MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 09 No 03
Tahun 2021

BEBERAPA GENERALISASI BARU TEOREMA TITIK TETAP PADA RUANG METRIK-B *EXTENDED*

Abdurrahman Adnan
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya.
abdurrahman.18023@mhs.unesa.ac.id

Muhammad Jakfar
Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya.
muhammadjakfar@.unesa.ac.id

Abstrak

Banyak penelitian sudah membahas dan mengembangkan teorema terkait ketunggalan titik tetap suatu fungsi pada berbagai perluasan ruang metrik, salah satunya pada ruang metrik-b. Pada artikel ini, penulis akan mencoba mempermumum suatu teorema titik tetap pada ruang metrik-b yang dikembangkan oleh Agrawal, dkk[2] pada ruang metrik yang lebih luas, yaitu ruang-metrik-b *extended*. Dimana ruang metrik-b *extended* adalah perluasan dari ruang metrik-b. Selanjutnya, penulis akan berusaha membangun bentuk lain dari teorema ketunggalan titik tetap suatu fungsi pada ruang metrik-b *extended*. Sehingga hasil dari pembahasan artikel ini adalah satu teorema yang merupakan perumuman dari teorema titik tetap pada [2] pada ruang metrik-b *extended*, dan dua bentuk teorema titik tetap yang lain pada ruang metrik-b *extended*.
Kata Kunci: teorema titik tetap, ruang metrik-b, ruang metrik-b *extended*

Abstract

Many studies have discussed and developed theorems related to the uniqueness of a fixed point of a function in various generalization of metric spaces, one of which is in the b-metric space. In this article, the author will try to generalize a fixed point theorem on the b-metric space developed by Agrawal, et al[2] in a wider metric space, namely the extended b-metric space. The extended b-metric space is an extension of the b-metric space. Then, the writer will try to build another form of the fixed point uniqueness theorem of a function in the extended b-metric space. So that the result of the discussion in this article is one theorem which is a generalization of the fixed point theorem in [2] in the extended b-metric space, and two other forms of the fixed point theorem in the extended b-metric space.
Keywords: *fixed point theorem, b-metric space, extended b-metric space*

PENDAHULUAN

Salah satu topik penting yang sering dibahas oleh peneliti di dalam penelitiannya terkait ruang metrik adalah teorema ketunggalan titik tetap. Teorema ketunggalan titik tetap yang terkenal adalah teorema titik tetap Banach, yang pertama kali dinyatakan pada tahun 1922. Aplikasi dari teorema titik tetap ini salah satunya adalah di bidang persamaan diferensial, yaitu untuk menentukan keberadaan dan ketunggalan solusi dari persamaan diferensial biasa tertentu. Selain itu, masih banyak lagi penerapan dari teorema titik tetap di bidang matematika lainnya.

Perluasan dari ruang metrik sudah banyak dibahas oleh peneliti, beberapa hasil perluasan tersebut diantaranya adalah ruang metrik fuzzy, ruang metrik cone, ruang metrik rectangular, ruang metrik-b, dan lain sebagainya.

Banyak matematikawan yang tertarik untuk menggeneralisasi teorema titik tetap pada perluasan ruang metrik. Pada tahun 2009, Subrahmanyam meneliti tentang suatu teorema titik tetap pada ruang metrik fuzzy [10]. Tahun 2011, Abbas,dkk meneliti tentang teorema titik tetap pada ruang metrik cone [1]. Dan pada tahun 2013, Arshad,dkk meneliti tentang teorema titik tetap pada ruang metrik rectangular [4].

Ketiga penelitian tersebut sama-sama membahas tentang teorema yang menyatakan adanya pemetaan/fungsi tertentu yang mempunyai titik tetap tunggal, tetapi di perluasan ruang metrik yang berbeda-beda. Teorema titik tetap juga sudah dibahas di dalam ruang metrik-b, seperti dalam penelitian yang dilakukan oleh Cszerwik[5], Ansari,dkk [3], Mishra,dkk[8] dan Agrawal,dkk[2].

Pada tahun 2017, terdapat penelitian yang mempelajari tentang perluasan ruang metrik yang merupakan perkembangan dari ruang metrik-b, yaitu ruang metrik-b *extended*, yang diperkenalkan oleh Kamran,dkk[6]. Lalu pada tahun 2018, terdapat penelitian yang membahas beberapa teorema titik tetap di ruang metrik-b *extended* oleh Shatanawi, dkk [9]. Penulis tertarik untuk membangun bentuk lain dari teorema titik tetap pada ruang metrik-b *extended*, yang berbeda dengan teorema titik tetap pada ruang metrik-b *extended* pada [9].

Dalam mengembangkan teorema tersebut, penulis terinspirasi dari teorema titik tetap pada ruang metrik-b yang dikembangkan oleh Agrawal,dkk [2]. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mempermumum teorema titik tetap dalam penelitian/artikel tersebut untuk dibahas dalam ruang metrik yang lebih luas, yaitu ruang metrik-b *extended*.

Pembahasan dalam artikel ini hanya membahas teorema titik tetap pada ruang metrik-b *extended* saja, tanpa membahas lebih lanjut sifat-sifat dari teorema titik tetap tersebut. Maka di pembahasan artikel ini, hanya terdapat teorema yang dibahas secara pembuktiannya.

Dalam artikel ini ada beberapa materi yang penulis gunakan sebagai berikut :

Definisi 1.1 (oleh Kamran,dkk, 2017 [6], hal.2). Misalkan $X \neq \emptyset$ dan $\theta: X \times X \to [1, \infty)$. Fungsi $d_\theta: X \times X \to [0, \infty)$ disebut metrik-b *extended* pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku :

1. $d_\theta(x, y) = 0$ jika $x = y$
2. $d_\theta(x, y) = d_\theta(y, x)$
3. $d_\theta(x, y) \leq \theta(x, y)\big(d_\theta(x, z) + d_\theta(z, y)\big)$

Himpunan X yang dilengkapi dengan metrik d_θ disebut ruang metrik-b *extended*, dan dilambangkan (X, d_θ).
Dari Definisi 1.1 diatas, bisa diperhatikan bahwa hubungan antara d_θ dan θ adalah d_θ dan θ memenuhi Sifat 3 dari Definisi 1.1 tersebut, untuk setiap $x, y, z \in X$

Definisi 1.2 (oleh Kamran,dkk, 2017 [6], hal.3). Misalkan (X, d_θ) adalah ruang metrik-b *extended*. Barisan (x_n) di dalam X disebut konvergen ke $x \in X$,jika untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, terdapat $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq N$, berlaku $d_\theta(x_n, x) < \varepsilon$
Dalam kasus ini, dapat ditulis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$
Barisan (x_n) di dalam X disebut konvergen jika terdapat $x \in X$, sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Definisi 1.3 (oleh Kamran,dkk, 2017 [6], hal.3). Misalkan (X, d_θ) adalah ruang metrik-b *extended*. Barisan (x_n) di dalam X disebut Cauchy,jika untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, terdapat $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sehingga untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N$, berlaku $d_\theta(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definisi 1.4 (oleh Kamran,dkk, 2017 [6], hal.3). Misalkan (X, d_θ) adalah ruang metrik-b *extended*. (X, d_θ) disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy pada X adalah barisan konvergen.

Definisi 1.5 (oleh Kreyszig, 1978 [7], hal.299). Misalkan $T: X \to X$. Suatu $x \in X$ disebut titik tetap dari T jika $T(x) = x$.

Dalam ruang metrik-b, berlaku teorema titik tetap sebagai berikut :
Teorema 1.6. (oleh Agrawal,dkk, 2016 [2], hal.2) Diberikan (X, d) suatu ruang metrik-b lengkap. Misalkan $T: X \to X$ adalah suatu pemetaan/fungsi. Jika terdapat $, b, s \in \mathbb{R}$, dimana $a, b > 0$, $s \geq 1$ sehingga $a + 2bs \leq 1$, dan $\forall x, y \in X$ berlaku

$$\begin{aligned} &d\big(T(x), T(y)\big) \\ &\leq a \max\big\{d\big(x, T(x)\big), d\big(y, T(y)\big), d(x, y)\big\} \\ &+ b\big\{d\big(x, T(y)\big) + d\big(y, T(x)\big)\big\} \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Maka T memiliki tepat satu titik tetap.

