixel}^2}{3\Delta_Z^2 \theta_0^2|_{p=p_E}} \right)^2 \frac{2P-1}{2(P-2)} \quad (62)$$

La dépendance en  $\frac{1}{N}$  lors de nos différentes simulation s'avère conforme aux prédiction. Il existe toutefois une limite située aux alentours de  $N \cong 50$ . Lorsque le moment est connu, en dessous de cette valeur la discrimination en 3 classes n'est pas possibles. L'étude d'une situation réelle nous permettra de voir s'il en est de même lorsque le moment n'est pas connu.

La précision pour la résolution des détecteurs permettant une reconstruction correcte est de 2 mm. Mais il faudra étudier si la simulation dans un cas concret nous permet de d'augmenter cette résolution à 5 mm. En effet les résultats de simulations réalisés au paragraphe 4.4 laisse penser que cette taille de pixel serait suffisante

Selon les différents tests sur la mesures du moment, on peut affirmer que la mesure de l'impulsion de la particule est nécessaire pour la différenciation des matériaux d'un volume. Un étalonnage correspondant au tri de la variable  $S_i$  est aussi nécessaire pour les déviation à l'intérieur du volume radiographié. La simulation ne nous a pas permis de déterminer si le nombre de mesures du moment améliore notre précision. Il reste à savoir quel est le nombre minimal de plaques pour obtenir une précision convenable sur l'estimation de  $L_{rad}$ . Pour cela on va se placer dans un environnement contenant plusieurs types de matériaux puis regarder si les valeurs des différentes  $L_{rad}$  que l'on retrouve sont satisfaisante.

Dans la prochaine partie, un cas proche de la réalité va être étudié. Tous les résultats précédemment obtenus vont alors s'appliquer de façon concrète. Il s'agit d'un container contenant 6 types de matériaux différents.

## 4.7 Étude d'une situation réelle : la radiographie d'un container de taille standard

En utilisant la radiographie, des images en deux dimensions vont être réalisées. Elles permettront de visualiser la précision de nos simulations. Le container étudié, son contenu ainsi que le dispositif nécessaire vont maintenant être présentés.

### 4.7.1 Les caractéristiques du container et de son dispositif

Le container étudié est de taille standard soit : 6 mètres de longueur, 2.4 mètres de largeur et 2.4 mètres de hauteur. Le dispositif utilisé pour la radiographie se compose de détecteurs identiques qui sont plus larges que le container (8 mètres de longueur pour 4 mètres de largeur). Le volume que nous allons imager est légèrement plus grand que le container. Il représente  $(6,5*2,5*2,5) \text{ m}^3$ . Pour mesurer de l'impulsion de la particule, le dispositif se compose d'un nombre ajustable de plaques de fer en sortie pouvant aller jusqu'à 6 plaques. Les éléments présents à l'intérieur du container sont présentés suivant la classification de L. Schultz. Ainsi, lorsque  $L_{rad} < 0.7 \text{ cm}$  le voxel est affecté à un matériau à Z fort. Lorsque  $L_{rad}$  est comprise entre 0.7 cm et 3.0 cm le voxel est affecté à un matériau à Z moyen. Pour des valeur de  $L_{rad}$ , située entre 3.0 cm et 70.0 cm le voxel est affecté à un matériau à Z faible. Pour  $L_{rad} > 70.0 \text{ m}$  le numéro atomique est quasiment nul.

Ce container est composé de 6 matériaux différents. La longueur de radiation des 6 matériaux présents à l'intérieur du container ainsi que leur classification correspondante sont présentées dans le tableau 10. D'après ce tableau, on s'aperçoit d'ores et déjà que le plomb et l'argent possèdent des longueurs de

Matériaux	Longueur de radiation	Classification
uranium	0.32 cm	Z lourd
plomb	0.56 cm	Z lourd
argent	0.85 cm	Z moyen
fer	1.76 cm	Z moyen
aluminium	8.9 cm	Z faible
H <sub>2</sub> O	36.1 cm	Z faible

TAB. 10 – Longueur de radiation des différents matériaux présents à l'intérieur d'un container.

radiation proches alors qu'ils n'appartiennent pas à la même classe. Ils sont tous deux assez proches de la limite de la classification. Ce choix présente un intérêt important. En effet, arriver à séparer correctement ces deux classes de matériaux est très important pour notre étude. Ici l'argent est un matériau gênant dans

notre classification c'est pourquoi, il est important d'étudier s'il est possible de le séparer des éléments lourds.

Le fantôme du container que nous allons étudier par la suite est présenté sur la figure 21.

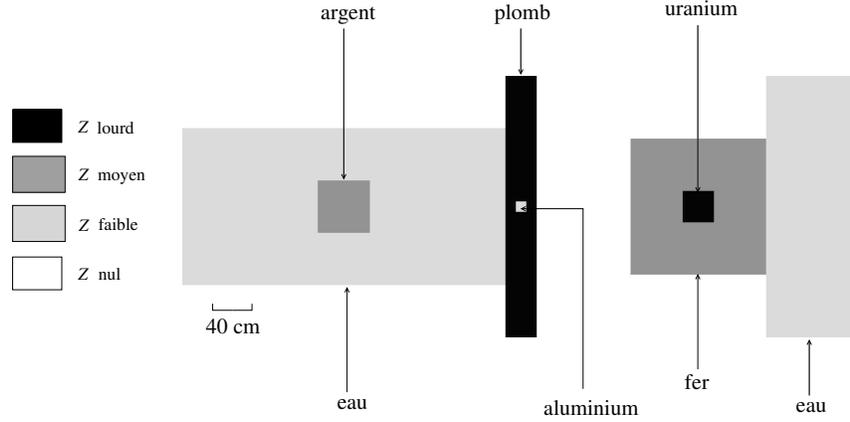


FIG. 21 – Image représentant le fantôme du container radiographié.

