

УДК 539.376

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.16>

Плащинська А.В., к.т.н., с.н.с.

Alla V. Plashchynska, Ph.D.

**Щодо способу розрахунку кінетики  
накопичення пошкодження вздовж  
фронті тріщини втомі в тонких  
пластинах**

**On the method of the damage accumulation  
analysis in front of the fatigue crack in thin  
plates**

Національна академія наук України, Інститут  
механіки ім. С.П.Тимошенка, 303057, м. Київ,  
вул. Нестерова, 3  
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

National Academy of Science of Ukraine,  
S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, 03057, Kyiv,  
Nesterov str., 3,  
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

*Розглянуто задачу моделювання процесу накопичення пошкоджень вздовж фронту руйнування при втомі в тонкій ізотропній пластині. Розв'язок задачі побудовано на підставі поєднання концепцій механіки руйнування та механіки безперервного пошкодження. Запропоновано чисельний розв'язок інтегрального рівняння руху фронту тріщини. Розгляд зазначеного рівняння як суперпозиції множини рекурентних рівнянь для кожного моменту часу дозволяє змодельовувати стрибкоподібний характер зростання тріщини втомі та врахувати історію накопичення пошкодження у матеріалі пластини в процесі навантаження. Отримано чисельний розв'язок тестової задачі про розповсюдження тріщини втомі в тонкій пластині з алюмінієвого сплаву 7075-T6 за одновісного асиметричного багаточиклового розтягу-стиску. Побудовані залежності довжини тріщини втомі від числа циклів навантаження задовільно узгоджуються з експериментальними даними.*

*Ключові слова: тріщина втомі, пошкодження, тонка пластина, асиметричний цикл навантаження.*

*The problem on modeling the process of damage accumulation along the fracture front at fatigue in a thin isotropic plate is considered. The solution of the problem is based on joined of the concepts of fracture mechanics and mechanics of continuous damage. A numerical solution of the integral equation of crack front motion is proposed. Consideration of this equation as a superposition of a set of recurrent equations for each moment allows us to model the jumping nature of the fatigue crack growth and take into account the history of damage accumulation in the plate material during loading. A numerical solution of the test problem on the fatigue crack propagation in a thin plate made of aluminum alloy 7075-T6 with uniaxial asymmetric cyclic tension-compression is obtained. The constructed dependences of the fatigue crack length on the number of load cycles agree satisfactorily with the experimental data.*

*Keywords: fatigue crack, damage, thin plate, asymmetric load cycle.*

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

**Вступ**

Побудова моделей руйнування внаслідок втомі є актуальною задачею при прогнозуванні термінів безпечної експлуатації елементів конструкцій в умовах багаточиклового навантаження. Одним з перспективних шляхів у цьому напрямку є розгляд процесу накопичення пошкоджень у матеріалі конструкцій як рушійної сили для зародження та розповсюдження тріщин втомі. На основі поєднання концепцій механіки руйнування та механіки безперервного пошкодження побудовано двостадійну модель

розповсюдження тріщини втомі [1]. Модель дозволяє з єдиних позицій визначити тривалість інкубаційного періоду та стадію розповсюдження тріщини втомі. Отримано аналітичні розв'язки задач про розповсюдження тріщини втомі в тонких пластинах з концентраторами напружень при багаточикловому асиметричному навантаженні [2].

У даній роботі розглядається чисельний спосіб розв'язання задачі про розповсюдження тріщини втомі в тонкій ізотропній пластині за одновісного асиметричного багаточиклового

розтягу-стиску з урахуванням історії накопичення пошкодження вздовж фронту руйнування.

### 1. Постановка задачі. Основні співвідношення

Розглянемо тонку нескінченну ізотропну пластину з центральною тріщиною нормального відриву (рис. 1), розташовану вздовж осі  $x$ . Початкову напівдовжину тріщини позначимо  $\ell_0$ , а поточну –  $\ell(n)$ , число циклів навантаження позначимо  $n$ . Береги тріщини вільні від навантаження, а в напрямку осі  $Oy$  на

