MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 10 *No* 01
Tahun 2022

BILANGAN KETERHUBUNGAN PELANGI SEJATI DARI GRAF

Siti Rois'satul Azmil
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
email: siti.18006@mhs.unesa.ac.id

I Ketut Budayasa
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya, Surabaya, Indonesia
Penulis Korespondensi: ketutbudayasa@unesa.ac.id

Abstrak

Pewarnaan-sisi pada graf G adalah suatu fungsi $W : E(G) \to \{1, 2, \dots, k\} = [k]$ di mana $[k]$ adalah himpunan warna. Pewarnaan-sisi-sejati pada graf G merupakan pewarnaan-sisi G di mana setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama berwarna berbeda (Budayasa, 2007). Subgraf H dari G dengan pewarnaan W dikatakan pelangi apabila seluruh sisi H mendapat warna yang berbeda-beda. Graf G dikatakan terhubung pelangi apabila untuk setiap dua titik G, ada lintasan pelangi yang menghubungkan kedua titik tersebut. Bilangan keterhubungan pelangi graf G adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan agar G terhubung pelangi, disimbolkan dengan $rc(G)$. Graf nontrivial G dengan pewarnaan-sisi-sejati dikatakan terhubung pelangi sejati apabila untuk setiap dua titik yang berbeda di graf G ada lintasan pelangi yang mengaitkan dua titik tersebut. Bilangan keterhubungan pelangi sejati graf G disimbolkan dengan $prc(G)$. Dalam pembahasan artikel ini, akan ditunjukkan bilangan keterhubungan pelangi sejati pada Graf Pohon (T_n), Graf Sikel (C_n), dan Graf Komplet (K_n). Selain itu, akan ditunjukkan juga batas atas dan batas bawah bilangan keterhubungan pelangi sejati pada graf, besarnya selisih $prc(G) - rc(G)$, dan kelas graf dengan $prc(G) = \chi'(G)$.

Kata Kunci: Graf, Pewarnaan-Sisi-Sejati Graf, Bilangan Keterhubungan Pelangi Sejati.

Abstract

An edge-coloring of graph G is a function $W : E(G) \to \{1, 2, \dots, k\} = [k]$ where $[k]$ is set of colors. A proper-edge-coloring in graph G is an edge-coloring G where every two edges that are at the same vertices have a different color (Budayasa, 2007). Subgraph H of G with coloring W can be said to be rainbow if all edges of H get diferent colors. Graph G is said to be rainbow connected if for every two vertices G, there is a rainbow path connecting the two vertices. The rainbow connection number of graph G is the minimum number of colors needed for G to be rainbow connected, symbolized by $rc(G)$. A nontrivial graph G with proper-edge-coloring is called proper rainbow connected if for every two distinct vertices in graph G there is a rainbow path joining the two vertices. Proper rainbow connection number of graph G is symbolized by $prc(G)$. In the discussion of this article, we will show the proper rainbow connection number in Tree Graph (T_n), Cycle Graph (C_n), and Complete Graph (K_n). Besides that, it will also show the upper bound and lower bound of proper rainbow connection number, the magnitude of the difference from $prc(G) - rc(G)$, and graph classes with $prc(G) = \chi'(G)$.

Keywords: *Graph, Proper-Edge-Coloring of Graph, Proper Rainbow Connection Number.*

1. PENDAHULUAN

Salah satu cabang matematika yang mempunyai aplikasi cukup luas bagi kehidupan adalah Teori Graf. Menurut catatan sejarah, masalah pertama yang penyelesaiannya menggunakan graf adalah masalah jembatan Konigsberg tahun 1736 (Daniel & Taneo, 2019). Pada umumnya, graf digunakan sebagai representasi objek diskret dan juga hubungan antara objek tersebut. Sebuah graf G terdiri atas dua himpunan yaitu $G = (V(G), E(G))$. $V(G)$ adalah himpunan titik pada graf G dan merupakan himpunan berhingga tak kosong. $E(G)$ adalah himpunan sisi pada graf G dan merupakan himpunan berhingga yang bisa jadi merupakan himpunan kosong. Selain itu, setiap anggota e dalam $E(G)$ merupakan pasangan tidak terurut dari anggota himpunan titik di G. Menurut (Budayasa, 2007) sebuah graf G bisa direpresentasikan ke bentuk diagram (gambar) yang mana setiap titik G digambarkan dengan sebuah noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan sebuah kurva sederhana (ruas garis) dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut.

Pewarnaan sisi pada graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang memiliki banyak bidang aplikasi. Salah satu aplikasi pewarnaan sisi pada graf adalah pada sistem jaringan komunikasi dan pada konstruksi persegi latin (Budayasa, 2007). Adapun aplikasi lain pewarnaan sisi graf yaitu digunakan sebagai konsep pembuatan situs web *job oriented* (Mahapatra, Pal, & Samanta, 2020). Dalam hal ini, situs web *job oriented* berguna untuk membantu para pencari kerja dalam memilih perusahaan yang sesuai dengan keahliannya. Dan di sisi lain, perusahaan juga dapat menemukan pelamar yang sesuai dengan kriteria yang mereka butuhkan.

Seiring berjalannya waktu, konsep pewarnaan sisi graf makin berkembang. Salah satunya adalah konsep pewarnaan sisi pelangi sejati dan bilangan keterhubungan pelangi sejati pada graf. Konsep pewarnaan sisi pelangi sejati dan bilangan keterhubungan pelangi sejati ini merupakan suatu hal yang sangat menarik untuk dibahas, terlebih lagi masih sedikitnya orang yang sudah mengetahui dan membahas tentang bilangan keterhubungan pelangi sejati pada graf. Oleh karena itu untuk memudahkan dalam pengenalan bilangan keterhubungan pelangi sejati pada graf, dalam artikel ini penulis akan membahas tentang rumus umum bilangan keterhubungan pelangi sejati pada graf sederhana, terhingga, dan tidak berarah.