Ce fantôme nous donne l'aperçu des différents matériaux présents suivant la discrimination en  $Z$  des matériaux. Un bloc d'uranium est inclut dans du fer, ce qui peut représenter une configuration utilisée par des contrebandiers car on sait que les techniques actuelles n'arrivent pas à détecter ce cas de figure. Un minuscule bloc d'aluminium est aussi inclut dans du plomb.

L'épaisseur de tous ces matériaux correspond à l'épaisseur d'un voxel de  $(10*10*10)$  cm<sup>3</sup>. Les muons que nous utilisons possèdent tous une incidence verticale. Cela nous permet de perdre moins d'information et de réaliser des simulations contenant un nombre suffisant de muon plus rapidement. Le modèle de spectre que nous allons utiliser pour toutes les simulations a été implémenté dans Geant4, en utilisant le modèle mathématique du spectre des muons qui a été présenté au paragraphe 1.2.1 du premier chapitre. La composition du spectre utilisé est présenté sur la figure 22.

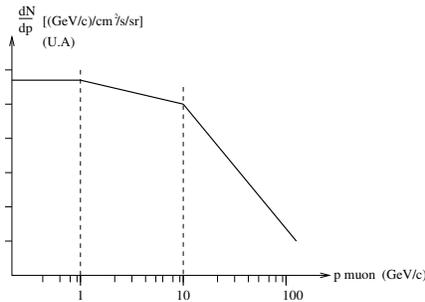


FIG. 22 – Modèle mathématique du spectre de muon développé au laboratoire.

Le modèle est plat pour des valeurs d'impulsion inférieures à 1 GeV/c, puis il décroît lentement jusqu'à 10 GeV/c, pour ensuite décroître selon  $p^{-2.7}$ . Il permet de se placer dans une situation réelle qui apporte plus de poids à nos simulations. Il utilise des particules dont l'énergie est comprise dans une large gamme d'énergie : entre 225 MeV et 100 GeV. Lorsque l'on lance une simulation sous Geant4 il est possible de visualiser en trois dimensions notre dispositif ainsi que les interactions des muons avec la matière. La figure 23 présente l'image de simulation.

On observe sur cette image, tous les éléments du dispositif. Les paires de détecteurs sont représentées en jaune. Elles sont distantes d'une hauteur de 1 mètre. Le volume image est situé entre les détecteurs 2 et 3. Dans son plan médian, il est possible de distinguer les différents matériaux présents dans le container. On distingue précisément l'imbrication des différents matériaux. À la sortie du dispositif, les

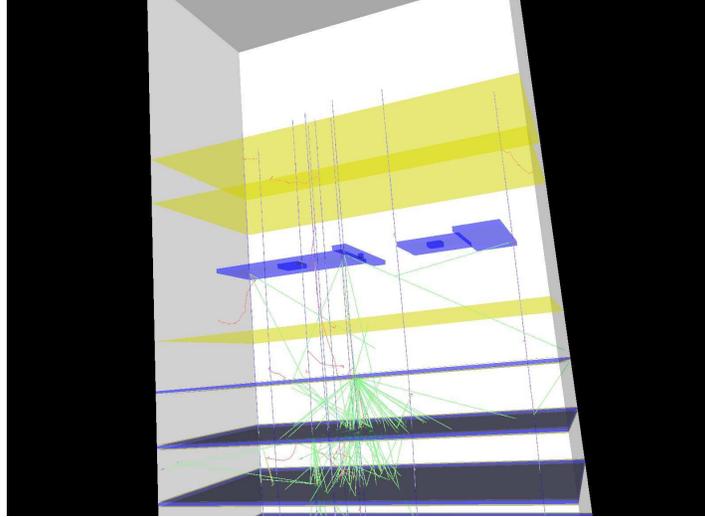


FIG. 23 – Visualisation de l’interaction des muons sur la configuration utilisée.

plaques de fer (en bleu) sont très proches des paires de détecteurs pour limiter l’encombrement. Les interactions des muons avec la matière sont aussi représentées. Les trajectoires des muons représentées en bleu sont très peu déviées par la matière. On observe aussi, la création de photons dont les trajectoires sont représentées en vert et la création d’électrons (trajectoires rouges). Toutes ces interactions ne sont générées que par 10 muons. La création de ces particules n’entre pas directement dans le contexte de notre étude. On étudie uniquement les déviations qui en résultent

Les différents résultats de simulation vont maintenant être présentés. Ils s’inscrivent dans la lignée des tests que réalisés jusqu’à présent et nous donnent un aperçu visuel d’un cas concret de radiographie.

