

УДК 519.9

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.22>

Резнік В.С.<sup>1</sup>, к. ф.- м. н., с.н.с.,  
Ушаков О.В.<sup>2</sup>, помічник директора,  
Горун О.Ю.<sup>2</sup>, пров.н.с.

V.S. Reznik<sup>1</sup>, Ph.D. (Phys.-Math.), senior sci.,  
O.V. Ushakov<sup>2</sup>, assistant,  
O.Y. Gorun<sup>2</sup>, leading sci.

### Щодо розрахунку деформацій зсуву в призматичних стержнях із полімерних матеріалів за умов розтягу з крученням

### On the problem of calculating shear deformations in prismatic bars made of polymer materials under tension with torsion

<sup>1</sup> Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН  
України, вул. Нестерова, 3, 03057, Київ;  
e-mail [creep@inmech.kiev.ua](mailto:creep@inmech.kiev.ua)

<sup>1</sup>S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,  
Nesterov str, 3, Kiev;  
e-mail [creep@inmech.kiev.ua](mailto:creep@inmech.kiev.ua)

<sup>2</sup> Інститут спеціальної техніки та судових  
експертиз Служби безпеки України, вул.  
Василенка, 3, 03113, м. Київ;  
e-mail [nddkr\\_ictc@ssu.gov.ua](mailto:nddkr_ictc@ssu.gov.ua)

<sup>2</sup>Ukrainian scientific and research Institute of special  
equipment and forensic expertise of the Security  
Service of Ukraine. 03113 Vasilenko str 5, Kyiv;  
e-mail [nddkr\\_ictc@ssu.gov.ua](mailto:nddkr_ictc@ssu.gov.ua)

*Розглядається процес повзучості призматичних стержнів з лінійно-в'язкопружних полімерних матеріалів за умов комбінованого навантаження. Визначальні рівняння, що описують залежність між деформаціями, напруженнями і часом, задаються у вигляді суперпозиції зсувної і об'ємної деформації. Об'єктом дослідження являються призматичні стержні зі склопластику СТ-1. Обґрунтовується область лінійності моделі, виходячи з гіпотези існування функції повзучості, побудованої по кривим податливості, єдиної діаграми довготривалого деформування і статистичного значення квантиля статистики. Визначається область лінійно-пружного деформування, виходячи з виконання умови існування єдиної функції повзучості. Визначальні рівняння моделі містять набір функцій і коефіцієнтів, що знаходяться з базових експериментів. На підставі співвідношень між ядрами одновимірного напруженого стану визначаються параметри ядер за умови складного напруженого стану. Лінійність в'язкопружних властивостей задається рівняннями Больцмана-Вольтера з дробово-експоненціальним ядром спадковості. Отримані значення параметрів ядер використовуються для розрахунку деформацій повзучості призматичних стержнів зі склопластика СТ-1 за умов одночасної дії розтягу з крученням.*

*Ключові слова: лінійна в'язкопружність, складний напружений стан, повздовжня повзучість, зсувна повзучість, об'ємна повзучість, ядра спадковості, квантиль статистики.*

*The process of creep of prismatic rods made of linear-viscoelastic polymeric materials under combined loading is considered. Defining equations that determine the relationship between strains, stresses and time are given in the form of a superposition of shear and bulk strain. The object of study is prismatic bars made of fiberglass ST-1. The area of linearity of the model is substantiated on the basis of the hypothesis of the existence of the creep function, which is built on the yield curves, a single diagram of long-term deformation and the statistical value of the quantile of statistics. The region of linear-elastic deformation is recognized based on the fulfillment of the condition of existence of a single creep function. The defining equations of the model contain a set of functions and coefficients determined from the basic experiments. On the basis of the relations between the kernels of the one-dimensional stress state, the parameters of the kernels under the condition of a complex stress state are determined. The linearity of viscoelastic properties is given by the Boltzmann-Volterra equations. The fractional-exponential kernels of heredity are chosen as the kernels of heredity. The obtained values of the core parameters are used to calculate the creep deformations of prismatic bars made of ST-1 fiberglass under conditions of simultaneous tensile tension.*

*Key words: linear viscosity, longitudinal creep, shear creep, volume creep, heredity nuclei, isochronous diagrams, quantile of statistics.*

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

© В.С. Резнік, О.Ю Горун, О.В. Ушаков, 2021

### Вступ

Широке застосування призматичних стержнів в елементах конструкцій і різноманітних механізмах зумовило вивчення їх в'язкопружних властивостей. На сьогоднішній день все більшого застосування набувають елементи конструкцій з полімерних матеріалів через їх відносно низьку вартість, легкість і міцність. Багато елементів конструкцій являють собою об'єкти, що деформуються за умов складного напруженого стану. Найчастіше деформування в'язкопружних середовищ описують за допомогою рівнянь спадкового типу [1-2]. Рівняння встановлюють залежність між компонентами тензора деформацій, тензора напружень і часовим інтегральним оператором, і містять ядра спадковості, набір функцій і коефіцієнтів, що визначаються із базових експериментів.