METODE

Dalam penelitian ini penulis menggunakan metode studi literatur, pertama-tama penulis akan dikaji teorema titik tetap pada ruang metrik-b pada artikel yang ditulis oleh Agrawal,dkk [2], kemudian penulis mencoba mengkonstruksi teorema titik tetap tersebut dalam ruang yang lebih luas yakni ruang metrik-b *extended*, lalu penulis mengembangkan dua bentuk lain dari teorema tersebut. Selanjutnya teorema-teorema tersebut penulis buktikan kebenarannya secara logis dan matematis.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 1.6 berlaku pada ruang metrik-b. Pada penelitian oleh Kamran, dkk [6], didapatkan suatu konsep perluasan dari ruang metrik-b, yaitu ruang metrik-b *extended*. Maka, penulis berusaha untuk memperumum Teorema 1.6 tersebut dalam ruang metrik yang lebih luas, yaitu ruang metrik-b *extended*.

Hasil perumuman Teorema 1.6 dalam ruang metrik-b *extended* terdapat pada Teorema 3.1 berikut. Dalam memperumum Teorema 1.6 menjadi Teorema 3.1, terdapat beberapa perubahan. Konstanta b pada teorema titik tetap Agrawal,dkk [2] dikembangkan menjadi suatu fungsi $\beta: X \times X \to [0, \infty)$ dengan beberapa syarat

Teorema 3.1. Diberikan (X, d_θ) suatu ruang metrik-b *extended* lengkap, dengan $\theta: X \times X \to [1, \infty)$. Misalkan $T: X \to X$ adalah suatu pemetaan/fungsi. Jika terdapat $a \in \mathbb{R}, a > 0$ dan $\beta: X \times X \to [0, \infty)$, serta $\forall x, y \in X$, berlaku

$(*) \beta(x, y) = \frac{1-a}{3\,.\theta(x,y)}$

$(**)\ \beta(T(x), y) > \beta(x, y)$

$(***)\ \beta(x, T(y)) > \beta(x, y)$

sehingga

$$d\big(T(x), T(y)\big) \le a \max\big\{d\big(x, T(x)\big), d\big(y, T(y)\big), d(x, y)\big\} + \beta(x, y)\Big(d\big(x, T(y)\big) + d\big(y, T(x)\big)\Big) \quad (3.1.1)$$

Maka T memiliki tepat satu titik tetap.

Bukti :

Ambil sebarang $x_0 \in X$, dan misalkan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan pada X yang didefinisikan sebagai :

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n x_0\ , n = 1,2,3, \ldots. \quad (3.1.2)$$

- **Akan dibuktikan bahwa terdapat $k \in \mathbb{R}, k < 1$, sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $d(x_n, x_{n+1}) < k^n\, d(x_0, x_1)$**

Menurut (3.1.1) dan (3.1.2), didapat

$d(x_n, x_{n+1}) = d\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big) \le$
$a \max\big\{d\big(x_{n-1}, T(x_{n-1})\big), d\big(x_n, T(x_n)\big), d(x_{n-1}, x_n)\big\} +$
$\beta(x_{n-1}, x_n)\Big(d\big(x_{n-1}, T(x_n)\big) + d\big(x_n, T(x_{n-1})\big)\Big)$,

Menurut $(***)$, didapat $\beta(x_{n-1}, x_n) < \beta(x_{n-1}, T(x_n)) = \beta(x_{n-1}, x_{n+1})$

Sehingga

$d(x_n, x_{n+1}) \le$
$a \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\} +$
$\beta(x_{n-1}, x_{n+1}) d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)$
$= a \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} +$
$\beta(x_{n-1}, x_{n+1}) d(x_{n-1}, x_{n+1})$

Menurut sifat 3 dari Definisi 1.1, didapat

$d(x_n, x_{n+1}) < a \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} +$
$\beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big(d(x_{n-1}, x_n) +$
$d(x_n, x_{n+1})\big)$,

$\Leftrightarrow d(x_n, x_{n+1}) < a\, M1 +$
$\beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\big)$

Dimana $M_1 = \max\{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}$

Timbul dua kasus,

- **Kasus 1 : $M_1 = d(x_{n-1}, x_n)$**

$d(x_n, x_{n+1}) < a\, d(x_{n-1}, x_n) +$
$\beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) d(x_{n-1}, x_n) +$
$\beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) d(x_n, x_{n+1})$,

$\Leftrightarrow \big(1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big) d(x_n, x_{n+1}) <$
$\big(a + \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big)\, d(x_{n-1}, x_n)$,

$$\Leftrightarrow d(x_n, x_{n+1}) < \frac{\big(a + \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big)}{\big(1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big)}\, d(x_{n-1}, x_n) \quad (3.1.3)$$

Menurut $(*)$, berlaku

$\beta(x_{n-1}, x_{n+1}) = \frac{1-a}{3\,.\theta(x_{n-1}, x_{n+1})} < \frac{1-a}{2\,\theta(x_{n-1}, x_{n+1})}$,

$$\Leftrightarrow a + 2\,\beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) < 1, \quad (3.1.4)$$

$\Leftrightarrow a + \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) < 1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1})$,

$$\Leftrightarrow \frac{a + \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1})}{1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1})} < \frac{1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1})}{1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1})} \quad (3.1.5)$$

Akan dipastikan bahwa $\big(1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big) \neq 0$

Menurut (3.1.4) , dan fakta bahwa $a > 0$, dan $\theta(x, y) \ge 1$, $\forall x, y \in X$, maka

$2\,\beta(x_{n-1}, x_{n+1})\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) < 1$,

$\Leftrightarrow \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) < \frac{1}{2}$

Sehingga , $1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Jadi, $1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) \neq 0$

Dari (3.1.5), maka $\frac{(a + \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\theta(x_{n-1}, x_{n+1}))}{(1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\theta(x_{n-1}, x_{n+1}))} < 1$

Kembali ke (3.1.3),

$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{(a + \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\theta(x_{n-1}, x_{n+1}))}{(1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\theta(x_{n-1}, x_{n+1}))}\, d(x_{n-1}, x_n)$,

Misalkan, $k = \frac{(a + \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\theta(x_{n-1}, x_{n+1}))}{(1 - \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\theta(x_{n-1}, x_{n+1}))}$, maka $k < 1$

$$d(x_n, x_{n+1}) < k\, d(x_{n-1}, x_n) \quad (3.1.6)$$

Dari Ketidaksamaan (3.1.6), akan dibuktikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $d(x_n, x_{n+1}) < k^n d(x_0, x_1)$, menggunakan induksi matematika.

- **Akan dibuktikan bahwa $d(x_n, x_{n+1}) < k^n d(x_0, x_1)$ benar saat $n = 1$**

Untuk $n = 1$, dan dari (3.1.6), berlaku

$d(x_1, x_2) < k\, d(x_0, x_1)$

Maka untuk $n = 1$, ketidaksamaan $d(x_n, x_{n+1}) < k^n d(x_0, x_1)$ berlaku

- **Akan dibuktikan bahwa jika $d(x_n, x_{n+1}) < k^n d(x_0, x_1)$ benar saat $n = t$, maka $d(x_n, x_{n+1}) < k^n d(x_0, x_1)$ juga benar saat $n = t + 1$,**

Untuk $n = t$, menurut asumsi, berlaku

$$d(x_t, x_{t+1}) < k^t\, d(x_0, x_1) \quad (3.1.7)$$

Menurut (3.1.6) dan (3.1.7), berlaku

$d(x_{t+1}, x_{t+2}) < k\, d(x_t, x_{t+1}) < k\,\big(k^t\, d(x_0, x_1)\big)$,

$\Leftrightarrow d(x_{t+1}, x_{t+2}) < k^{t+1}\, d(x_0, x_1)$

Jadi, jika $d(x_n, x_{n+1}) < k^n d(x_0, x_1)$ benar saat $= t$, maka untuk $n = t + 1$ ketidaksamaan $d(x_n, x_{n+1}) < k^n d(x_0, x_1)$ juga berlaku.