#### 4.7.2 Résultats de l’évolution du nombre de muons par voxel sur un container

Avant chaque série d’images présentée, un tableau va décrire tous les paramètres de simulation qui sont utilisés. Pour ces premiers résultats nous allons visualiser sur une image l’évolution du nombre de muon par voxel. Les caractéristiques de ces simulations sont les suivantes :

Paramètres de simulation	Valeurs associées
Taille du voxel	$(10*10*10) \text{ mm}^3$
Volume image	$(6500*2500*2500) \text{ mm}^3$ soit $(65*25*25)$ voxels
Taille du pixel	$1 \text{ mm}^2$
Distance entre les détecteurs	1000 mm (identique entre chaque paire de détecteurs)
Nombre de plaques de fer	$P = 3$

TAB. 11 – État des caractéristiques de la simulation étudiant l’influence de  $N$ .

D’après les résultats trouvés au paragraphe 4.3, on va réaliser des simulations dans le domaine qui nous intéresse, c’est à dire entre 10 et 200 muons par voxel. Ainsi la dérive de la variance de  $L_{rad}$  sera observée sur des images.

L’évolution de la précision de la radiographie suivant le nombre de muon qui vont traverser le container est très claire sur ces images. Lorsque  $N = 200$ , mis à part quelques voxel très isolés, tous les éléments se distinguent parfaitement. Pour  $N = 100$ , le résultats est proche de l’image précédente. Pour selon que l’on a un facteur 2 entre le nombre de muon, la différence est faible entre ces deux images. Les seuls éléments qui posent quelques problèmes sont le plomb et l’argent. Ce résultat était attendu par le constat réalisé au paragraphe précédent. Tout de même, pour ces deux éléments, les résultats obtenus restent acceptables. Lorsque  $N = 50$ , le fer et l’uranium et l’aluminium se dissocient facilement. Par contre, pour

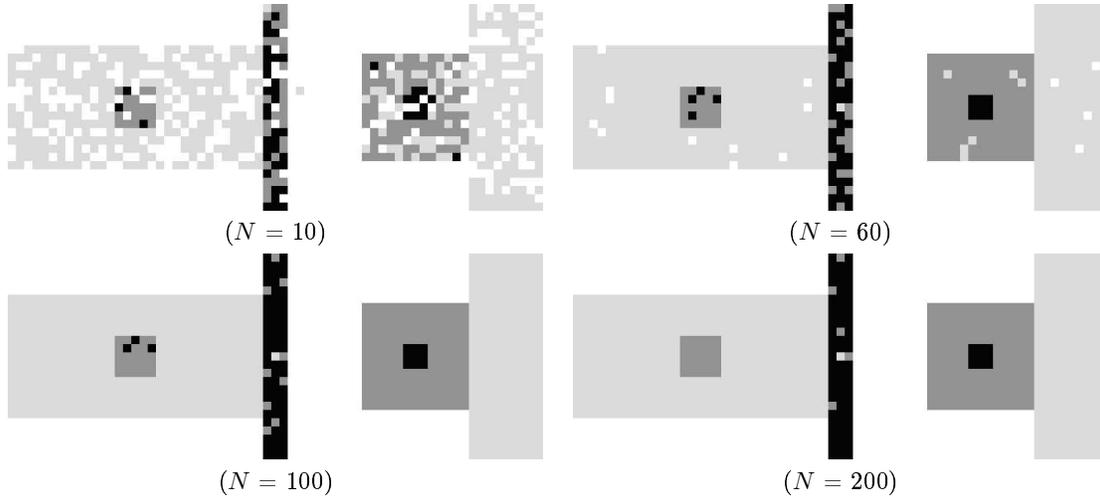


FIG. 24 – Visualisation de l'évolution de  $N$  sur la radiographie d'un container.

l'eau le plomb et l'argent, on commence à apercevoir de nombreux voxels qui ne correspondent pas à la classification. la discrimination devient compliquée pour ces éléments. Pour  $N = 10$ , la différenciation devient très difficile. On distingue très mal tous les éléments. de plus, on aperçoit même des voxels blancs à l'intérieur de l'uranium et du plomb. L'acquisition n'est pas fiable.

Ces résultats obtenus pour un container correspondent tout à fait aux affirmations du paragraphe 4.3.  $N = 100$  est suffisant pour séparer les 3 classes d'éléments et pour environ  $N = 50$ , on arrive à distinguer correctement le l'uranium, le fer et l'aluminium qui sont situés au milieu de leur classification respective. De plus cette image nous permet de voir que ce nombre  $N = 50$  n'est pas suffisant pour des éléments situé près des limites de classe.

Nous allons désormais étudier l'influence de la taille de pixel sur la détection de ces trois catégories.

#### 4.7.3 Résultats de simulation portant sur l'évolution du rapport $l_{pixel}/\Delta_Z$

Conformément à la démarche précédente, nous allons étudier les valeurs du rapport  $l_{pixel}/\Delta_Z$  qui nous intéressent. Les caractéristiques du dispositif utilisé sont consignées dans le tableau 13.

Paramètres de simulation	Valeurs associées
Taille du voxel	$(10*10*10) \text{ mm}^3$
Volume image	$(6500*2500*2500)\text{mm}^3$ soit $(65*25*25)$ voxels
Nombre de muons par voxel	100
Distance entre les détecteurs	1000 mm (identique pour chaque paire de détecteur)
Nombre de plaques de fer	$P = 3$

TAB. 12 – État des caractéristiques de la simulation étudiant l'influence de  $l_{pixel}$ .

D'après les résultats des images précédentes, il est judicieux de choisir  $N = 100$ . En effet, c'est le nombre satisfaisant pour une bonne reconstruction. C'est donc cette valeur que nous utiliserons dans nos futures acquisitions d'image. Le rapport  $l_{pixel}/\Delta_Z$  va évoluer de  $\frac{1}{1000}$  à  $\frac{1}{20}$ . Cela correspond à l'étendue dont on s'est intéressé au paragraphe 4.4. Les images obtenues sont présentées sur la figure 25.

