

УДК 532.595

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.18>

Райновський І.А.¹, к.ф.-м.н., м.н.с.
Тимоха О.М.^{1,2}, д.ф.-м.н., акад. НАН України.

I. A. Raynovskyy¹, Junior Researcher, PhD
A. N. Timokha^{1,2}, Prof. Dr., Academician of the NAS
of Ukraine

**Про демпфовані усталені резонансні
коливання рідини в контейнері
кругового перерізу для довільних
періодичних непараметричних збурень**

**Damped steady-state resonant sloshing in a
container of circular cross-section for
arbitrary periodic nonparametric forcing**

¹ Інститут математики НАН України, 01004,
м. Київ, вул. Терещенківська 3,
e-mail: ihor.raynovskyy@gmail.com,
atimokha@gmail.com

² Centre of Excellence "Autonomous Marine
Operations and Systems", NTNU, Norway,
e-mail: alexader.timokha@ntnu.no

¹ Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine,
01004, Kyiv, Tereshchenkivska str., 3,
e-mail: ihor.raynovskyy@gmail.com,
atimokha@gmail.com

² Centre of Excellence "Autonomous Marine
Operations and Systems", NTNU, Norway,
e-mail: alexader.timokha@ntnu.no

Для аналізу резонансного коливання рідини у вертикальному циліндричному баці досліджуються відповідні нелінійні модальні рівняння типу Наріманова-Моїсєєва. Бак рухається періодично у просторі. Показано, що для довільних періодичних просторових рухів баку із частотою збурення, близькою до власної частоти коливання рідини, задача в асимптотичному сенсі зводиться до орбітального збурення баку в горизонтальній площині. Отримано аналітичні розв'язки секулярної системи, які описують домінуючі амплітуди усталених періодичних хвиль. Враховано ефект в'язкого демпфування. Результати порівнюються із експериментальними вимірами, проведеними різними авторами. Проводиться параметричний аналіз амплітудно-частотних характеристик для визначення яким чином змінюються усталені хвильові режими та їх стійкість із частотою збурення та еліптичною орбітою [співвідношенням її осей]. Основний результат полягає у підтвердженні експериментального феномену зникнення проти-направленої кругової хвилі (відносно напрямку збурення) при переході до кругової траєкторії.

Ключові слова: коливання рідини, демпфування, усталені хвилі, непараметричні збурення.

Nonlinear modal Narimanov-Moiseev—type equations are investigated to study resonant sloshing in a vertical cylindrical tank. The tank moves periodically in the space with the forcing frequency close to the lowest natural sloshing frequency. We show that the considered sloshing problem can to within the higher-order asymptotic terms be reduced to the case of orbital tank motions in the horizontal plane. Analytical solutions of the secular system which couples the dominant amplitudes of the steady-state sloshing are analytically solved. Effect of viscous damping is accounted. The results are compared with experimental measurements conducted by diverse authors for longitudinal and circular orbital tank excitations. A parametric analysis of the amplitude curves is done to clarify how the steady-state wave regimes and their stability change versus the forcing frequency and the semi-axes ratio of the elliptic orbit. The main result consists of confirming the experimental disappearance of the counter-directed swirling wave mode (relative to the elliptic orbit direction) when passaging to the circular orbit.

Key Words: sloshing, damping, steady-state waves, nonparametric forcing.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

Вертикальний циліндричний бак радіуса r_0 рухається циклічно з малою амплітудою (відносно радіуса) в просторі [1]. Вертикальні рухи баку вздовж осі Oz не розглядаються. Амплітуда збурення є малою відносно радіуса.

Вивчається безрозмірна постановка задачі, де r_0 - характерний розмір баку, а σ - частота збурення. Ідеальна нестислива рідина із безвихорівими течіями. Застосовується мультимодальний метод, який використовує

наближений розв'язок Фур'є для вільної поверхні та потенціалу швидкостей із залежними від часу невідомими і залежними від часу коефіцієнтами (узагальнені гідродинамічні координати та швидкості).

Хай нема вторинних резонансів та частота збурення баку є близькою до першої власної частоти коливання рідини (асимптотика Моїсеєва [2]). Нехтуючи величинами вищими від порядку збурення та додаючи демпфування [1,3,4] переходимо до системи звичайних диференціальних (модальних) рівнянь відносно узагальнених гідродинамічних координат.

