УДК 539.3

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.8

Куценко О. Г.[1], к. ф.-м. н., доц.,
Куценко А. Г.[2], к. ф.-м. н., доц.,
Харитонова Л. В.[3], к. ф.-м. н., доц.

Дослідження розтягу перфорованих пластин методом скінченних елементів

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03127, м. Київ, пр-т. Глушкова 4е,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

[2] Національний університет біоресурсів і природокористування України, 03041, м. Київ, вул. Героїв Оборони 12

[3] Національний транспортний університет, 01010, м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1

O. G. Kutsenko[1], Ph.D (Phys.-Math.),
A. G. Kutsenko[2], Ph.D (Phys.-Math.),
L. V. Kharytonova[3], Ph.D (Phys.-Math.)

Study of perforated plates stretching by finite element method

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03127, Kyiv, Glushkova av., 4e,
e-mail: alex_kutz@univ.kiev.ua

[2] National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, 03041, Kyiv, Heroyiv Oborony str., 12

[2]National Transport University, 01010, Kyiv, M. Omelianovycha-Pavlenka str., 1

Розглянута задача про осьовий розтяг пластини, послабленої двояко-періодичною системою круглих отворів, розташованих в шаховому порядку. Вихідну задачу зведено до другої задачі теорії пружності для одного періоду, яка розв'язувалася методом скінченних елементів. У результаті її розв'язку знайдені приведені пружні характеристики еквівалентної однорідної ортотропної платівки. Проведено аналіз їх поведінки в залежності від безрозмірних геометричних параметрів. Область зміни геометричних параметрів виявилася розбитою на дві підобласті. Поведінка приведених пружних характеристик в цих областях суттєво відрізняється. Виконаний порівняльний аналіз отриманих результатів з відомими з літератури результатами, підтвердив їх адекватність.

Ключові слова: двояко-періодична, перфорована пластинка, розтяг.

The problem of axial stretching of a plate with a double-periodic system of round holes arranged in a checkerboard pattern is considered. The specified problem is reduced to elasticity second problem for one period of plate, which was solved by the finite element method. As a result, the reduced elastic characteristics of the equivalent homogeneous orthotropic plate are found. The analysis of their behavior depending on dimensionless geometrical parameters is carried out. The area of variation of the geometric parameters was divided into two subareas. The behavior of the equivalent elastic characteristics in these areas is significantly different. It turned out that the double-periodic perforated plate shows significantly anisotropic behavior. The limit values of the Poisson's ratios can reach unity and, on the other hand, may be less than the original value. Dependences of the stress concentration coefficient on dimensionless geometrical parameters are obtained too. Performed comparative analysis of the obtained results with the results known from the literature, confirmed their adequacy.

Key Words: double-periodic, perforated plate, tension.

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Вступ

Двояко-періодичні перфоровані пластинки та оболонки є типовим елементом багатьох конструкцій. В деяких випадках їх використання обумовлене намаганням зменшити вагу конструкції в цілому. В інших випадках отвори мають функціональне призначення: через них проходять потоки рідин або газів. У будь-якому випадку необхідно вміти ефективно розраховувати поля напружень в таких елементах.

Сучасні розрахунки полів напружень в елементах конструкцій проводяться за допомогою верифікованих скінченно-елементних пакетів. Однак, при безпосередньому розрахунку двояко-періодично перфорованих пластинок методом скінченних елементів виникають задачі великої розмірності, розв'язання яких вимагає значних обчислювальних та часових ресурсів.

Можливе вирішення вказаної проблеми полягає у заміні двояко-періодичної платівки однорідною, з приведеними (еквівалентними) пружними сталими. Даний підхід був успішно розвинений в другій половині минулого століття вітчизняною науковою школою під керівництвом професора Фільштинського Л.А. [1,2]. Проте, апарат аналітичних функцій, закладений в його основу, далеко не завжди виявляється зрозумілим спеціалістам, які проводять практичні розрахунки. Як наслідок, вони вдаються до примітивних спрощень, які не завжди дозволяють отримати адекватний результат.

В той же час, у розпорядженні інженера є скінченно-елементний пакет — потужний інструмент, здатний допомогти правильно визначити еквівалентні характеристики. На сьогодні є непогані скінченно-елементні пакети навіть у вільному доступі, наприклад, пакет CalculiX [3,4]. У даній роботі продемонстровано метод визначення еквівалентних характеристик двояко-періодично перфорованих пластинок за допомогою методу скінченних елементів. Використання саме методу скінченних елементів не є принциповим. Замість нього можна застосовувати будь-який інший метод, здатний знаходити розв'язки здач теорії пружності для неканонічних областей, наприклад, метод граничних елементів. Метод скінченних елементів був вибраний як більш популярний.

Постановка задачі для періоду

Будемо розглядати перфоровану платівку, отвори в якій розташовані в шаховому порядку (див. рис. 1). Відстань між сусідніми отворами, центри яких лежать на одній горизонтальній прямій, рівна $2a$, а на одній вертикальній прямій — $2b$, радіус отворів рівний r.

