УДК 539.3
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.9

Куценко О. Г., к. ф.-м. н., доц.,
Харитонов О. М., к. ф.-м. н., доц.

# Алгоритм розв'язку нестаціонарної задачі термопружності для двошарового циліндра при змінному коефіцієнті теплообміну

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

O. G. Kutsenko, Ph.D (Phys.-Math.),
O. M. Kharytonov, Ph.D (Phys.-Math.)

# Algorithm of solving of nonstationary thermoelastic problem for two-layered cylinder at time-variety heat transfer coefficient

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, Glushkova av., 4e,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

*Розглянуто нестаціонарну осесиметричну задачу термопружності для двошарового циліндра, на внутрішній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем. Побудовано розв'язок даної задачі для випадку неоднорідного початкового температурного поля. Розв'язок представлений у вигляді розвинення по системі власних функцій граничної задачі для двокомпонентного стрижня, які виражаються через елементарні функції. На основі даного розв'язку запропоновано інкрементний алгоритм розв'язання задач термопружності для двошарового циліндру у випадку, коли коефіцієнт теплообміну змінюється в часі. За відомим полем температур осесиметричне поле напружень відтворюється на основі аналітичних співвідношень. Запропонований алгоритм був апробований на прикладі сценарію термошока корпуса атомного реактора. Результати порівняння з чисельним розв'язком методом скінченних елементів засвідчили достатню практичну точність запропонованого підходу.*

*Ключові слова: нестаціонарна термопружність, двошаровий циліндр, термошок.*

*The nonstationary axisymmetric thermoelasticity problem for a two-layer cylinder at the inner surface of which convective heat transfer with an environment takes place is considered. The solution of this problem is derived for the case of inhomogeneous initial temperature field. The solution is presented in the form of development by the system of eigenfunctions of the boundary value problem for a two-component beam and expressed in terms of the elementary functions. Based on this solution, an incremental algorithm of solving thermoelasticity problems for a two-layer cylinder is proposed for the case that the heat transfer coefficient between the inner surface of the cylinder and environment is time-varied. The idea of the algorithm is to divide the entire transient time interval into a sequence of subintervals, the heat transfer coefficient is considered constant on each. Once the temperature field is determined, the axisymmetric stress field can be founded on the basis of analytical expressions. The proposed algorithm was tested on the example of the thermal shock scenario for a nuclear reactor vessel. The comparison of the obtained results with the numerical solution by the finite element method verified sufficient working accuracy of the proposed approach.*

*Key Words: nonstationary thermoelasticity, two-layer cylinder, thermal shock.*

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

## Вступ

Незважаючи на значний розвиток чисельних методів та обчислювальної техніки, знаходження аналітичних розв'язків задач термопружності залишається актуальним напрямком. По-перше, дані розв'язки можна використовувати як еталонні для апробації чисельних алгоритмів. По-друге, аналітичні розв'язки дозволяють швидко

© О.Г. Куценко, О.М. Харитонов, 2021

оцінювати напружений стан конструкції, що значно скорочує час чисельних розрахунків за рахунок швидкого попереднього відбору небезпечних сценаріїв. Крім того, аналітичні розв'язки дозволяють легко реалізовувати алгоритми он-лайн оцінки ресурсу обладнання. Тому побудова аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі термопружності для двошарового циліндру представляється актуальною задачею. Конструктивні елементи, які можна моделювати двошаровим циліндром, часто зустрічаються в різних галузях промисловості. У якості прикладу таких елементів можна навести циліндричні резервуари та трубопроводи, покриті антикорозійним наплавленням.

**Розв'язок нестаціонарної задачі у випадку довільного початкового температурного поля**

Розглянемо осесиметричну задачу термопружності для двошарового циліндру, внутрішня поверхня якого перебуває в конвективному теплообміні з зовнішнім середовищем, температура якого лінійно змінюється у часі. Якщо товщина стінки циліндра значно менша за радіус його серединної поверхні, всередині стінки невідомі розподіли температури мають задовольняти рівняння:

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = a_k^2 \frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}, \qquad k = 1,2, \tag{1}$$

де через $T_1(x,t)$ позначено розподіл у внутрішньому шарі циліндра, а через $T_2(x,t)$ — у зовнішньому шарі циліндра, $t$ — час, $a_k^2 = \lambda_k / (\rho_k c_k)$, $\lambda_k$ — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, $\rho_k$ — густина, $c_k$ — теплоємкості матеріалів шарів.