2. KAJIAN TEORI

Pewarnaan-Sisi-Sejati Graf

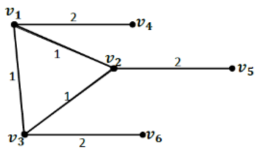
Definisi 2.1: (Budayasa, 2007) Sebuah pewarnaan-sisi pada graf G adalah suatu fungsi $W : E(G) \to \{1, 2, \dots, k\} = [k]$ dimana $[k]$ adalah himpunan warna. Suatu pewarnaan-sisi-sejati pada graf G merupakan sebuah pewarnaan-sisi G sehingga setiap dua sisi yang berada pada titik yang sama berwarna berbeda. Sebuah pewarnaan-sisi-sejati pada G menggunakan k warna dinamakan sebuah pewarnaan-sisi-sejati- k pada G. Minimum banyaknya warna yang diperlukan dalam pewarnaan-sisi-sejati graf G disebut *indeks kromatik* G, dan disimbolkan dengan $\chi'(G)$; yaitu

$$\chi'(G) = \text{Min}\,\{k \mid \text{ada-pewarnaan-sisi-sejati-}k \text{ pada } G\}$$

Keterhubungan Pelangi pada Graf

Definisi 2.2: Misalkan W sebuah pewarnaan-sisi pada graf G. Subgraf H dari G dikatakan pelangi, jika semua sisi H memiliki warna berbeda-beda. Misalkan G graf terhubung dan W sebuah pewarnaan-sisi pada G. Graf G dikatakan terhubung pelangi jika untuk setiap dua titik di G, terdapat lintasan pelangi yang menjadi penghubung kedua titik tersebut. Bilangan keterhubungan pelangi G disimbolkan dengan $rc(G)$, adalah minimum banyaknya warna yang diperlukan agar G terhubung pelangi.

Contoh 2.1:



Gambar 2.1. Pewarnaan-sisi W pada graf G dengan 6 titik menggunakan 2 warna

Dapat dilihat pada Gambar 2.1, bahwa setiap dua titik di graf G dihubungkan oleh sebuah lintasan pelangi sehingga terhadap pewarnaan W graf G terhubung pelangi dengan 2 warna. Karena tidak ada lagi pewarnaan-sisi yang kurang dari 2 warna pada graf G, maka bilangan keterhubungan pelangi graf G adalah 2 atau dapat dituliskan dengan $rc(G) = 2$.

Adapun bilangan keterhubungan pelangi pada graf pohon adalah sebagai berikut:

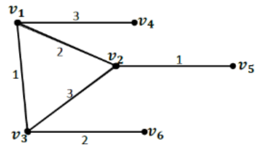
Teorema 2.1: (Chartrand, Johns, Mckeon, & Zhang, 2008) $rc(T_n) = n - 1$ jika dan hanya jika graf G pohon dengan n titik.

Keterhubungan Pelangi Sejati pada Graf

Definisi 2.3: (Doan & Schiermeyer) Misalkan G graf terhubung, nontrivial, dan W sebuah pewarnaan-sisi-sejati pada G. Graf G terhadap pewarnaan W dikatakan terhubung pelangi sejati jika untuk setiap dua titik yang berlainan pada graf G ada lintasan pelangi yang mengaitkan kedua titik tersebut. Bilangan keterhubungan pelangi sejati pada graf G disimbolkan dengan $prc(G)$, adalah minimum banyaknya warna yang digunakan agar G terhubung pelangi sejati.

Contoh 2.2:

Pada Gambar 2.2, setiap dua titik di graf G dihubungkan oleh sebuah lintasan pelangi sehingga terhadap pewarnaan W graf G terhubung pelangi sejati dengan 3 warna. Karena tidak ada lagi pewarnaan-sisi-sejati yang kurang dari 3 warna pada graf G, maka bilangan keterhubungan pelangi sejati graf G adalah 3 atau dapat dituliskan dengan $prc(G) = 3$.



Gambar 2.2 Pewarnaan-sisi-sejati W pada graf G dengan 6 titik menggunakan 3 warna

Dari Definisi 2.2 dan Definisi 2.3 pada pembahasan sebelumnya dapat diperoleh,

Lemma 2.2: Jika G graf terhubung, maka $prc(G) \geq rc(G)$.

Bukti:
Dari Definisi 2.2 dan Definisi 2.3, diperoleh bahwa setiap pewarnaan-sisi-sejati pada graf G juga merupakan pewarnaan-sisi pada G. Jadi,

$$rc(G) \leq prc(G)$$

Dengan demikian, lemma terbukti. ■

Diameter Graf

Definisi 2.4: Misalkan G sebuah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Jarak titik u dan titik v pada G, disimbolkan dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan paling pendek yang mengaitkan titik u dan v pada graf G. Diameter graf G disimbolkan dengan $diam(G)$, didefinisikan seperti di bawah ini:

$$diam(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$$

Menurut Definisi 2.2 dan Definisi 2.4, bisa didapatkan lemma seperti di bawah ini:

Lemma 2.3: Jika G merupakan graf yang terhubung, maka $rc(G) \geq diam(G)$.

Bukti :
Misalkan G graf terhubung dengan $diam(G) = d$. Maka ada sebuah lintasan pada G dengan panjang d yang menghubungkan dua titik u dan v di G. Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada G. Agar G terhadap W terhubung pelangi, tentu seluruh sisi dari lintasan P harus mendapat warna yang berbeda-beda. Karena banyak sisi lintasan P adalah d, berdasarkan Definisi 2.2,

$$rc(G) \geq diam(G)$$

Jadi, lemma terbukti. ■

Setelah diperoleh Lemma 2.2 dan Lemma 2.3, maka bisa didapatkan teorema berikut:

Teorema 2.4: Jika G merupakan graf terhubung yang memiliki diameter d, maka

$$d \leq rc(G) \leq prc(G)$$

Adapun hubungan ketidaksamaan antara bilangan keterhubungan pelangi graf G, indeks kromatik G, dan bilangan keterhubungan pelangi sejati graf G pasti lebih kecil atau sama dengan banyak sisi graf G.

