

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.15>

Яковенко Н. Д.<sup>1</sup>, к.ф.-м.н.  
Червінко О. П.<sup>2</sup>, к.ф.-м.н.  
Якименко С.М.<sup>3</sup>, к.ф.-м.н.

<sup>1</sup>Yakovenko N.D., Cand. Sci. (Phys.-Math.),  
<sup>2</sup>Chervinko O.P., Cand. Sci. (Phys.-Math.),  
<sup>3</sup>Yakymenko S.M., Cand. Sci. (Phys.-Math.)

## Порівняльний аналіз лінійного та нелінійного правил сумішей при моделюванні напруженого стану півпростору

## Comparative analysis of the linear and nonlinear rules of mixtures in modeling the stress state of a half-space

<sup>1</sup>Державний університет телекомунікацій,  
м. Київ, Україна, 03110, вул. Солом'янська, 7  
e-mail: oksenchuk\_nd@ukr.net  
<sup>2</sup>Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН  
України, 03057, м. Київ, Україна,  
вул. Нестерова, 3,  
e-mail: term@inmech.kiev.ua  
<sup>3</sup>Центральноукраїнський національний  
технічний університет, м. Кіровоград, Україна,  
e-mail: yasm@i.ua

<sup>1</sup>State University of Telecommunications, 03110,  
Kyiv, Ukraine, 7, Solomenska,  
e-mail: oksenchuk\_nd@ukr.net  
<sup>2</sup>S. P. Timoshenko Institute of mechanics of  
National Academy of Sciences of Ukraine, 03057,  
Kyiv, Ukraine, 3, Nesterova  
e-mail: term@inmech.kiev.ua  
<sup>3</sup>Central Ukrainian National Technical University,  
Kyiv, Ukraine, 25006, Kropyvnytskyi, 8, Prospekt  
Universytetskyi, e-mail: yasm@i.ua

У даній статті чисельно досліджується осесиметрична задача про термічне імпульсне навантаження півпростору. Постановка задачі включає співвідношення Коші, рівняння руху, рівняння теплопровідності, початкові умови, теплові та механічні граничні умови. Для моделювання механічної поведінки матеріалу використовується модель течії Боднера-Партома, узагальнена на випадок впливу мікроструктури на непружні характеристики сталі. Для визначення параметрів моделі, що відповідають за границю текучості та тимчасовий опір матеріалу, використано лінійне правило сумішей. Задача розв'язується за допомогою скінченно-елементної методики. Чисельна реалізація задачі проводиться за допомогою покрокового інтегрування за часом. Описано напружений стан півпростору при врахуванні лінійного та нелінійного правил сумішей.

Ключові слова: імпульсне термічне навантаження, модель течії, правило сумішей

In the present work we solve the axially symmetric problem of a half-space under thermal loading. The statement of the problem includes: Cauchy relations, equations of motion, heat conduction equation, initial conditions, thermal and mechanical boundary conditions. The thermomechanical behavior of an isotropic material is described by the Bodner–Partom unified model of flow generalized in the case of microstructure influence on inelastic characteristics of steel. To determine the parameters of the model corresponded to yield stress and yield strength the mixture rule is utilized. The problem is solved with using the finite element technique. The numerical realization of our problem is performed with the help of step-by-step time integration. Equations of the evolution for the inelastic flow model are integrated by the second-order Euler implicit method. The equations of motion are integrated by the Newmark method, whereas the heat-conduction equation is integrated by the first-order implicit method. We use quadrangular isoparametric elements. The parameters of a fine grid are chosen with the help of the criterion of practical convergence of the solutions. The stress state taking into account linear and nonlinear rules of mixtures is described.

Key words: pulse thermal loading, flow model, rule of mixture

Статтю представив член-кор.НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

### Вступ

Багато матеріалів типу сталь або інші механічні сплави в процесі теплової історії можуть зазнавати мікроструктурних перетворень [1]. На стадії достатньо високого нагріву вихідні

фази сталі перетворюються в аустеніт, який на стадії охолодження розпадається на ферит, перліт, бейніт і мартенсит. Ці перетворення супроводжуються змінами фізико-механічних характеристик, прихованими теплотами, появою

об'ємних і зсувних трансформаційних деформацій. В загальному випадку термомеханічна поведінка матеріалу з мікроструктурою може бути описана за допомогою теорії сумішей [2]. При цьому широко використовується підхід, який базується на заміні структурно-неоднорідного матеріалу однорідним, властивості якого в найпростіших випадках обчислюються за допомогою лінійного правила сумішей [3].