У роботі на підставі співвідношень між ядрами розв'язується задача розрахунку деформацій повзучості за умов одночасної дії розтягу із крученням для оргскла СТ-1. Для цього обґрунтовується область застосування моделі, виходячи з гіпотези подібності діаграми миттєвого деформування і ізохронних діаграм. Визначається область лінійно-пружного деформування. На підставі розробленого в [4] методу визначаються параметри ядер спадковості лінійно в'язкопружних матеріалів за умов одночасної дії розтягу з крученням. Будуються прогнозовані значення деформації зсуву.

#### 1. Постановка задачі

У роботі розглядається деформування ізотропних лінійно-в'язкопружних середовищ зі стабільними механічними властивостями за умов складного напруженого стану із заданою програмою навантаження, так що

$$\sigma_{ij}(\tau), \tau \in (0, t), \quad (1)$$

де  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень;  $t$  – час спостереження;  $\tau$  – час, що передує моменту спостереження. Процес навантаження (1) вважаємо простим, так що виконуються співвідношення

$$\sigma_{11} = \mu(t)\bar{\sigma}_{11}, \dots, \tau_{12} = \mu(t)\bar{\sigma}_{12}, \dots$$

Визначальні рівняння, що задають залежність між компонентами тензора деформацій  $\varepsilon_{ij}(t)$  і компонентами тензора напружень  $\sigma_{ij}(t)$  при повзучості запишемо у вигляді суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості [3]

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) = \frac{1}{2G} \left[ s_{ij}(t) + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau)s_{ij}(\tau)d\tau \right] +$$

$$+ \frac{1}{3B}\delta_{ij} \left[ \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau)\sigma_0(\tau)d\tau \right]; \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

$e_{ij}(t)$  – компоненти девіатора тензора деформацій  $\varepsilon_{ij}(t)$ ;  $s_{ij}(t)$  – компоненти девіатора тензора напружень  $\sigma_{ij}(t)$ ;  $\varepsilon_v(t)$  – об'ємна деформація;  $\sigma_0$  – середнє напруження;  $K_s(t-\tau)$  – ядро зсувної повзучості;  $K_v(t-\tau)$  – ядро об'ємної повзучості;  $G$  – модуль зсуву;  $B$  – об'ємний модуль;  $\lambda_s, \lambda_v$  – реологічні параметри. Параметри ядер визначаються з використанням співвідношень між ядрами за умов складного напруженого стану і ядрами одновимірного напруженого стану [2].

За ядро спадковості обираємо дробово-експоненціальне ядро, оскільки воно досить точно описує процес повзучості як в області малих часів, так і для великих значень часу. Аналітичний вигляд дробово-експоненціального ядра записується у вигляді

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}; \quad (4)$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – параметри ядер ( $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ );  $\Gamma[\cdot]$  – гамма-функція.

Задача полягає у розв'язанні задачі розрахунку деформацій зсуву в призматичних стержнях з оргскла СТ-1 за умов одночасної дії розтягу з крученням [3]. Для цього необхідно обґрунтувати область застосування моделі, виходячи з гіпотези існування єдиної діаграми миттєвого деформування та із критичного значення квантиля статистики, визначити параметри ядер за умови складного напруженого стану на підставі співвідношень між ядрами, провести апробацію отриманих результатів, співставивши їх з експериментальними даними.

#### 2. Обґрунтування застосування лінійної моделі в'язкопружності

Вважається, що матеріал є лінійно-в'язкопружним, якщо функція повзучості інваріантна по відношенню до рівня напруження

$$\sigma_{ij,q}(i, j = \overline{1, 3}; q = \overline{1, n}),$$

$$J_{inv,1} = \frac{\varepsilon_{ij,1}(t_2)}{\bar{\sigma}_{ij,1}} = J_{inv,2} = \frac{\varepsilon_{ij,2}(t_2)}{\bar{\sigma}_{ij,2}} = \dots = J_{inv,q} = \frac{\varepsilon_{ij,q}(t_2)}{\sigma_{ij,q}};$$

$$J_{inv,1} = \frac{\varepsilon_{ij,1}(t_1)}{\sigma_{ij,1}} = J_{inv,2} = \frac{\varepsilon_{ij,2}(t_1)}{\sigma_{ij,2}} = \dots = J_{inv,q} = \frac{\varepsilon_{ij,q}(t_1)}{\sigma_{ij,q}};$$

$$J_{inv,1} = \frac{\varepsilon_{ij,1}(t_1)}{\sigma_{ij,1}} = J_{inv,2} = \frac{\varepsilon_{ij,2}(t_1)}{\sigma_{ij,2}} = \dots = J_{inv,q} = \frac{\varepsilon_{ij,q}(t_1)}{\sigma_{ij,q}};$$