D'après les résultats obtenus, on observe une dérive de la classification. Elle s'observe facilement pour le plomb. En effet, lorsque la taille du pixel augmente, les limites des classes ont tendance à évoluer. Cela s'observe facilement pour le plomb qui passe peu à peu dans la classe des éléments à  $Z$  moyen. L'argent, qui lui contenait au départ des voxels noirs, devient uniformément gris foncé à partir d'une taille de pixel de 4 mm. Globalement pour des tailles de pixel allant jusqu'à 5 mm il doit être possible d'observer des

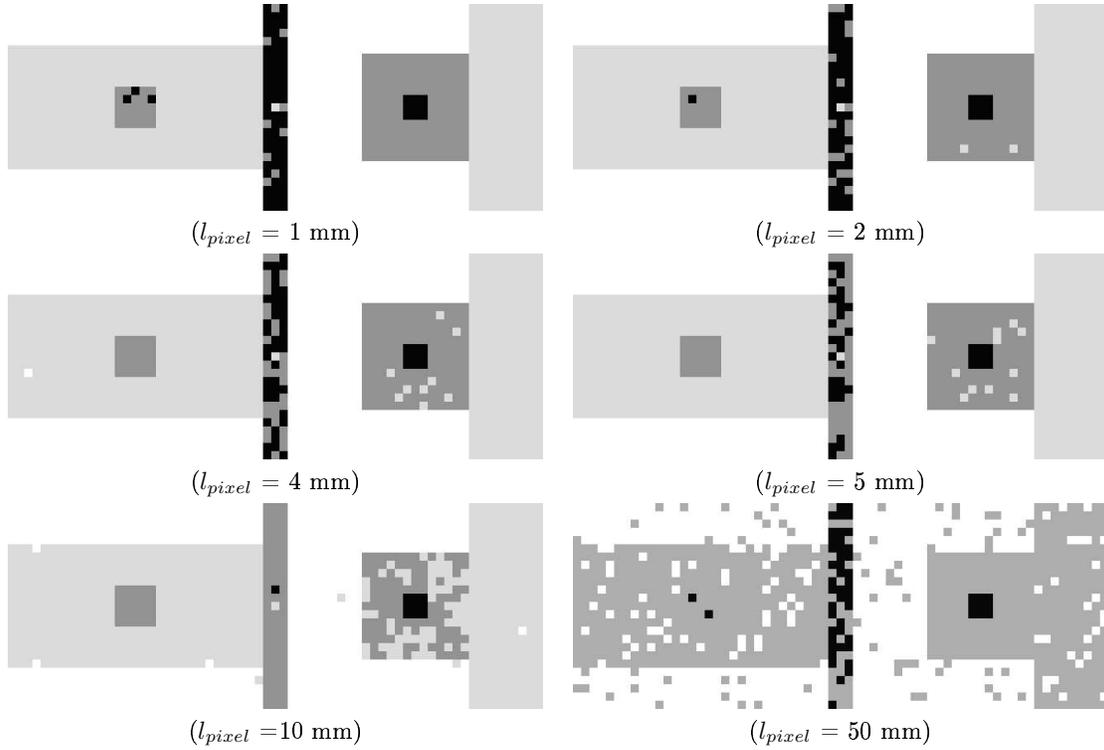


FIG. 25 – Visualisation de l'évolution de  $l_{pixel}$  sur la radiographie d'un container.

résultats satisfaisants. Ainsi, afin d'éviter la dérive causée par la taille de pixel, il doit être possible, avec un dispositif réel, de déterminer les seuils de détections appropriés aux caractéristiques du dispositif. Un étalonnage qui consisterait à radiographier des matériaux connus serait suffisant. À ce moment là, utiliser des détecteur de résolution de 5 mm avec une distance  $\Delta_Z = 1000$  entre les 2 détecteurs est tout à fait concevable. Cette caractéristique est très importante pour les détecteurs car il est aujourd'hui difficile de concevoir des détecteurs de grandes dimensions ayant une bonne résolution.

On peut aussi imaginer utiliser des seuils très serrés permettant de séparer le plomb et l'uranium. Déjà le graphique de la figure 24 a émis cette hypothèse pour un nombre de muons suffisamment élevé ( $N \cong 200$ ). Ainsi, cette simulation nous a permis de valider nos résultats sur un cas concret de simulation. Nous allons désormais étudier l'influence de la mesure du moment sur la précision des images.

#### 4.7.4 Résultats de l'évolution du nombre de mesures du moment sur un container

Les caractéristiques du dispositif utilisés sont consignées dans le tableau 13.

Paramètres de simulation	Valeurs associées
Taille du voxel	$(10*10*10) \text{ mm}^3$
Taille du pixel	$(5*5*5) \text{ mm}^3$
Volume image	$(6500*2500*2500) \text{ mm}^3$ soit $(65*25*25)$ voxels
Nombre de muons par voxel	100
Distance entre les détecteurs	1000 mm (identique pour chaque paire de détecteurs)

TAB. 13 – État des caractéristiques de la simulation étudiant l'influence de  $P$ .

