УДК 539.3

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.17

Попов В. Г.[1], д. ф.-м. н., проф.
Кирилова О. І.,[2] к. ф.-м. н., доцент

Чисельне розв'язання сингулярного інтегрального рівняння, пов'язаного з динамічною задачею контактної взаємодії

[1,2] Національний університет «Одеська морська академія», 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8.

e-mail: [1]dr.vg.popov@gmail.com ,
[2]olga.i.kyrylova@gmail.com

V. G. Popov[1], Dr. Sci., Prof.
O. I. Kyrylova[2], PhD.

Numerical solution of a singular integral equation related with a dynamic contact interaction problem

[1, 2] National University «Odesa maritime academy», 65029, Odessa, Didrikhson str., 8.

e-mail: [1]dr.vg.popov@gmail.com
[2]olga.i.kyrylova@gmail.com

Розглядається сингулярне інтегральне рівняння з нерухомою особливістю, до якого зводиться задача контактної взаємодії двох чвертей простору в умовах гармонічних коливань повздовжнього зсуву. Чверті простору розміщуються так, що складений з них півпростір має ступінчасту межу. Для чисельного розв'язання цього рівняння запропоновано метод, який враховує справжню асимптотику розв'язку, використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів і корені спеціальної функції у якості точок колокації.

Ключові слова: сингулярне інтегральне рівняння, нерухома особливість, контактні напруження.

A singular integral equation with a fixed singularity to which the problem of contact interaction of two quarters of spaces in the conditions of harmonic oscillations of longitudinal shear is reduced is considered. A quarters of the space is situated so that the half-space composed of them has a stepped boundary. In the contact area, the conditions for ideal coupled are satisfied. The unknown function in this equation is the contact stresses. For the numerical solution of this equation, a method that takes into account the asymptotic behavior of contact stresses at the edge point is proposed. The basis of this method is the use of special quadrature formulas for singular integrals obtained in the article. When obtaining these formulas, the unknown function was approximated by an interpolation polynomial, in which the roots of the Laguerre polynomials are the points of interpolation. The values of the unknown function at the interpolation points are found by the collocation method, herewith the collocation points of collocationare the roots of the special function. An approximate formula for calculating contact stresses can have practical application. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by the numerical example.

Key Words: singular integral equation, fixed singularity, contact stresses

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

1. Вступ.

Одним з ефективних методів розв'язання контактних задач механіки деформівного тіла є приведення їх до інтегральних рівнянь. Частіше за все ці рівняння є сингулярними і вимагають чисельного розв'язання. У випадку, коли сингулярність складається з ядра типу Коші або різницевого логарифмічного ядра, наближене розв'язання може бути здійснено методом ортогональних многочленів [1], або колокаційним методом типу механічних квадратур [2]. Але існує клас контактних задач, що приводяться до сингулярних інтегральних рівнянь, в яких сингулярна складова містить ще і нерухому особливість [3]. Згідно з монографією [4], наявність нерухомої особливості суттєво впливає на структуру розв'язку інтегрального рівняння, зокрема, на його асимптотику при наближенні до кінців відрізку інтегрування. Тому при побудові числових методів розв'язання таких рівнянь необхідно визначати і враховувати цю асимптотику. У роботі [3] розв'язки для сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями, заданих на скінченному проміжку, здійснюється методом, що враховує справжню асимптотику розв'язків і використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів. У даній статті такий метод розроблено для інтегрального рівняння, визначеного на півосі $[0;+\infty)$. До цього рівняння приводиться задача контактної взаємодії двох чверть просторів при коливаннях повздовжнього зсуву.

2. Постановка задачі і її інтегральне рівняння.

Розглядаються два чверть простори $-\infty < x < 0;\ \ h < y < +\infty$ і $0 < x < +\infty;\ 0 < y < +\infty;\ -\infty < z < +\infty$, зчеплених між собою по області $x = 0;\ h < y < +\infty;\ -\infty < z < +\infty$ (Рис.1).