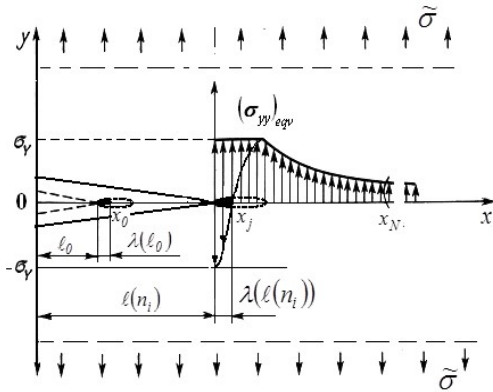


Рис. 1. Пластина з тріщиною

нескінченності прикладене одновісне багаточислове асиметричне навантаження  $\tilde{\sigma}$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi n); \\ (\sigma_{\max} = (\sigma_m + \sigma_a) < \sigma_Y), \end{cases} \quad (1.1)$$

де  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$  – значення середнього та амплітудного напруження циклу;  $\sigma_Y$  – границя текучості матеріалу. Вважаємо, що  $\sigma_a$  не залежить від дискретного часу  $n$  (стаціонарний режим) і прикладається з частотою  $f \geq 10$  Гц, а максимальне напруження циклу  $\sigma_{\max}$  не перевищує границі текучості матеріалу  $\sigma_Y$  (багаточислова втома). У цьому випадку основний масив пластин деформується пружно, а руйнування внаслідок втоми є квазікрихким.

Для подальшого розгляду задачі, асиметричний цикл навантаження (1.1) зводимо до еквівалентного йому за числом циклів до руйнування  $n_R$  симетричного циклу [3], у вигляді

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{eqv}(n) = (\sigma_a)_{eqv} \sin(2\pi n) \\ (\sigma_a)_{eqv} = \left[ \cos \left[ \frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_B} \right] \right]^{-\eta} \sigma_a \end{cases}, \quad (1.2)$$

де  $\tilde{\sigma}_{eqv}$  – еквівалентне циклічне напруження симетричного циклу;  $(\sigma_a)_{eqv}$  – амплітуда еквівалентного циклічного напруження;  $\sigma_B$  – границя міцності матеріалу пластин на розтяг;  $\eta$  – коефіцієнт чутливості матеріалу пластин до асиметрії циклу навантаження за одновісного розтягу-стиску.

Відповідно до моделі тріщини втоми Райса [4] в околі її вершини формуються монотонна та циклічна пластичні зони. Довжину циклічної пластичної зони визначаємо з рівняння [5]

$$\lambda(\ell(n)) = \frac{1}{8} \left[ \frac{\pi (\sigma_a)_{eqv}}{2 \sigma_Y} \right]^2 \ell(n). \quad (1.3)$$

За визначальне співвідношення процесу руйнування внаслідок втоми розглядаємо еволюційне рівняння накопичення пошкодженості з початковими умовами у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega(x, n)}{\partial n} = D \left[ \frac{(\Delta \tilde{\sigma}_{yy}(x, n))_{eqv}}{1 - \omega(x, n)} \right]^q; \\ \omega(x, n) = \begin{cases} 0 & \text{при } n_0 = 0; \\ 1 & \text{при } n = n_R; \end{cases} \end{cases} \quad (1.4)$$

де  $\omega(n, x)$  – скалярна функція пошкодження, що залежить від числа циклів  $n$  навантажень та від координати  $x = \ell(n) + \lambda(\ell(n))$  на фронті тріщини;  $n_R$  – число циклів до руйнування в точці  $x$ ;  $(\Delta \tilde{\sigma}_{yy}(x, n))_{eqv}$  – розмах еквівалентних циклічних напружень в околі вершини тріщини на момент часу  $n$ , що визначається з розв'язку пружної задачі;  $D$ ,  $q$  – коефіцієнти, що характеризують інтенсивність накопичення пошкоджень.

Задача полягає у побудові способу вирішення задач кінетики тріщин втоми з урахуванням історії накопичення пошкодження  $\omega(n, x)$  вздовж фронту руйнування в будь-який момент часу.