Pour les mêmes raisons que précédemment on utilise  $N = 100$  et  $l_{pixel} = 5$  mm. Ce sont les deux caractéristiques optimales ; c'est à dire les valeurs minimales de  $N$  et  $l_{pixel}$  permettant d'obtenir une

bonne discrimination en  $Z$ , qui découlent des dernières images réalisées. La figure 26 expose les résultats obtenus.

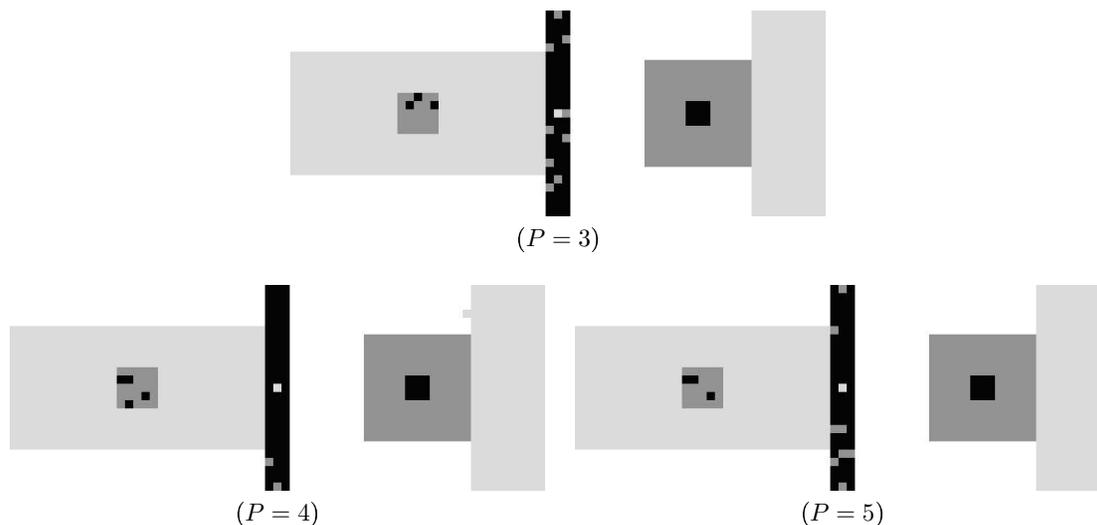


FIG. 26 – Visualisation de l'évolution de  $P$  sur la radiographie d'un container

D'après ces résultats, il est difficile d'affirmer que la précision s'améliore lorsque le nombre de mesures du moment augmente. Globalement, les images donnent l'impression d'une légère amélioration. Ceci correspond au constat réalisé au paragraphe 2.4. En effet, le facteur  $P$  qui évolue selon  $2P - 1/2(P - 2)$ , joue un rôle peu important par rapport aux autres variables qui sont  $N$  et le rapport  $l_{pixel}/\Delta_Z$ . la valeur  $P = 3$  plaques est donc suffisante pour déterminer l'énergie moyenne de chaque particule. Nous allons désormais faire évoluer la dimension du voxel de l'image.

#### 4.7.5 Résultats de l'évolution de la taille des voxels de l'image d'un container

Les caractéristiques choisies pour ces simulations sont déduites des résultats des précédents paragraphes. Il est primordial de se placer dans une configuration présentée comme minimale, mais assurant une bonne reconstruction. Les paramètres d'acquisition figurent dans le tableau 14.

Paramètres de simulation	Valeurs associées
Nombre de plaques de fer	$P = 3$
Taille du pixel	$(5*5*10) \text{ mm}^3$
Nombre de muons par voxel	100 et 50
Distance entre les détecteurs	1000 mm (identique pour chaque paire de détecteur)
Classification	B

TAB. 14 – État des caractéristiques de la simulation étudiant l'influence de la taille du voxel de l'image.

Trois tailles différentes de voxel sont étudiées et comparées. On utilise des voxels de  $(10*10*10) \text{ cm}^3$ ,  $(5*5*10) \text{ cm}^3$  et  $(2*2*10) \text{ cm}^3$ . La figure 27 affiche les résultats de ces simulations

Pour des tailles de voxel différentes, les mêmes paramètres donnent vraisemblablement les mêmes résultats. La différence provient de la précision visuelle de l'image en 2 dimensions. La précision sur les images contenant des voxels de  $(2*2*10) \text{ cm}^3$  paraît très claire. Malheureusement par manque de temps un nombre suffisant de muon permettant de couvrir 100 muons par voxel n'a pas pu être réalisé. Cette taille de voxel constituent un espace très petit du container. En effet on observe 1 million de voxel de  $(2*2*10) \text{ cm}^3$ .

À la vue de ces résultats il faut désormais s'intéresser à un paramètre important pour la radiographie à l'échelle réelle : La durée d'acquisition de l'image pour un container de taille standard.