У даній роботі на основі чисельного моделювання розглядається осесиметрична задача про термічне навантаження півпростору з мікроструктурними перетвореннями. Проводиться порівняльний аналіз характеристик напруженого стану, отриманих при використанні як лінійного, так і нелінійного правил сумішей.

### Постановка задачі

Розглядається півпростір  $z > 0$ ,  $0 < r < \infty$ . Припускається, що від нуля відмінна лише осьова компонента переміщення  $u_z$ , причому  $u_z = u_z(z, t)$ , а також  $\theta = \theta(z, t)$ . За цих припущень задача для півпростору еквівалентна задачі для стержня  $0 < r < R$ ,  $z > 0$ , на бічній поверхні якого виконуються умови гладкого контакту і теплоізоляції

$$u_r = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = R, \quad z > 0$$

за умов (1) на торці  $z = 0$ .

Математична постановка осесиметричної задачі термомеханіки в циліндричній системі координат  $O r z \varphi$  включає також:

– співвідношення Коші

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r},$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right),$$

де  $u_r$  і  $u_z$  – компоненти вектора переміщень;  $\varepsilon_{rr}$ ,

$\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{rz}$  і  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  – компоненти тензора деформації;

– рівняння руху

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_{rr},$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_{zz},$$

де  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{rz}$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}$  – компоненти тензора напружень;  $\rho$  – густина матеріалу;

– рівняння теплопровідності

$$c_V \dot{\theta} + 3\alpha\theta K_V (\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha\dot{\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - D' = r_s,$$

де  $\theta$  – температура;  $\alpha$ ,  $c_V$  і  $k$  – коефіцієнти лінійного теплового розширення, теплоємності при сталому об'ємі і теплопровідності відповідно;  $K_V$  – модуль об'ємного стиску;  $\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$ ;  $D'$  – швидкість дисипації;  $\theta$  – абсолютна температура;  $c_V$  и  $k$  – об'ємна теплоємність та коефіцієнт теплопровідності;  $r_s$  – потужність заданих внутрішніх джерел тепла; – початкові умови

$$u_r = \dot{u}_r = 0; \quad u_z = \dot{u}_z = 0; \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0,$$

де  $\theta_0$  – початкова температура;

– граничні умови теплового навантаження

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_q} t, & t \leq t_q, \\ 0, & t > t_q; \end{cases} \quad (1)$$

де  $q_0$  – заданий параметр теплового навантаження;  $t_q$  – часовий параметр навантаження – терміни дії теплового імпульсу.

Нелінійна поведінка матеріалу описується термомеханічною моделлю течії Боднера-Партома, яка узагальнена для випадку багатофазового складу матеріалу [4]. Сутність узагальнення полягає у використанні правила сумішей для визначення параметрів моделі, що відповідають за границю течії і тимчасовий опір матеріалу.

Модель течії включає наступні співвідношення

– рівняння адитивності деформації

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{in} + \varepsilon_{ij}^{oph}, \quad i, j = r, z, \varphi,$$

де об'ємна термотрансформаційна деформація  $\varepsilon_{ij}^{oph}$  приймається у вигляді

$$\varepsilon_{ij}^{oph}(\theta, \theta_r, C^\xi) = \frac{V^\xi(\theta) C^\xi(\theta) - V^\xi(\theta_r) C^\xi(\theta_r)}{3V^\xi(\theta_r) C^\xi(\theta_r)} \delta_{ij},$$

– закон Гука, записаний для девіаторної та кульової складових тензора напружень

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - e_{ij}^{in}), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{oph}),$$

де  $s_{ij}$  і  $e_{ij}$  – девіатори тензорів напружень і деформації відповідно;  $G$  і  $K_V$  – модулі зсуву й об'ємного розширення;

– рівняння еволюції Орована-Бейлі для внутрішньої змінної ізотропного зміцнення  $K$

$$\dot{K} = m_1(K_1 - K)\dot{W}^{in}, \quad K(0) = 0,$$

де  $\dot{W}^{in} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$  – потужність непружної деформації,  $m_1, K_1$  – параметри моделі;  
– закон течії Прандтля-Рейса з умовою непружної нестисливості

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = D_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(K_0 + K')^2}{3J_2} \right]^n \right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \varepsilon_{ij}^{in}(0) = 0, \\ \varepsilon_{ij}^{in}(0) = 0,$$

де  $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$ ,  $D_0, n, K_0$  – параметри моделі.

