

УДК 534.1

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.14>

К. Г. Хорошев<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., доц.  
С. В. Кикоть<sup>2</sup>, к.ф.-м.н., доц.

### Власні частоти та власні форми регулярних ланцюгових коливальних систем

<sup>1</sup> Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т Перемоги, 37

e-mail: khoroshev.kostiantyn@iill.kpi.ua

<sup>2</sup> Національний транспортний університет, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1

e-mail: kykot@ntu.edu.ua

K. G. Khoroshev<sup>1</sup>, Ph.D.(Phys.-Math.), Ass. Prof.

S. V. Kykot<sup>2</sup>, Ph.D.(Phys.-Math.), Ass. Prof.

### Eigenfrequencies and eigenforms of regular chain oscillatory systems

<sup>1</sup>National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», 03056, Kyiv, Prosp. Peremohu, 37

e-mail: khoroshev.kostiantyn@iill.kpi.ua

<sup>2</sup> National transport university, 01010, Kyiv, Mykhaila Omelianovycha–Pavlenka str., 1

e-mail: kykot@ntu.edu.ua

*Класичним підходом при дослідженні власних коливань дискретних коливальних механічних систем є розв'язання вікового рівняння для знаходження власних частот та системи алгебраїчних рівнянь для визначення амплітудних коефіцієнтів. Однак, аналітичне розв'язання вікового рівняння можливе тільки для обмеженого кола дискретних систем, особливо зі скінченним ступенем вільності. До такого класу відносяться регулярні ланцюгові коливальні системи, в яких однакові осцилятори з'єднані між собою послідовно. Регулярні системи розділяються на системи з жорстко закріпленими кінцями, з одним або обома вільними кінцями, що суттєво впливає на пошук власних частот та власних форм. В даній статті показано, як маючи розв'язок для вікового рівняння регулярної системи з жорстко закріпленими кінцями, можна визначити власні частоти та власні форми регулярних систем з одним чи обома вільними кінцями.*

*Ключові слова:* регулярна ланцюгова коливальна система, власні частоти, власні форми.

*The classical approach in the investigation of natural oscillations of discrete mechanical oscillating systems is the solution of the secular equation for finding the eigenfrequencies and the system of algebraic equations for determining the amplitude coefficients (eigenforms). However, the analytical solution of the secular equation is possible only for a limited class of discrete systems, especially with a finite degree of freedom. This class includes regular chain oscillating systems in which the same oscillators are connected in series. Regular systems are divided into systems with rigidly fixed ends, with one or both free ends, which significantly affects the search for eigenfrequencies and eigenforms. This paper shows how, having a solution for the secular equation of a regular system with rigidly fixed ends, it is possible to determine the eigenfrequencies and eigenforms of regular systems with one or both free ends.*

*Key Words:* regular chain oscillating systems, eigenfrequencies, eigenforms.

Статтю представив чден-кореспондент НАН України Жук Я.О.

**Вступ.** Визначення власних частот та власних форм дискретних коливальних механічних систем зі скінченним ступенем вільності досі викликає науковий інтерес у дослідників та науковців [1, 2]. Як відомо [3], ця задача зводиться до розв'язання вікового рівняння для визначення власних частот і системи алгебраїчних рівнянь для визначення амплітудних коефіцієнтів власних форм. Незважаючи на всі

переваги чисельних методів, актуальними є і аналітичні підходи. Останні працюють тільки для обмеженого кола систем, до якого входять регулярні ланцюгові коливальні системи, коли осцилятори з однаковими інерційними та пружними параметрами сполучені послідовно так, що  $i$ -й осцилятор приєднано тільки до попереднього  $i - 1$ -го та наступного  $i + 1$ -го осциляторів [3]. Прикладами регулярних систем є натя-

гнута нитка з бусинками, коливальні системи з лінійними та кутовими переміщеннями (рис. 1).