Maka, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, terdapat $k < 1$ sehingga berlaku

$$d(x_n, x_{n+1}) < k^n\, d(x_0, x_1) \quad (3.1.8)$$

- **Kasus 2 = $M_1 = d(x_n, x_{n+1})$**

$d(x_n, x_{n+1}) < a\, d(x_n, x_{n+1}) + \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\theta(x_{n-1}, x_{n+1})\, d(x_{n-1}, x_n) + \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\theta(x_{n-1}, x_{n+1})\, d(x_n, x_{n+1})$,

$\Leftrightarrow \big(1 - a - \beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big)d(x_n, x_{n+1}) < \big(\beta(x_{n-1}, x_{n+1}).\theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big)\, d(x_{n-1}, x_n)$,

$$\Leftrightarrow d(x_n, x_{n+1}) < \frac{(\beta(x_{n-1},x_{n+1}).\theta(x_{n-1},x_{n+1}))}{(1-a-\beta(x_{n-1},x_{n+1}).\theta(x_{n-1},x_{n+1}))}\, d(x_{n-1}, x_n) \qquad (3.1.9)$$

Karena $(x_{n-1}, x_{n+1}) = \frac{1-a}{3\,.\theta(x_{n-1},x_{n+1})} < \frac{1-a}{2\,\theta(x_{n-1},x_{n+1})}$, maka

$2\,\beta(x_{n-1}, x_{n+1})\,\theta(x_{n-1}, x_{n+1}) < 1 - a$,

$\Leftrightarrow \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) < 1 - a - \big(\beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big)$,

$$\Leftrightarrow \frac{\beta(x_{n-1},x_{n+1})\ \theta(x_{n-1},x_{n+1})}{1-a-(\beta(x_{n-1},x_{n+1})\ \theta(x_{n-1},x_{n+1}))} < \frac{1-a-(\beta(x_{n-1},x_{n+1})\ \theta(x_{n-1},x_{n+1}))}{1-a-(\beta(x_{n-1},x_{n+1})\ \theta(x_{n-1},x_{n+1}))} \qquad (3.1.10)$$

Pada kasus 1, sudah dibuktikan bahwa $1 - a - \beta(x_{n-1}, x_{n+1})\ \theta\big(x_{n-1}, T(x_n)\big) \neq 0$

Kembali ke (3.1.10) , maka $\frac{\beta(x_{n-1},x_{n+1})\ \theta(x_{n-1},T(x_n))}{1-a-\beta(x_{n-1},x_{n+1})\ \theta(x_{n-1},T(x_n))} < 1$

Kembali ke (3.1.9),

$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{(\beta(x_{n-1},x_{n+1}).\theta(x_{n-1},x_{n+1}))}{(1-a-\beta(x_{n-1},x_{n+1}).\theta(x_{n-1},x_{n+1}))}\, d(x_{n-1}, x_n)$

Misalkan, $k = \frac{\beta(x_{n-1},x_{n+1})\ \theta(x_{n-1},T(x_n))}{1-a-\beta(x_{n-1},x_{n+1})\ \theta(x_{n-1},T(x_n))}$, maka $k < 1$

$d(x_n, x_{n+1}) < k\, d(x_{n-1}, x_n)$

Ketidaksamaan diatas sama dengan Ketidaksamaan (3.1.6) . Pada kasus 1, telah dibuktikan bahwa Ketidaksamaan (3.1.6) menghasilkan Ketidaksamaan (3.1.8), yaitu

$d(x_n, x_{n+1}) < k^n d(x_0, x_1)$

❖ **Akan dibuktikan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy**

Misalkan $m, n \in N, n < m$

$d(x_n, x_m) \le \theta(x_n, x_m)\big(d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m)\big)$,

$\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \le \theta(x_n, x_m)d(x_n, x_{n+1}) + \theta(x_n, x_m)\Big(\theta(x_{n+1}, x_m)\,\big(d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_m)\big)\Big)$,

$\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \le \theta(x_n, x_m)d(x_n, x_{n+1}) + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\, d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\Big(\theta(x_{n+2}, x_m)\big(d(x_{n+2}, x_{n+3}) + d(x_{n+3}, x_m)\big)\Big)$,

$\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \le \theta(x_n, x_m)d(x_n, x_{n+1}) + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\, d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m)\, d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots + (\prod_{i=0}^{t}\theta(x_{n+i}, x_m))\, d(x_{n+t}, x_{n+1+t})$, untuk $t = 0,1,2,3, \ldots$

$$\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \le \theta(x_n, x_m)\, k^n\, d(x_0, x_1) + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\, k^{n+1}\, d(x_0, x_1) + \theta(x_n, x_m)\theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m)\, k^{n+2}\, d(x_0, x_1) \cdots + (\textstyle\prod_{i=0}^{t}\theta(x_{n+i}, x_m))\, k^{n+t}\, d(x_0, x_1) \qquad (3.1.11)$$

Menurut $(**)$ dan $(*)$, berlaku $\beta(x_{n+1}, x_m) > \beta(x_n, x_m)$,

Sehingga, $(x_{n+i}, x_m) > \beta(x_n, x_m)$, untuk $i = 1,2,3, \ldots$

Karena menurut $(*)$, berlaku $\frac{1-a}{3\,.\theta(x_{n+i},x_m)} > \frac{1-a}{3\,.\theta(x_n,x_m)}$, maka

$$\theta(x_{n+i}, x_m) < \theta(x_n, x_m) \text{ untuk } i = 1,2,3, \ldots \qquad (3.1.12)$$

Dari (3.1.11), didapat

$$d(x_n, x_m) \le \theta(x_n, x_m)\, k^n\, d(x_0, x_1)\, (1 + \theta(x_{n+1}, x_m)\, k + \theta(x_{n+1}, x_m)\theta(x_{n+2}, x_m)k^2 + .. + (\prod_{i=1}^{t}\theta(x_{n+i}, x_m))\, k^t + ..)$$

Menurut (3.1.12), maka didapat

$d(x_n, x_m) \le \theta(x_n, x_m)\, k^n\, d(x_0, x_1)\, (1 + \theta(x_n, x_m)\, k + (\theta(x_n, x_m)\, k)^2 + \cdots + (\theta(x_n, x_m)\, k)^t + \cdots)$,

Misalkan, $f(x_n) = 1 + \theta(x_n, x_m)\, k + (\theta(x_n, x_m)\, k)^2 + .. + (\theta(x_n, x_m)\, k)^t + \cdots$,

$\Leftrightarrow f(x_n) = 1 + \theta(x_n, x_m)\, k(1 + \theta(x_n, x_m)\, k + .. + (\theta(x_n, x_m)\, k)^{t-1} + \cdots)$,

$\Leftrightarrow f(x_n) = 1 + \theta(x_n, x_m)\, k\big(f(x_n)\big)$,

$\Leftrightarrow f(x_n) - \theta(x_n, x_m)\, k\big(f(x_n)\big) = 1$,

$\Leftrightarrow f(x_n) = \frac{1}{(1-\theta(x_n,x_m)\, k)}$,

Maka, $1 + \theta(x_n, x_m)\, k + (\theta(x_n, x_m)\, k)^2 + .. + (\theta(x_n, x_m)\, k)^t + .. = \frac{1}{(1-\theta(x_n,x_m)\, k)}$

Sehingga

$d(x_n, x_m) \le \theta(x_n, x_m)\, k^n\, d(x_0, x_1)\, (1 + \theta(x_n, x_m)\, k + (\theta(x_n, x_m)\, k)^2 + \cdots + (\theta(x_n, x_m)\, k)^t)$

$= \theta(x_n, x_m)\, k^n\, d(x_0, x_1)\ \frac{1}{(1-\theta(x_n,x_m)\, k)}$,

$\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \le \frac{\theta(x_n,x_m)\, k^n}{(1-\theta(x_n,x_m)\, k)}\, d(x_0, x_1)$

Karena $k < 1$, jika $n \to \infty$, maka $k^n \to 0$. Sehingga $\lim\limits_{n,m\to\infty} \frac{\theta(x_n,x_m)\, k^n}{(1-\theta(x_n,x_m)\, k)}\, d(x_0, x_1) = 0$

Maka, $\lim\limits_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$

Jadi, $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, bisa ditemukan $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sehingga $\forall n, m \ge n(\varepsilon)$, berlaku $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Maka, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan cauchy.

Karena X adalah ruang metrik-b *extended* lengkap,maka setiap barisan Cauchy di dalamnya adalah barisan konvergen. Maka, barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen. Misalkan,barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke suatu $x^* \in X$.