Teorema 2.5: Jika G merupakan graf terhubung dan banyak sisi adalah m, maka

$$\max\{rc(G), \chi'(G)\} \leq prc(G) \leq m$$

Bukti:
Dari definisi 2.1 dan Definisi 2.3, diperoleh

$$prc(G) \geq \chi'(G) \quad (1)$$

Berdasarkan Teorema 2.4,

$$prc(G) \geq rc(G) \quad (2)$$

Dari pertidaksamaan (1) dan (2), didapat

$$prc(G) \geq \max\{\chi'(G), rc(G)\} \quad (3)$$

Dari Definisi 2.3,

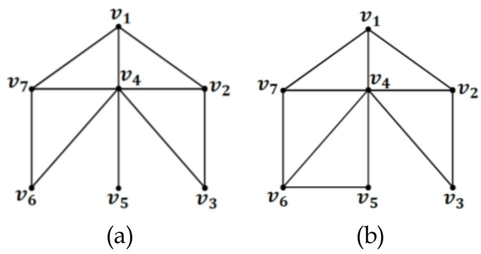
$$prc(G) \leq m \quad (4)$$

Dari pertidaksamaan (3) dan (4), teorema terbukti. ■

Sikel Hamilton

Definisi 2.5: (Budayasa, 2007) Misalkan G adalah graf terhubung, jejak tertutup pada graf G yang memuat titik awal dan titik internal yang berbeda dinamakan sikel pada graf G. Sikel yang memuat semua titik pada graf dinamakan Sikel Hamilton.

Contoh 2.3:



Gambar 2.3 (a) Graf yang tidak memuat Sikel Hamilton; (b) Graf yang memuat Sikel Hamilton

Pada Gambar 2.3 (a) graf tersebut tidak memuat Sikel Hamilton karena tidak ada jejak tertutup yang memuat titik awal dan semua titik internal yang berbeda-beda, sedangkan pada Gambar 2.3 (b) graf tersebut jelas memuat Sikel Hamilton yaitu pada sikel dengan titik awal v_1 melewati sisi v_1v_2 ke titik v_2 selanjutnya melewati sisi v_2v_3 ke titik v_3 selanjutnya melewati sisi v_3v_4 ke titik v_4 selanjutnya melewati sisi v_4v_5 ke titik v_5 selanjutnya melewati sisi v_5v_6 ke titik v_6 selanjutnya melewati sisi v_6v_7 ke titik v_7 dan akhirnya melewati sisi v_7v_1 kembali ke titik v_1.

3. PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai rumus umum bilangan keterhubungan pelangi sejati pada graf pohon, graf sikel, dan graf komplet. Selanjutnya akan ditunjukkan juga mengenai batas atas, batas bawah, besarnya selisih $prc(G) - rc(G)$, dan kelas graf dengan $prc(G) = \chi'(G)$. Untuk pembahasan pertama, yaitu mengenai bilangan keterhubungan pelangi sejati dari pohon dengan n titik yang ditunjukkan sebagai berikut.

Teorema 3.1: Jika graf T_n pohon dengan n titik, maka

$$prc(T_n) = n - 1$$

Bukti:

Karena T_n pohon dengan n titik, maka T_n terhubung, tanpa sikel, dan $(n-1)$ sisi. Berdasarkan Teorema 2.1

$$rc(T_n) = n - 1$$

Jadi, berdasarkan Teorema 2.4, diperoleh

$$prc(T_n) \geq n - 1 \quad (1)$$

Pikirkan suatu pewarnaan-sisi W terhadap T_n sehingga semua sisi T_n mendapat warna berbeda-beda. Dalam hal ini, jelas W adalah sebuah pewarnaan-sisi-sejati pada T_n dengan $(n-1)$ warna. Terhadap pewarnaan W, T_n terhubung pelangi sejati. Jadi, berdasarkan Definisi 2.3,

$$prc(T_n) \leq n - 1 \quad (2)$$

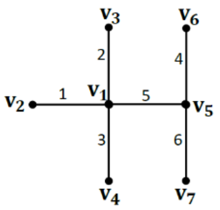
Dari pertidaksamaan (1) dan (2), diperoleh

$$prc(T_n) = n - 1$$

Teorema terbukti. ■

Contoh 3.1:

Pada pohon dengan 7 titik, minimum banyak warna yang digunakan agar T_7 terhubung pelangi sejati adalah 6.



Gambar 3.1. Graf T_7 dengan $prc(T_7) = 6$

Selanjutnya yaitu bilangan keterhubungan pelangi sejati dari graf sikel dengan banyak titik yang lebih dari atau sama dengan 4.

Teorema 3.2: Jika C_n graf sikel dengan n titik dan $n \geq 4$, maka

$$prc(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Bukti:

Misalkan C_n sikel dengan n titik dan

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$$

$$E(C_n) = \{e_i = v_iv_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_n = v_nv_1\}$$

Karena $diam(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, Teorema 2.4, berakibat

$$prc(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (1)$$

Ditinjau dari 2 kasus, ketika n bernilai genap atau ketika n bernilai ganjil.

- **Kasus 1:** n genap

  Pada kasus 1 ini $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, sehingga dari pertidaksamaan (1) diperoleh,

  $$prc(C_n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad (2)$$

  Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada C_n, sedemikian hingga

  $$W(e_i) = \begin{cases} i, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2} \\ i - \frac{n}{2}, & \frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

  Perhatikan bahwa W merupakan pewarnaan-sisi-sejati graf C_n dengan menggunakan $\frac{n}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ warna. Lebih jauh, terhadap W graf C_n terhubung-pelangi-sejati.
  Jadi berdasarkan Definisi 2.3,

  $$prc(C_n) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad (3)$$

  Dari pertidaksamaan (2) dan (3), disimpulkan

  $$prc(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

- **Kasus 2:** n ganjil

  Pada kasus n ganjil, pikirkan pewarnaan-sisi-sejati pada C_n. Berdasarkan Definisi 2.3 tentu tidak mungkin ada pewarnaan-sisi-sejati pada C_n menggunakan $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ warna yang memenuhi, sehingga terhadap pewarnaan tersebut C_n terhubung pelangi. Jadi dari pertidaksamaan (1), diperoleh

  $$prc(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad (4)$$

  Pikirkan sebuah pewarnaan-sisi W pada C_n, sedemikian hingga

$$W(e_i) = \begin{cases} i, & 1 \le i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ i - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le i \le n-1 \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & i = n \end{cases}$$

Perhatikan bahwa W adalah pewarnaan-sisi-sejati pada C_n dengan menggunakan $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ warna, dan terhadap W graf C_n terhubung pelangi. Berdasarkan Definisi 2.3,

$$prc(C_n) \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \qquad (5)$$

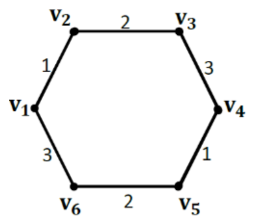
Dari pertidaksamaan (4) dan (5), disimpulkan

$$prc(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Contoh 3.2:

Pada graf sikel dengan 6 titik, minimum banyak warna yang dibutuhkan agar graf C_6 terhubung pelangi sejati adalah 3.