Для регулярних ланцюгових систем можна отримати аналітичні формули для обчислення значень власних частот та амплітудних коефіцієнтів. Однак, їх виведення суттєво залежить від граничних умов: жорсткого зацмлення або звільнення одного чи обох кінців. В роботах [4, 5] розглядалась класична задача про поперечні коливання достатньо натягнутої нитки зі скінченою кількістю бусинок (рис. 1,а), що є прикладом системи з двома жорстко закріпленими кінцями. Системи з одним вільним кінцем (рис. 1,б) були досліджені в [6, 7], причому їх методика розв'язання базувалась на способі, запропонованому у [4], який полягає у прямому розв'язанні алгебраїчних рівнянь відносно амплітудних коефіцієнтів. Виведення аналітичних виразів власних частот та амплітудних коефіцієнтів для систем, що мають два вільних кінця (рис. 1,в), є питанням відкритим.

В даній статті на основі методики рекурентних співвідношень визначення вікового рівняння регулярної системи з жорстко закріпленими кінцями [5] отримані аналітичні вирази для власних частот та амплітудних коефіцієнтів систем з одним чи обома вільними кінцями.

**Система з двома жорстко закріпленими кінцями.** Наведемо основні співвідношення для задачі малих поперечних коливань  $n$  намистинок (рис. 1,а) однакової маси  $m$ , нанизаних на однакових відстанях  $a$  на достатньо натягнутої нитку довжиною  $l$  з жорстко закріпленими кінцями. Натяг нитки позначимо за  $\vec{S}$ . Позначивши  $b = \frac{S}{ma}$ , запишемо систему алгебраїчних рівнянь для визначення власної частоти  $k$  та амплітудних коефіцієнтів  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) [5]

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_1 - \beta_2 &= 0, \\ -\beta_1 + \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_2 - \beta_3 &= 0, \\ \dots \dots \dots & \dots, \\ -\beta_{n-2} + \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_{n-1} - \beta_n &= 0, \\ -\beta_{n-1} + \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_n &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Вікове рівняння представимо у вигляді  $r_n = 0$ , де  $r_n$  — визначник матриці коефіцієнтів системи (1), який розкривається за допомогою рекурентних співвідношень [5]

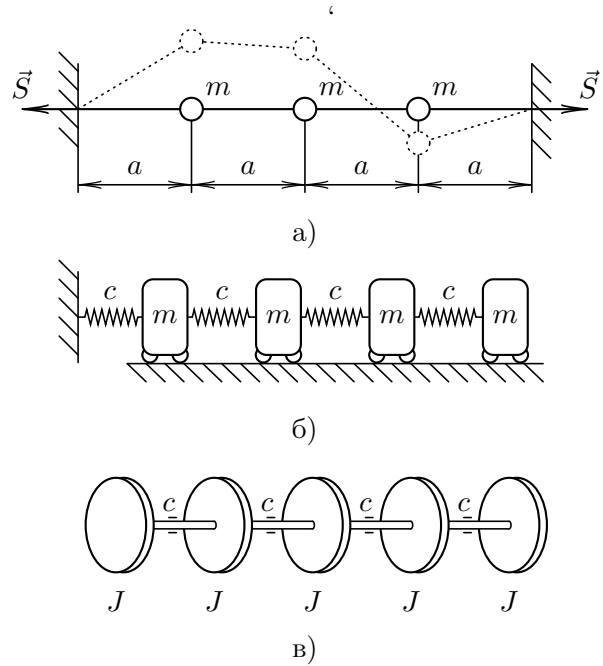


Рис. 1: Приклади регулярних ланцюгових систем: а) нитка з бусинками; б) з лінійними переміщеннями; в) з кутовими переміщеннями.

$$\begin{aligned} n = 1: r_1 &= 2 - \frac{k^2}{b}; \\ n = 2: r_2 &= r_1^2 - 1; \\ n > 2: r_n &= r_1 r_{n-1} - r_{n-2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для того, щоб останню формулу можна було використати при  $n = 1, 2$  штучно покладемо  $r_0 = 1$  та  $r_{-1} = 0$ .

