УДК 539.3
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.19

Ревенко В. П., д.ф.-м.н., пров.н.с.

Комп'ютерний метод розв'язання крайових задач теорії пружності з використанням неортогональних систем функцій

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, 79601, м. Львів, вул. Наукова 3б,
e-mail: victorrev@ukr.net

V. P. Revenko, Dr.Sci. (Phys.-Math.).

Computational method for solving boundary problems of the theory of elasticity using non-orthogonal systems of functions

Pistryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine, 3-b, Naukova str., L'viv, 79060, Ukraine
e-mail: victorrev@ukr.net

Побудовано повну систему неортогональних функцій на основі ортогональних синусів і косинусів. Доведено, що неперервну функцію можна апроксимувати скінченною кількістю неортогональних функцій таким чином, щоб в цю суму не входила одна вибрана функція неортогонального базису. Показано, що відомі ортогональні системи функцій є виродженим випадком неортогональних систем функцій. Числовим експериментом підтверджено високу точність апроксимацій неперервних функцій незначною кількістю неортогональних функцій. Розглянуто плоску задачу теорії пружності для пластини зі змінними пружними характеристиками. Спрощено це рівняння, коли характеристики матеріалу міняються незначно в залежності від просторових координат. Розроблено новий метод розв'язання крайової задачі для рівняння в частинних похідних четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Запропонований метод заснований на поділі напруженого стану пластини з неоднорідного матеріалу на основний і збурений, використанні повних систем неортогональних функцій і узагальненої квадратичної форми. Встановлено критерії, за яких побудований наближений розв'язок збігається з точним розв'язком.
Ключові слова: неортогональні функції, неоднорідна пластина, рівняння в частинних похідних.

A complete system of functions based on non-orthogonal sinuses and cosine was constructed. It has been proven that the continuous function can be approximated by a finite number of non-orthogonal functions in such a way that this amount does not enter the selected function of the non-orthogonal base. The numerical experiment confirmed the high accuracy of approximations of continuous functions by a small number of non-orthogonal functions. The flat problem of the theory of elasticity for the plate with variable elastic characteristics is considered. This equation is simplified when the characteristics of the material change insignificantly depending on the spatial coordinates. A new method of solving a boundary value problem has been developed for the fourth-order equation with variable coefficients. The proposed method is based on the separation of the stress state of the plate from an inhomogeneous material to the main and indignant state, the use of complete systems of non-orthogonal functions and a generalized quadratic form. A criterion under which the constructed approximate decision coincides with the exact solution was found.
Key Words: non-orthogonal functions, inhomogeneous plate, partial differential equations.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

У праці [1] запропоновано використовувати системи неортогональних функцій для розв'язання крайових задач. На даний час широко використовуються як неперервні [2], так і кусково-неперервні [3] системи ортогональних функцій. Розробка комп'ютерних методик обчислень для неортогональних функцій дозволила розробити новий аналітично-числовий підхід до розв'язку крайових задач теорії пружності [4, 5] з використанням методу найменших квадратів [6]. Неортогональні системи функції природно виникають при побудові власних функцій крайових задач для диференціальних рівнянь.

Мета роботи. Обґрунтування нового комп'ютерного методу розв'язання крайових задач для рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами, а також розробка аналітично-комп'ютерних методик обчислень с використанням неортогональних функцій.

2. Апроксимація неперервних функцій

Розглянемо повні неортогональні системи функцій. В даній роботі для їх побудови використаємо систему ортогональних функцій $\{\varphi_k(x)\}$ (синус і косинус), які будемо розглядати на меншому проміжку $[l_1, l_2]$, чим проміжок їх ортогональності $[A, B]$, де ці функції вже будуть неортогональними. Апроксимацію неперервної на проміжку $[l_1, l_2]$ функції $f(x)$ подамо у вигляді суми ряду

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{M} c_k \varphi_k(x), \tag{1}$$

де c_k − невідомі коефіцієнти; $M = 2N$; $\varphi_0(x) \equiv 1$; $\varphi_k(x) = \cos(k\omega x)$, $\varphi_{k+N}(x) = \sin(k\omega x)$, $k = \overline{1, N}$ – базисні функції; $\omega = 2\pi/(B - A)$; $[l_1, l_2] \subset [A, B]$, $l_2 - l_1 < 0{,}95(B - A)$. Легко побачити, що вибрана система функцій $\{\varphi_k(x)\}$ є повна і ортогональна в $L_2[A, B]$, а в $L_2[l_1, l_2]$ буде повною, але не ортогональною [2]. Якщо в рівності (1) спрямувати N до нескінченості, то в правій частині одержимо ряд.

