

УДК 539.376

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.3>

Голуб В. П., д.т.н, проф.

V. P. Golub, D. Sci., Prof.

**Щодо розрахунку релаксації напружень  
в тонкостінних циліндричних оболонках  
із лінійно-в'язкопружних матеріалів**

**Towards the analysis of stress relaxation in  
thin-walled cylindrical shells made of linear  
viscoelastic materials**

Національна академія наук України, Інститут  
механіки ім. С.П.Тимошенка, 303057, м. Київ,  
вул. Несторова, 3  
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

National Academy of Sciences of Ukraine,  
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057, Kyiv,  
Nesterov str., 3,  
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

*Розв'язуються задачі розрахунку релаксації напружень у тонкостінних циліндричних оболонках з лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного та двовісного навантаження. Розв'язки будуються на основі тривимірної моделі в'язкопружності виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів. В'язкопружні властивості матеріалу задаються співвідношеннями, що встановлюють залежність між інтенсивностями напружень і деформацій та між середнім напруженням й об'ємною деформацією у формі Boltzmann-Volterra. Ядра інтенсивності релаксації та об'ємної релаксації задаються дробово-експоненційними функціями Работнова. Параметри ядер релаксації визначаються за результатами випробувань на повзучість із використанням залежностей між ядрами повзучості за умов складного напруженого стану і ядрами повзучості за умов одновимірного напруженого стану. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку релаксації нормальних та дотичних напружень у тонкостінних циліндричних оболонках з „поліетилену високої щільності ПЕВД” за умов одновісного розтягу, чистого кручення та комбінованого навантаження розтягом із крученням.*

*Ключові слова: тонкостінні циліндричні оболонки, лінійно-в'язкопружні матеріали, двовісне навантаження, релаксація напружень.*

*The problems of stress relaxation analysis in thin-walled cylindrical shells made of linear viscoelastic materials under uniaxial and biaxial loading have been solved. The analysis is based on a three-dimensional model of viscoelasticity starting from the hypothesis of the deviators proportionality. The viscoelastic properties of a material are given with relationships that establish the dependence between stress and strain intensities as well as between the mean stress and volumetric strain by the Boltzmann-Volterra type equation. The kernels of relaxation intensity and volumetric relaxation are given with the Rabotnov exponential-fractional functions. The parameters of relaxation kernels are determined from creep test result using the relationships between creep kernels under the complex stress state and creep kernels under the one-dimensional stress state. The problems of the analysis of normal and tangential stresses relaxation in thin-walled cylindrical shells made of high density polyethylene "PEVD" under uniaxial tension, pure torsion and combined tension with torsion loading have been solved and experimentally approved.*

*Key Words: thin-walled cylindrical shells, linear viscoelastic materials, biaxial loading, stress relaxation .*

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

**Вступ**

Зазвичай вважається, що в задачах теорії повзучості, де потрібно оцінити величину деформацій, що розвиваються за часом, навантаження, як правило, постійне або задане.

Однак існує інший клас важливих практичних задач, коли фіксується не навантаження, а переміщення, так що повзучість у цих задачах призводить до зменшення навантаження, необхідного для підтримки заданого

переміщення. Це явище відомо як процес релаксації напружень при постійних деформаціях і реалізується як в області підвищених, так і в області кімнатних температур. Релаксація напружень викликає, наприклад, падіння напружень затягування в болтових з'єднаннях, зменшення сприятливих залишкових напружень після застосування технологій для зміцнення, знижує щільність посадки диска на вал в умовах його роботи при підвищеній температурі.

У роботах [1, 2] розв'язано низку задач релаксації напружень у найпростіших елементах конструкцій на основі технічних теорій повзучості. У роботі [3] задача розрахунку релаксації напружень розв'язується із використанням рівнянь Boltzmann-Volterra у формі суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості. У даній роботі розв'язок задачі розрахунку релаксації напружень будуватиметься на основі гіпотези пропорційності девіаторів.