Будь-який розтяг такої пластини можна уявляти як суперпозицію одновісних розтягів вздовж горизонтального та вертикального напрямків. Для останніх характерно те, що нормальні зміщення точок границі підобласті, виділеної на рисунку 1 темним кольором, в межах однієї прямолінійної частини границі в силу симетрії є сталими. Домовимося для зручності називати дану частину пластини її періодом (див. рис. 2), хоча вона не є періодом в загально визначеному розумінні цього слова.

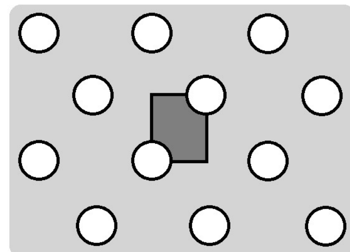

Рис. 1. Двояко-періодично перфорована пластина

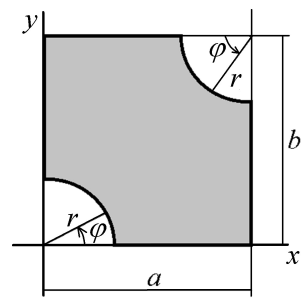

Рис. 2. Період перфорованої пластини

Будемо виходити з того, що двояко-періодична пластина при розтягу веде себе як ортотропна [1]. Для ортотропного середовища в плоскому випадку між компонентами тензора напружень σ_x та σ_y і тензора деформацій ε_x та ε_y маємо наступні [5] співвідношення:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\overline{E}_x}\left(\sigma_x - \overline{\nu}_{xy}\sigma_y\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{\overline{E}_y}\left(\sigma_y - \overline{\nu}_{yx}\sigma_x\right), \qquad (1)$$

де $\overline{E}_x$ та $\overline{E}_y$ — еквівалентні модулі пружності (модулі Юнга), $\overline{\nu}_{xy}$, $\overline{\nu}_{yx}$ — еквівалентні коефіцієнти Пуассона. Причому для них має виконуватися співвідношення $\overline{E}_x\overline{\nu}_{yx} = \overline{E}_y\overline{\nu}_{xy}$.

Для визначення $\overline{E}_x$, $\overline{E}_y$, $\overline{\nu}_{xy}$ та $\overline{\nu}_{yx}$ необхідно провести два розрахунки для періоду. В обох випадках на всьому периметрі періоду задаються нульові дотичні напруження, а на сторонах $x = 0$ та $y = 0$ — нульові нормальні зміщення (положення осей показано на рис. 2). В першій задачі нульові нормальні зміщення

Таблиця 1

Порівняння колових напружень з даними роботи [2]

φ, ^{0}		$r=0{,}2a$		$r=0{,}4a$		$r=0{,}6a$		$r=0{,}8a$		$r=0{,}9a$	
(а)	0	–1,024	–1,024	–0,962	–0,961	–0,524	–0,524	0,106	0,106	0,003	–0,009
	15	–0,752	–1,0753	–0,756	–0,757	–0,678	–0,676	–0,440	–0,439	0,106	0,098
	30	–0,007	–0,007	–0,113	–0,113	–0,658	–0,659	–2,956	–2,959	–6,864	–6,472
	45	1,024	1,024	0,959	0,959	0,397	0,398	–2,985	–2,982	–14,11	–14,14
	60	2,068	2,069	2,242	2,242	2,582	2,583	4,225	4,227	8,031	8,035
	75	2,841	2,842	3,307	3,307	4,736	4,739	10,680	10,692	26,10	26,18
	90	3,127	3,126	3,723	3,723	5,590	5,589	11,747	13,876	21,32	21,33
(б)	0	3,100	3,099	3,310	3,310	3,618	3,618	5,601	5,600	10,710	10,716
	15	2,828	2,828	3,096	3,096	3,648	3,650	5,277	5,276	7,953	7,957
	30	2,082	2,082	2,443	2,444	3,505	3,506	6,843	6,844	11,93	11,93
	45	1,051	1,051	1,381	1,381	2,573	2,570	7,822	7,819	22,17	22,19
	60	0,007	0,007	0,107	0,106	0,511	0,511	1,480	1,479	2,675	2,672
	75	–0,766	–0,766	–0,967	–0,968	–1,766	–1,764	–5,843	–5,855	–18,04	–18,07
	90	–1,051	–1,051	–1,392	–1,392	–2,743	–2,742	–7,862	–9,991	–16,26	–16,27