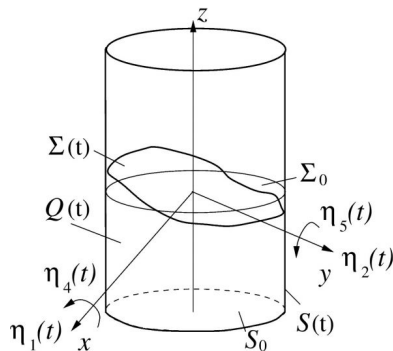


Рис.1 Позначення:

- $Q(t)$ - область рідини;
- $\Sigma(t)$ - вільна поверхня;
- $S(t)$ - змочена стінка баку;
- Σ_0 - гідростатична поверхня.

Ми будемо періодичний розв'язок модальної системи. Умовою її розв'язності є нелінійна система відносно домінантних амплітуд (A, B) усталеної хвилі та зсувів фаз. Показано [1,3], що демпфування суттєво впливає на ці хвилі та їх стійкість. Рис. 2 проілюструє різницю між амплітудно-частотними характеристиками за відсутності та наявності демпфування у просторі ($s / s_{11}, A, B$) для поздовжніх збурень баку, s_{11} - перша власна частота коливання рідини. Плоскі (стоячі) хвилі відповідають кривим у площині ($s / s_{11}, A$), а кругова хвиля є тривимірною. Демпфування породжує точки біфуркації P та H_2 (точки зміни характеру руху рідини в системі).

Рис. 3 ілюструє амплітудно-частотні характеристики для еліптичних збурень. При переході від поздовжніх до еліптичних збурень розщеплюється $E_1 H_1 H_2 E_2$, з'являється петля $R_1 R_2$, яка відповідає за кругову хвилю у

протилежному напрямку до еліптичних збурень баку. Із збільшенням відношення еліптичних осей збурення для вхідних даних може з'явитися один чи кілька острівців стійкості ($H_3 H_4$ на гілці $E_1 H_1 H_2 E_2$). Петля $R_1 R_2$ також зменшується при зростанні відношення осей. Коли воно досягає 0.45 може з'явитися додатковий острівець стійкості $R_3 R_4$. У проміжку між 0.45 та 0.5 петля $R_1 R_2 (R_1 R_2 R_3 R_4)$ зменшується. Її немає вже при 0.5. А при зростанні до 0.8 острівець $H_3 H_4$ зростає, з'єднуючись із $H_1 H_2$ та точкою E_1 .

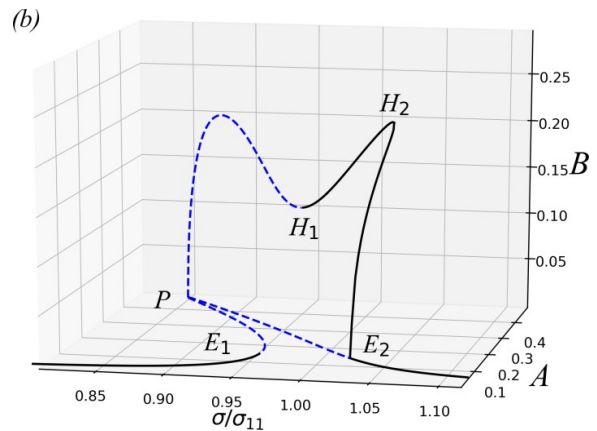
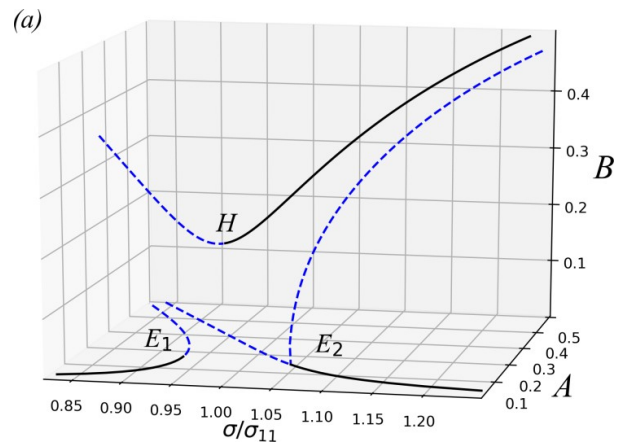


Рис. 2

Нульове (a) та ненульове (b) демпфування. Суцільні лінії відповідають стійким розв'язкам, а штрихові - нестійким. У діапазоні між E_1 та H спостерігається іррегулярна (хаотична) хвиля.