❖ **Akan dibuktikan bahwa x^* adalah titik tetap T**

$d\big(x^*, T(x^*)\big) \le$

$\theta\big(x^*, T(x^*)\big)\Big(d\big(x^*, x_{n+1}\big), +d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big)\Big) =$

$\theta\big(x^*, T(x^*)\big)\Big(d\big(x^*, x_{n+1}\big) + d\big(T(x_n), T(x^*)\big)\Big)$,

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \leq \theta(x^*, T(x^*))\, d(x^*, x_{n+1}) + \theta(x^*, T(x^*)) \left(a \max \begin{pmatrix} d(x_n, T(x_n)), \\ d(x^*, T(x^*)), d(x_n, x^*) \end{pmatrix} + \beta(x_n, x^*)(d(x_n, T(x^*) + d(x^*, T(x_n))) \right),$

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*) \leq \theta(x^*, T(x^*))\, d(x^*, x_{n+1}) + \theta(x^*, T(x^*)) \left(a \max \begin{pmatrix} d(x_n, x_{n+1}), \\ d(x^*, T(x^*)), d(x_n, x^*) \end{pmatrix} + \beta(x_n, x^*)\theta(x_n, T(x^*)) \left(d(x_n, x^*) + d(x^*, T(x^*)) \right) + \beta(x_n, x^*)(d(x^*, x_{n+1})) \right)$

Untuk kesederhanaan, misalkan $s_1 = \theta(x^*, T(x^*))$, $s_2 = \theta(x_n, T(x^*))$ dan $b_1 = \beta(x_n, x^*)$, maka
$d(x^*, T(x^*)) \leq s_1\, d(x^*, x_{n+1}) + s_1 a\, max \left(d(x_n, x_{n+1}), d(x^*, T(x^*)), d(x_n, x^*) \right) + s_1\, b_1\, s_2 \left(d(x_n, x^*) + d(x^*, T(x^*)) \right) + s_1 b_1 (d(x^*, x_{n+1}))$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) + s_1 b_1 s_2 (d(x_n, x^*)) + s_1 a\, max \left(d(x_n, x_{n+1}), d(x^*, T(x^*)), d(x_n, x^*) \right)$,

Misalkan, $M_2 = max \left(d(x_n, x_{n+1}), d(x^*, T(x^*)), d(x_n, x^*) \right)$, maka
$(1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) + s_1 b_1 s_2 (d(x_n, x^*)) + s_1 a\, M_2$

- **Kasus 1 :** $\boldsymbol{M_2 = d(x_n, x_{n+1})}$

$(1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) + s_1 b_1 s_2 (d(x_n, x^*)) + s_1 a\, d(x_n, x_{n+1})$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) + s_1 b_1 s_2 (d(x_n, x^*)) + s_1 a \left(\theta(x_n, x_{n+1})(d(x_n, x^*) + d(x^*, x_{n+1})) \right)$,

Misalkan, $s_3 = \theta(x_n, x_{n+1})$
$(1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) + s_1 b_1 s_2 (d(x_n, x^*)) + s_1 a\, s_3 (d(x_n, x^*) + d(x^*, x_{n+1}))$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1 + a\, s_3)\, d(x^*, x_{n+1}) + s_1(b_1 s_2 + a\, s_3) d(x_n, x^*)$,

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \leq \frac{s_1(1 + b_1 + a\, s_3)}{(1 - s_1 b_1 s_2)} d(x^*, x_{n+1}) + \frac{s_1(b_1 s_2 + a\, s_3)}{(1 - s_1 b_1 s_2)} d(x_n, x^*)$

Karena $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x^*, menurut definisi kekonvergenan barisan (Kreyszig [7], p.25), berlaku $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_{n+1}) = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_n) = 0$. Sehingga, $\lim_{n\to\infty} d(x^*, T(x^*)) = 0$.
Maka, $x^* = T(x^*)$. Jadi, x^* adalah titik tetap T.

- **Kasus 2 :** $\boldsymbol{M_2 = d(x^*, T(x^*))}$

$(1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) + s_1 b_1 s_2 (d(x_n, x^*)) + s_1 a\, d(x^*, T(x^*))$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1(b_1 s_2 - a)) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) + s_1 b_1 s_2 (d(x_n, x^*))$,

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \leq \frac{s_1(1+b_1)}{(1 - s_1(b_1 s_2 - a))} d(x^*, x_{n+1}) + \frac{s_1 b_1 s_2}{(1 - s_1(b_1 s_2 - a))} \left(d(x_n, x^*) \right)$,

Karena $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_{n+1}) = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_n) = 0$, maka $\lim_{n\to\infty} d(x^*, T(x^*)) = 0$. Maka, $x^* = T(x^*)$. Jadi, x^* adalah titik tetap T.

- **Kasus 3 :** $\boldsymbol{M_2 = d(x_n, x^*)}$

$(1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) + s_1 b_1 s_2 (d(x_n, x^*)) + s_1 a\, d(x_n, x^*)$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) + s_1(b_1 s_2 + a)(d(x_n, x^*))$,

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \leq \frac{s_1(1+b_1)}{1 - s_1 b_1 s_2} d(x^*, x_{n+1}) + \frac{s_1(b_1 s_2 + a)}{1 - s_1 b_1 s_2} \left(d(x_n, x^*) \right)$,

Karena $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_{n+1}) = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_n) = 0$, maka $\lim_{n\to\infty} d(x^*, T(x^*)) = 0$. Maka, $x^* = T(x^*)$. Jadi, x^* adalah titik tetap T.

❖ **Akan dibuktikan bahwa x^* adalah satu-satunya titik tetap T**

Andaikan, terdapat titik tetap T yang lain, misal x'. Maka $T(x') = x'$.
Lalu,
$d(x^*, x') = d(T(x^*), T(x')) \leq a \max\{d(x^*, T(x^*)), d(x', T(x')), d(x', x^*)\} + \beta(x^*, x') \left(d(x^*, T(x')) + d(x', T(x^*)) \right)$,

$\Leftrightarrow d(x^*, x') \leq a \max\{d(x^*, x^*), d(x', x'), d(x', x^*)\} + \beta(x^*, x')(d(x^*, x') + d(x', x^*))$

$= a\, d(x', x^*) + \beta(x^*, x')(2\, d(x^*, x'))$,

$$\Leftrightarrow d(x^*, x') \leq (a + 2\beta(x^*, x'))\, d(x^*, x') \quad (3.1.13)$$

Menurut $(*)$, berlaku $\beta(x^*, x') < \frac{1-a}{2\,.\theta(x^*, x')}$, maka $a + 2\,\theta(x^*, x')\, \beta(x^*, x') < 1$.
Karena $\theta(x^*, T(x')) \geq 1$, maka $+2\, \beta(x^*, x') \leq a + 2\,\theta(x^*, x')\, \beta(x^*, x') < 1$, sehingga $a + 2\, \beta(x^*, x') < 1$.
Kembali ke (3.1.13),
$d(x^*, x') \leq (a + 2\beta(x^*, x'))\, d(x^*, x') < d(x^*, x')$,

$\Leftrightarrow d(x^*, x') < d(x^*, x')$

Yang menurut sifat 2 dari Definisi 1.1, tidak mungkin. Terjadi kontradiksi. Pengandaian bahwa terdapat titik tetap T yang lain selain x^* salah. Maka, kesimpulannya , x^* adalah satu-satunya titik tetap T.
∴ Maka, terbukti bahwa T memiliki tepat satu titik tetap. ■

Lalu, penulis membangun dua bentuk lain dari teorema ketunggalan titik tetap suatu fungsi pada ruang metrik-b *extended*, yaitu Teorema 3.2

dan Teorema 3.3. Perbedaan kedua teorema tersebut (Teorema 3.2 dan Teorema 3.3) dengan Teorema 3.1 adalah syarat dari pemetaan T di kedua teorema (Teorema 3.2 dan Teorema 3.3) yang berbeda dengan syarat dari pemetaan T di Teorema 3.1.