Використання неортогональних функцій (1) дає змогу задовольнити різні значення функції $f(l_1) \neq f(l_2)$ без порушення умов збіжності в точках l_j, $j = \overline{1, 2}$, а при апроксимації функцій із заданою точністю потребує меншої кількості членів суми ряду (1). Це важливо, оскільки при числових обчисленнях ми можемо використовувати тільки скінчену кількість коефіцієнтів.

Зауважимо, що ортогональні функції це дуже маленький частковий випадок неортогональних повних систем функцій. Сформулюємо основну відмінність між неперервними неортогональними і ортогональними системами функцій.

Теорема 1. *Неперервну функцію $f(x)$, задану на скінченому проміжку завжди можна апроксимувати сумою ряду таким чином, щоб в подання (1) не входила одна довільно вибрана функція $\varphi_m(x)$ неортогонального базису.*

Доведення. Продовжимо функцію $f(x)$ на проміжок $[A, B]$ і позначимо $f_1(x)$. Її завжди можна продовжити так, щоб вона була неперервною, а інтеграл на проміжку $[A, B]$ від добутку функцій $f_1(x)\varphi_m(x)$ дорівнював нулю. Згідно з [2] побудуємо розклад функції $f_1(x)$ у вигляді суми ряду (1) за ортогональними на проміжок $[A, B]$ синусами і косинусами, де буде виконуватися рівність $c_m = 0$. Розглянемо функцію $f_1(x)$ на проміжку $[l_1, l_2]$ і одержимо апроксимацію функції $f(x)$ у вигляді розкладу без функції $\varphi_m(x)$. Якщо спрямувати $\mathrm{N} \to \infty$, то функція $f_1(x)$ на проміжку $[l_1, l_2]$ буде збігатися із функцією $f(x)$ [2]. Кінець доведення.

Наслідок. *Ортогональні системи функцій є виродженим випадком неортогональних систем функцій, коли проміжок $[l_1, l_2]$ збігається з проміжком $[A, B]$. При задоволені крайових умов можна не використовувати одну базову неортогональну функцію, в залежності від фізичної природи розв'язуваної задачі.*

Коефіцієнти c_k визначимо із умови мінімуму функціоналу, числове значення якого характеризує відхилення між апроксимацією функції і її значенням $f(x)$

$$\left\| \sum_{k=0}^{M} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|^2 = \int_{l_1}^{l_2} \{ \sum_{k=0}^{M} c_k \varphi_k(x) - f(x)\}^2 dx = \sum_{k,j=0}^{M} c_k c_j W_{kj} - 2\sum_{k=0}^{M} c_k V_k + P^2, \tag{2}$$

де

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_{l_1}^{l_2} f^2(x)dx} \text{ − норма в } L_2[l_1, l_2];$$

$$W_{kj} = \int_{l_1}^{l_2} \varphi_k(x)\varphi_j(x)dx, \; W_{kj} = W_{jk},$$

$$V_k = \int_{l_1}^{l_2} \varphi_k(x) f(x)dx, \quad k, j = \overline{0, M};$$

$$P^2 = \int_{l_1}^{l_2} f^2(x)dx.$$

Вираз

$$\sum_{k,j=0}^{M} c_k c_j W_{kj} - 2\sum_{k=0}^{M} c_k V_k + P^2, \tag{3}$$

який входить у формулу (2), назвемо узагальненою квадратичною формою (УКФ). Знайдемо мінімум УКФ (3) і чисельно визначимо невідомі c_k.

На рис 1 наведено порівняння точності розкладу функції $y = x$ за ортогональними і неортогональними функціями в залежності від кількості членів суми ряду. Максимальне відхилення апроксимації функції позначимо δ, а максимальне її значення – y_m. Крива 1 позначає функцію $y = x$, а крива 2 − розклад (1) за неортогональними синусами: $\omega = \pi/1{,}1$, $N = 6$, $\delta = 3*10^{-5}$, $y_m = 1$. Ці криві на рис. 1 збігаються. Криві 3, 4 − розклад за ортогональними на проміжку $x \in [-1{,}1]$, $\sin k\pi x$, відповідно: $N = 60$, $\delta = 1$, $y_m = 1{,}161$; і $N = 300$, $\delta = 1$, $y_m = 1{,}056$. Як бачимо, збіжність розкладу за ортогональними функціями є дуже поганою.