а розрахункове значення квантиля статистики

$$t_{inv\alpha,k} = \frac{\sqrt{n}}{s_l(t_l)} \delta \frac{1}{m} \sum_{q=1}^m J_{inv,q}(t_j) = \frac{\sqrt{n}}{s_l(t_l)} \delta \bar{J}_{inv}(t_l) > t_{\alpha,k}^*, l = \bar{1}, m$$

більше його критичного табличного значення  $t_{\alpha,k}^*$ . Тут  $J_{inv,q}(t_l)$  – значення функції повзучості в момент часу  $t_l$  при напруженнях  $\sigma_{ij,q}$ ;  $\bar{J}_{inv}(t_l)$  – вибіркове середнє значення функцій повзучості;  $s_l(t_l)$  – середнє квадратичне відхилення велечини  $\bar{J}_{inv}(t_l)$ ;  $n$  – об'єм вибірки (число функцій повзучості);  $\delta$  – максимальна похибка між значеннями  $J_{inv,q}(t_l)$  і  $\bar{J}_{inv}(t_l)$ .

Величина похибки  $\delta$  в розрахунках прийнята рівною  $\pm 5\%$ , а ймовірність  $P$  попадання експериментальних функцій повзучості  $J_{inv,q}(t_l)$  в інтервал, обмежений величиною  $\delta = \pm 5\%$  по відношенню до величини  $\bar{J}_{inv}(t_l)$ , має бути не менше 90% [2].

На рис. 1 як приклад наведено функції повздовжньої  $J_{11}(t_l)$  і поперечної повзучості  $J_{22}(t_l)$  оргскла СТ-1.

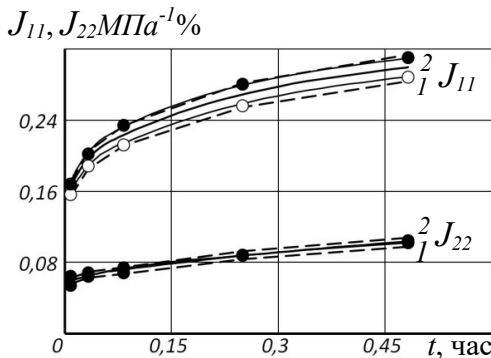


Рис. 1 – Функції повздовжньої і поперечної повзучості оргскла СТ-1

Тут і далі точками нанесені експериментальні дані, а лініями – апроксимація дискретних значень функцій повзучості згладжуючими кубічними сплайнами, на основі яких розраховувалось вибіркове середнє  $\bar{J}_{11}(t_l)$  і  $\bar{J}_{22}(t_l)$ , які нанесено суцільними лініями. Штриховими лініями нанесено межі інтервала, що відповідає величині максимальної похибки  $\delta_{max} = \pm 5\%$  від величин  $\bar{J}_{11}(t_l)$  і  $\bar{J}_{22}(t_l)$ . На рис.2 наведено розрахункові  $t_{\alpha,k}$  та табличні  $t_{\alpha,k}^*$  значення квантиля статистики для оргскла СТ-1.

Розрахункові значення величини  $t_{\alpha,k}$  для деформацій повздовжньої повзучості нанесено

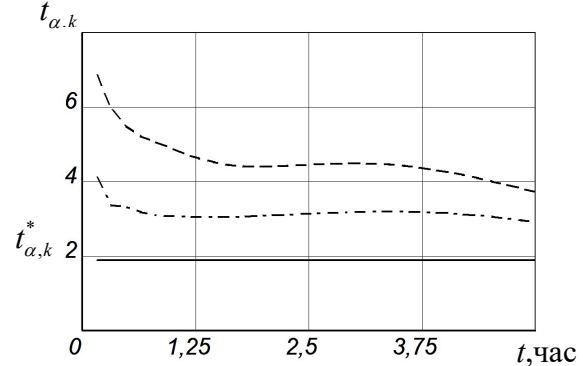


Рис. 2 – Розрахункові значення квантиля статистики повздовжньої і поперечної повзучості

штриховою лінією, а для поперечної повзучості – штрих-пунктирною лінією. Суцільною лінією нанесено табличне значення квантиля статистики.