Між шарами мають виконуватися умови неперервності температури та теплового потоку:

$$T_1\big|_{x=h_1} = T_2\big|_{x=h_1}, \qquad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=h_1} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=h_1}. \tag{2}$$

Зовнішня поверхня циліндра вважається теплоізольованою:

$$\frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=h} = 0. \tag{3}$$

На внутрішній поверхні циліндра задається умова конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем з постійним коефіцієнтом теплопередачі $H$ та постійною швидкістю зміни температури зовнішнього середовища $V$:

$$\left( T_1 - \frac{\lambda_1}{H} \frac{\partial T_1}{\partial x} \right)\bigg|_{x=0} = Vt. \tag{4}$$

Початкові розподіли температури $T_{10}(x)$ та $T_{20}(x)$ будемо вважати довільними:

$$T_k\big|_{t=0} = T_{k0}(x), \qquad k = 1,2. \tag{5}$$

В [1] наведено розв'язок задачі (1)–(5) за умови однорідного початкового розподілу температури, тобто однорідних умов (5). Даний розв'язок має вигляд

$$T_k^I(x,t) = \frac{V}{\omega}\left[ \psi_k(x,t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta_k(\mu_n, x)}{\mu_n^3 \Delta_0(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 \omega t} \right], \tag{6}$$

де

$$\Delta_0(\mu_n) = \delta_1 \sin\mu_n \cos\beta\mu_n + \delta_2 \cos\mu_n \sin\beta\mu_n + \\ + \delta_3 \cos\mu_n \cos\beta\mu_n + \delta_4 \sin\mu_n \sin\beta\mu_n,$$

$$\Delta_1(\mu_n, x) = \cos\beta\mu_n \cos(1 - x/h_1)\mu_n - \\ - \alpha \sin\beta\mu_n \sin(1 - x/h_1)\mu_n,$$

$$\Delta_2(\mu_n, x) = \cos(1 - (x - h_1)/h_2)\beta\mu_n,$$

$$\psi_1(x,t) = \omega t + x^2 h_1^{-2}/2 - (1 + \alpha\beta)(\gamma + x/h_1),$$

$$\psi_2(x,t) = \omega t - \beta^2 (x - h_1)\big(1 - (x - h_1)/(2h_2)\big)/h_2 - \\ - \alpha\beta(1 + \gamma) - \gamma - 1/2,$$

$$\delta_1 = 1 + \alpha\beta + \gamma, \qquad \delta_2 = \alpha + \beta + \alpha\gamma,$$

$$\delta_3 = (1 + \alpha\beta)\gamma\mu_n, \qquad \delta_4 = -(\alpha + \beta)\gamma\mu_n,$$

$$\alpha = \frac{a_1 \lambda_2}{a_2 \lambda_1}, \quad \beta = \frac{h_2 a_1}{h_1 a_2}, \quad \gamma = \frac{\lambda_1}{h_1 H}, \quad \omega = \left(\frac{a_1}{h_1}\right)^2,$$

$\mu_n$, $n = 1,2,3,\ldots$ — послідовні корені трансцендентного рівняння

$$\gamma\mu_n \big(\sin\mu_n \cos\beta\mu_n + \alpha \cos\mu_n \sin\beta\mu_n\big) - \\ - \cos\mu_n \cos\beta\mu_n + \alpha \sin\mu_n \sin\beta\mu_n = 0.$$

Для знаходження розв'язку задачі (1)–(5) розв'язок (6) необхідно доповнити $T_k^{II}(x,t)$ — розв'язком задачі з однорідною граничною умовою (4). Відзначимо, що розв'язок (6) є розвиненням в ряд за системою власних форм

$$X_n(x) = \begin{cases} \Delta_1(\mu_n, x), & 0 < x < h_1, \\ \Delta_2(\mu_n, x), & h_1 < x < h = h_1 + h_2. \end{cases}$$