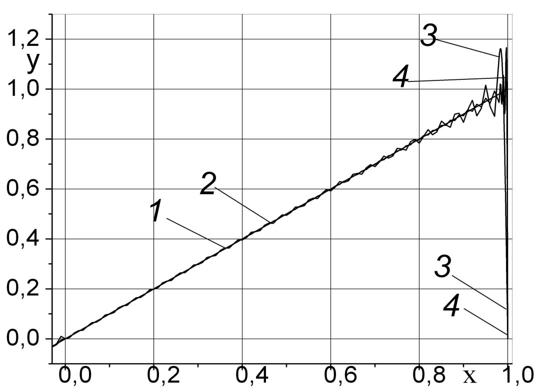

Рис. 1. Апроксимації функції $y = x$, $x \in [-1{,}1]$.

3 Розв'язування двовимірних крайових задач теорії пружності

Розглянемо плоску крайову задачу для пластини зі змінними пружними характеристиками [7], серединна поверхня якої займає прямокутну область $\Pi = \{(x, y) \in ([0, a] \times [-b, b])\}$, на краях L якої задані навантаження. Напруження в області Π виражаються через функцію напружень $F(x, y)$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \qquad (4)$$

Функція напружень (4) задовольняє таке рівняння в частинних похідних [7]:

$$TF(x, y) \equiv \{\Delta(\gamma\Delta) - q''_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2q''_{xy} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - q''_x \frac{\partial^2}{\partial y^2}\}F = 0, \qquad (5)$$

де T – оператор, визначений співвідношенням (5), $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ − двовимірний оператор Лапласа; $\gamma(x, y) = \frac{1}{E(x, y)}$, $E(x, y) = E_0 E_1(x, y)$ – модуль Юнга, $q = \frac{1+\nu}{E}$, $\nu(x, y)$ – коефіцієнт Пуассона, $E_0 = E(0,0)$, $E_1(x, y)$ – безрозмірна функція. Покладемо, що пружні постійні матеріалу $E(x, y)$, $\nu(x, y)$ є парними функціями відносно координати y, двічі неперервно диференційованими в області Π. Вважатимемо, що характеристика матеріалу q на відстані рівній b міняється незначно, так що будуть виконуватися нерівності $\gamma >> b^2 q''_y$, $\gamma >> b^2 q''_x$, то рівняння (5) можна наближено спростити до такого рівняння в частинних похідних:

$$\Delta(\gamma\Delta \mathrm{F}) = 0. \qquad (6)$$

Позначимо

$$\Phi = \gamma\Delta F \qquad (7)$$

і перепишемо рівняння (6) у простішому вигляді

$$\Delta\Phi = 0, \qquad (8)$$

де $\Phi(x, y)$ – гармонічна функція

Детально розглянемо випадок, коли $a >> b$, а навантаження задані тільки на поперечних сторонах, так що дотичні навантаження в кутових точках пластини рівні нулю. Розглянемо парні за змінною y нормальні, непарні дотичні напруження і запишемо навантаження

$$\sigma_x(a_j, y) = \sigma_j(y), \quad \tau_{xy}(a_j, y) = \tau_j(y),$$

$$\tau_{xy}(a_j, \pm b) = 0, \quad j = \overline{1,2}, \qquad (9)$$

де $a_1 = 0$, $a_2 = a$, $\sigma_{\mathrm{j}}(y)$ – парні нормальні, $\tau_{\mathrm{j}}(y)$ – непарні дотичні навантаження. Для задачі (9) знайдемо основний напружений стан

$$\sigma_0 = \frac{1}{b}\int_0^b \sigma_1(y) = \frac{1}{b}\int_0^b \sigma_2(y),$$

так що він описуються однією компонентою напружень: $\sigma_x(x,y)=\sigma_0$, де σ_0 – постійне усереднене навантаження.