Оскільки корені вікового рівняння  $r_n = 0$  додатні, то  $0 < \frac{k^2}{2b} < 1$ . Позначивши

$$1 - \frac{k^2}{2b} = \cos \alpha, \quad (3)$$

для  $i$ -го рівняння (2) при  $1 \leq i \leq n$  запишемо

$$r_i + r_{i-2} = 2 \cos \alpha r_{i-1}. \quad (4)$$

Взявши  $r_i = C \sin(i+1)\alpha$  ( $i = 1, \dots, n$ ), де  $C$  — невідома стала, після підставлення в (4) одержимо тригонометричну тотожність при  $i > 1$ . Покладемо в рівнянні (4)  $i = 1$  та знайдемо  $C = \sin^{-1} \alpha$ , ( $\alpha \neq \pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ).

Для  $r_i$  ( $i = -1, 0, 1, 2, \dots, n$ ) маємо

$$r_i = \frac{\sin(i+1)\alpha}{\sin \alpha}, \quad (\alpha \neq \pi m, m \in \mathbb{Z}), \quad (5)$$

а вікове рівняння набуває вигляду

$$\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha} = 0, \quad (6)$$

розв'язок якого  $\alpha = \frac{\pi p}{n+1}$ , де  $p \neq m(n+1)$ ,  $p, m \in \mathbb{Z}$ . Множину розв'язку можна розбити на  $n$  послідовностей

$$A_l = \{\alpha_{lm} : \pm \alpha_l + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}\}, \quad (7)$$

таких, що для будь-якого  $m \in \mathbb{Z}$  виконується співвідношення

$$\cos \alpha_{lm} = \cos \alpha_l. \quad (8)$$

Тут  $\alpha_l = \frac{\pi l}{n+1}$  ( $l = 1, \dots, n$ ).

Зі співвідношення (3) висновуємо, що кожна така  $l$ -а послідовність відповідає власній частоті  $k_l$

$$k_l = 2\sqrt{b} \sin \frac{\pi l}{2(n+1)}, \quad (l = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Для визначення амплітудних коефіцієнтів  $\beta_{il}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), що відносяться до власних частот  $k_l$  ( $l = 1, \dots, n$ ), перепишемо систему (1) у вигляді [5]

$$\beta_{i-1,l} - 2\beta_{il} \cos \alpha_l + \beta_{i+1,l} = 0, \quad (10)$$

де  $i = 1, \dots, n$ .

Нетрудно бачити, що

$$\beta_{il} = \frac{\sin i \alpha_l}{\sin \alpha_l} = \frac{\sin i \frac{\pi l}{n+1}}{\sin \frac{\pi l}{n+1}}, \quad (i, l = 1, \dots, n) \quad (11)$$

— є розв'язком алгебраїчної системи (10).

**Система з одним вільним кінцем.** В якості прикладу розглянемо малі поздовжні коливання  $n$  послідовно з'єднаних між собою пружинами візків однакової маси  $m$ , що котяться по горизонтальній поверхні без тертя (рис. 1,б). Перший лівий візок приєднаний пружиною до нерухомої вертикальної стіни. Всі пружини мають однакову жорсткість  $c$ .

Система алгебраїчних рівнянь для визначення власної частоти  $k$  та амплітудних коефіцієнтів  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) відрізняється від системи алгебраїчних рівнянь (1) параметром  $b$  (тут  $b = \frac{c}{m}$ ) та останнім рівнянням

$$-\beta_{n-1} + \left(1 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_n = 0. \quad (12)$$

Позначимо визначник матриці коефіцієнтів системи рівнянь (1) з заміненям останнім рівнянням (12) за  $\Delta_n$  та знайдемо його за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} n = 1: \Delta_1 &= r_1 - 1, \\ n = 2: \Delta_2 &= (r_1 - 1)r_1 - 1, \\ n > 2: \Delta_n &= (r_1 - 1)r_{n-1} - r_{n-2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Підставляючи  $r_{n-1}$  та  $r_{n-2}$ , що визначаються формулами (5), у вікове рівняння  $\Delta_n = 0$ , після нескладних тригонометричних перетворень отримуємо

$$\cos \frac{(2n+1)\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = 0, \quad (14)$$