В даній роботі параметри узагальненої моделі течії  $\bar{K}_0$  і  $\bar{K}_1$ , які відповідають за границю текучості та тимчасовий опір матеріалу, для довільного фазового складу визначаються за лінійним правилом сумішей на основі експериментальних даних

$$K_0 \rightarrow \bar{K}_0 = K_0^{(\xi)} C^\xi, \quad K_1 \rightarrow \bar{K}_1 = K_1^{(\xi)} C^\xi,$$

де  $K_1^{(\xi)}, K_0^{(\xi)}$  – параметри моделі для окремих фаз. Відзначимо, що параметри  $m_1$  та  $n$ , які відповідають за швидкість насичення зміцнення та чутливість до швидкості деформування відповідно, для всіх фаз приймаються однаковими.

Для врахування впливу поточного фазового складу на непружні характеристики матеріалу в роботі [4] для визначення коефіцієнтів моделі течії було використано лінійне правило сумішей (ЛПС)

$$\bar{P} = (1 - C_2) P_1 + C_2 P_2,$$

де  $P_1, P_2$  – параметри моделі для компонентів фаз 1 і 2, які мають концентрації  $C_1, C_2, C_1 + C_2 = 1$ .

Для оцінки чутливості результатів моделювання нестационарних процесів до цієї конститутивної гіпотези в даній роботі надається порівняльна характеристика радіальних напружень, отриманих при розрахунку з використанням лінійного та нелінійного правил сумішей (НПС) при  $N = 2$  [5]

$$\bar{P} = (1 - C_2^N) P_1 + C_2^N P_2 \quad (2)$$

У розрахунках приймається  $q_0 = 2 \cdot 10^8 \text{ кВт} / \text{м}^2, \quad t_q = 10^{-8} \text{ с}, \quad R = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}, \\ L = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$

#### Метод розв'язування

Нелінійна задача інтегрується за неявною часовою схемою та на кожному кроці по часу

розв'язується методом простої ітерації. Для прискорення збіжності ітераційного процесу використовується процедура Стефенсона-Ейткена. Рівняння руху інтегруються неявним методом Ньюмарка, рівняння течії – неявним методом Ейлера, рівняння теплопровідності інтегруються по часу також з використанням неявної схеми. Лінеаризована задача термомеханіки розв'язується за допомогою скінчено-елементної методи [6].

#### Результати розрахунків

На рис. 1 показана зміна за часом температури та компоненти напруження  $\sigma_{rr}$  на поверхні  $z = 0$ , а на рис. 2 – залишковий розподіл радіальних напружень  $\sigma_{rr}$  вглиб півпростору. Штриховими лініями показані результати розрахунку за ЛПС, а суцільними – за НПС. Температури початку аустенізації та мартенітного перетворення позначені як  $A_{c1}$  та  $\theta_H$ . В момент часу  $t_a = 0,37 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ , при якому починається аустенізація, рівень напружень при розрахунку за ЛПС дещо вищий за рівень напружень, що розрахований за НПС. Протягом інших проміжків часу розбіжність не суттєва (рис. 1).