Gambar 3.2. Graf C_6 dengan $prc(C_6) = 3$

Untuk pembahasan selanjutnya yaitu bilangan keterhubungan pelangi dari graf komplet dengan banyak titik minimal 2.

Lemma 3.3: Jika K_n graf komplet dengan n titik dan $n \ge 2$, maka

$$rc(K_N) = 1$$

Bukti:

Karena setiap dua titik berbeda pada K_n berhubungan langsung, maka berdasarkan Definisi 2.4,

$$diam(K_n) = 1$$

Berdasarkan Teorema 2.4, diperoleh

$$rc(K_n) \ge diam(K_n) = 1 \qquad (1)$$

Perhatikan sebuah pewarnaan-sisi W pada K_n dengan satu warna saja. Jelas terhadap W, K_n terhubung pelangi. Berdasarkan Definisi 2.2,

$$rc(K_n) \le 1 \qquad (2)$$

Dari pertidaksamaan (1) dan (2), disimpulkan

$$rc(K_n) = 1$$

Dengan demikian, lemma terbukti. ■

Sedangkan bilangan keterhubungan pelangi sejati graf komplet nontrivial ditunjukkan pada teorema berikut:

Teorema 3.4: Jika K_n adalah graf komplet dengan n titik dan $n \ge 2$, maka

$$prc(K_n) = \begin{cases} n-1, & \text{jika } n \text{ genap} \\ n, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti:

Dalam (Budayasa, 2007) disebutkan bahwa indeks kromatik K_n adalah

$$\chi'(K_n) = t_n = \begin{cases} n-1, & \text{jika } n \text{ genap} \\ n, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Dari Teorema 2.5 dan Lemma 3.3, diperoleh

$$prc(K_n) \ge \max\{1, t_n\} = t_n \qquad (1)$$

Karena $\chi'(K_n) = t_n$, berdasarkan Definisi 2.1, ada sebuah pewarnaan-sisi sejati W pada K_n dengan menggunakan t_n warna. Terhadap W graf K_n tehubung pelangi. Jadi, berdasarkan Definisi 2.3,

$$prc(K_n) \le t_n \qquad (2)$$

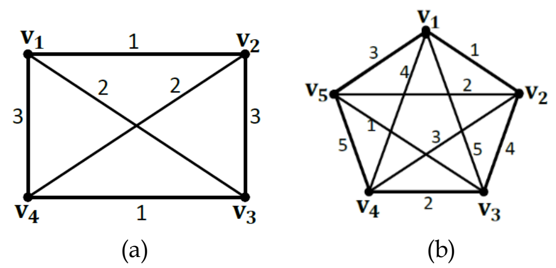
Dari pertidaksamaan (1) dan (2), diperoleh

$$prc(K_n) = t_n = \begin{cases} n-1, & \text{jika } n \text{ genap} \\ n, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Contoh 3.4:

Untuk n genap, misalkan $n = 4$, maka minimum banyak warna yang dibutuhkan agar K_4 terhubung pelangi sejati adalah 3, ditunjukkan oleh gambar 3.3 (a). sedangkan untuk n ganjil, misalkan $n = 5$, maka minimum banyak warna yang digunakan agar K_5 terhubung pelangi sejati adalah 5, ditunjukkan oleh gambar 3.3 (b).



Gambar 3.3 (a) Graf K_4 dengan $prc(K_4) = 3$; (b) Graf K_5 dengan $prc(K_5) = 5$

Teorema Vizing dalam (Budayasa, 2007) menyatakan bahwa untuk graf sederhana G, berlaku $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1$, dimana $\Delta(G)$ menyatakan derajat maksimum G. Karena $\chi'(G)$ bilangan bulat, maka hanya ada dua kemungkinan yaitu $\chi'(G) = \Delta(G)$ atau $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Graf G dengan $\chi'(G) = \Delta(G)$ disebut graf kelas-1, sedangkan jika $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, disebut graf kelas-2.

Lemma 3.5: Jika G graf terhubung, tak trivial, maka

$$prc(G) \geq \max\{\Delta(G), diam(G)\}$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.4,

$$rc(G) \geq diam(G)$$

Dari Teorema Vizing,

$$\chi'(G) \geq \Delta(G)$$

Berdasarkan Teorema 2.5, diperoleh

$$prc(G) \geq \max\{rc(G), \chi'(G)\}$$

$$prc(G) \geq \max\{diam(G), \Delta(G)\}$$

Dengan demikian lemma terbukti. ∎

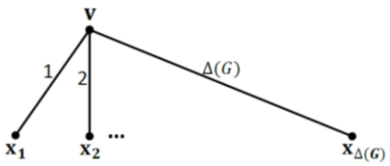
Pada bagian ini akan ditunjukkan batas atas yang lebih baik untuk bilangan keterhubungan pelangi sejati dari graf.