### 1. Постановка задачі

Розглядається процес релаксації напружень у тонкостінній циліндричній оболонці з лінійно-в'язкопружного матеріалу із середнім діаметром  $D$  і товщиною стінки  $h$  (рис. 1). Товщина стінки

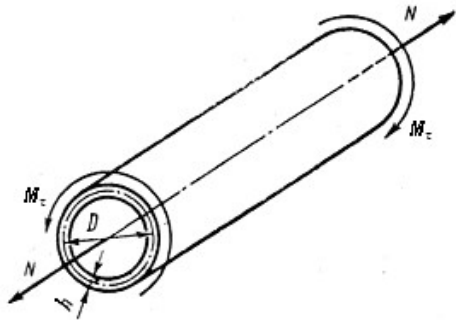


Рис. 1. Геометрія оболонки

$h \ll D$ . Оболонка навантажується постійними за часом крутним моментом  $M_\tau$  і осьовою силою  $N$ , що розтягує.

Напружений стан оболонки двовісний, однорідний й статично визначений. Нормальне  $\sigma_{11}$  й дотичне  $\tau_{21}$  напруження як у межах, так і за межами пружності визначаються за формулами [1]

$$\sigma_{11} = \frac{N}{\pi D h}, \quad \tau_{21} = \frac{2 M_\tau}{\pi D^2 h}. \quad (1.1)$$

Залежність між компонентами тензора напружень  $\sigma_{ij}$ , тензора деформацій  $\varepsilon_{ij}$  і часом  $t$

задається, виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів, системою рівнянь [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t) &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(t, \varepsilon_i)}{\varepsilon_i(t)} \left( \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) \right); \\ \sigma_i(\varepsilon_i, t) &= \frac{3E}{2(1+\nu)} \left( \varepsilon_i(t) - \lambda_i \int_0^t R_i(t-\tau) \varepsilon_i(\tau) d\tau \right); \\ \sigma_0(\varepsilon_v, t) &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \left( \varepsilon_v(t) + \lambda_v \int_0^t R_v(t-\tau) \varepsilon_v(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де  $\varepsilon_v(t)$  і  $\varepsilon_i(\sigma_i, t)$  – об'ємна деформація і інтенсивність деформацій повзучості;  $\sigma_0(t)$  і  $\sigma_i(\varepsilon_i, t)$  – середнє напруження й інтенсивність напружень;  $R_i(t-\tau)$  і  $R_v(t-\tau)$  – ядра інтенсивності релаксації й об'ємної релаксації;  $E$  – модуль пружності;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\lambda_i$ ,  $\lambda_v$  – реологічні параметри;  $\delta_{ij}$  – одинична функція Кронекера.

Ядра інтенсивності релаксації  $R_i(t-\tau)$  й об'ємної релаксації  $R_v(t-\tau)$  задаються дробово-експоненціальними функціями, так що

$$R_i(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha_i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_i + \beta_i)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha_i)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_i)]} \quad (1.3)$$

і відповідно

$$R_v(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha_v}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_v + \beta_v)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha_v)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]}, \quad (1.4)$$

де  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\alpha_v$ ,  $\beta_v$ ,  $\lambda_v$  – параметри ядер, що визначаються експериментально;  $\Gamma[\cdot]$  – гамма-функція Ейлера.

Задача полягає у визначенні параметрів ядер інтенсивності релаксації й об'ємної релаксації лінійно-в'язкопружних матеріалів і у розв'язку задач розрахунку релаксації напружень у тонкостінних циліндричних оболонках за умов двовісного навантаження розтягом із крученням.

### 2. Визначення параметрів ядер релаксації

Параметри  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  ядер релаксації в (1.3) і (1.4), виходячи з інтегрального зв'язку між ядрами релаксації  $R(t)$  і ядрами повзучості  $K(t)$

$$R(t) - K(t) = \lambda \int_0^t K(t - \tau) d\tau, \quad (2.1)$$

збігаються за величиною з відповідними параметрами ядер повзучості.