## 2. Чисельний алгоритм. Тестова задача

Шляхом інтегрування еволюційного рівняння (1.4), отримаємо рівняння руху фронту тріщини втоми у вигляді

$$\int_0^l [1 - \omega(x, n)]^q d\omega = (1 + q)D \left\{ \int_0^n [(\Delta\sigma_{yy}(x, n))_{eqv}]^q dn \right\}. \quad (2.1)$$

Розглянемо рух тріщини втоми на  $N$  дискретних проміжках часу  $n_i \leq n \leq n_{i+1}$ , ( $i = 0, N$ ), та визначимо рівень накопиченого пошкодження в точках вздовж фронту руйнування з координатами  $x_j = \ell(n_i) + \lambda(\ell(n_i))$ ,  $j = i, N$ . Інтегральне рівняння (2.1) запишемо як суперпозицію рекурентних рівнянь для кожного проміжку часу у вигляді

$$\sum_{i=0}^N \int_{\omega(n_i, x_j)}^{\omega(n_{i+1}, x_j)} [1 - \omega(n_i, x_j)]^q d\omega = D \sum_{i=0}^N \int_{n_i}^{n_{i+1}} \left( (\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_j - \ell(n_i))}} \right)^q dn; \quad (2.2)$$

$i = 0, N \quad j = i, N$

$$\omega(n_{i+1}, x_j) = 1 - \left( [1 - \omega(n_i, x_j)]^{q+1} - (q+1)D \left[ (\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_j - \ell(n_i))}} \right]^q (n_{i+1} - n_i) \right)^{\frac{1}{1+q}}, \quad (2.5)$$

де число циклів до руйнування в точці  $x_i$

$$n_{i+1} = n_i + [1 - \omega(n_i, x_i)]^{q+1} \left[ (q+1)D \left[ (\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{\ell(n_i)}{2(x_i - \ell(n_i))}} \right]^q \right]^{-1}. \quad (2.6)$$

визначається з критерію руйнування (2.3).

Застосуємо розглянутий алгоритм до розв'язання тестової задачі про рух тріщини нормального відриву (рис.1) з початковою напівдовжиною  $\ell_0 = 2,54 \cdot 10^{-3}$  м у тонкій нескінченній пластині з алюмінієвого сплаву 7075-T6 за багатоциклового асиметричного розтягу-стиску (1.1), де  $\sigma_a = 69$  МПа  $\sigma_m = 138$  МПа, (коефіцієнт асиметрії циклу  $R = 0,33$ ). На рис. 2 наведено результати розрахунків за співвідношеннями (2.4-2.6). Лініями 1, 2, 3, 4 позначено рівень накопиченого пошкодження  $\omega(n_i, x_j)$  вздовж фронту тріщини в моменти часу

де  $(\sigma_a)_{eqv}$  – еквівалентні амплітудні напруження циклу навантаження;  $\omega(n_i, x_j)$  пошкодження, яке накопичується за час  $n_i$  вздовж фронту тріщини. При виконанні критерію руйнування

$$\omega(n_{i+1}, x_j) = 1, \quad j = i, \quad (2.3)$$

тріщина просувається вздовж фронту руйнування стрибками на довжину циклічної пластичної зони  $\lambda(\ell(n_i))$ .

Задаючи в рівнянні (2.2) початкові умови  $n_0 \leq n \leq n_1$  ( $n_0 = 0$ ), та рівня пошкоджень  $\omega(n_0, x_0) = 0, \omega(n_1, x_0) = 1$ , визначасмо тривалість інкубаційного періоду

$$n_1 = \left[ (q+1)D \left[ (\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{\ell(n_0)}{2(x_0 - \ell(n_0))}} \right]^q \right]^{-1}. \quad (2.4)$$

Рівень накопиченого пошкодження  $\omega(n_{i+1}, x_j)$ , за проміжок часу  $n_i \leq n \leq n_{i+1}$ , ( $i = 0, N$ ) по координатах по фронту тріщини визначаємо інтегруючи рівняння (2.2) за співвідношенням

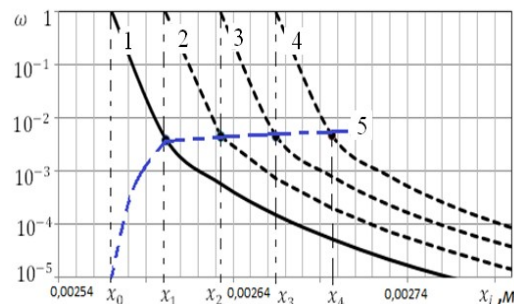


Рис. 2. Накопичення пошкодження вздовж фронту руйнування з часом  $n_i$

$n_i$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), відповідно. Лінія 5 відповідає пошкодженню  $\omega(n_i, x_i)$ , що накопичилося в точці  $x_i$  за кожний момент часу  $n_i$ . Руйнування в точці  $x_i$  відбувається за виконання критерію (2.3).