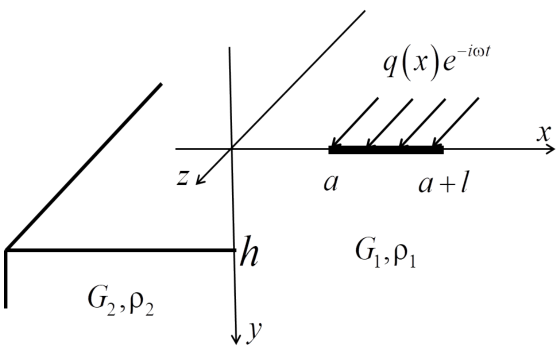

Рис.1. Два зчеплених чверть простори

До поверхні $y = 0$ першої чвертини простору прикладене зсувне вздовж осі Oz навантаження $q(x)e^{-i\omega t}$, $0 < a < x < a + l$. Далі множник $e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, всюди відкидається. За таких умов обидві чвертини перебувають у стані деформації повздовжнього вздовж осі Oz зсуву і єдиними відмінними від нуля є переміщення $W_j(x,y),\ j = 1,2$, які задовольняють рівняння Гельмгольца:

$$\Delta W_j(x,y) + \kappa_j^2 W_j(x,y) = 0;\ \kappa_j^2 = \frac{\omega^2\rho_j}{G_j}, \qquad (1)$$

де $\rho_1, G_1 -$ густина і модуль зсуву правої частини простору, $\rho_2, G_2 -$ лівої. На горизонтальних поверхнях чверть просторів виконуються умови:

$$\tau_{yz}^1(x,0) = \begin{cases} q(x), x \in [a, a+l] \\ 0, x \notin [a, a+l] \end{cases},\ x \in (0,+\infty); \qquad (2)$$
$$\tau_{yz}^2(x,h) = 0;\ x \in (-\infty, 0).$$

На вертикальній поверхні $x = 0, y \geq 0$ здійснюються умови повного зчеплення:

$$\tau_{xz}^1(0,y) = \begin{cases} 0, 0 < y < h, \\ p(y), y \geq h \end{cases},\ \ \tau_{xz}^2(0,y) = p(y);\ y \geq h; \qquad (3)$$
$$W_1(0,y) = W_2(0,y),\ \ y > h.$$

У рівностях (3) $p(y) -$ невідомі контактні напруження. Після розв'язання крайових задач (1)-(3) знайдено подання переміщень у кожній чверті простору через невідомі контактні напруження. Залишається визначити контактні напруження $p(y)$. Це здійснюється за допомогою останньої рівності (3), яка попередньо диференціюється. Причому за умови, що переміщення прямують до нуля при $y \to +\infty$, профидеренційована рівність буде еквівалентною до вихідної. Після реалізації цієї умови приходимо до інтегрального рівняння відносно контактних напружень, яке перетворюється до вигляду:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \chi(s)\left[\frac{1+\gamma}{s-\sigma} - \frac{\gamma}{s+\sigma} + R(s,\sigma)\right]ds = F(\sigma); \qquad (4)$$
$$0 < \sigma < \infty.$$

У рівнянні (4) введено такі позначення:

$$\gamma = G_1 \cdot G_2^{-1};\ \chi(s) = G_1^{-1} \cdot p(h(1+s)).$$

Функції $R(s,\sigma)$ вже не містять сингулярності, а $F(s)$ подається через навантаження $q(x)$. Можна бачити, що сингулярна складова інтегрального рівняння (4), окрім ядра Коші, має також нерухому особливість при $s = \sigma = 0$.

3. Чисельне розв'язання інтегрального рівняння.

Попередньо розглянемо функцію

$$\lambda_n^\beta(\sigma) = \int_0^\infty \frac{e^{-s}s^{+\beta}L_n^\beta(s)}{s-\sigma}ds = \left(-\pi ctg\pi\beta\sigma^\beta L_n^\beta(s) + \right. \qquad (5)$$
$$\left. + \Gamma(\beta)\Phi(-\beta-n, 1-\beta, \sigma)\right)e^{-\sigma},$$

де $L_n^{\beta}(s)$ – многочлен Лагерра [5], Φ – вироджена гіпергеометрична функція. Чисельне дослідження цієї функції показало, що при $-1<\beta<1$ вона має $n+1$ додатних простих коренів $\sigma_j>0,\ j=1,2,...,n+1$. Це дає можливість створити чисельний метод розв'язання, що використовує ці корені у якості точок колокації.