Lemma 3.6: Jika G graf terhubung, tak trivial dengan n titik, maka

$$prc(G) \leq \chi'(G) + n - 1 - \Delta(G) = \begin{cases} n-1, & \text{jika } G \text{ kelas-1} \\ n, & \text{jika } G \text{ kelas-2} \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan graf G terhubung, tak trivial, dengan n titik, dan derajat maksimum $\Delta(G)$. Maka ada $v \in V(G)$ sedemikian hingga $d_G(v) = \Delta(G)$. Misalkan himpunan titik persekitaran v di graf G adalah $N_G(v) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{\Delta(G)}\}$



Gambar 3.4. Pohon dengan $\Delta(G) + 1$ titik

Pikirkan subgraf G yang dibangun oleh himpunan sisi $\{vx_i \mid 1 \leq i \leq \Delta(G)\}$. Namakan subgraf ini dengan T. Jelas T adalah sebuah pohon dengan $\Delta(G) + 1$ titik dalam G. Karena indeks kromatik G adalah $\chi'(G)$, berdasarkan Definisi 2.1, ada sebuah pewarnaan-sisi-sejati W pada G dengan menggunakan $\chi'(G)$ warna. Karena semua sisi T terkait pada titik v, maka dalam pewarnaan W semua sisi T harus berwarna berbeda. Karena banyak sisi T adalah $\Delta(G)$, maka dalam pewarnaan-sisi-sejati W pada G dengan menggunakan $\chi'(G)$ warna, banyak warna yang dibutuhkan untuk mewarnai sisi-sisi T adalah $\Delta(G)$ warna.

Karena G terhubung, G memuat sebuah pohon rentang (Budayasa, 2007). Pohon T pada G, dapat diperluas menjadi sebuah pohon rentang T^* pada G. Karena $V(T^*) = V(G)$ dan $|V(G)| = n$, maka $|V(T^*)| = n$. Jadi, $|E(T^*)| = n - 1$, dan

$$\begin{aligned} |E(T^*) - E(T)| &= |E(T^*)| - |E(T)| \\ &= (n-1) - \Delta(G) \\ &= n - 1 - \Delta(G) \end{aligned}$$

Konstruksi pewarnaan sisi baru W^* dari W dengan cara mengganti semua warna sisi T^* di luar T dengan menggunakan $n - 1 - \Delta(G)$ warna baru. Perhatikan bahwa, terhadap pewarnaan W^* graf G terhubung pelangi sejati dengan $\chi'(G) + (n - 1 - \Delta(G))$ warna. Jadi berdasarkan Definisi 2.3,

$$prc(G) \leq \chi'(G) + \left(n - 1 - \Delta(G)\right)$$

Jika G graf kelas-1, maka $\chi'(G) = \Delta(G)$, sehingga

$$prc(G) \leq \Delta(G) + \left(n - 1 - \Delta(G)\right) = n - 1$$

Jika G graf kelas-2, maka $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, sehingga

$$prc(G) \leq \Delta(G) + 1 + \left(n - 1 - \Delta(G)\right) = n$$

Dengan demikian lemma terbukti. ∎

Dari Lemma 3.5 dan Lemma 3.6, didapatkan teorema seperti berikut :

Teorema 3.7: Misalkan G graf terhubung dengan n titik, tak trivial, derajat maksimum $\Delta(G)$, diameter $diam(G)$, dan indeks kromatik $\chi'(G)$. Maka

$$\text{Max}\{\Delta(G), diam(G)\} \leq prc(G) \leq \chi'(G) + n - 1 - \Delta(G) = \begin{cases} n-1, & \text{jika } G \text{ kelas-1} \\ n, & \text{jika } G \text{ kelas-2} \end{cases}$$

Jika syarat tertentu dipenuhi oleh graf G, maka batas atas $prc(G)$ dalam Teorema 3.7 dapat diperbaiki seperti berikut :

Teorema 3.8: Misalkan G graf terhubung dengan n titik, derajat maksimum $\Delta(G) \leq n - 2$, dan $v \in V(G)$ sedemikian hingga $d(v) = \Delta(G)$. Jika terdapat sebuah sikel Hamilton pada graf $G - N_G[v]$, maka

$$prc(G) \leq \frac{n + \Delta(G)}{2} + 1$$

Bukti:

Misalkan $v \in V(G)$ dengan $d(v) = \Delta(G)$. Misalkan himpunan titik yang berhubungan langsung dengan titik v (persekitaran titik v) adalah $N_G(v)$, dan

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

Misalkan graf $G - N_G[v]$ memuat sikel Hamilton C. Karena $G_1 = G - E(C)$ sebuah subgraf G, maka $\chi'(G_1) \leq \chi'(G)$. Ini berarti ada sebuah pewarnaan-sisi-sejati W pada graf G_1 dengan menggunakan $\chi'(G)$ warna.

Karena $|V(G)| = n$ dan $|N_G[v]| = \Delta(G) + 1$,

maka

$$|V(G_1)| = |V(C)| = n - 1 - \Delta(G)$$

Berdasarkan Teorema 3.2,

$$prc(C) = \left\lceil \frac{n - 1 - \Delta(G)}{2} \right\rceil$$

Selanjutnya, pewarnaan-sisi-sejati W pada graf G_1 diperluas ke pewarnaan sisi W^* pada graf G dengan mewarnai $E(C)$ dengan $\left\lceil \frac{n-1-\Delta(G)}{2} \right\rceil$ warna baru. Perhatikan terhadap pewarnaan W^* graf G terhubung pelangi sejati menggunakan $\chi'(G) + \left\lceil \frac{n-1-\Delta(G)}{2} \right\rceil$ warna.

Berdasarkan Definisi 2.3,

$$prc(G) \leq \chi'(G) + \left\lceil \frac{n - 1 - \Delta(G)}{2} \right\rceil$$

Karena $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, maka

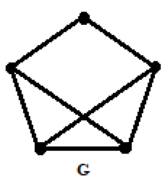
$$\begin{aligned} prc(G) &\leq \Delta(G) + 1 + \left\lceil \frac{n - 1 - \Delta(G)}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{n - 1 - \Delta(G)}{2} \right\rceil \\ &\leq \frac{n - 1 - \Delta(G)}{2} + 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian, bukti teorema lengkap. ■

Dalam Lemma 2.2, ditunjukkan bahwa $prc(G) \geq rc(G)$, ekuivalen dengan $prc(G) - rc(G) \geq 0$. Jika G adalah pohon T_n dengan n titik, dalam Teorema 3.1 sudah dibuktikan bahwa $prc(T_n) = n - 1$. Demikian juga $rc(T_n) = n - 1$. Ini berarti $prc(T_n) - rc(T_n) = 0$. Dari Lemma 3.3 dan Teorema 3.4, diperoleh bahwa jika G graf komplet dengan n titik dan n ganjil, maka $rc(K_n) = 1$ dan $prc(K_n) = n$, sehingga $prc(K_n) - rc(K_n) = n - 1$. Dengan demikian selisih $prc(G) - rc(G)$ terletak pada rentangan berikut.

$$0 \leq prc(G) - rc(G) \leq n - 1$$

Jika graf G memenuhi syarat tertentu, maka batas bawah dari selisih ini dapat diperbaiki menjadi seperti dalam teorema berikut. Untuk itu, diperlukan konsep bilangan klik graf G, dilambangkan dengan $\omega(G)$, adalah maksimum banyaknya titik dari sebuah subgraf komplet dalam G. Sebagai contoh, bilangan klik graf G pada Gambar 3.5 adalah 3.