Параметри  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  ядер повзучості визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер дробово-експоненційними функціями. Дискретні значення ядер повзучості розраховуються за співвідношеннями, що встановлюють залежність між ядрами повзучості за умов складного напруженого стану і ядрами повзучості за умов одновимірних напружених станів. Одновимірні напружені стани розглядаються як базові.

У якості базових напружених станів обрано одновісний розтяг з виміром поздовжніх і поперечних деформацій повзучості, а також одновісний розтяг й чисте кручення з виміром поздовжніх і зсувних деформацій повзучості.

Залежність між ядрами повзучості  $K_i(t)$  й  $K_v(t)$  за умов складного напруженого стану і ядрами повзучості  $K_{11}(t)$ ,  $K_{22}(t)$ ,  $K_{21}(t)$  за умов одновимірних базових напружених станів задається співвідношеннями

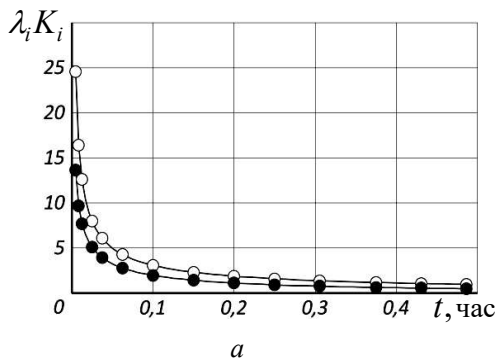
$$\lambda_i K_i(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) + \nu \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 + \nu} \quad (2.2)$$

$$\lambda_\nu K_\nu(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) - 2\nu \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 - 2\nu}$$

і відповідно співвідношеннями

$$\lambda_i K_i(t) = \lambda_{21} K_{21}(t)$$

$$\lambda_\nu K_\nu(t) = \frac{3\lambda_{11} K_{11}(t) - 2(1 + \nu)\lambda_{21} K_{21}(t)}{1 - 2\nu}. \quad (2.3)$$



Тут  $K_{11}(t)$ ,  $K_{22}(t)$ ,  $K_{21}(t)$  – ядра поздовжньої, поперечної й зсувної повзучості за умов одновимірних напружених станів;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

### 3. Релаксація напружень в оболонках

Розв'язується задача розрахунку релаксації нормальних та дотичних напружень в тонкостінних циліндричних оболонках із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу, чистого кручення та комбінованого навантаження розтягом із крученням.

3.1. *Матеріал оболонки.* Матеріальні константи. Релаксація напружень розраховується в тонкостінних циліндричних оболонках із „поліетилену високої щільності ПЕВД”. Діаметр серединної поверхні оболонки  $D = 46$  мм, товщина стінки  $h = 5$  мм. Значення пружних констант „поліетилену ПЕВД”, а також експериментальні дані по повзучості й релаксації напружень в оболонках з „поліетилену ПЕВД” запозичені з [5].

Дискретні значення ядер інтенсивності деформацій повзучості  $K_i(t)$  й об'ємної повзучості  $K_v(t)$  поліетилену високої щільності („поліетилену високої щільності ПЕВД”) у лінійній області деформування, що розраховані за рівняннями (2.2) і (2.3), нанесені на рис. 2, а й 2, б відповідно точками. Лініями нанесена апроксимація дискретних значень ядер повзучості резольвентами дробово-експоненційних функцій (1.3) і (1.4).

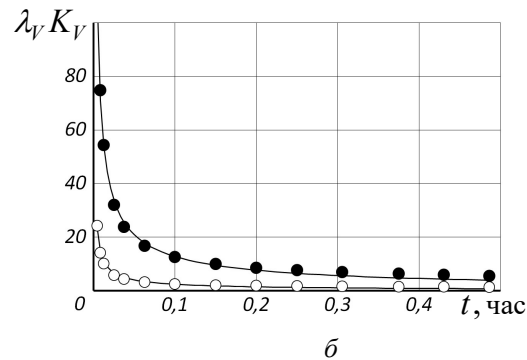


Рис. 2. Дискретні значення (точки) та їх апроксимація (лінії) ядер інтенсивності деформацій повзучості (а) та об'ємної повзучості (б) поліетилену високої щільності.