Розв'язок рівняння (4) має інтегровану особливість при $s\to 0$ і прямує до нуля при $s\to\infty$:

$$\chi(s)=s^{-\delta}e^{-s}\varphi(s) \tag{6}$$

Згідно з [4] показник δ має дорівнювати

$$\delta=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\gamma}{1+\gamma} \tag{7}$$

Далі введемо до розгляду функцію $s\psi(s)=\varphi(s)-\varphi(0),\ \varphi(s)\neq 0$. Тоді, згідно з (6), знаходимо таке подання для невідомої функції:

$$\chi(s)=s^{-\delta}e^{-s}\varphi(0)+s^{1-\delta}\psi(s) \tag{8}$$

Далі функцію $\psi(s)$ наближаємо інтерполяційним многочленом, де вузлами інтерполяції s_m є корені многочленів $L_n^{1-\delta}(s)$:

$$\psi(s)\approx\psi_n(s)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\psi_m}{\left(L_n^{1-\delta}(s_m)\right)'(s-s_m)}, \tag{9}$$

де $\psi_m=\psi(s_m)$. Подання (8) і наближення (9) дозволяє отримати наступну квадратурну формулу для інтегралу Коші при $s=\sigma_j,\ j=1,2,...,n+1$, де σ_j – корені функції $\lambda_n^{1-\sigma}(\sigma)$:

$$\int_0^{\infty}\frac{\chi(s)}{s-\sigma_j}ds=\varphi(0)\lambda_0^{-\delta}(\sigma_j)+\sum_{m=1}^{n}\psi_m\frac{A_{nm}^{1-\delta}}{s_m-\sigma_j},\quad j=1,2,...,n+1. \tag{10}$$

У формулі (10) і далі позначають через A_{nm}^{β} коефіцієнти квадратурної формули типу Гауса для інтегралів по $[0;+\infty)$ при ваговій функції $x^{\beta}e^{-x}$ [6]. Для інтегралу з нерухомою особливістю отримано

$$\int_0^{\infty}\frac{\chi(s)}{s+\sigma_j}ds=\varphi_0(0)\theta_0^{-\delta}(\sigma_j)+\sum_{m=1}^{n}\psi_m\frac{B_{jm}}{s_m+\sigma_j},$$
$$B_{jm}=A_{nm}^{1-\delta}-\frac{\theta_n^{1-\delta}(\sigma_j)}{\left(L_n^{1-\sigma}(s_m)\right)},\quad j=1,2,...,n+1. \tag{11}$$

У формулі (11) використано функцію

$$\theta_n^{\beta}(\sigma)=\int_0^{\infty}\frac{s^{\beta}e^{-s}L_n^{\beta}(s)}{s+\sigma}ds=\frac{\pi}{\sin\pi\beta}\left(-\sigma^{\beta}e^{\sigma}L_n^{\beta}(-\sigma)+\frac{e^{\sigma}}{\Gamma(1-\beta)}\Phi(-\beta-n,1-\beta,-s)\right).$$

Для регулярних інтегралів використовуються формули типу Гауса [6].

У результаті підстановки в інтегральне рівняння (4) $\sigma=\sigma_j$ та застосування квадратурних формул (10), (11) приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\varphi(0)$ та ψ_m, $m=1,2,...,n$:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\psi_m\left((1+\gamma)\frac{A_{nm}^{1-\delta}}{s_m-\sigma_j}-\gamma\frac{B_{jm}}{s_m-\sigma_j}+A_{nm}^{1-\delta}R_{jm}\right)+\frac{\varphi(0)}{\pi}\left(\lambda_0^{-\delta}(\sigma_j)-\gamma\theta_0^{-\delta}(\sigma_j)+C_j\right)=F(\sigma_j),\ j=1,...,n+1;$$

$$C_j=\sum_{m=1}^{n}A_{nm}^{-\delta}R(z_m,\sigma_j),\ \ R_{jm}=R(s_m,\sigma_j),$$

z_m – корені многочлена $L_n^{-\delta}(z)$.

Після розв'язання системи контактні напруження розраховувались за формулами (9), (10).

4. Чисельна реалізація і висновки.