де  $\alpha \neq \pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Розв'язок останнього рівняння має вигляд

$$\alpha = \frac{(2p+1)\pi}{2n+1}, \quad (\alpha \neq \pi p, p \in \mathbb{Z}). \quad (15)$$

Як і в попередній задачі, розіб'ємо отриманий розв'язок на  $n$  послідовностей (7), таких, що для будь-якого  $m \in \mathbb{Z}$  справедливо співвідношення (8) при  $\alpha_l = \frac{(2l-1)\pi}{2n+1}$  ( $l = 1, \dots, n$ ).

Отже, з виразів (3) для власних частот  $k_l$  одержуємо

$$k_l = 2\sqrt{b} \sin \frac{(2l-1)\pi}{2(2n+1)}, \quad (l = 1, \dots, n). \quad (16)$$

Для кожної власної частоти  $k_l$  ( $l = 1, \dots, n$ ) шукаємо розв'язки системи алгебраїчних рівнянь (1) з заміненям останнім рівнянням (12) у модифікованому вигляді (11)

$$\beta_{il} = \frac{\sin(i\alpha_l + \gamma_l)}{\sin(\alpha_l + \gamma_l)}, \quad (i, l = 1, \dots, n), \quad (17)$$

де  $\gamma_l$  ( $l = 1, \dots, n$ ) — деякі сталі.

Першим  $n-1$  рівнянням системи рівнянь (1) вирази (17) задовольняють. З останнього рівняння (12) отримуємо тригонометричне рівняння для знаходження  $\gamma_l$ , яке після елементарних перетворень набуває вигляду

$$2 \sin \frac{\alpha_l}{2} \cos \left( \frac{(2n+1)\alpha_l}{2} + \gamma_l \right) = 0. \quad (18)$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо

$$\gamma_l = \frac{\pi}{2} - \frac{(2n+1)\alpha_l}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Отже, для амплітудних коефіцієнтів маємо

$$\beta_{il} = \frac{\cos \frac{(2(n-i)+1)\alpha_l}{2}}{\cos \frac{(2n-1)\alpha_l}{2}}. \quad (20)$$

Тут  $i, l = 1, \dots, n$ .

**Система з обома вільними кінцями.**

Розглянемо малі крутильні коливання прямого пружного валу на якому рівновіддалено закріплено  $n > 1$  дисків, що мають однакові моменти інерції  $J$  та однакову жорсткість  $c$  при крученні послідовних ділянок валу між дисками (рис. 1,в). Вал може вільно обертатися навколо власної осі.

Взявши  $b = \frac{c}{J}$ , запишемо систему алгебраїчних рівнянь для визначення власної частоти  $k$  та амплітудних коефіцієнтів  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_1 - \beta_2 &= 0, \\ -\beta_1 + \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_2 - \beta_3 &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots, & \\ -\beta_{n-2} + \left(2 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_{n-1} - \beta_n &= 0, \\ -\beta_{n-1} + \left(1 - \frac{k^2}{b}\right) \beta_n &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Якщо скласти між собою всі рівняння системи (21), одержимо

$$\frac{k^2}{b} (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) = 0. \quad (22)$$

Очевидно, що останнє рівняння виконується при  $k_1 = 0$ , причому набір амплітудних коефіцієнтів, що відповідають нульовій власній частоті,  $\beta_{11} = \beta_{21} = \dots = \beta_{n1} = 1$ , є розв'язком системи (21).

Для визначення інших власних частот складемо вікове рівняння  $D_n = 0$ , де  $D_n$  визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} n = 2: D_2 &= \Delta_1^2 - 1, \\ n \geq 3: D_n &= \Delta_1 \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Для того, щоб останнє рівняння (23) було справедливим для  $n = 2$ , формально покладемо  $\Delta_0 = 1$ .