Значення пружних констант і параметрів ядер наведені у таблиці  
спадковості поліетилену високої щільності

Таблиця

Значення пружних постійних і параметрів ядер спадковості поліетилену високої щільності.

Матеріал			$E$ , МПа			$G$ , МПа			$B$ , МПа			$\nu$
„Полиэтилен ПЭВП”			867,0			321,0			963,3			0,35
Базовий експеримент: одновісна поздовжня й поперечна повзучість												
$K_{11}(t)$ , година <sup>-1</sup>			$K_{22}(t)$ , година <sup>-1</sup>			$K_i(t); R_i(t)$ , година <sup>-1</sup>			$K_v(t); R_v(t)$ , година <sup>-1</sup>			
$\alpha_{11}$	$\beta_{11}$	$\lambda_{11}$	$\alpha_{22}$	$\beta_{22}$	$\lambda_{22}$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\lambda_i$	$\alpha_v$	$\beta_v$	$\lambda_v$	
-0,6460	-0,1398	1,9439	-0,5158	-1,0137	3,1427	-0,6191	0,2764	2,1493	-0,6988	0,1229	1,6334	
Базовий експеримент: одновісна поздовжня повзучість і зсувна повзучість												
$K_{11}(t)$ , година <sup>-1</sup>			$K_{21}(t)$ , година <sup>-1</sup>			$K_i(t); R_i(t)$ , година <sup>-1</sup>			$K_v(t); R_v(t)$ , година <sup>-1</sup>			
$\alpha_{11}$	$\beta_{11}$	$\lambda_{11}$	$\alpha_{21}$	$\beta_{21}$	$\lambda_{21}$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\lambda_i$	$\alpha_v$	$\beta_v$	$\lambda_v$	
-0,6460	-0,1398	1,9439	-0,4700	-1,2467	2,0197	-0,4706	1,2402	2,0155	-0,6334	0,2971	9,1396	

3.2. *Релаксація нормальних напружень.* напружень  $\sigma_{11}(t)$  при  $\varepsilon_{11} = const$ ,  
Розраховується релаксація нормальних  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = const$  і  $\varepsilon_{21} = const$  за рівнянням

$$\sigma_{11}(t) = \frac{2}{3} E \varepsilon_{11} \left( 1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma(1+(1+n)(1+\alpha_i))} \right) + \frac{1}{3} E \varepsilon_{11} \left( 1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_v + \beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma(1+(1+n)(1+\alpha_v))} \right), \quad (3.1)$$

що отримано із (1.2) із врахуванням (1.3) і (1.4).

Результати розрахунків релаксації нормальних напружень  $\sigma_{11}(t)$ , що виконані за рівнянням (3.1) із використанням наведених у таблиці матеріальних констант, зіставлені на рис. 3, а з

експериментальними даними. Штриховими лініями нанесені результати розрахунків з використанням системи базових експериментів в (2.2), а штрих-пунктирними лініями – в (2.3).