Віднявши основний напружений стан і врахувавши, що $a>>b$ вихідну симетричну задачу розділимо на дві задачі. Розглянемо першу з них, для якої навантажена тільки сторона $x=0$

$$\sigma_x(0,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}|_{\mathrm{x}=0}=\sigma^1(y),$$

$$\tau_{xy}(0,y)=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}|_{\mathrm{x}=0}=\tau_1(y),, \quad (10)$$

$$\sigma_x(a,y)=0 \quad \tau_{xy}(a,y)=0, \quad y\in[0,b], \quad (11)$$

$$\sigma_y(x,\pm b)=0 \quad \tau_{yx}(x,\pm b)=0, \quad x\in[0,a], \quad (12)$$

де $\sigma^1(y)=\sigma_1(y)-\sigma_0$ – самозрівноважене навантаження.

Для задоволення умов (10)–(12) розв'язок рівняння (8) подамо у вигляді суми ряду за парними відносно координати y функціями

$$\Phi(x,y)=\sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k(y)\mathrm{e}^{-k\,\omega x}, \quad (13)$$

де b_k – невідомі коефіцієнти; N – натуральне число; $\varphi_k(x)=\cos(k\omega y)$, $\varphi_{k+N}(x)=\sin(k\omega y)$, $k=\overline{1,N}$, $\omega=0.9\pi/b$. Врахуємо співвідношення (13) і запишемо рівняння (7)

$$\Delta F=E_0E_1(x,y)\sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_k(y)\mathrm{e}^{-k\,\omega x}. \quad (14)$$

Побудуємо розв'язок рівняння (14), який складається із суми загального

$$F_1=E_0\sum_{k=0}^{N} a_k\varphi_k(y)\exp(-kx\omega)$$

і часткового

$$F_{\mathrm{z}}=E_0\sum_{k=1}^{N}(a_{k+N}y^2\varphi_k(y)+d_ky\varphi_{k+N}(y))\mathrm{e}^{-k\,\omega x}$$

розв'язків, де a_k, d_k – невідомі коефіцієнти.

Функція напружень $F=F_{\mathrm{z}}+F_1$ має вигляд

$$F=E_0\sum_{k=1}^{N}[(a_k+a_{k+N}y^2)\varphi_k(y)+d_ky\varphi_{k+N}(y)]\mathrm{e}^{-k\,\omega x}. \quad (15)$$

Відзначимо, що невідомі коефіцієнти a_k, d_k повинні задовольняти рівняння (14) в області Π, яке запишемо у такому вигляді:

$$\frac{1}{E_0}|\,\Delta F-E(x,y)\Phi\,|=|\sum_{k=1}^{N}\{c_{k+N}\mathrm{A}_{k+N}+ + c_{k+2N}\mathrm{A}_{k+2N}+c_{k+3N}\mathrm{A}_{k+3N}\}\mathrm{e}^{-k\,\omega x}\,|, \quad (16)$$

де $c_k=a_k$, $k=\overline{0,2N}$, $c_{k+2N}=d_k$, $c_{k+3N}=b_k$,

$$k=\overline{0,N},\ \mathrm{A}_{k+2N}(y)=2k\omega\varphi_k(y),$$

$$\mathrm{A}_{k+N}=2\varphi_k(y)-4k\omega y\varphi_{k+N}(y),$$

$$\mathrm{A}_{k+3N}=-E_1\varphi_k(y),\ k=\overline{1,N}. \quad (17)$$

Для мінімізації відхилення виразу (16) від нуля піднесемо його до квадрату, підставимо в нього функцій (17) і після інтегрування по області Π одержимо квадратичну форму

$$\frac{1}{E_0^2}\int_0^a\int_0^b[\Delta F-E(x,y)\Phi]^2dxdy=\sum_{k,j=N+1}^{M}c_kc_jB_{kj}, \quad (18)$$

де $M=4N$,

$$B^1_{kj}=\int_0^b \mathrm{A}_kA_jdy,\ k,j=\overline{N+1,M};$$

$$B_{k+iN,\,j+mN}=m_{k,j}B^1_{k+iN,\,j+mN},$$

$$m,i=\overline{1,3},\ m_{k,j}=\frac{1}{(k+j)\omega},\ k,j=\overline{1,N}.$$

Підставимо функцію напружень (15) у співвідношення (4) і одержимо явний вигляд напружень

$$\sigma_x=E_0\sum_{k=1}^{N}\{-k^2\omega^2c_k\varphi_k+c_{k+N}[(2-k^2\omega^2\mathrm{y}^2)\varphi_k- -4k\omega y\varphi_{k+N}]+(2k\omega\varphi_k-k^2\omega^2y\varphi_{k+N})c_{k+2N}\}\mathrm{e}^{-k\,\omega x},$$