Для чисельної реалізації були розглянуті чверть простори, що складалися зі сталі та алюмінію при значеннях геометричних параметрів $\alpha=al^{-1}=1,\quad d=hl^{-1}=1.$

Навантаження вважалося сталим $f(s) \equiv 1, s \in [1;2]$, а безрозмірне хвильове число $\kappa_0 = \kappa_{12} l = 3$.

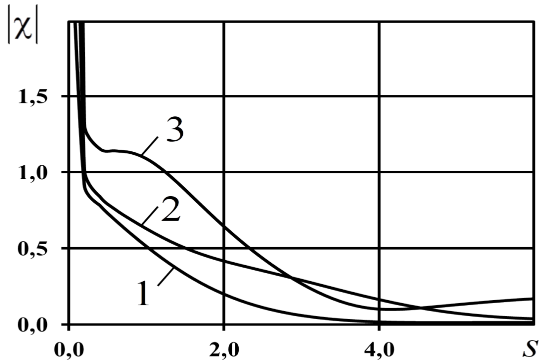

Рис.2. Розподіл контактних напружень.

Результати розрахунків безрозмірних контактних напружень приведено на рис.2 у вигляді графіків 1-3.

Перший графік відповідає випадку, коли перша (навантажена) чверть простору є сталевою, а друга є алюмінієвою. Другий графік показує розподіл контактних напружень, коли обидві чвертини є сталевими, тобто маємо однорідний півпростір зі ступінчатою границею. Третя крива побудована за умови, що навантажена чверть простору з алюмінію, а друга сталева.

Встановлено, що значення контактних напружень зростають при зменшенні зсувної жорсткості завантаженої чверті простору. Також показано швидке спадання значень контактних напружень при віддалені від завантаженої границі. Взагалі числові результати показали, що врахування асимптотики розв'язку, використання спеціальних квадратурних формул для сингулярних інтегралів, спеціальний вибір точок колокації дозволяє створити ефективний числовий метод розв'язання даного сингулярного інтегрального рівняння з нерухомою особливістю.

Список використаних джерел

1. *Попов Г.Я.* О методе ортогональных многочленов в контактних задачах теории упругости / Г.Я. Попов // ПММ. – 1969. – Т.33. – № 3. – С. 518-533.
2. *Белоцерковский С.М.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике / С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов. – Москва: Наука, 1985. – 253 с.
3. *Попов В.Г.* Двовимірні динамічні задачі теорії пружності, що зводяться до сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями / В.Г. Попов // Мат.методи та фіз. -мех. поля. – 2020. – № 63 (1). – С. 94-105.
4. *Дудучава Р.В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики / Р.В. Дудучава // Труды Тбилисского математичекого института АН СССР. –1979. – Т.60. –с. 313.
5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены / Г. Сеге. -Москва: Физматгиз, 1962. – 500 с.
6. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов / В.И. Крылов. – Москва, Наука, 1967. – 500 с.

References

1. POPOV G. (1969) O metode ortogonal'nih mnogotshlenov v contactnih zadachah teorii uprugosty. *PMM*. T.33. № 3. P. 518-533.
2. BELOTSERKOVSKIJ S., LIFANOV I. (1985) *Chislennije metodi v singularnih integralnih uravnenijah i ih primenenije v aerodinamike, teoriji uprugosti, elektrodinamike.* Moskva: Nauka.
3. POPOV V. (2020) Dvovimirni zadachi teoriji prugnosti, hsto zvodjatsja do singularnih integral'nih rivn'an' z neruhomimi osoblivoctjami *Mat.metodi ta fiz.-meh. polja*. № 63 (1). P. 94-105.
4. DUDUCHAVA R. (1979) Integralnie uravnenija svertki s razrivnimi predsimvolami, singularnie integral'nie uravnenija s nepodvignimi osobennostami i ih prilogenija k zadacham mechaniki. *Trudi Tbilisskogo matem.instituta AN SSSR*. T. 60. P.313.
5. SEGE G. (1962) *Ortogonal'nie mnogotshleni.* Moskva: Fizmatgiz.
6. KRILOV V. (1967) *Pribligennoje vitshislenije integralov.* Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 6.09.21