#### 4. Розрахунок деформацій зсуву в призматичних стержнях з полімерних матеріалів за умов розтягу із крученням

Розраховуються значення деформації зсувної повзучості  $\varepsilon_{21}(t)$  тонкостінних трубчастих елементів з оргскла СТ-1 при комбінованому навантаженні розтягом із крученням, при цьому  $\sigma_{11} = const$  і  $\tau_{21} = \tau_{12} = const$ .

Для деформацій зсувної повзучості  $\varepsilon_{21}(t)$  маємо рівняння

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{1}{2G} \tau_{21} \left\{ 1 + \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_s)^n t^{n(1+\alpha_s)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_s)]} \right\}, \quad (5)$$

де прийнято  $s_{ij} = \tau_{21}$ . Параметри ядер спадковості визначаються на підставі зв'язку між ядрами заумов складного напруженого стану і ядрами за умови одновимірного напруженого стану. В роботі в якості базового експерименту розглянуто одновісний розтяг з заміром повздовжніх і поперечних деформацій [3]. Рівняння (5) дає змогу обчислити значення деформацій повзучості призматичних стержнів з оргскла СТ-1 за умов одночасної дії розтягу з крученням. Результати розрахунків за рівнянням (5) наведено на Рис.3. Зауважмо, що експериментальні дані за умов одночасної дії розтягу з крученням відсутні. Представлені розрахунки є виходом за межі експерименту. Тут значення деформацій  $\varepsilon_{21}(t)$  розраховано при

дотичних напруженнях  $\tau_{21} = 7,50$  (1), 11,45 (2),  
15,30 (3) Мпа.

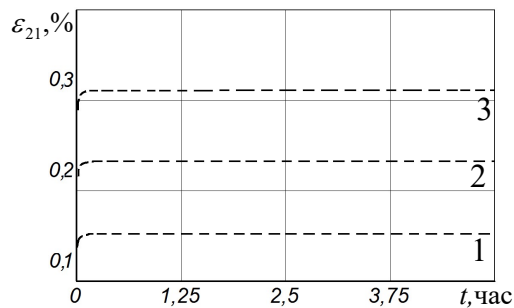


Рис.3 – Розрахунок деформацій зсуву оргскла  
СТ-1 за умов розтягу з крученням

## 5. Висновки

В роботі розв'язано актуальну задачу, що полягає у розрахунку деформацій зсуву в призматичних стержнях з оргскла СТ-1 за умов одночасної дії розтягу з крученням. В якості визначальних рівнянь використано рівняння у вигляді суперпозиції зсувної і об'ємної повзучості. Обґрунтувати область застосування моделі, виходячи з гіпотези існування єдиної діаграми миттєвого деформування та із критичного значення квантиля статистики, параметри ядер за умови складного напруженого стану знайдено на підставі співвідношень між ядрами за умов одновимірного напруженого стану, розраховано значення деформацій зсувної повзучості склопластика СТ-1 за умов одночасної дії розтягу з крученням.

## Список використаних джерел

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – Москва: Наука, 1966. – 752 с.
2. Кристенсен Р.М. Введение в теорию вязкоупругости / Р.М. Кристенсен. – Москва: Мир, 1974. – 340 с.
3. Голуб В. П. К задаче определения параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, В.С. Рагулина // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – №5(51). – С. 26-35.
4. Голуб В.П. К решению задач ползучести изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии / В.П. Голуб, Ю.М. Кобзарь, П.В. Фернати // Теор и прикл. механика. – 2014. – Вып 8 (54). – С. 45-56.

## References

1. RABOTNOV, Yu. (1966) *Polzuchest` elementov konstrukciy*. Moskva: Nauka.
2. KRISTENSEN, R. (1974) *Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosti*. Moskva: Mir.
3. GOLUB, V., KOBZAR, YU. & RAGULINA, V. (2013) K zadache opredeleniya parametrov yader nasledstvennosti izotropnyh nelinejno-vyazkouprugih materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mekhanika*. 5(51). p. 26-35.
4. GOLUB, V., KOBZAR, YU. & FERNATI P. K resheniyu zadach polzuchesti izotropnyh nelinejno-vyazkouprugih materiaalov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. *Teoret. i prikl. mekhanika*. 8 (54). P. 45-56.

Надійшла до редколегії 07.06.2021

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).