Gambar 3.5 Graf G dengan $\omega(G) = 3$

Teorema 3.9: Jika G graf terhubung dengan n titik, $n \geq 3$, dan bilangan klik $n - 1 \geq \omega(G) \geq \frac{n+1}{2}$, maka

$$prc(G) - rc(G) \geq 2\omega(G) - n - 1$$

Bukti:

Jika $\omega(G) = n$, maka $G \cong K_n$. Karena $\omega(G) \leq n - 1$, maka $G \ncong K_n$. Misalkan G_1 sebuah klik di graf G dengan banyak titik $\omega(G)$. Maka

$$\begin{aligned} |V(G - G_1)| &= |V(G)| - |V(G_1)| \\ &= n - \omega(G) \end{aligned}$$

Konstruksi sebuah subgraf rentang G yang memuat G_1, namakan $\widehat{G_1}$, dengan menambahkan sebanyak $n - \omega(G)$ sisi G di luar G_1. Definisikan sebuah pewarnaan sisi W pada graf G sebagai berikut :

(i) Warnai semua sisi G_1 dengan warna yang sama, katakan warna 1.

(ii) Warnai sisi-sisi $\widehat{G_1}$ di luar G_1 menggunakan $n - \omega(G)$ warna yang berbeda dan bukan warna 1.

(iii) Warnai sisi-sisi G di luar $\widehat{G_1}$ menggunakan sebuah warna yang sama dengan warna salah satu sisi $\widehat{G_1}$.

Berkenaan dengan pewarnaan W, graf G terhubung pelangi menggunakan $n - \omega(G) + 1$ warna sehingga, berdasarkan Definisi 2.2,

$$rc(G) \leq n - \omega(G) + 1 \qquad (1)$$

Karena G_1 subgraf komplet dari G dengan $\omega(G)$ titik dan G bukan K_n, maka ada sebuah titik di G_1, katakan titik v, berhubungan langsung dengan paling sedikit satu titik G di luar G_1. Akibatnya, $d_G(v) \geq \omega(G) - 1 + 1 = \omega(G)$. Dengan demikian, $\Delta(G) \geq \omega(G)$. Berdasarkan Lemma 3.5,

$$prc(G) \geq \Delta(G) \geq \omega(G) \qquad (2)$$

Dari pertidaksamaan (1) dan (2), diperoleh

$$\begin{aligned} prc(G) - rc(G) &\geq \omega(G) - (n - \omega(G) + 1) \\ &= 2\omega(G) - n - 1 \end{aligned}$$

Teorema terbukti. ■

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika diameter graf G adalah 2 maka bilangan keterhubungan pelangi sejati graf G sama dengan indeks kromatik G.

Teorema 3.10: Misalkan G graf terhubung dengan n titik dan $n \geq 3$. Jika $diam(G) = 2$, maka

$$prc(G) = \chi'(G)$$

Bukti:

Karena indeks kromatik G adalah $\chi'(G)$, maka berdasarkan Definisi 2.1, ada sebuah pewarnaan sisi sejati pada G dengan menggunakan $\chi'(G)$ warna. Misalkan $W : E(G) \to \{1,2,3, \dots , \chi'(G)\}$ adalah pewarnaan-sisi-sejati dari graf G. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan $uv \notin E(G)$. Karena $diam(G) = 2$ maka ada titik $x \in N_G(u)$ dan $x \in N_G(v)$ di G. Akibatnya (u, x, v) sebuah lintasan di G. Karena W pewarnaan sisi sejati pada G maka sisi ux dan sisi xv berwarna berbeda. Akibatnya lintasan (u, x, v) adalah lintasan pelangi, sehingga terhadap pewarnaan W, graf G terhubung pelangi sejati dengan menggunakan $\chi'(G)$ warna. Berdasarkan Definisi 2.3, diperoleh

$$prc(G) \leq \chi'(G) \qquad (1)$$

Berdasarkan Teorema 2.5,

$$prc(G) \geq \chi'(G) \qquad (2)$$

Dari pertidaksamaan (1) dan (2), diperoleh

$$prc(G) = \chi'(G)$$

Dengan demikian, teorema terbukti. ■

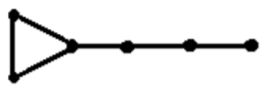
Berikut ditunjukkan bahwa ada kelas graf dengan bilangan keterhubungan pelangi sejati jauh lebih besar dari bilangan keterhubungan pelangi ataupun indeks kromatik dari graf tersebut.

Teorema 3.11: Misalkan k, t dua bilangan bulat dengan $k \geq t \geq 1$. Maka terdapat sebuah graf terhubung G dengan $\Delta(G) = 2t^2 + 1$ dan $diam(G) = 2t^2 + 1 + k$ sedemikian hingga

$$prc(G) \geq \max\{rc(G), \chi'(G)\} + t$$

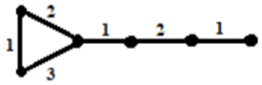
Bukti:

Misalkan $k = t = 1$. Graf G pada gambar berikut memenuhi teorema.