Teorema 3.2. Diberikan (X, d_θ) suatu ruang metrik-b *extended* lengkap, dengan $\theta: X \times X \to [1, \infty)$, Misalkan $T: X \to X$ adalah suatu pemetaan/fungsi. Jika terdapat $a \in \mathbb{R}, a > 0$, dan $\beta: X \times X \to [0, \infty)$, serta $\forall x, y \in X$, berlaku

$(*)\ \beta(x,y) = \frac{1-a}{3\,.\theta(x,y)}$

$(**)\ \beta(T(x), y) > \beta(x,y)$

$(***)\ \beta(x, T(y)) > \beta(x,y)$

sehingga

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq a \max\left\{d(x,y), \frac{d\big(x,T(x)\big)\, d\big(y,T(y)\big)}{1 + d\big(T(x),T(y)\big)}\right\} + \beta(x,y)\Big(d\big(x,T(y)\big) + d\big(y,T(x)\big)\Big) \tag{3.2.1}$$

Maka T memiliki tepat satu titik tetap

Bukti :

Ambil sebarang $x_0 \in X$, dan misalkan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan pada X yang didefinisikan sebagai :

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n x_0 \text{ untuk } n = 1,2,3,\ldots \tag{3.2.2}$$

- **Akan dibuktikan bahwa terdapat $k \in \mathbb{R}, k < 1$, sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $d(x_n, x_{n+1}) < k^n\, d(x_0, x_1)$**

Menurut (3.2.1) dan (3.2.2), didapat

$$d(x_n, x_{n+1}) = d\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big) \leq a \max\left\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{d\big(x_{n-1}, T(x_{n-1})\big)\, d\big(x_n, T(x_n)\big)}{1 + d\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big)}\right\} + \beta(x_{n-1}, x_n)\Big(d\big(x_{n-1}, T(x_n)\big) + d\big(x_n, T(x_{n-1})\big)\Big)$$

$$= a \max\left\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1}, x_n)\, d(x_n, x_{n+1})}{1 + d(x_n, x_{n+1})}\right\} + \beta(x_{n-1}, x_n)\big(d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)\big),$$

Karena $\forall x, y \in X$, $d(x,y) \geq 0$, maka

$d(x_{n-1}, x_n) d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_{n-1}, x_n)\big(1 + d(x_n, x_{n+1})\big)$

Lalu, $1 + d(x_n, x_{n+1}) \neq 0$, sehingga $\frac{d(x_{n-1}, x_n) d(x_n, x_{n+1})}{(1 + d(x_n, x_{n+1}))} \leq d(x_{n-1}, x_n)$,

Maka, $\max\left\{d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1}, x_n)\, d(x_n, x_{n+1})}{1 + d(x_n, x_{n+1})}\right\} = d(x_{n-1}, x_n)$, sehingga

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq a d(x_{n-1}, x_n) + \beta(x_{n-1}, x_n) d(x_{n-1}, x_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow d(x_n, x_{n+1}) \leq a d(x_{n-1}, x_n) + \beta(x_{n-1}, x_n)\Big(\theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\big)\Big),$$

$$\Leftrightarrow d(x_n, x_{n+1}) \leq a d(x_{n-1}, x_n) + \beta(x_{n-1}, x_n)\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) d(x_{n-1}, x_n) + \beta(x_{n-1}, x_n) \theta(x_{n-1}, x_{n+1}) d(x_n, x_{n+1}),$$

$$\Leftrightarrow \Big(1 - b\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big)\theta(x_{n-1}, x_{n+1})\Big)\, d(x_n, x_{n+1}) \leq \big(a + \beta(x_{n-1}, x_n)\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1})\big) d(x_{n-1}, x_n),$$

$$\Leftrightarrow d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{a + \beta(x_{n-1}, x_n)\, \theta(x_{n-1}, x_{n+1})}{1 - \beta(x_{n-1}, x_n)\theta(x_{n-1}, x_{n+1})} d(x_{n-1}, x_n) \tag{3.2.3}$$

Ketidaksamaan (3.2.3) sama dengan Ketidaksamaan (3.1.3) . Pada pembuktian Teorema 3.1, Ketidaksamaan (3.1.3) menghasilkan Ketidaksamaan (3.1.8) , yaitu $d(x_n, x_{n+1}) < k^n d(x_0, x_1)$

- **Akan dibuktikan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy**

Sifat konstanta a dan fungsi β pada Teorema 3.2 ini sama dengan Teorema 3.1. Dan pada Teorema 3.1, sudah dibuktikan bahwa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy. Pada pembuktian tersebut, syarat pemetaan T pada Teorema 3.1 tidak digunakan. Maka, perbedaan syarat pemetaan Tpada Teorema 3.1 dan Teorema 3.2 tidak berpengaruh. Maka, barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ pada Teorema 3.2 adalah barisan Cauchy. Misalkan,barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke suatu $x^* \in X$.

- **Akan dibuktikan bahwa x^* adalah titik tetap T**

$$d\big(x^*, T(x^*)\big) \leq \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\Big(d(x^*, x_{n+1}), + d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big)\Big) = \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\Big(d(x^*, x_{n+1}) + d\big(T(x_n), T(x^*)\big)\Big)$$

$$\Leftrightarrow d\big(x^*, T(x^*)\big) \leq \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\, d(x^*, x_{n+1}) + \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\left(a \max\left\{d(x_n, x^*), \frac{d\big(x_n, T(x_n)\big)\, d\big(x^*, T(x^*)\big)}{1 + d\big(T(x_n), T(x^*)\big)}\right\} + \beta(x_n, x^*)\Big(d\big(x_n, T(x^*)\big) + d\big(x^*, T(x_n)\big)\Big)\right)$$

$$= \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\, d(x^*, x_{n+1}) + \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\left(a \max\left\{d(x_n, x^*), \frac{d(x_n, x_{n+1})\, d\big(x^*, T(x^*)\big)}{1 + d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big)}\right\} + \beta(x_n, x^*)\Big(d\big(x_n, T(x^*)\big) + d(x^*, x_{n+1})\Big)\right)$$

$$\Leftrightarrow d\big(x^*, T(x^*)\big) \leq \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\, d(x^*, x_{n+1}) + \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\left(a \max\left\{d(x_n, x^*), \frac{d(x_n, x_{n+1})\, d\big(x^*, T(x^*)\big)}{1 + d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big)}\right\} + \beta(x_n, x^*)\Big(\theta\big(x_n, T(x^*)\big)\Big(d(x_n, x^*) + d\big(x^*, T(x^*)\big)\Big) + d(x^*, x_{n+1})\Big)\right),$$

$$\Leftrightarrow d\big(x^*, T(x^*)\big) \leq \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\, d(x^*, x_{n+1}) + \theta\big(x^*, T(x^*)\big) a \max\left\{d(x_n, x^*), \frac{d(x_n, x_{n+1})\, d\big(x^*, T(x^*)\big)}{1 + d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big)}\right\} + \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\beta(x_n, x^*)\theta\big(x_n, T(x^*)\big)\Big(d(x_n, x^*) + d\big(x^*, T(x^*)\big)\Big) + \theta\big(x^*, T(x^*)\big)\beta(x_n, x^*) d(x^*, x_{n+1}),$$

Untuk kesederhanaan, misalkan $s_1 = \theta(x^*, T(x^*))$, $s_2 = \theta(x_n, T(x^*))$, dan $b_1 = \beta(x_n, x^*)$, maka
$d(x^*, T(x^*)) \le s_1\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$s_1 a \max\left\{d(x_n, x^*), \frac{d(x_n,x_{n+1})\, d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_{n+1},T(x^*))}\right\} +$
$s_1 b_1 s_2 \left(d(x_n, x^*) + d(x^*, T(x^*))\right) + s_1 b_1\, d(x^*, x_{n+1})$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \le s_1(1 + b_1)\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$s_1 a \max\left\{d(x_n, x^*), \frac{d(x_n,x_{n+1})\, d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_{n+1},T(x^*))}\right\} +$
$s_1 b_1 s_2\, d(x_n, x^*)$

Misalkan, $M_3 = \max\left\{d(x_n, x^*), \frac{d(x_n,x_{n+1})\, d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_{n+1},T(x^*))}\right\}$

- **Kasus 1 : $\boldsymbol{M_3 = d(x_n, x^*)}$**

$(1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \le s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) +$
$s_1 b_1 s_2 (d(x_n, x^*)) + s_1 a\, d(x_n, x^*)$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \le s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) + s_1(b_1 s_2 + a)(d(x_n, x^*))$,

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \le \frac{s_1(1+b_1)}{1-s_1 b_1 s_2} d(x^*, x_{n+1}) +$
$\frac{s_1(b_1 s_2+a)}{1-s_1 b_1 s_2}(d(x_n, x^*))$

Karena $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_{n+1}) = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_n) = 0$, maka $\lim_{n\to\infty} d(x^*, T(x^*)) = 0$. Jadi, x^* adalah titik tetap T.