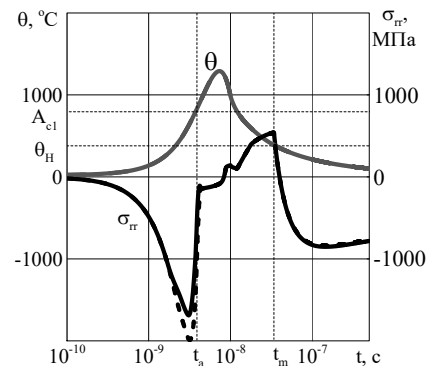


Рис. 1

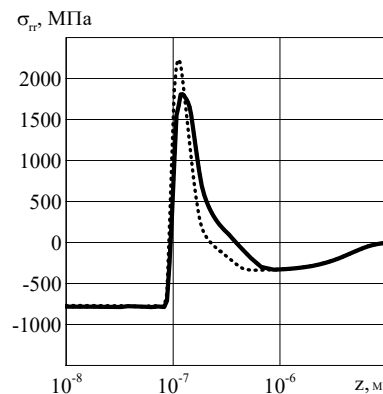


Рис. 2

У залишковому розподілі ЛПС дає завищене значення максимальних розтягувальних напружень в околі «зуба» і не впливає на стискальні напруження в мартенситному шарі (рис. 2).

Таким чином, при  $N > 1$  у рівнянні (2) лінійне правило сумішей дає задовільну оцінку зверху максимальних поточних і залишкових напружень для даного класу задач.

### Список використаних джерел

1. *Senchenkov I. K.* Examination of the thermomechanical state of cylindrical components deposited with layers of austenitic and martensitic steels [Електронний ресурс] / I. K. Senchenkov, O. P. Chervinko, E. Turyk, I. Ryabtsev // *Weld. Int.* – 2008. – Vol. 22, №. 7. – P. 457–464. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1080/09507110802352340>
2. *Руцицкий Я. Я.* Элементы теории смесей / Я. Я. Руцицкий. – К.: Наук. думка, 1991. – 160 с.
3. *Borjesson L.* Simulation of multipass welding with simultaneous computation of material properties [Електронний ресурс] / L. Borjesson, L-E. Lindgren // *Trans of ASME I. of Eng. Mater. Techn.* – 2001. – Vol. 123, №2. – P. 106–111. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1115/1.1310307>
4. *Senchenkov I. K.* Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material [Електронний ресурс] / I. K. Senchenkov, N. D. Oksenchuk // *J. Math. Sci.* – 2013. – V. 190, N 6. – P. 796–803. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1289-6>
5. *Bouquerel J.* Microstructure-based model for the static mechanical behavior of multiphase steel / J. Bouquerel, K. Verbeken, B.C. De Cooman // *Acta Materialia*, 2006. – 54, N 46. – P. 1143–1156. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.10.059>
6. *Zhuk Y.A.* Axisymmetric dynamic problem of coupled thermoviscoplasticity [Електрон. ресурс] / Y.A. Zhuk, I.K. Senchenkov, V.I. Kozlov, G. A. Tabieva // *Int. Appl. Mech.* – 2001. 37, No.10. – P. 1311–1317. – Режим доступу до журн.: <https://doi.org/10.1023/A:1013976219144>

### References

1. *SENCHENKOV, I. K., CHERVINKO, O. P., TURYSK, E., RYABTSEV, I.* (2008) Examination of the thermomechanical state of cylindrical components deposited with layers of austenitic and martensitic steels. *Weld. Int.* [Online] 22 (7). p. 457–464. Available from: <https://doi.org/10.1080/09507110802352340>
2. *Rushchitsky, J.* (1991) *Elementy teorii smesej.* Kiev: Naukova dumka.
3. *BORJESSON, L., LINDGREN, L-E.* (2001) Simulation of multipass welding with simultaneous computation of material properties. *Trans of ASME I. of Eng. Mater. Techn.* [Online] 123 (2). p. 106–111. Available from: <https://doi.org/10.1115/1.1310307>
4. *SENCHENKOV, I. K., OKSENCHUK, N. D.* (2013) Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material. *J. Math. Sci.* [Online] 190 (6). p. 796–803. Available from: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1289-6>
5. *BOUQUEREL, J., VERBEKEN, K., DE COOMAN, B.C.* (2006) Microstructure-based model for the static mechanical behavior of multiphase steel. *Acta Materialia.* [Online] 54 (46). p. 1143–1156. Available from: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2005.10.059>
6. *ZHUK, Y. A., SENCHENKOV, I. K., KOZLOV, V. I., TABIEVA, G. A.* (2001). Axisymmetric dynamic problem of coupled thermoviscoplasticity. *Int. Appl. Mech.* [Online] 37 (10). p. 1311–1317. Available from: <https://doi.org/10.1023/A:1013976219144>

Надійшла до редколегії 26.08.21