Підставляючи в (23) вирази (13), для  $n \geq 2$  маємо

$$D_n = (r_1 - 1)^2 r_{n-2} - 2(r_1 - 1) r_{n-3} + r_{n-4}. \quad (24)$$

При цьому  $r_i$  ( $i = -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n$ ) описуються співвідношеннями (5).

Розкриваючи вікове рівняння  $D_n = 0$  за допомогою виразів (5), після нескладних тригонометричних перетворень запишемо

$$\sin n\alpha (\cos \alpha - 1) = 0 \quad (\alpha \neq \pi m, m \in \mathbb{Z}), \quad (25)$$

звідки знаходимо

$$\alpha = \frac{p\pi}{n} \quad (p \neq mn; p, m \in \mathbb{Z}). \quad (26)$$

Аналогічно попереднім випадкам, отриманий розв'язок можна розбити на  $n - 1$  послідовностей (7), таких, що для будь-якого  $m \in \mathbb{Z}$  справедливо співвідношення (8) при  $\alpha_l = \frac{(l-1)\pi}{n}$  ( $l = 2, \dots, n$ ).

Розбиття розв'язку (26) на лише  $n - 1$  послідовностей означає, що зі співвідношення (3) ми можемо знайти лише  $(n - 1)$  власних частот. Це сталося тому, що перехід вікового рівняння до тригонометричного представлення зумовив втрату кореня  $k_1 = 0$ .

З врахуванням  $k_1 = 0$ , формули для визначення власних частот  $k_l$  одержуємо з виразу (3)

$$k_l = 2\sqrt{b} \sin \frac{(l-1)\pi}{2n}, \quad (l = 1, \dots, n). \quad (27)$$

Амплітудні коефіцієнти  $\beta_{il}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) для кожної власної частоти  $k_l$  ( $l = 1, \dots, n$ ) визначаємо з системи (21) за допомогою рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned} l = 1: \beta_{i1} &= 1, \\ i = 1: \beta_{1l} &= 1, \\ i = 2: \beta_{2l} &= 2 \cos \alpha_l - 1, \\ i > 2: \beta_{il} &= -\beta_{i-2,l} + 2\beta_{i-1,l} \cos \alpha_l. \end{aligned} \quad (28)$$

Тут  $i = 1, \dots, n; l = 2, \dots, n$ .

**Майже регулярна ланцюгова система з однією вільним кінцем.** Розглянемо малі поперечні коливання будівлі з  $(n - 1)$  однотипними поверхами та  $n$ -м поверхом-дахом (рис. 2). Кожен поверх може зсуватися відносно сусіднього в горизонтальній площині. Іншими видами рухів поверхів (їх згин, скручування, поздовжнє осідання тощо) нехтуємо.

Оскільки всі поверхи однотипні, будемо вважати, що всі поверхи, окрім поверху-даху, мають однакову масу  $m$  та однакову жорсткість  $c$  при зсуві; поверх-дах вдвічі легший за типовий поверх, але його жорсткість аналогічна жорсткості типового поверху.

Позначимо  $b = \frac{c}{m}$ , тоді система алгебраїчних рівнянь для визначення власної частоти  $k$  та амплітудних коефіцієнтів  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) відрізнятиметься від системи алгебраїчних рівнянь (1) останнім рівнянням

$$-\beta_{n-1} + \left(1 - \frac{k^2}{2b}\right) \beta_n = 0. \quad (29)$$

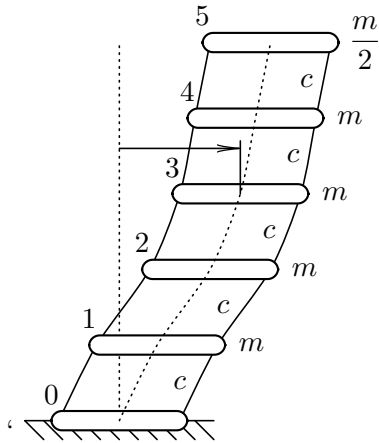


Рис. 2: Поперечні коливання будівлі з  $(n - 1)$  однотипними поверхами та  $n$ -м поверхом-дахом