$$\sigma_y=E_0\sum_{k=1}^{N}k^2[(c_k+c_{k+N}y^2)\varphi_k(y)+ +c_{k+2N}y\varphi_{k+N}(y)]\mathrm{e}^{-k\,\omega x}, \quad (19)$$

$$\tau=E_0\sum_{k=1}^{N}k\omega[-k\omega(c_k+c_{k+N}y^2)\varphi_{k+N}+ +2c_{k+N}y\varphi_k+c_{k+2N}(yk\omega\varphi_k+\varphi_{k+N})]\mathrm{e}^{-k\,\omega x}.$$

Відзначимо, що рівняння (11) будуть наближено задоволенні, а в рівняння (10), (12) підставимо компоненти напружень (19) і подамо їх у компактному вигляді

$$\sum_{k=1}^{3N} c_k A_{m,k}(\gamma_m) = P_m\,, \quad m=\overline{1,4}\,, \tag{20}$$

де $\gamma_m \in [0, \alpha_m]$, $P_1 = \sigma^1(y)$, $P_2 = \tau_1(y)$, $P_j = 0$, $j = \overline{3,4}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = b$, $\alpha_3 = \alpha_4 = a$, коефіцієнти $A_{m,k}(\gamma_m)$ визначаються із напружень (19).

Метод побудови розв'язку системи рівнянь (20) ґрунтується на зведені всіх нев'язок її рівнянь до нуля. Записано нев'язки

$$|\sum_{k=1}^{3N} c_k A_{m,k}(\gamma_m) - P_m|, \quad \gamma_m \in [0, \alpha_m]\,, \; m=\overline{1,4}. \tag{21}$$

Розроблено ефективну аналітично-числову методику, яка дозволила одночасно мінімізувати всі чотири нев'язки (21) у нормі $L_2[0,\alpha_m]$ та квадратичну форму (18) і звести пошук невідомих c_k до знаходження мінімуму функціоналу, який відповідно зведено до узагальненої квадратичної форми

$$\sum_{m=1}^{4} \left\| \sum_{k=1}^{3N} c_k A_{m,k}(\gamma) - P_m(\gamma) \right\|_m^2 + \sum_{k,j=N+1}^{M} c_k c_j B_{kj} = \sum_{k,j=1}^{M} c_k c_j W_{kj} - 2\sum_{k=1}^{M} c_k V_k + P^2, \tag{22}$$

де

$\|f(\gamma)\|_m = \sqrt{\int_0^{\alpha_m} f^2(\gamma)d\gamma}$ – норма в $L_2[0,\alpha_m]$,

$$W_{k,j} = B_{k,j} + \int_0^{\alpha_m} \sum_{m=1}^{4} A_{m,k}(\gamma) A_{m,j}(\gamma) d\gamma\,,$$

$$V_k = \int_0^{\alpha_m} A_{1,k}(\gamma)\sigma^1(\gamma)d\gamma, \; k,j = \overline{1,M}\,,$$

$$P^2 = \|P_1(y)\|_1^2 + \|P_2(y)\|_1^2\,.$$

Мінімум узагальненої квадратичної форми (22) для заданого N позначимо $\Lambda(N)$, а змінні c_k, на яких він досягається, позначимо c_k^N. Функцію напружень, яка визначається знайденими коефіцієнтами c_k^N, позначимо F_N.

4. Знаходження числових критеріїв збіжності побудованого розв'язку

Лема [6]. *Функція* $\Lambda(N)$ *невід'ємна і не зростає.*

Відзначимо, що квадратична форма (22) вибрана таким чином, що для її мінімуму $\Lambda(N)$ та знайдених функцій $F_N(x,y)$ виконується рівність

$$\Lambda(N) = \int_0^a\int_0^b [\sum_{k=N+1}^{M} c_k^N \mathrm{A}_k(x,y)]^2 dxdy + \sum_{m=1}^{4} \left\| \sum_{k=1}^{3N} c_k^N A_{m,k}(\gamma_m) - P_m(\gamma) \right\|_m^2, \tag{23}$$

яка дає оцінку точності задоволення умов (18), (20).

Якщо припустити, що виконується рівність $\Lambda(N) = 0$, то всі рівняння (18), (20) будуть задоволені і вихідна задача розв'язана.