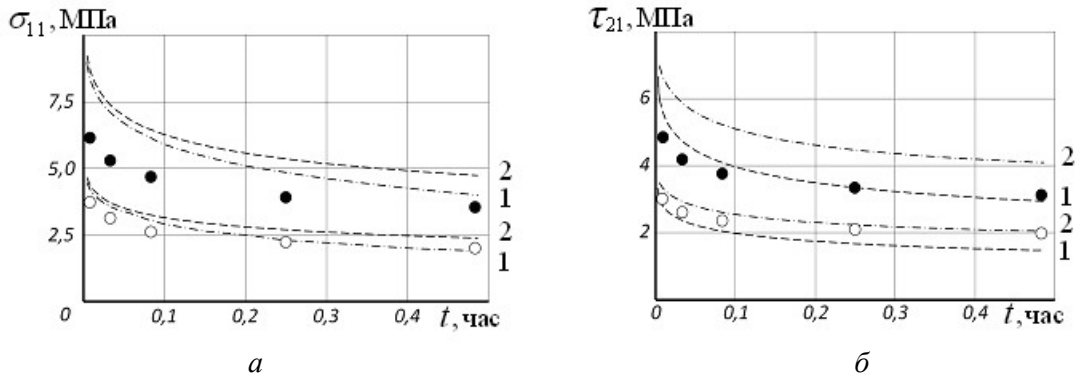


Рис. 3. Розрахункові (лінії) і експериментальні (точки) значення нормальних (а) і дотичних (б) напружень в тонкостінних циліндричних оболонках із „поліетилену високої щільності ПЭВП”:  $\varepsilon_{11} = 0,71$ ;  $\varepsilon_{21} = 0,61\%$  (криві 1;  $\circ$ );  $\varepsilon_{11} = 1,41$ ;  $\varepsilon_{21} = 1,22\%$  (криві 2;  $\bullet$ ).

*Релаксація дотичних напружень.*  $\tau_{21}(t)$  при  $\varepsilon_{11} = const$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = const$  і  
Розраховується релаксація дотичних напружень  $\varepsilon_{21} = const$  за рівнянням

$$\tau_{21}(t) = 2G\varepsilon_{21} \left( 1 - \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_i + \beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma(1 + (1+n)(1+\alpha_i))} \right), \quad (3.2)$$

що отримано із (1.2) із врахуванням (1.3) і (1.4).

Результати розрахунків (лінії) релаксації дотичних напружень  $\tau_{21}(t)$ , що виконані за рівнянням (3.2) з використанням наведених у таблиці значень матеріальних констант, зіставлені на рис. 3,б з експериментальними даними (точки).

#### 4. Аналіз отриманих результатів

Ефективність підходу до розв'язку задач релаксації напружень у тонкостінних циліндричних оболонках із лінійно-в'язкопружних матеріалів, що заснований на гіпотезі пропорційності девіаторів, апробується експериментально на задачах розрахунку релаксації напружень при навантаженні оболонок розтягом із крученням. Розраховується релаксація нормальних і дотичних напружень в оболонках із „поліетилену високої щільності ПЭВП”.

У цілому, як свідчать дані, що наведені на фіг. 3, отримано цілком задовільне узгодження результатів розрахунку релаксації напружень в оболонках з „поліетилену високої щільності ПЭВП” із експериментальними даними. Максимальна похибка не перевищує 20% і отримана для напружень кручення  $\tau_{21}(t)$ . Характерно, що результати розрахунків практично не залежать від системи базових експериментів, використаних для визначення параметрів ядер повзучості й відповідно ядер релаксації.

Розв'язок задачі розрахунку релаксації напружень в оболонках за умов комбінованого навантаження розтягом із крученням будується в роботі на основі гіпотези пропорційності девіаторів. У рамках такого підходу, як і у випадку використання принципу суперпозиції зсувної та об'ємної повзучості [3], взаємовплив постійних за часом повздовжньої й зсувної повзучості на процес релаксації нормальних і дотичних напружень не враховується. Цей ефект у випадку дії постійних за часом деформацій пояснюється збігом структур розв'язкових рівнянь лінійної теорії в'язкопружності, що побудовані виходячи із принципу суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості й на основі гіпотези пропорційності девіаторів.