Система функцій $X_n(x)$, як розв’язок задачі на власні функції, є повною та ортогональною на відрізку $[0;h]$, тобто

$$\int_0^h X_n(x)X_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|X_n\|, & m = n. \end{cases}.$$

Це дозволяє представити $T_k^{II}(x,t)$ також у вигляді ряду за формами:

$$T^{II}(x,t) = \begin{Bmatrix} T_1^{II}(x,t), & 0 < x < h_1, \\ T_2^{II}(x,t), & h_1 < x < h \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Множники $T_n(t)$ знаходимо як розв’язки задач Коші для лінійних рівнянь першого порядку, розклавши початкове поле також у ряд:

$$T_0(x) = \begin{Bmatrix} T_{10}(x), & 0 < x < h_1, \\ T_{20}(x), & h_1 < x < h \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x),$$

де

$$a_n = \|X_n\|^{-1} \int_0^h T_0(x) X_n(x) dx.$$

Остаточно знаходимо

$$T_k^{II}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Delta_k(\mu_n, x) e^{-\mu_n^2 \omega t}, \qquad k = 1,2. \quad (7)$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що суперпозиція розв’язків (6) та (7) дає розв’язок вихідної задачі (1)–(5). Після знаходження температурного поля поле напружень знаходиться за відомими формулами (див., наприклад [1]).

**Алгоритм**

На основі наведеного розв’язку задачі (1)–(5) можна побудувати алгоритм розв’язання задачі і у випадку довільної зміни коефіцієнта теплообміну в часі. Для цього весь часовий інтервал нестаціонарного процесу розбивається на підінтервали, на яких коефіцієнт теплообміну мало змінюється і може вважатися постійним. Дане значення вибирається як усереднене по підінтервалу. Також на кожному підінтервалі варіація температури має добре наближатися лінійної функцією. Сформульовані умови завжди можна задовольнити, вибираючи часові підінтервали досить малими. Після розбиття на підінтервали загальна задача теплопровідності розпадається на послідовність однотипних задач типу (1)–(5), розв’язок яких наведено вище. При цьому початковий температурний розподіл на кожному підінтервалі, крім першого, задається як фінальний розподіл температури на попередньому підінтервалі.

**Апробація**

У якості прикладу застосування запропонованого алгоритму було розглянуто модельний сценарій термошоку корпусу реактора (КР) ВВЕР-1000, наведений в роботі [2]. Залежність його теплогідравлічних параметрів (температура теплоносія, коефіцієнт теплообміну та тиск) в часі наведена в табл. 1. Даний сценарій передбачає швидке падіння температури приблизно на $200^0$C на першому етапі навантаження. У таблиці задані значення теплогідравлічних параметрів в ключові моменти часу. Вважається, що на часових інтервалах між ними всі теплогідравлічні параметри в часі змінюються лінійно.

Таблиця 1

Зміна теплогідравлічних параметрів модельного сценарію

| $t$, с | $T$, $^0$C | $H$, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot {}^0\text{C}}$ | $p$, МПа | $\overline{H}$, $\frac{W}{m^2 \cdot {}^0C}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 280 | 700 | 10.0 | 700 |
| 1000 | 120 | 700 | 10.0 | 700 |
| 1400 | 90 | 700 | 10.0 | 1100 |
| 2000 | 70 | 1500 | 10.0 | 2000 |
| 2600 | 60 | 2500 | 10.0 | 2500 |
| 3200 | 55 | 4000 | 10.0 | 3250 |
| 5000 | 50 | 10000 | 10.0 | 7000 |
| 6000 | 48 | 10000 | 2.4 | 10000 |
| 10000 | 40 | 10000 | 2.4 | 10000 |
| 20000 | 20 | 10000 | 2.4 | 10000 |
| 30000 | 20 | 10000 | 2.4 | |

До факторів, що впливає на точність запропонованого підходу можна віднести:

– неврахування в аналітичному розв’язку кривизни циліндра;

– неврахування в аналітичному розв’язку залежності властивостей матеріалів від температури;

– стрибкоподібна зміна значення коефіцієнта теплообміну.