- **Kasus 2 : $\boldsymbol{M_3 = \frac{d(x_n,x_{n+1})\, d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_{n+1},T(x^*))}}$**

Dari (3.1.8), bisa didapatkan $\frac{d(x_n,x_{n+1})\, d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_{n+1},T(x^*))} \le \frac{k^n d(x_0,x_1)\, d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_{n+1},T(x^*))}$

Karena $k < 1$, maka saat $n \to \infty, k^n \to 0$, sehingga $\frac{k^n d(x_0,x_1)\, d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_{n+1},T(x^*))} \to 0$.

Maka, $\lim_{n\to\infty} \frac{d(x_n,x_{n+1})\, d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_{n+1},T(x^*))} = 0$. Sehingga ,
$(1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \le s_1(1 + b_1)\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$s_1 a\, \frac{d(x_n,x_{n+1})\, d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_{n+1},T(x^*))} + s_1 b_1 s_2\, d(x_n, x^*)$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \le s_1(1 + b_1)\, d(x^*, x_{n+1}) + s_1 b_1 s_2\, d(x_n, x^*)$,

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \le \frac{s_1(1+b_1)}{(1-s_1 b_1 s_2)} d(x^*, x_{n+1}) +$
$\frac{s_1 b_1 s_2}{(1-s_1 b_1 s_2)} d(x_n, x^*)$

Karena $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_{n+1}) = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_n) = 0$, maka $\lim_{n\to\infty} d(x^*, T(x^*)) = 0$. Jadi, x^* adalah titik tetap T.

❖ **Akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{x^*}$ adalah satu-satunya titik tetap $\boldsymbol{T}$**

Andaikan, terdapat titik tetap T yang lain, misal x'. Maka $T(x') = x'$. Lalu,

$d(x^*, x') = d(T(x^*), T(x')) \le$
$a \max\left\{d(x^*, x'), \frac{d(x^*,T(x^*))\, d(x',T(x'))}{1+d(T(x^*),T(x'))}\right\} +$
$\beta(x^*, x')\left(d(x^*, T(x')) + d(x', T(x^*))\right)$,

$\Leftrightarrow d(x^*, x') \le a \max\left\{d(x^*, x'), \frac{d(x^*,x^*)\, d(x',x')}{1+d(T(x^*),T(x'))}\right\} +$
$\beta(x^*, x')\left(d(x^*, T(x')) + d(x', T(x^*))\right)$,

$\Leftrightarrow d(x^*, x') \le a\, d(x^*, x') + \beta(x^*, x')(d(x^*, x') + d(x', x^*))$,

$\Leftrightarrow d(x^*, x') \le a\, d(x', x^*) + \beta(x^*, x')(2\, d(x^*, x'))$,

$$\Leftrightarrow d(x^*, x') \le (a + 2\beta(x^*, x'))\, d(x^*, x') \qquad (3.2.4)$$

Ketidaksamaan (3.2.4) sama dengan Ketidaksamaan (3.1.13) . Pada pembuktian Teorema 3.1, Ketidaksamaan (3.1.13) menghasilkan Ketidaksamaan $d(x^*, x') < d(x^*, x')$ yang menyebabkan terjadinya kontradiksi. Maka, x^* adalah satu-satunya titik tetap T.
∴ Maka, terbukti bahwa T memiliki tepat satu titik tetap. ■.

Teorema 3.3. Diberikan (X, d_θ) suatu ruang metrik-b *extended* lengkap, dengan $\theta: X \times X \to [1, \infty)$. Misalkan $T: X \to X$ adalah suatu pemetaan/fungsi. Jika terdapat $a \in \mathbb{R}, a > 0$ dan $\beta: X \times X \to [0, \infty)$, serta $\forall x, y \in X$, berlaku
$(*)\ \beta(x, y) = \frac{1-a}{3\,.\theta(x,y)}$
$(**)\ \beta(T(x), y) > \beta(x, y)$
$(***)\ \beta(x, T(y)) > \beta(x, y)$
sehingga

$$d(T(x), T(y)) \le a \max\left\{\begin{aligned} &d(x, y), \frac{d(x, T(x))\, d(y, T(y))}{1 + d(x, y)}, \\ &\frac{d(x, T(x))\, d(y, T(y))}{1 + d(T(x), T(y))} \end{aligned}\right\} + \beta(x, y)\left(d(x, T(y)) + d(y, T(x))\right) + \min\{d(x, T(x)), d(x, T(y)), d(y, T(y)), d(y, T(x))\} \qquad (3.3.1)$$

Maka T memiliki tepat satu titik tetap.

Bukti :

Ambil sebarang $x_0 \in X$, dan misalkan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan pada X yang didefinisikan sebagai :

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n x_0 \text{ , untuk } n = 1,2,3 \qquad (3.3.2)$$

❖ **Akan dibuktikan bahwa terdapat $\boldsymbol{k \in \mathbb{R}, k < 1}$, sehingga untuk setiap $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$, berlaku $\boldsymbol{d(x_n, x_{n+1}) < k^n\, d(x_0, x_1)}$**

Menurut (3.3.1) dan (3.3.2), didapat
$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \le$

$$a \max\left\{\begin{aligned} &d(x_{n-1}, x_n), \frac{d(x_{n-1},T(x_{n-1}))\, d(x_n,T(x_n))}{1+d(x_{n-1},x_n)}, \\ &\frac{d(x_{n-1},T(x_{n-1}))\, d(x_n,T(x_n))}{1+d(T(x_{n-1}),T(x_n))} \end{aligned}\right\} +$$

$\beta(x_{n-1},x_n)\left(d\big(x_{n-1},T(x_n)\big)+d\big(x_n,T(x_{n-1})\big)\right)+$
$\min\begin{Bmatrix} d\big(x_{n-1},T(x_{n-1})\big), d\big(x_{n-1},T(x_n)\big), d\big(x_n,T(x_n)\big), \\ d\big(x_n,T(x_{n-1})\big) \end{Bmatrix}$
$= a\max\begin{Bmatrix} d(x_{n-1},x_n), \frac{d(x_{n-1},x_n)\,d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)}, \\ \frac{d(x_{n-1},x_n)\,d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_n,x_{n+1})} \end{Bmatrix}+$
$\beta(x_{n-1},x_n)\big(d(x_{n-1},x_{n+1})+d(x_n,x_n)\big)+$
$\min\{d(x_{n-1},x_n), d(x_{n-1},x_{n+1}), d(x_n,x_{n+1}), d(x_n,x_n)\}$
,
$\Leftrightarrow d(x_n,x_{n+1})$

$$\le a\max\begin{Bmatrix} d(x_{n-1},x_n), \dfrac{d(x_{n-1},x_n)\,d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)}, \\ \dfrac{d(x_{n-1},x_n)\,d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_n,x_{n+1})} \end{Bmatrix} \qquad (3.3.3)$$

$+\beta(x_{n-1},x_n)d(x_{n-1},x_{n+1})+$
$\min\{d(x_{n-1},x_n), d(x_{n-1},x_{n+1}), d(x_n,x_{n+1}), 0\}$,

Karena $\max\left\{d(x_{n-1},x_n), \frac{d(x_{n-1},x_n)\,d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_n,x_{n+1})}\right\} = d(x_{n-1},x_n)$,

maka $\max\begin{Bmatrix} d(x_{n-1},x_n), \frac{d(x_{n-1},x_n)\,d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)}, \\ \frac{d(x_{n-1},x_n)\,d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_n,x_{n+1})} \end{Bmatrix} = \max\left\{d(x_{n-1},x_n), \frac{d(x_{n-1},x_n)\,d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)}\right\}$

Karena $\forall x,y\in X$, $d(x,y)\ge 0$ maka
$d(x_{n-1},x_n)d(x_n,x_{n+1}) \le d(x_n,x_{n+1})\big(1+d(x_{n-1},x_n)\big)$
Lalu, karena $1+d(x_{n-1},x_n)\ne 0$, Maka $\frac{d(x_{n-1},x_n)d(x_n,x_{n+1})}{(1+d(x_{n-1},x_n))} \le d(x_n,x_{n+1})$,
sehingga
$\max\left\{d(x_{n-1},x_n), \frac{d(x_{n-1},x_n)\,d(x_n,x_{n+1})}{1+d(x_{n-1},x_n)}\right\} \le$
$\max\ \{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}$
Kembali ke (3.3.3), didapat
$d(x_n,x_{n+1}) \le a\max\ \{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}+$
$\beta(x_{n-1},x_n)d(x_{n-1},x_{n+1})+0$,