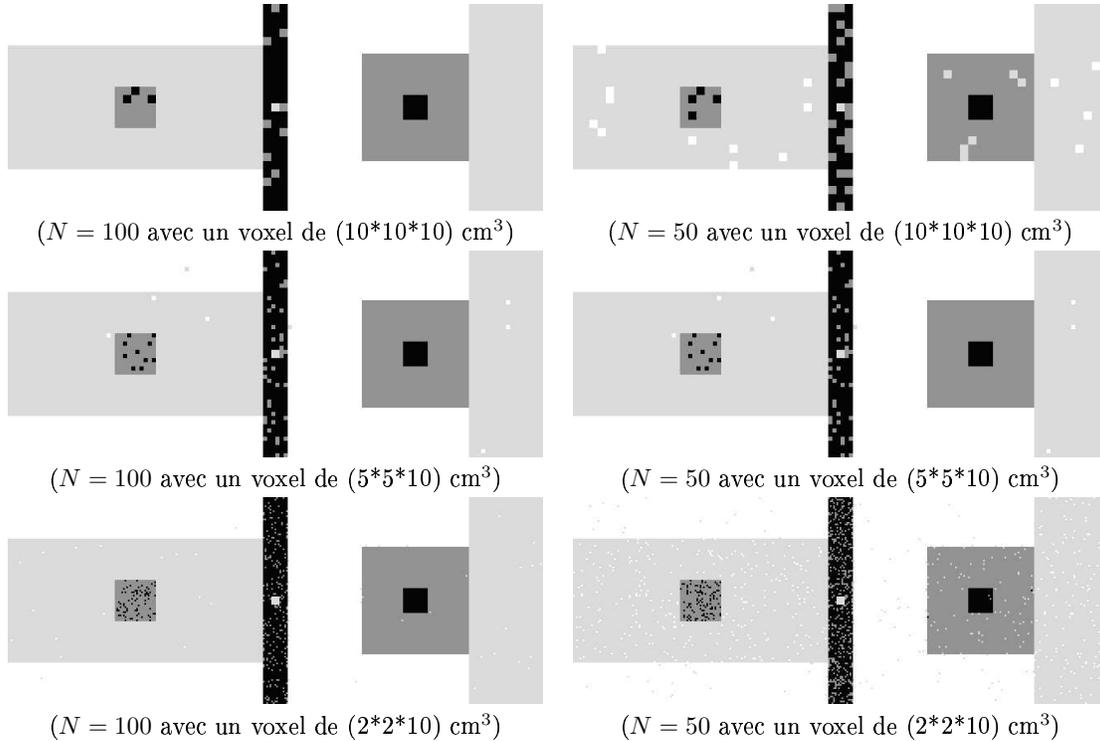


FIG. 27 – Visualisation de l'évolution de la taille du voxel sur la radiographie d'un container.

#### 4.7.6 Durée d'acquisition d'un dispositif réel d'imagerie muonique

Les différentes études et résultats précédents nous ont permis de déterminer précisément l'évolution de chaque paramètre influent pour nos acquisitions d'images. Maintenant, nous connaissons les valeurs minimales des différents paramètres ( $N$ ,  $P$ ,  $\frac{l_{pixel}}{\Delta z}$ ) qui permettent de reconstruire avec une précision suffisante la répartition des matériaux dans un volume radiographié. Connaissant le flux de muons au niveau de la mer, déterminé par des détecteurs horizontaux, il est possible de calculer la durée d'acquisition d'image pour un container de taille standard. Ce flux est de 10000 muons/min/m<sup>2</sup>. Le tableau 15 expose les durées d'acquisition d'image pour différents taille de voxel et différentes valeurs de  $N$ .

Taille de voxel	Durée d'acquisition d'image	
	$N = 100$	$N = 50$
Voxel de $(10*10*10)$ cm <sup>3</sup>	1 minute	30 secondes
Voxel de $(5*5*5)$ cm <sup>3</sup>	4 minutes	2 minutes
Voxel de $(2*2*2)$ cm <sup>3</sup>	25 minutes	12 minutes 30 secondes

TAB. 15 – Durée d'acquisition d'une reconstruction 2 D acceptable.

Mais attention, pour réaliser de la reconstruction en 3 dimensions, la durée doit être multipliée par le nombre de voxel dans la direction verticale. Il est en effet très difficile d'obtenir directement une image 2 D car le flux de muons n'est pas parallèle. On obtient alors les temps de comptage donnés dans le tableau 16. La durée d'acquisition d'une reconstruction 3 D augmente rapidement lorsque l'on diminue la taille du voxel. Pour un voxel de  $(10*10*10)$  cm<sup>3</sup>, la durée d'acquisition reste tout à fait convenable. Mais la précision est tout de même assez limitée. Une solution pratique consiste à radiographier le volume de façon grossière puis, en cas de doute, des douaniers pourraient être amenés à contrôler la marchandise suspecte. Une autre solution consisterait à acquérir des images en temps réel. Étant donné que 10 muons par voxel commence à donner un petit aperçu du contenu, la personne effectuant les contrôles pourrait

Taille de voxel	Durée d'acquisition d'image	
	$N = 100$	$N = 50$
Voxel de $(10*10*10)$ cm <sup>3</sup>	25 minutes	12 minutes 30 secondes
Voxel de $(5*5*10)$ cm <sup>3</sup>	1 heure 40 minutes	50 minutes
Voxel de $(2*2*10)$ cm <sup>3</sup>	10 heures 25 minutes	5 heures 13 minutes

TAB. 16 – Durée d'acquisition d'une reconstruction 3 D acceptable.

visionner la reconstruction en temps réel afin de décider de prolonger ou non le contrôle.