Для з’ясування впливу кожного з цих факторів було проведено п’ять розрахунків: два за аналітичними співвідношеннями (6), (7) та три чисельних скінченно-елементним пакетом

CalculiX [3]. Аналітичні розрахунки були приведені для двох ступенів дискретизації коефіцієнта теплообміну: з його усередненням на інтервалах між ключовими моментами часу (розрахунок A1) і з усередненням на кожному кроці (розрахунок A2). Усереднені значення коефіцієнта теплообміну першого розрахунку наведені в правій колонці табл. 1.

Крім них були проведені ще три чисельних розрахунки. Розрахунок C1 враховував тільки неперервну зміну коефіцієнта теплообміну але не враховував кривизну циліндра і температурну залежність властивостей матеріалів. Розрахунок C2 крім неперервної зміни коефіцієнта теплообміну враховував також кривизну циліндра, а розрахунок C3 враховував всі три фактори. Розрахунок C3 розглядався як еталонний.

Результати порівняння розрахунків наведено в табл. 2, де через $T$ позначена температура, через $\sigma_\varphi$ — колові напруження, а через $\sigma_z$ — осьові напруження в стінці циліндра. За даними табл. 2 можна зробити кілька важливих висновків. Перш за все, відзначимо, що всі розрахунки забезпечують прийнятну практичну точність. Стрибкоподібна зміна коефіцієнта тепловіддачі слабо впливає на точність обчислення температури, але суттєва при обчисленні напружень. Це випливає з порівняння сценаріїв A1 і A2. Фактор неврахування кривизни циліндра більш рівномірно впливає на точність результатів (різниця в похибках між сценаріями C1 і C2 для всіх величин становить біля 1%). Похибка від усереднення теплофізичних властивостей становить до 2%. Оскільки запропонований аналітичний розв’язок є лінійним, то дана похибка визначає похибку аналітичних результатів в цілому.

Таблиця 2

Відносна похибка розрахунків

| Розрахунок | Відносна похибка, % | | |
|---|---|---|---|
| | $T$ | $\sigma_\varphi$ | $\sigma_z$ |
| A1 | 3,3 | 5,1 | 5,2 |
| A2 | 2,8 | 2,6 | 2,8 |
| C1 | 2,8 | 2,9 | 3,2 |
| C2 | 1,7 | 1,9 | 2,0 |

**Висновки**

Побудовано розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для двошарового циліндра з довільним початковим розподілом температури і лінійно змінною температурою зовнішнього середовища. Розв’язок має простий вигляд, виражається через елементарні функції і може бути легко реалізований за допомогою будь-якого обчислювального пакету. На його основі запропоновано алгоритм знаходження температурних полів у випадку змінного в часі коефіцієнта теплообміну. Запропонований алгоритм у випадку модельного сценарію дозволив отримати результати з похибкою в межах 3%.

## Список використаних джерел

1. *Куценко А. Г.* Решение одной задачи термоупругости для двухслойного циліндра /А. Г. Куценко, Т. М. Погорилый, М. А. Шворак // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2010. – т.7, №2. – С.249-256.
2. *Kutsenko O.* Effect of neutron irradiation hardening of the base metal on the results of WWER-1000 reactor pressure vessel residual lifetime assessment / O. Kutsenko, I. Kadenko, X. Pitoiset, O. Kharytonov, N. Sakhno, I. Kravchenko // Int. J. Press. Vessel. Pip. – 2019. – Vol. 171. – P. 173–183.
3. A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: https://www.calculix.de.

## References

1. KUTSENKO, A.G., POGORILYIY, T.M. and SHVORAK M.A. (2010) *Reshenie odnoy zadachi termouprugosti dlya dvuhsloynogo tsilindra.* Zbirnik prats Institutu matematiki NAN Ukrayini 7(2). p.249-256.
2. KUTSENKO, O et al. (2019) *Effect of neutron irradiation hardening of the base metal on the results of WWER-1000 reactor pressure vessel residual lifetime assessment.* Int. J. Press. Vessel. Pip. 171. p.173–183.
3. (2020) A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program. Available from: https://www.calculix.de.

Надійшла до редколегії 29.08.21