Запишемо вікове рівняння  $\Gamma_n = 0$ , де

$$\begin{aligned} n = 1: \Gamma_1 &= \frac{1}{2}r_1, \\ n = 2: \Gamma_2 &= \frac{1}{2}r_1^2 - 1, \\ n > 2: \Gamma_n &= \frac{1}{2}r_1r_{n-1} - r_{n-2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Вікове рівняння  $\Gamma_n = 0$  з використанням виразів (5) перепишемо у вигляді тригонометричного рівняння

$$\cos n\alpha \sin \alpha = 0 \quad (\alpha \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}), \quad (31)$$

розв'язок якого

$$\alpha = \frac{(2p + 1)\pi}{2n}, \quad (p \in \mathbb{Z}). \quad (32)$$

Розіб'ємо множину отриманого розв'язку на  $n$  послідовностей (7), таких, що для будь-якого  $m \in \mathbb{Z}$  справедливо співвідношення (8) при  $\alpha_l = \frac{(2l-1)\pi}{2n}$  ( $l = 1, \dots, n$ ).

Для власних частот  $k_l$  з рівняння (3) маємо

$$k_l = 2\sqrt{b} \sin \frac{(2l - 1)\pi}{4n}, \quad (l = 1, \dots, n). \quad (33)$$

Наведемо отримані шляхом розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (1) з заміненим останнім рівнянням (29) формули амплітудних коефіцієнтів  $\beta_{il}$  ( $i = 1, \dots, n$ ), що відповідають власним частотам  $k_l$  ( $l = 1, \dots, n$ ),

$$\beta_{il} = \frac{\cos(n - i)\alpha_l}{\cos(n - 1)\alpha_l}, \quad (i, l = 1, \dots, n). \quad (34)$$

**Чисельний приклад.** В (таб. 1) наведені значення величин  $\frac{k_l}{2\sqrt{b}}$  для будівель з різною кількістю поверхів.

Табл. 1: Значення величин  $\frac{k_l}{2\sqrt{b}}$  для будівлі з  $n$  поверхами.

$l \backslash n$	1	3	5	7
1	0,70711	0,25882	0,15643	0,11196
2		0,70711	0,45399	0,33028
3		0,96593	0,70711	0,53203
4			0,89101	0,70711
5			0,98769	0,84672
6				0,94388
7				0,99371

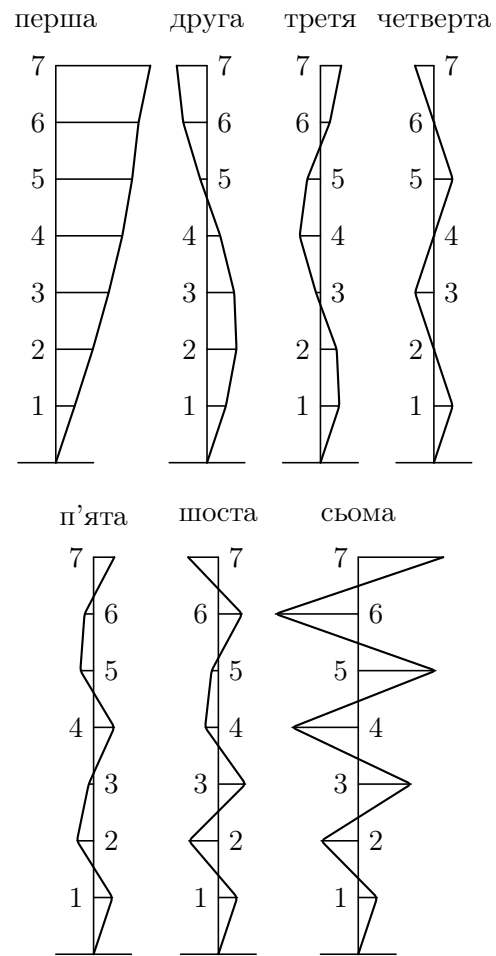


Рис. 3: Власні форми поперечних коливань будівлі з  $n = 7$  поверхами

Як видно з таблиці та формул (33), значення власних частот багатоповерхової будівлі лежать в проміжку  $(0, 2\sqrt{b})$ . Зі збільшенням кількості поверхів (збільшенням кількості осциляторів  $n$ ) найнижча частота зменшується, а найвища — збільшується. Очевидно, що такий саме якісний висновок можна зробити для будь-якої розглядуваної в роботі регулярної системи.