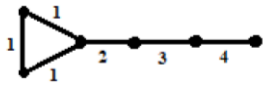
Gambar 3.5 Graf G dengan $\Delta(G) = 3$ dan $diam(G) = 4$ dengan $k = t = 1$

Perhatikan bahwa $\Delta(G) = 3$ dan $diam(G) = 4$, sebuah pewarnaan-sisi sejati pada G dengan minimum banyaknya warna yang dibutuhkan diperlihatkan pada Gambar 3.6, sehingga $\chi'(G) = 3$.



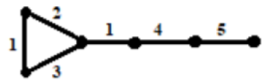
Gambar 3.6 Graf G dengan $\chi'(G) = 3$

Tentu pada Gambar 3.5 graf G memiliki $rc(G) = 4$ dan sebuah pewarnaan sisi pada G menggunakan 4 warna sedemikian hingga G terhubung pelangi ditunjukkan seperti Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Graf G dengan $rc(G) = 4$

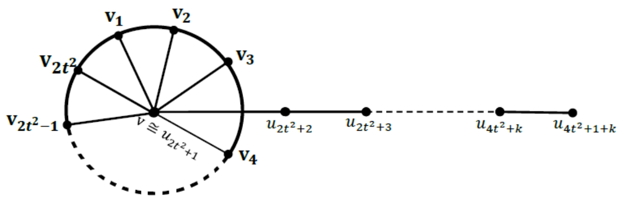
Perhatikan bahwa, $prc(G) = 5$. Merupakan pewarnaan-sisi sejati menggunakan 5 warna sehingga G terhubung pelangi sejati, ditunjukkan seperti Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Graf G dengan $prc(G) = 5$

Jadi, untuk $k = t = 1$, graf G memenuhi teorema.

Selanjutnya, misalkan $t \geq 2$. Misalkan W_{2t^2+1} sebuah roda dengan $2t^2 + 1$ titik dibentuk dari sebuah sikel $C = (v_1, v_2, \dots, v_{2t^2}, v_1)$ dan sebuah titik v sebagai titik pusat. Misalkan $P_{2t^2+1+k} = (u_{2t^2+1}, u_{2t^2+2}, \dots, u_{4t^2+1+k})$ sebuah lintasan dengan $2t^2 + 1 + k$ titik. Konstruksi graf G dari roda W_{2t^2+1} dan lintasan P_{2t^2+1+k} dengan cara menghimpitkan (menyatukan) titik pusat v dari W_{2t^2+1} dengan titik u_{2t^2+1} dari lintasan P_{2t^2+1+k}.



Gambar 3.9 graf W_{2t^2+1} yang titik pusatnya dihimpitkan dengan titik ujung graf P_{2t^2+1+k}

Untuk $1 \leq i \leq 2t^2$,

$$d_G(v_i, v) = d_{W2t^2}(v_i, v) = 1$$

dan

$$d_G(v, u_{4t^2+1+k}) = d_{P_{2t^2+1+k}}(u_{2t^2+1}, u_{4t^2+1+k}) = 2t^2 + k$$

Jadi,

$$d_G(v_i, u_{4t^2+1+k}) = d_G(v_i, v) + d_G(v, u_{4t^2+1+k}) = 1 + 2t^2 + k$$

Dengan demikian,

$$diam(G) = d_G(v_i, u_{4t^2+1+k}) = 1 + 2t^2 + k \qquad (1)$$

Perhatikan bahwa,

$d_G(v) = 2t^2 + 1,$

$d_G(v_i) = 3, \quad \forall i, 1 \leq i \leq 2t^2$

$d_G(v_j) = 2, \quad \forall j, 2t^2 + 2 \leq j \leq 4t^2 + k$

$d_G(u_{4t^2+1+k}) = 1$

Karena $t \geq 2$, maka

$$\Delta(G) = d_G(v) = 2t^2 + 1 \quad (2)$$

Karena G graf sederhana, berdasarkan Teorema Vizing,

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (3)$$

Dari pertidaksamaan (2) dan (3) diperoleh

$$\chi'(G) \leq (2t^2 + 1) + 1 = 2t^2 + 2 \quad (4)$$

Dari Lemma 2.3 dan pertidaksamaan (1) diperoleh

$$rc(G) \geq 1 + 2t^2 + k \quad (5)$$

Karena, $k \geq t \geq 2$, maka dari pertidaksamaan (4) dan (5) disimpulkan

$$\max\{rc(G), \chi'(G)\} = rc(G) \quad (6)$$

Definisikan pewarnaan-sisi W pada G sebagai berikut :

$$W(e) = \begin{cases} 1, \text{ jika } e = vv_i, \ \forall i, \ 1 \leq i \leq 2t^2 \\ i, \text{ jika } e = v_i v_{i+1}, \ \forall i, \ 1 \leq i \leq t^2 \\ i - t^2, \text{ jika } e = v_i v_{i+1}, \ \forall i, \ t^2 + 1 \leq i \leq 2t^2 - 1 \\ t^2, \text{ jika } e = v_{2t^2} v_1 \\ i - 2t^2 + 1, \text{ jika } e = u_i u_{i+1}, \ \forall i, \ 2t^2 + 1 \leq i \leq 4t^2 + k \end{cases}$$

Amati bahwa graf G dengan pewarnaan W terhubung pelangi menggunakan $1 + 2t^2 + k$ warna. Jadi berdasarkan Definisi 2.2,

$$rc(G) \leq 1 + 2t^2 + k \quad (7)$$

Dari pertidaksamaan (5) dan (7) diperoleh

$$rc(G) = 1 + 2t^2 + k \quad (8)$$

Selanjutnya, klaim: $prc(G) \geq 1 + 2t^2 + k + t$

Bukti klaim:

Andaikan $prc(G) \leq 2t^2 + k + t$. Berdasarkan Definisi 2.3, terdapat pewarnaan-sisi sejati W_1 pada G menggunakan $2t^2 + k + t$ warna sehingga G menjadi terhubung pelangi. Lintasan P di graf G mempunyai $2t^2 + 1 + k$ titik dan $2t^2 + k$ sisi. Dalam pewarnaan W_1 semua sisi P pada G harus berwarna berbeda dan tanpa menghilangkan keumuman, misalkan warna-warna tersebut adalah $1, 2, \ldots, 2t^2 + k$. Karena W_1 pewarnaan-sisi sejati, maka semua sisi G yang terkait di titik v harus berwarna berbeda. Setiap lintasan dari titik u_{4t^2+1+k} ke sebuah titik $v_i, 1 \leq i \leq 2t^2$, menggunakan tepat satu sisi vv_i, yang berwarna berbeda dari warna-warna $1, 2, 3, \ldots, 2t^2 + k$. Misalkan bahwa sebanyak p dari sisi-sisi ini, dengan $1 \leq p \leq t$, mempunyai sebuah warna dari himpunan $\{2t^2 + k + 1, 2t^2 + k + 2, \ldots, 2t^2 + k + t\}$.