Au cours de ce chapitre, grâce à la confrontation le modèle statistique et les résultats de simulation de monte Carlo, nous avons fixé les caractéristiques du dispositif d'imagerie muonique. La résolution minimale des plans de détection permettant la discrimination des matériaux en 3 classes correspond à un rapport entre la taille du pixel et l'intervalle des détecteurs de  $\frac{1}{200}$ . Le nombre minimal de muons par voxel nécessaire pour une bonne reconstruction est de 50. La mesure obligatoire de l'impulsion nécessite quant à elle, la mise en place de 3 sandwichs de fer en aval du dispositif, permettant de réaliser 6 mesures du moment pour chaque particules. Ces caractéristiques, vérifiées pour dans le cas d'un container de taille standard, permettent aussi de fixer la durée d'acquisition suivant la précision d'image souhaitée.

## Conclusion

Au cours de cette étude, la faisabilité de la méthode a largement été vérifiée. L'encombrement du dispositif d'imagerie réel a aussi pu être établi. Dix plans de détections de grande taille d'un rapport minimal des plan de détection de  $\frac{l_{pixel}}{\Delta z}$  sont suffisants pour discriminer les matériaux en 3 catégories. Un nombre  $N$  de muon par voxel compris entre 50 et 100 est lui aussi nécessaire pour la reconstruction d'image. La durée d'acquisition reste très convenable pour une résolution volumique correspondant typiquement à une brique de lait d'un litre (25 minutes).

Il reste toutefois à vérifier les résultats obtenus avec un algorithme de reconstruction 3 D performant pour concevoir le dispositif réel. Il faudra encore étudier toute la partie électronique de détection. Une fois sa mise en place, un étalonnage préalable concernant les limites de classes devra nécessairement être réalisé afin de rendre le procédé opérationnel et efficace.

Les capacités de ce dispositif d'imagerie par diffusion de muons cosmiques paraissent tout de même très prometteuses. Naturel et économique, il serait le parfait outil de détection de matériaux lourds illicites. Il est possible d'imaginer dans le futur, un contrôle permanent de toutes les grosses cargaisons où la qualité de la reconstruction s'établit en temps réel. Pertinent pour le contrôle des containers lors de leur transport ou dans les zones de transit, ce dispositif d'imagerie peut aussi s'envisager pour le contrôle de structure en génie civil.

# A Muons et imagerie : rappels et historique

## Rappel sur les particules élémentaires

Les particules sont classées de deux manières différentes : selon leur spin et selon leur sensibilité à l'interaction forte. Les particules qui possèdent un spin entier sont appelées bosons et celles possédant un spin demi-entier sont dites fermions. Les fermions ont la propriété de former la matière et les bosons d'être les médiateurs des interactions. Ce sont les deux types de particules élémentaires.

Pour la sensibilité à l'interaction forte, on distingue les leptons, insensibles à l'interaction forte et les hadrons, sensibles à l'interaction forte. Les leptons peuvent être chargés électriquement ou non et possèdent tous un spin demi-entier : ils appartiennent à la famille des fermions. Les hadrons peuvent appartenir à la famille des fermions ou des bosons.

Les muons sont des leptons, ils possèdent alors un spin demi entier et sont insensibles à l'interaction forte. Ceci leur permet de traverser la matière car ils interagissent peu avec les atomes. Les muons sont des particules chargées électriquement. Il existe des muons chargés positivement et des muons chargés négativement :  $\mu^+$  et  $\mu^-$ . Ils ont été découverts dans les rayons cosmiques.

## Les muons cosmiques

Les rayons cosmiques sont connus depuis 1910. Il forment un flux composé à 85% de protons, à 14% d'hélium, et à 1% d'électrons et autres noyaux atomiques. L'énergie moyenne de ces particules est d'1 GeV mais elle peut atteindre jusqu'à  $10^{11} GeV$  [16]. On pense que les rayons cosmiques sont issus de l'explosion d'une supernova. Le soleil est une autre source de rayon cosmiques mais les particules produites sont beaucoup moins énergétiques ( $<1 GeV$ ) [17]. Ces particules sont souvent absorbées par l'atmosphère ou se désintègrent en vol avant d'avoir touché le sol, qui se trouve à environ 20 kilomètres de la zone de production [16].

En 1937 Carl Anderson (prix Nobel pour sa découverte des positrons en 1932) et Seth Neddermeyer découvrirent les muons dans les rayons cosmiques. Ils utilisèrent un morceau de platine d'un centimètre d'épaisseur placé dans une chambre de Wilson. Ce dispositif leur permit de découvrir de particules pour lesquelles l'énergie perdue était presque indépendante de l'énergie totale de la particule. Les muons sont produit dans l'atmosphère par un flux de protons cosmiques. Ce flux de protons produit une cascade de plusieurs particules. Cette cascade est représentée sur la figure 28.

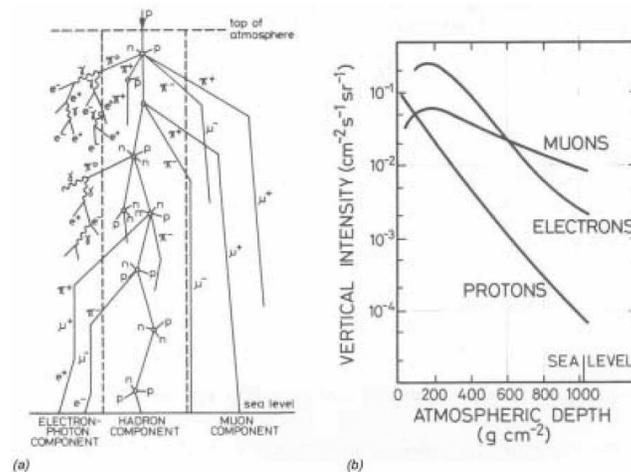


FIG. 28 – Cascade de particule produite par un flux de protons cosmiques (a). Altitude des principales particules de cette cascade (b) [3]

Le muon est une particule instable qui se désintègre de deux façons différentes, chacune affectée par

une probabilité  $P_i$  telle que  $\sum P_i = 1$  :

$$\begin{aligned}\mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu && \text{avec } P_1 \cong 98,6\% \\ \mu^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu + \gamma && \text{avec } P_2 \cong 1,4\%\end{aligned}\tag{63}$$

Pour le muon positif les désintégrations sont les mêmes mis à part que l'on observe un positron ( $e^+$ ) à la place de l'électron.