$\Leftrightarrow d(x_n,x_{n+1}) \le a\max\ \{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}+$
$\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n+1})d(x_{n-1},x_n)+$
$\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n+1})d(x_n,x_{n+1})$,

$\Leftrightarrow \big(1-\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n+1})\big)d(x_n,x_{n+1}) \le$
$a\max\ \{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}+$
$\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n+1})d(x_{n-1},x_n)$

Misalkan, $M_4 = \max\ \{d(x_{n-1},x_n), d(x_n,x_{n+1})\}$

- **Kasus 1 :** $\boldsymbol{M_4 = d(x_{n-1},x_n)}$

$\big(1-\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n-1})\big)d(x_n,x_{n+1}) \le$
$a\,d(x_{n-1},x_n)+\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n-1})\,d(x_{n-1},x_n)$,

$\Leftrightarrow \big(1-\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n-1})\big)d(x_n,x_{n+1}) \le$
$\big(a+\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n-1})\big)\,d(x_{n-1},x_n)$,

$\Leftrightarrow d(x_n,x_{n+1})$

$$\le \frac{a+\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n-1})}{1-\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n-1})}\,d(x_{n-1},x_n) \qquad (3.3.4)$$

Ketidaksamaan (3.3.4) sama dengan Ketidaksamaan (3.1.3) . Pada pembuktian Teorema 3.1, Ketidaksamaan (3.1.3) menghasilkan Ketidaksamaan (3.1.8) , yaitu $d(x_n,x_{n+1}) < k^n d(x_0,x_1)$

- **Kasus 2 :** $\boldsymbol{M_4 = d(x_n,x_{n+1})}$

$\big(1-\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n-1})\big)d(x_n,x_{n+1}) \le$
$a\,d(x_n,x_{n+1})+\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n-1})\,d(x_{n-1},x_n)$,

$\Leftrightarrow \big(1-a-\beta(x_{n-1},x_n)\theta(x_{n-1},x_{n-1})\big)d(x_n,x_{n+1}) \le$
$\beta(x_{n-1},x_n)\,\theta(x_{n-1},x_{n-1})\,d(x_{n-1},x_n)$,

$$\Leftrightarrow d(x_n,x_{n+1}) < \frac{(\beta(x_{n-1},x_{n+1}).\theta(x_{n-1},x_{n+1}))}{(1-a-\beta(x_{n-1},x_{n+1}).\theta(x_{n-1},x_{n+1}))}\,d(x_{n-1},x_n) \qquad (3.3.5)$$

Ketidaksamaan (3.3.5) sama dengan Ketidaksamaan (3.1.9) . Pada pembuktian Teorema 3.1, Ketidaksamaan (3.1.9) menghasilkan Ketidaksamaan (3.1.8) , yaitu $d(x_n,x_{n+1}) < k^n d(x_0,x_1)$

- **Akan dibuktikan $\boldsymbol{(x_n)_{n=1}^{\infty}}$ adalah barisan cauchy**

Sifat konstanta a dan fungsi β pada Teorema 3.3 ini sama dengan Teorema 3.1. Dan pada Teorema 3.1, sudah dibuktikan bahwa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy. Pada pembuktian tersebut, syarat pemetaan T pada Teorema 3.1 tidak digunakan. Maka, perbedaan syarat pemetaan Tpada Teorema 3.1 dan Teorema 3.3 tidak berpengaruh. Maka, barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ pada Teorema 3.3 adalah barisan Cauchy. Misalkan,barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke suatu $x^*\in X$.

- **Akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{x^*}$ adalah titik tetap $\boldsymbol{T}$**

$d\big(x^*,T(x^*)\big) \le$
$\theta\big(x^*,T(x^*)\big)\left(d\big(x^*,x_{n+1}\big),+d\big(x_{n+1},T(x^*)\big)\right) =$
$\theta\big(x^*,T(x^*)\big)\left(d\big(x^*,x_{n+1}\big)+d\big(T(x_n),T(x^*)\big)\right)$,

$\Leftrightarrow d\big(x^*,T(x^*)\big) \le \theta\big(x^*,T(x^*)\big)\,d(x^*,x_{n+1})+$

$$\theta\big(x^*,T(x^*)\big)\left(a\max\begin{Bmatrix} d(x_n,x^*), \frac{d(x_n,T(x_n))\,d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_n,x^*)}, \\ \frac{d(x_n,T(x_n))d(x^*,T(x^*))}{1+d(T(x_n),T(x^*))} \end{Bmatrix}+\beta(x_n,x^*)\left(d\big(x_n,T(x^*)\big)+d\big(x^*,T(x_n)\big)\right)+\min\left\{d\big(x^*,T(x^*)\big), d\big(x^*,T(x_n)\big), d\big(x_n,T(x_n)\big), d\big(x_n,T(x^*)\big)\right\}\right)$$

$= \theta\big(x^*,T(x^*)\big)\,d(x^*,x_{n+1})+$
$\theta\big(x^*,T(x^*)\big)a\max\begin{Bmatrix} d(x_n,x^*), \frac{d(x_n,x_{n+1})\,d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_n,x^*)}, \\ \frac{d(x_n,x_{n+1})d(x^*,T(x^*))}{1+d(x_{n+1},T(x^*))} \end{Bmatrix}+$
$\theta\big(x^*,T(x^*)\big)\beta(x_n,x^*)\left(d\big(x_n,T(x^*)\big)+d(x^*,x_{n+1})\right)+$
$\theta\big(x^*,T(x^*)\big)\min\begin{Bmatrix} d\big(x^*,T(x^*)\big), d(x^*,x_{n+1}), d(x_n,x_{n+1}), \\ d\big(x_n,T(x^*)\big) \end{Bmatrix}$

Karena $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x^*, maka jika $n\to\infty$, $d(x^*,x_{n+1})\to 0$

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \leq \theta(x^*, T(x^*))\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$\theta(x^*, T(x^*))a \max \left\{ \begin{matrix} d(x_n, x^*), \frac{d(x_n, x_{n+1})\, d(x^*, T(x^*))}{1+d(x_n, x^*)}, \\ \frac{d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*))}{1+d(x_{n+1}, T(x^*))} \end{matrix} \right\} +$
$\theta(x^*, T(x^*))\beta(x_n, x^*)\left(d(x_n, T(x^*)) + d(x^*, x_{n+1})\right) +$
$\theta(x^*, T(x^*)) \min \left\{ \begin{matrix} d(x^*, T(x^*)), 0, d(x_n, x_{n+1}), \\ d(x_n, T(x^*)) \end{matrix} \right\}$

$= \theta(x^*, T(x^*))\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$\theta(x^*, T(x^*))a \max \left\{ \begin{matrix} d(x_n, x^*), \frac{d(x_n, x_{n+1})\, d(x^*, T(x^*))}{1+d(x_n, x^*)}, \\ \frac{d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*))}{1+d(x_{n+1}, T(x^*))} \end{matrix} \right\} +$
$\theta(x^*, T(x^*))\beta(x_n, x^*)\left(d(x_n, T(x^*)) + d(x^*, x_{n+1})\right)$,

Karena $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$, maka $\frac{d(x_n, x_{n+1})\, d(x^*, T(x^*))}{1+d(x_n, x^*)} \leq d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*))$, dan $\frac{d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*))}{1+d(x_{n+1}, T(x^*))} \leq d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*))$,
Maka,
$\max \left\{ d(x_n, x^*), \frac{d(x_n, x_{n+1})\, d(x^*, T(x^*))}{1+d(x_n, x^*)}, \frac{d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*))}{1+d(x_{n+1}, T(x^*))} \right\} \leq$
$\max\{d(x_n, x^*), d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*))\}$,
$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \leq \theta(x^*, T(x^*))\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$\theta(x^*, T(x^*))a \max \left\{ \begin{matrix} d(x_n, x^*), \\ d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*)) \end{matrix} \right\} +$
$\theta(x^*, T(x^*))\beta(x_n, x^*) d(x_n, T(x^*)) +$
$\theta(x^*, T(x^*))\beta(x_n, x^*) d(x^*, x_{n+1})$