Теорема. Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке N, що $\Lambda(N) < \frac{\varepsilon^2}{4}$, то *напруження, виражені через функцію* $F(x,y) = \lim_{N\to\infty} F_N(x,y)$, *будуть точно задовольняти умови (10), (12) в метриках* $L_2[0,\alpha_m]$, *а також рівняння (6).*

Доведення теореми 2 основане на результатах роботи [7].

Обговорення результатів. Форма (22) не є лінійною, але, якщо її мінімум при зростанні N прямує до нуля, то це значення служить оцінкою похибки розв'язку всіх рівнянь і умов, які в неї входять. Узагальнено відомий метод Фур'є на випадок розкладу функцій за неортогональними синусами і косинусами. Запропонований метод розв'язання крайових задач органічно поєднує чотири аспекти: розроблену аналітично-числову методику використанням неортогональних систем функцій; розбиття напруженого стану на основний і збурений стани; універсальному комп'ютерному обчислювальному методі наближеного задоволення довільної кількості рівнянь і умов; вмонтованому в нього комп'ютерного контролю збіжності і точності вже на ранніх етапах обчислень.

Висновки. Доведено, що неперервну функцію можна розкласти не використовуючи одну базову неортогональну функцію, наприклад постійну. На заданому проміжку $[l_1, l_2]$ завжди існує зліченна кількість неортогональних систем базисних функцій, де кожна функція базису розкладається по цьому базису. Ортогональні

системи функцій є виродженим випадком неортогональних систем функцій. Запропоновано поділ напруженого стану пластини на основний напружений стан і збурений стан, який згасає при видаленні від навантаженої сторони пластини. Розроблено алгоритм аналітично-числового розв'язку крайової задачі для прямокутної пластини із змінними пружними характеристиками. Запропоновано універсальний спосіб зведення всіх граничних умов в прямокутній пластині зі змінними пружними характеристиками до мінімізації узагальненої квадратичної форми. Встановлено, що шість неортогональних функцій значно краще апроксимує розривну функцію чим тисячі ортогональні функції. Знайдено критерії, за яких побудований наближений розв’язок збігається з точним.

Список використаних джерел

1. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач / М. А. Алексидзе. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.
2. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье / Г. П. Толстов. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
3. *Mohan B. M.* Continuous Time Dynamical Systems: State Estimation and Optimal Control With Orthogonal Functions / B. M. Mohan, *S.K.* Kar. – Boca Raton: CRC Press, 2018.
4. *Revenko V P* Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity / V.P. Revenko // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, № 7. – P. 730-741. https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-42009
5. *Bakulin V.N.* Analytical and numerical method of finite bodies for calculation of cylindrical orthotropic shell with rectangular hole / V.N. Bakulin, V.P. Revenko // Russian Mathematics. – 2016. – № 6. – P. 1–11.
6. *Bramble J. H., Schatz A. H.* Least squares method for 2mth order elliptic boundary value problems /J.H. Bramble, A. H. Schatz // Mathematics of Computation. – 1971. – Vol. 25, No. 113. – P. 1–32.
7. *Ломакин В.А***.** Теория упругости неоднородных тел / В.А**.** Ломакин. – Москва: Изд. Москов. университета, 1976. – 368 с.

References

1. ALEKSY`DZE M. A. (1978) Fundamental`nye funkcy`y` v pry`bly`zhennyx resheny`yax grany`chnyx zadach. Moskva: Nauka.
2. TOLSTOV G. P. (1980) Ryady Fur`e. Moskva: Nauka.
3. MOHAN B. M. and KAR S.K. (2018) Continuous Time Dynamical Systems: State Estimation and Optimal Control With Orthogonal Functions. Boca Raton: CRC Press.
4. REVENKO V.P. (2009) Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity. *Int. Appl. Mech.* (**45**) 7. p. 730-741.
5. REVENKO V.P. and BAKULIN V.N. (2016) Analytical and numerical method of finite bodies for calculation of cylindrical orthotropic shell with rectangular hole. *Russian Mathematics*. No 6. p. 1–11.
6. BRAMBLE J. H., SCHATZ A. H. Least squares method for 2mth order elliptic boundary value problems. *Math. of Comp.* 1971. P. 1-32.
7. LOMAKY`N V.A. 1976 Teory`ya uprugosty` neodnorodnyx tel. Moskva: Yzdatel`stvo Moskovskogo uny`versy`teta

Надійшла до редколегії 27.08.21