Перехід до кругових траєкторій не тільки робить неможливим протинаправлені кругові хвилі, але й унеможливорює діапазон частот, де відбуваються хаотичні хвильові рухи рідини. В околі основного резонансу тоді існує лише

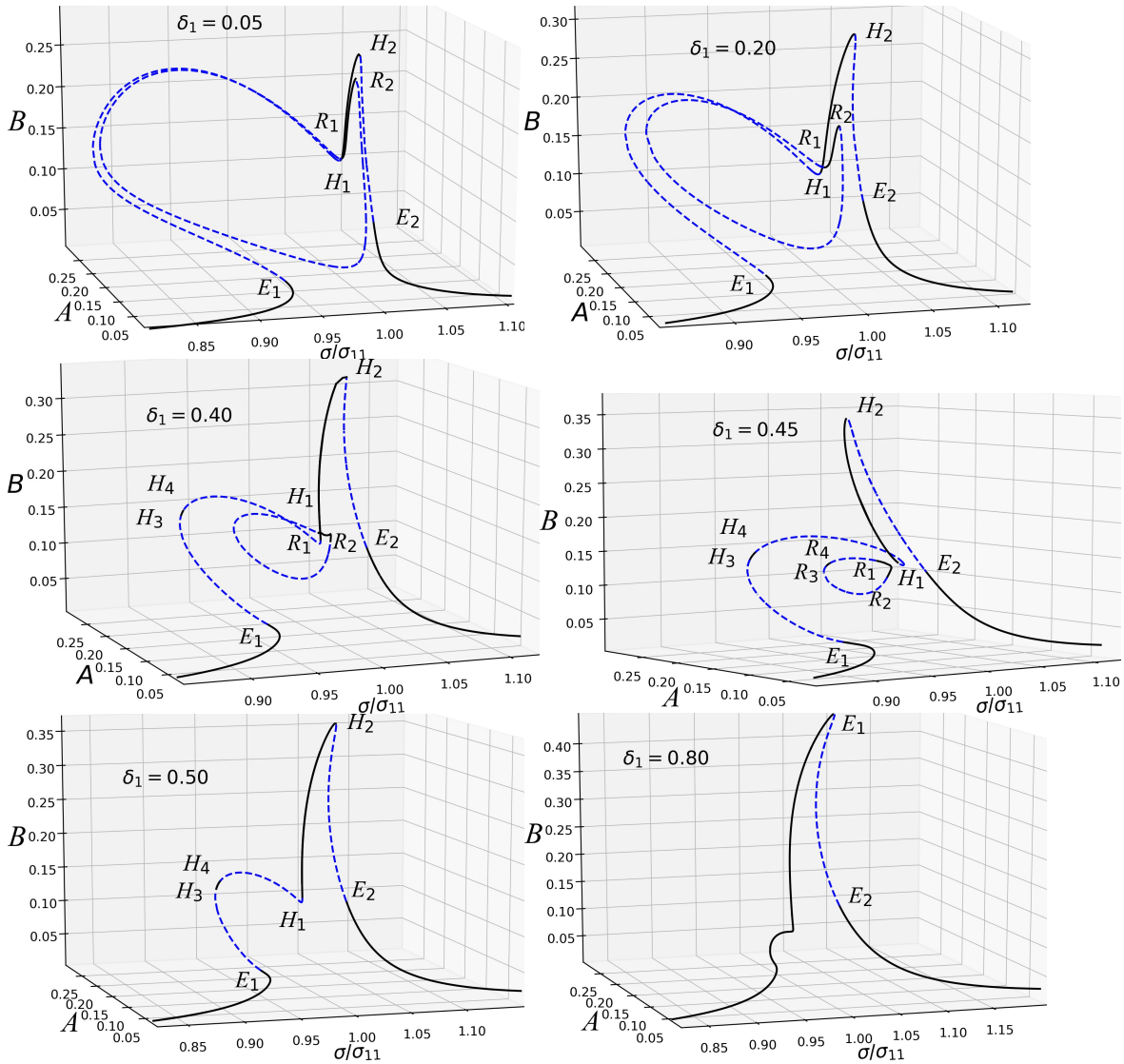


Рис. 3 Амплітудно-частотні характеристики для усталеного резонансного коливання рідини під час еліптичних рухів баку.