Дійсно, з огляду на те, що

$$\varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) = e_{ij}(t),$$

де  $e_{ij}(t)$  – девіатор напруження, а

$$(1 + \nu_0) = \frac{E}{2G}; \quad (1 - 2\nu_0) = \frac{E}{3B}$$

і, з огляду на те, що  $\varepsilon_i = const$ ,  $e_{ij} = const$ ,  $\varepsilon_v = const$ , з (1.2) одержуємо рівняння

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{E}{1 + \nu} \left[ 1 - \lambda_i \int_0^t R_i(t - \tau) d\tau \right] \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v \right] + \delta_{ij} \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \left[ 1 + \lambda_v \int_0^t R_v(t - \tau) d\tau \right] \varepsilon_v,$$

яке за структурою збігається з рівнянням

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{E}{1 + \nu} \left[ 1 - \lambda_s \int_0^t R_s(t - \tau) d\tau \right] \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v \right] + \delta_{ij} \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \left[ 1 + \lambda_v \int_0^t R_v(t - \tau) d\tau \right] \varepsilon_v,$$

отриманим виходячи із принципу суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості [3].

У дійсності, як це виходить із експериментальних даних, наведених в [5], накладення зсувної компоненти деформації  $\varepsilon_{21}$  прискорює процес релаксації нормальних напружень  $\sigma_{11}$ , а накладення повздовжньої деформації  $\varepsilon_{11}$  прискорює процес релаксації дотичних напружень  $\tau_{21}$ . У деяких випадках таке прискорення може становити 80%. Особливо істотно на процес релаксації напружень впливає накладення повздовжніх деформацій.

#### Висновок

Коректний розв'язок задач релаксації напружень в елементах конструкцій із лінійно-в'язкопружних матеріалів при комбінованому навантаженні постійними за часом нормальними й дотичними напруженнями не може бути побудований на основі моделей в'язкопружності у формі суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості або у формі пропорційності девіаторів. Ці моделі треба відкоректувати шляхом введення додаткових складових, які б одночасно залежали від повздовжніх і зсувних компонент деформації. Як перше наближення

може бути використана інтенсивність деформацій повзучості.

#### Список використаних джерел

1. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория решеток / Н.Н. Малинин.– Москва: Машиностроение, 1975. – 400 с.
2. *Бойл Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Дж.Бойл, Дж.Спенс. – Москва: Мир, 1986. – 360 с.
3. *Голуб В.П.* Расчет деформаций ползучести и релаксации напряжений в тонкостенных трубчатых элементах из линейно-вязкоупругих материалов. 1. Суперпозиция сдвиговой и объемной ползучести / В.П.Голуб, Я.В.Павлюк, В.С.Резник. – Киев: Прикладная механика, 2020. – **56**, №2. – С. 156-169.
4. *Голуб В.П.* Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 2. Случай пропорциональности девиаторов / В.П.Голуб, Б.П.Маслов, П.В.Фернати. – Киев: Прикл. механика, 2016. – **52**, № 6. – С. 111-125.
5. *Крегерс А.Ф.* Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф.Крегерс, М.Р.Килевиц. – Механика композитных материалов, 1985. – №2. – С. 195-201.

#### References

1. MALININ, N.N. (1975) *Prikladnaya teoriya reshetok*. Moskva: Mashinostroenie.
2. BOYL, J., SPENS, J. (1986) *Analiz napryazheniy v konstrukciyah pri polzuchesti*. Moskva: Mir.
3. GOLUB, V.P., PAVLYUK, Ya.V., REZNIK V.S. (2020) Raschet deformatsiy polzuchesti i relaxacii napryazheniy v tonkostennykh trubchatykh elementakh iz lineynovyazkoupругikh materialov. 1. Superpoziciya sdvigovoy i ob'emnoy polzuchesti, 56(2). pp. 111-125.
4. GOLUB, V.P., MASLOV, B.P., FERNATI, P.V. (2016) Identifikacija jader nasledstvennosti izotropnykh linejno-vjazkoupругих materialov pri slozhnom napryazhennom sostojanii. 2. Sluchaj proporcional'nosti deviatorov, Prikl. mehanika, 52(6). pp. 111-125.
5. KREGERS, A.F., KILEVIC, M.R. (1985) *Kompleksnoe issledovanie polietilena vysokoy plotnosti v usloviyah nelineynoy polzuchesti i relaxacii napryazhenij*, Mechanika compozitnykh materialov, N2, pp. 195-201.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми „Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).

Надійшла до редколегії 29.08.21