На (рис. 3) зображені власні форми будів-

лі з  $n = 7$  поверхами. Амплітудні коефіцієнти обчислені за формулами (34).

**Висновки.** Методика пошуку власних частот та власних форм регулярної ланцюгової коливальної механічної системи з жорстко закріпленими кінцями, що базується на представленні лівої частини вікового рівняння за допомогою рекурентних співвідношень розкриття визначника тридіагональної матриці [5], розповсюджена на випадки регулярних ланцюгових коливальних механічних систем з одним чи двома вільними кінцями. При цьому, визначники матриці коефіцієнтів систем алгебраїчних рівнянь для визначення власної частоти та амплітудних коефіцієнтів для механі-

чних систем з одним чи двома вільними кінцями представлені через рекурентні співвідношення вираження лівої частини вікового рівняння, що стосується механічної системи з жорстко-закріпленими кінцями. Отримані аналітичні формули обчислення власних форм та амплітудних коефіцієнтів.

Розглянута майже регулярна ланцюгова коливальна механічна системи з одним вільним кінцем, в якій крайній осцилятор має вдвічі меншу інерційну характеристику. Методика розв'язання така сама, як і для регулярних систем. Знайдені аналітичні вирази для власних чисел та амплітудних коефіцієнтів. Наведений чисельний приклад.

### Список використаних джерел

1. Rao S.S. Mechanical Vibrations: [the 6th edition in SI Units] / S.S. Rao. — Harlow: Pearson Education, 2018. — 1290p.
2. Tiwari R. Rotor System: Analysis and Identification / Rajiv Tiwari. — Boca Raton: CRC Press, 2018. — 1070 p.
3. Василенко М.В. Теорія коливань та стійкість руху: Підручник / М.В. Василенко, О.М. Алексейчук. — Київ: Вища школа, 2004. — 525 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Оцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем: [изд. 2-е, перераб. и доп.] / Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн. — Москва: Гостехиздат, 1950. — 359 с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний: учебное пособие: [изд. 4-е, исправл.] / И.М. Бабаков. — Москва: Дрофа, 2004. — 591 с.
6. Geradin M. Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics: [the 3rd edition] / M. Geradin, D. Rixen. — Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2015. — 598 p.
7. Thomson W.T. Theory of Vibrations with Applications: [the 5th Edition] / W.T. Thomson, M.D. Dahleh. — London: Pearson education, 1998. — 544 с.

### References

1. RAO S.S. (2018) *Mechanical Vibrations*. 6th Ed. in SI Units. Harlow: Pearson Education, 2018.
2. TIWARI R. (2018) *Rotor System: Analysis and Identification*. Boca Raton: CRC Press.
3. VASYLENKO M.V., ALEKSEICHUK O.M. (2004) *Teoriia kolyvan ta stiiikist rukhu: Pidruchnyk*. Kyiv: Vyshcha shkola.
4. GANTMAHER F.R., KREJN M.G. (1950) *Ocillyacionnye matricy i yadra i malye kolebaniya mekhanicheskikh sistem*. 2nd Ed. Moskva: Gostekhizdat.
5. BABAKOV I.M. (2004) *Teoriya kolebaniy*. 4th Ed. Moskva: Drofa
6. GERADIN M., RIXEN D. (2015) *Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics*. 3rd Ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
7. THOMSON W.T., DAHLEH M.D. (1998) *Theory of Vibrations with Applications*. 5th Ed. London: Pearson education.

Надійшла до редколегії 31.08.2021