На рис 3. побудовано залежності довжини

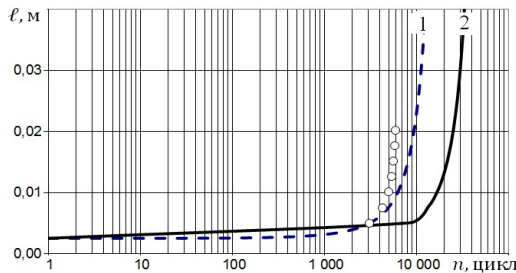


Рис.3. Залежності довжини тріщини втоми від числа циклів

#### Список використаних джерел

1. Golub V.P. Fatigue fracture model for thin isotropic plates with cracks in axial loading / V.P.Golub, A.V.Plashchinskaya // International applied mechanics, 1994. – 30 (7). – P. 520-529.
2. Golub V.P. On the theory of growth of fatigue mode I cracks in thin isotropic plates of finite size under uniaxial tension-compression / V.P.Golub, A.V.Plashchinskaya // International Applied Mechanics, 2018. – 54 (2). – P. 188-206.
3. Голуб В.П., Пельых В.Н., Погребняк А.Д. Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении-сжатии методом эквивалентных напряжений / В.П.Голуб, В.Н.Пельых, А.Д.Погребняк. – Вісник національного технічного університету України „КПІ”, 2010. – 58. – С. 177-182.
4. Rice J.R. Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue / J.R.Rice // ASTM STP 415, Fatigue Crack Propagation. – 1967 – P. 247-309.
5. Newman J.C., Jr. FASTRAN-II – A fatigue crack growth structural analysis program / J.C.Newman, Jr. – NASA-TM-104159, 1992. – 103 p.
6. Hudson C.M., Scardina J.T. Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 aluminum-alloy sheet. / C.M.Hudson, J.T.Scardina. – NASA TMX-60125, 1967. – P. 24.

тріщини втоми від числа циклів навантаження в тонкій нескінченній пластині з алюмінієвого сплаву 7075-T6 при асиметричному циклі навантаження  $\sigma_a = 69$  МПа  $\sigma_m = 138$  МПа. Лінія 1 відповідає рекурентній залежності (2.6), яка враховує історію накопичення пошкодження  $\omega(n_i, x_j)$  по координатах  $x_j$  вздовж фронту руйнування за кожний момент часу  $n_i$ , лінія 2 отримана з аналітичного розв’язку рівняння (2.1), та експериментальні дані (○) з роботи [6]. Отримано задовільне узгодження результатів розрахунків з експериментальними даними.

#### References

1. GOLUB V.P, PLASHCHINSKAYA A.V. (1994) *Fatigue fracture model for thin isotropic plates with cracks in axial loading*. International applied mechanics, 30 (7). P. 520-529.
2. GOLUB V.P, PLASHCHINSKAYA A.V. (2018) *On the theory of growth of fatigue mode I cracks in thin isotropic plates of finite size under uniaxial tension-compression*. International Applied Mechanics, 54 (2). – P. 188-206.
3. GOLUB V.P., PELYKH V.N., POGREBNIYAK A.D. (2010). *Prognozirovanie ustalostnoy dolgovechnosti prizmaticheskikh metallicheskikh stержней pri asimmetrichnom rastyazhenii-szhatii metodom ekvivalentnykh napryazheniy*. Visnyk nacional'nogo tekhnichnogo universytetu Ukrayiny' „KPI”, 58, p. 177-182.
4. RICE J.R. (1967) *Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue*. ASTM STP 415, Fatigue Crack Propagation. – P. 247-309.
5. NEWMAN J.C., JR. (1992) *FASTRAN-II – A fatigue crack growth structural analysis program*. – NASA-TM-104159. – 103 p.
6. HUDSON C.M., SCARDINA J.T. (1967). *Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 aluminum-alloy sheet*. NASA TMX-60125.

Надійшла до редколегії 29.08.21.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми „Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).