усталена кругова хвиля спів-направлена із напрямком збурень баку.

Лінійне демпфування впливає на коливання рідини під час орбітальних збурень (біореакторів). Найцікавішим є те, що навіть будучи відносно малим, демпфування унеможливило існування протилежно направленої кругової хвилі. Цей феномен узгоджується із експериментами [7]. Демпфування впливає якісно та кількісно на поведінку зсуву фаз.

Важливий висновок впливає із порівняння теоретичних та експериментальних результатів відносно амплітуди усталених хвиль при кругових рухах баку, де вказано на

невідповідність нашої теорії експериментам, коли вони характеризуються дефрагментацією вільної поверхні через хвилі розвалу. Збільшення демпфування здатне покращити відповідність експериментам для поздовжніх коливань баку. Так само й для кругової хвилі, коли експерименти показували на дефрагментацію вільної поверхні. Для більш складніших випадків, потрібно, швидше за все, врахувати феномен Прандтля [9] та розглянути вихорові рухи рідини.

Автори вдячні за підтримку НФДУ (проект 2020.02/0089).

Список використаних джерел

1. RAYNOVSKYY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2020) "*Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications*". CRC Press/Taylor & Francis Group.
2. *Faltinsen O.M. Sloshing* / O.M. Faltinsen, O.M. Timokha. – Cambridge University Press, 2009. – 608 с.
3. *Райновський І.А. Асимптотична модальна теорія Наріманова-Моїсєєва усталених демпфованих коливань в циліндричному баці* / І.А. Райновський. – Дисертація. – 2018. – Інститут математики НАНУ. – 161с..
4. *Miles J.W. A note on interior vs. boundary-layer damping if surface waves in a circular tank* / J.W. Miles, D.M. Henerson // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1998. –Vol. **364**. –Pp. 319-323.
5. RAYNOVSKYY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2018) Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion. *Mathematical Problems in Engineering*. Paper ID 5487178, pp. 1-9.
6. FALTINSEN, O.M., LUKOVSKY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2016) Resonant sloshing in an upright annular tank *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. **804**, pp. 608-645.
7. RECLARI, V. (2013) *Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors*. PhD Thesis #5759, Laboratoire de Machines Hydrauliques, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, p. 159.
8. RECLARI, M., DREYER, S., TISSOT, OBRESCHJOW, D. and WURM, F.M. (2014) Surface wave dynamics in orbital. shaken cylindrical containers. *Physics of Fluids*. Vol. **26**, Article ID 052104.
9. PRANDTL, L. (1949) Erzeugung von Zirkulation beim Schütteln von Gefässen. *ZAMM*, Vol. **29**, pp. 8-9.

References

1. RAYNOVSKYY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2020) "*Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications*". CRC Press/Taylor & Francis Group.
2. FALTINSEN, O.M. and TIMOKHA, A.N. (2009) "*Sloshing*". Cambridge University Press.
3. RAYNOVSKYY, I.A., (2018) *An asymptotic modal Narimanov-Moiseev theory of the damped steady-state sloshing in an upright cylindrical tank*. PhD Thesis. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv.
4. MILES, J.W. and HENDERSON, D.M. (1998) A note on interior vs. boundary-layer damping if surface waves in a circular tank. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. **364**, pp. 319-323.
5. RAYNOVSKYY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2018) Steady-state resonant sloshing in an upright cylindrical container performing a circular orbital motion. *Mathematical Problems in Engineering*. Paper ID 5487178, pp. 1-9.
6. FALTINSEN, O.M., LUKOVSKY, I.A. and TIMOKHA, A.N. (2016) Resonant sloshing in an upright annular tank. *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. **804**, pp. 608-645.
7. RECLARI, V. (2013) *Hydrodynamics of orbital shaken bioreactors*. PhD Thesis #5759, Laboratoire de Machines Hydrauliques, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, p. 159.
8. RECLARI, M., DREYER, S., TISSOT, OBRESCHJOW, D. and WURM, F.M. (2014) Surface wave dynamics in orbital. shaken cylindrical containers. *Physics of Fluids*. Vol. **26**, Article ID 052104.
9. PRANDTL, L. (1949) Erzeugung von Zirkulation beim Schütteln von Gefässen. *ZAMM*, Vol. **29**, pp. 8-9.

Надійшла до редколегії 29.08.21