$= \theta(x^*, T(x^*))\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$\theta(x^*, T(x^*))a \max \left\{ \begin{matrix} d(x_n, x^*), \\ d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*)) \end{matrix} \right\} +$
$\theta(x^*, T(x^*))\beta(x_n, x^*) d(x_n, x^*) +$
$\theta(x^*, T(x^*))\beta(x_n, x^*) d(x^*, x_{n+1})$

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \leq \theta(x^*, T(x^*))\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$\theta(x^*, T(x^*))a \max \left\{ \begin{matrix} d(x_n, x^*), \\ d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*)) \end{matrix} \right\} +$
$\theta(x^*, T(x^*))\beta(x_n, x^*)\theta(x_n, T(x^*))\left(d(x_n, x^*) + d(x^*, T(x^*))\right) + \theta(x^*, T(x^*))\beta(x_n, x^*) d(x^*, x_{n+1})$,

Untuk kesederhanaan, misalkan $s_1 = \theta(x^*, T(x^*))$, $s_2 = \theta(x_n, T(x^*))$, dan $b_1 = \beta(x_n, x^*)$, maka
$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \leq s_1 d(x^*, x_{n+1}) +$
$s_1 a \max \left\{\{d(x_n, x^*), d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*))\}\right\} +$
$s_1 b_1 s_2 (d(x_n, x^*) + d(x^*, x^*)) + s_1 b_1 d(x^*, x_{n+1})$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1) d(x^*, x_{n+1}) +$
$s_1 a \max \{d(x_n, x^*), d(x_n, x_{n+1})\, d(x^*, T(x^*))\} +$
$s_1 b_1 s_2\, d(x_n, x^*)$

Misal, $M_5 = \max \{d(x_n, x^*), d(x_n, x_{n+1}) d(x^*, T(x^*))\}$

- **Kasus 1 :** $\boldsymbol{M_5 = d(x_n, x^*)}$

$(1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1)\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$s_1 a\, d(x_n, x^*) + s_1 b_1 s_2\, d(x_n, x^*)$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1)\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$s_1(a + b_1 s_2)\, d(x_n, x^*)$,

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \leq \frac{s_1(1+b_1)}{(1-s_1 b_1 s_2)} d(x^*, x_{n+1}) +$
$\frac{s_1(a+b_1 s_2)}{(1-s_1 b_1 s_2)} d(x_n, x^*)$,

Karena $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x^* , maka $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_{n+1}) = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_n) = 0$. Sehingga, $\lim_{n\to\infty} d(x^*, T(x^*)) = 0$. Jadi, x^* adalah titik tetap T.

- **Kasus 2 :** $\boldsymbol{M_5 = d(x_n, x_{n+1})\, d(x^*, T(x^*))}$

Dari (3.1.8), bisa didapatkan
$d(x_n, x_{n+1})\, d(x^*, T(x^*)) \leq k^n d(x_0, x_1)\, d(x^*, T(x^*))$,
Karena $k < 1$, maka $n \to \infty, k^n \to 0$, maka $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1})\, d(x^*, T(x^*)) = 0$,
Sehingga , berlaku
$(1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 + b_1)\, d(x^*, x_{n+1}) +$
$s_1 a\, d(x_n, x_{n+1})\, d(x^*, T(x^*)) + s_1 b_1 s_2\, d(x_n, x^*)$,

$\Leftrightarrow (1 - s_1 b_1 s_2) d(x^*, T(x^*)) \leq s_1(1 +$
$b_1)\, d(x^*, x_{n+1}) + s_1 b_1 s_2\, d(x_n, x^*)$,

$\Leftrightarrow d(x^*, T(x^*)) \leq \frac{s_1(1+b_1)}{(1-s_1 b_1 s_2)} d(x^*, x_{n+1}) +$
$\frac{s_1 b_1 s_2}{(1-s_1 b_1 s_2)} d(x_n, x^*)$,

Karena $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x^* , maka $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_{n+1}) = 0$ dan $\lim_{n\to\infty} d(x^*, x_n) = 0$. Sehingga, $\lim_{n\to\infty} d(x^*, T(x^*)) = 0$. Jadi, x^* adalah titik tetap T.

- **Akan dibuktikan bahwa $\boldsymbol{x^*}$ adalah satu-satunya titik tetap $\boldsymbol{T}$**

Andaikan, terdapat titik tetap T yang lain, misal x'. Maka $T(x') = x'$. Lalu,
$d(x^*, x') = d(T(x^*), T(x')) \leq$
$a \max \left\{ d(x^*, x'), \frac{d(x^*, T(x^*))\, d(x', T(x'))}{1+d(x^*, x')}, \frac{d(x^*, T(x^*))\, d(x', T(x'))}{1+d(T(x^*), T(x'))} \right\} +$
$\beta(x^*, x')\left(d(x^*, T(x')) + d(x', T(x^*))\right) +$
$\min\{d(x^*, T(x^*)), d(x^*, T(x')), d(x', T(x')), d(x', T(x^*))\}$,

$= a \max \{d(x^*, x'), 0, 0\} + \beta(x^*, x')(2d(x^*, x')) +$
$\min\{0, d(x^*, x'), 0, d(x', x^*)\}$,

$\Leftrightarrow d(x^*, x') \leq a\, d(x^*, x') + \beta(x^*, x')(2d(x^*, x'))$

$\Leftrightarrow d(x^*, x') \leq (a + 2\beta(x^*, x')\, d(x^*, x')$

Ketidaksamaan (3.3.6) sama dengan Ketidaksamaan (3.1.13) . Pada pembuktian Teorema 3.1, Ketidaksamaan (3.1.13) menghasilkan Ketidaksamaan $d(x^*, x') < d(x^*, x')$ Terjadi kontradiksi. Maka, kesimpulannya x^* adalah satu-satunya titik tetap T.

∴ Maka, terbukti bahwa T memiliki tepat satu titik tetap. ∎

PENUTUP

SIMPULAN

Hasil perumuman Teorema 2.6 yang sebelumnya dibahas oleh Agrawal,dkk [2] ke dalam ruang metrik yang lebih luas, yaitu ruang metrik-b *extended*, adalah Teorema 3.1. Terdapat beberapa modifikasi, yaitu konstanta b pada Teorema 2.6 diubah menjadi fungsi $\beta: X \times X \to [0, \infty)$ dengan beberapa syarat tertentu.

Hasil pembentukan dua bentuk lain dari teorema titik tetap suatu fungsi di dalam ruang metrik-b *extended* adalah Teorema 3.2 dan Teorema 3.3. Perbedaan kedua teorema tersebut dengan Teorema 3.1 adalah syarat pemetaan T yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abbas, M., Altun, I., Simsek, H. (2011). A Fixed point theorem on cone metric spaces with new type contractivity. Banach J. Math. Anal. 5(2). 15-24.

[2] Agrawal, S., Qureshi, K. dan Nema, J. (2016). A fixed point theorems for b-metric space. International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences. 9(1). 45–50.

[3] Ansari, A.H., Chandok, S. dan Ionescu, C. (2014).Fixed point theorems on b-metric spaces for weak contractions with auxiliary functions. J Inequal Appl. 429.

[4] Arshad, M., Ahmad, J. dan Karapinar, E. (2013). Some Common Fixed Point Results in Rectangular Metric Spaces. International Journal of Analysis.

[5] Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Math. Inform. Univ. Ostra. 1, 5–11.

[6] Kamran, T., Samreen, M. dan Ain, Q.U. (2017). A Generalization of b-Metric Space and Some Fixed Point Theorems. Mathematics. 5, 19.

[7] Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with Application. New York : John Wiley & Sons. Inc.

[8] Mishra, P.K., Sachdeva, S. dan Banerjee, S.K. (2014). Some Fixed Point Theorems in b-metric Space. Turkish Journal of Analysis and Number Theory. 2(1). 19-22.

[9] Shatanawi, W., Abodayeh, K., Mukheimer, A. (2018). Some Fixed Point Theorems In Extended b-Metric Spaces. UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics. 80(4).

[10] Subrahmanyam, P.V. (1995). A common fixed point theorem in fuzzy metric spaces. Information Sciences. 83(3–4). 109-112.