Untuk $p = 1$, misalkan bahwa sisi vv_1 mempunyai sebuah warna dari $\{2t^2 + k + 1, \ldots, 2t^2 + k + t\}$. Maka setiap lintasan pelangi dari titik v_{t^2+1} ke titik u_{4t^2+1+k} mempunyai $t^2 + 1 + 2t^2 + k > 2t^2 + k + t$ sisi, suatu kontradiksi.

Untuk $p \geq 2$, terdapat sebanyak p bilangan bulat $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq 2t^2$ sedemikian hingga sisi-sisi $vv_{i1}, vv_{i2}, \ldots, vv_{ip}$, mempunyai p warna dari $\{2t^2 + k + 1, \ldots, 2t^2 + k + t\}$. Titik-titik $v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ip}$ mempartisi sikel C pada G menjadi p lintasan-lintasan, masing-masing menghubungkan titik v_{ij} dan titik v_{ij+1} sepanjang C dengan panjang $|i_{j+1} - i_j| \ (mod\ 2t^2)$. Jadi lintasan terpanjang dari sebanyak p lintasan tersebut mempunyai panjang paling sedikit

$$\frac{2t^2}{p} \geq \frac{2t^2}{t} = 2t$$

Maka setiap lintasan pelangi dari titik v_{t+1} ke titik u_{4t^2+k+1} mempunyai paling sedikit $t + 1 + 2t^2 + k$ sisi, kontradiksi.

Dengan demikian klaim terbukti dan bukti teorema lengkap. ■

4. PENUTUP

SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan pada bagian 3, dapat disimpulkan:

1. $prc(T_n) = n - 1$
2. $prc(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \ n \geq 4$
3. $rc(K_N) = 1, \ n \geq 2$
4. $prc(K_n) = \begin{cases} n - 1, & \text{jika } n \text{ genap} \\ n, & \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$, dengan $n \geq 2$
5. Jika G graf terhubung, tak trivial, maka $prc(G) \geq \max\{\Delta(G), diam(G)\}$
6. Jika G terhubung, nontrivial, maka $prc(G) \leq \chi'(G) + n - 1 - \Delta(G) = \begin{cases} n - 1, & \text{jika } G \text{ kelas-1} \\ n, & \text{jika } G \text{ kelas-2} \end{cases}$
7. Jika gra G terhubung dengan n titik, $\Delta(G) \leq n - 2$, $v \in V(G)$, $d(v) = \Delta(G)$, dan terdapat sebuah sikel Hamilton pada graf $G - N_G[v]$, maka $prc(G) \leq \frac{n+\Delta(G)}{2} + 1$
8. Jika G terhubung, n titik, $n \geq 3$, dan bilangan klik $n - 1 \geq \omega(G) \geq \frac{n+1}{2}$, maka $prc(G) - rc(G) \geq 2\omega(G) - n - 1$
9. Jika G graf terhubung dengan n titik, $n \geq 3$ dan $diam(G) = 2$, maka $prc(G) = \chi'(G)$
10. Misal k, t dua bilangan bulat dengan $k \geq t \geq 1$.

Maka terdapat sebuah graf terhubung G dengan $\Delta(G) = 2t^2 + 1$ dan $diam(G) = 2t^2 + 1 + k$ sedemikian hingga $prc(G) \geq \max\{rc(G), \chi'(G)\} + t$

SARAN

Karena artikel ini masih memiliki keterbatasan yaitu graf yang digunakan masih sederhana, terhingga dan tidak berarah, sehingga masih diperlukan pengembangan lebih lanjut. Penulis menyarankan untuk pembaca yang mungkin memiliki ketertarikan dan ingin mengembangkan artikel ini bisa membahas tentang bilangan keterhubungan pelangi sejati pada beberapa graf khusus yang lebih kompleks, sehingga pembahasan akan lebih terarah.

DAFTAR PUSTAKA

Bau, S., Johnson, P., Jones, E., Kumwenda, K., & Matzke, R. (2018). Rainbow connectivity in some Cayley graphs. Australasian Journal of Combinatorics. 71(3), 381-393

Budayasa, I. K. (2007) Teori Graph dan Aplikasinya. Unesa University Press

Chartrand, G., Johns, G. L., Mckeon, K. A., & Zhang, P. (2008). Rainbow Connection in Graphs. Mathematica Bohemica. 133(1), 85-98.

Daniel, F. & Taneo, P. N. L. (2019). Teori Graf. Yogyakarta: Group Penerbitan CV BUDI UTAMA

Doan, T. D. & Schiermeyer, I. (2020). Proper Rainbow Connection Number of Graph. Discussiones Mathematicae Graph Theory. 20(40), 1-18. doi: 10.7151/dmgt.2326

Jiang, H., Li, W., Li, X., & Magnant, C. (2019). On Proper (Strong) rainbow connection o graph. Discussiones Mathematicae. 41(2), 469-479. doi: 10.7151/dmgt.2201

Johnston, D. (2015). Edge Colorings of Graphs and Their Applications. Western Michigan University

Li, Xueliang., Sun, Y., & Shi, Y. (2013). Rainbow Connections of Graphs: A Survey. Graphs and Combinatorics, 29, 1-38. doi: 10.1007/s00373-012-1243-2

Mahapatra, R., Pal, M., & Samanta, S. (2020). Application of Edge Colouring of Fuzzy Graphs. INFORMATICA. 31(2), 1-8. doi: 10.15388/20-INFOR403

Vizing, V. G. (1964). On an estimate of the chromatic class of p-graph, Diskret. Analiz. 3, 25-30, in Russian