La durée de vie moyenne du muon est de l'ordre de deux microsecondes. Comme le muon est une particule très pénétrante, ce temps lui suffit pour être observé sur terre et même pénétrer l'écorce terrestre [16]. Le muon est très énergétique (4 GeV en moyenne observé au niveau de la mer) et très rapide : il va à 0,997 fois la vitesse de la lumière. Il bénéficie d'un effet relativiste qui augmente sa durée de vie dans notre référentiel [17]. Les muons étant chargés, ils sont sensibles à la force électromagnétique. Cette propriété permet de les détecter. Leur masse est d'environ 207 fois celle de l'électron soit 105,6 MeV. Ce sont les raisons pour lesquelles on dit que les muons sont des électrons lourds. Mais, à l'inverse de l'électron, leur forte masse les empêchent de rayonner.

## Historique de la radiographie basée sur l'absorption des muons par la matière

Le spectre des muons étant continu, il est possible d'utiliser la perte d'énergie des muons dans la matière pour déterminer l'épaisseur traversée et ainsi obtenir les informations nécessaires à la reconstruction d'image. Les muons présentent l'avantage d'être très énergétique et de résister à l'interaction forte donc ces propriétés vont permettre d'étudier des objets de très grandes dimensions. Cette atténuation va fournir les informations nécessaires pour la reconstruction d'image.

En 1955 George E.P. fut le premier à envisager cette application. Pour déterminer la profondeur de la roche au dessus d'un tunnel, il mesura le flux de muons au dessus du tunnel plus le flux à l'intérieur du tunnel. Connaissant les propriétés de la roche, il pu déduire la profondeur de celle-ci [17].

Ensuite en 1970, Luis Alvarez s'inspira du travail de George E.P. pour radiographier la seconde pyramide de Giza. Par la suite, plusieurs chercheurs utilisèrent cette méthode pour radiographier des structures de grandes tailles pour en déterminer la profondeur, la composition où encore déceler toutes les chambres d'une pyramides.

Les détecteurs de muons sont aussi utilisés au Japon pour observer l'intérieur des volcans afin de mieux prévoir une éruption. Le géophysicien Kanetada Nagamine, du laboratoire scientifique KEK, a expliqué lors d'une conférence qu'il avait examiné plusieurs volcans au Japon, mesurant notamment la quantité de lave dans le cratère du mont Asama.

Frtez a récemment rapporté qu'il utilisait des méthodes basée sur le pistage des rayons cosmiques à travers des cristaux d'iodide de césium pour en contrôler la qualité.

## Références

- [1] Smiths Heimann. X-ray inspection system. publié sous forme électronique, 2002. <http://www.heimanncargovision.com/shockedpage.html>.
- [2] Borozdin N. radiographic imaging with cosmic-ray muons. *Nature*, 2003.
- [3] Schultz L.J. *Cosmic Ray Muon Radiography*. PhD thesis, Portland State University, 2003.
- [4] Rastin B. An accurate measurement of the sea-level muon spectrum within the range 4 to 3000 gev/c. *Nuclear Physic*, 10 :1609–1628, 1984.
- [5] Jokisch H. Cosmic-ray muon spectrum up to 1 tev at 75° zenith angle. *Physics Review D*, 19 :1368–1372, 1979.
- [6] Shen at al. Multiple scattering. *Phys. Rev.D*, 20(1584), 1979.
- [7] Tsai Yung-Su. Pair production and bremsstrahlung of charged leptons. *Review of Modern Physics*, 46(4), 1974.
- [8] Particle Data Group. *Physics Letters B, Review of Particle Physics*, volume 592, chapter Cosmic Rays, pages 229–234. Elsevier, 2004.
- [9] Eidelman S. Passage of particles through matter. *Physics Letters B*, B592, 2002.
- [10] Rossi B. *Hight Energy Particles*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1965.
- [11] Schultz L. Image reconstruction and material z discrimination via cosmic ray muon radiography. *Nuclear Instrument and Method in Physics Research*, 2004.
- [12] Jean louis Féménias. *Probabilités et statistiques pour les sciences physiques*. Dunod, 2003.
- [13] Bruno Escoubès. *Probabilités et statistiques à l'usage des physiciens*. Ellipses/éditions marketing, 2001.
- [14] Perrin C. Modélisation et simulation. *Journal du CEA de Saclay*, 27, 2005.
- [15] Agostinelli S. publié sous forme électronique, 2003. <http://geant4.web.cern.ch/geant4/>.
- [16] Peter K.F. Grieder. *Cosmic rays at earth*. Elsevier, 2001.
- [17] Manceau L. Radiographie par les muons cosmiques. Technical report, LPC, 2004.
- [18] Dumont-Fillon J. Contrôle non destructifs. *Tecniques de l'ingénieur*, 1996.