задаються також на стороні $y=b$, а на стороні $x=a$ задаються нормальні зміщення $a\varepsilon_0^I$, де ε_0^I — деяка стала. В другій задачі нульові нормальні зміщення задаються на стороні $x=a$, а на стороні $y=b$ задаються нормальні зміщення $b\varepsilon_0^{II}$. В наслідок розв'язання цих двох задач одержуємо наступні співвідношення:

$$\overline{E}_x=\frac{\overline{\sigma}_x^{II}}{\varepsilon_x^{II}}\left(1-\overline{\nu}_{xy}\overline{\nu}_{yx}\right),\quad \overline{E}_y=\frac{\overline{\sigma}_y^{II}}{\varepsilon_y^{II}}\left(1-\overline{\nu}_{xy}\overline{\nu}_{yx}\right),$$
$$\overline{\nu}_{xy}=\overline{\sigma}_x^{II}\big/\overline{\sigma}_y^{II}\,,\quad \overline{\nu}_{yx}=\overline{\sigma}_y^{I}\big/\overline{\sigma}_x^{I}\,, \qquad (2)$$

де через $\overline{\sigma}_{x,y}^{I,II}$ позначені усереднені по відповідних сторонах періоду напруження, верхній індекс "*I*" позначає розв'язок першої задачі, а індекс "*II*" — розв'язок другої задачі.

Знаючи еквівалентні модулі (2), можна розглянути одновісний напружений стан для періоду пластини, який буде відтворювати відповідний одновісний напружений стан нескінченної двояко-періодично перфорованої платівки. Для моделювання одновісного стану розтягу вздовж вісі x на сторонах періоду $x=a$ та $y=b$ потрібно задати нормальні зміщення $a\varepsilon_0$ та $-b\overline{\nu}_{xy}\varepsilon_0$ відповідно. Для моделювання ж одновісного стану розтягу вздовж осі y на сторонах періоду $x=a$ та $y=b$ потрібно задати нормальні зміщення $-a\overline{\nu}_{yx}\varepsilon_0$ та $b\varepsilon_0$ відповідно.

Результати та їх обговорення

Отримані за допомогою запропонованого алгоритму результати для випадку правильно трикутної системи отворів ($b=a\sqrt{3}$) порівнювалися з даними, наведеними в [2]. Результаты порівняння колових напружень вздовж границі отвору, віднесених до величини розтягуючих напружень на нескінченності для осьового розтягу вздовж осі x (а) та вздовж осі y (б) в залежності від відносного радіусу отворів та полярного кута φ точки спостереження (див. рис. 2) наведені в табл. 1. В лівій колонці кожної пари наведені результати, отримані за допомогою методу скінченних елементів за запропонованим алгоритмом, в правій — дані, наведені в [2]. В переважній більшості випадків результати співпадають з точністю до трьох перших розрядів, а часто і до всіх чотирьох. Окремі невідповідності, виділені товстою лінією рамки, швидше за все, пояснюються сильною редукцією нескінченної системи при отриманні результатів [2] або банальною друкарською неточністю.

На рисунках 2–6 наведені розподіли приведених пружних характеристик. Через обмежений об'єм, їх аналіз тут не наводиться, як і аналіз розподілів коефіцієнтів концентрації напружень, які також були пораховані.

Висновки

Запропонований підхід дозволив успішно вирішити проблему пошуку еквівалентних пружних характеристик для двояко-періодично перфорованої пластини при розтягу, про що свідчать результати порівняльного аналізу.

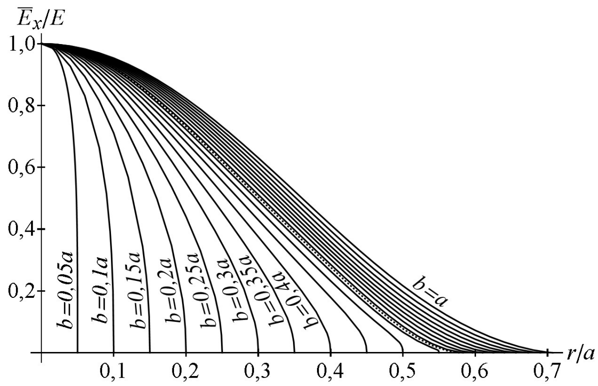

Рис. 3 Розподіл модуля $\overline{E}_x$

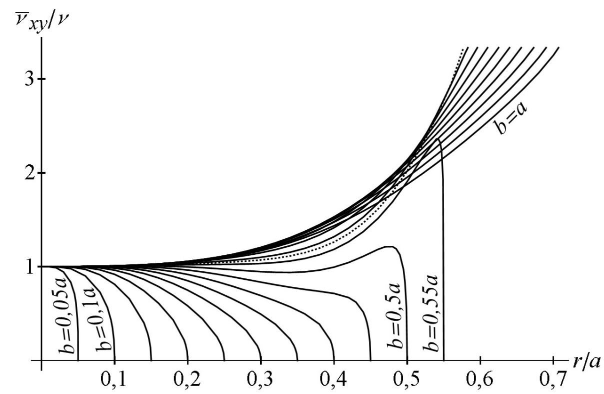

Рис. 5 Розподіл коефіцієнта $\overline{\nu}_{xy}$

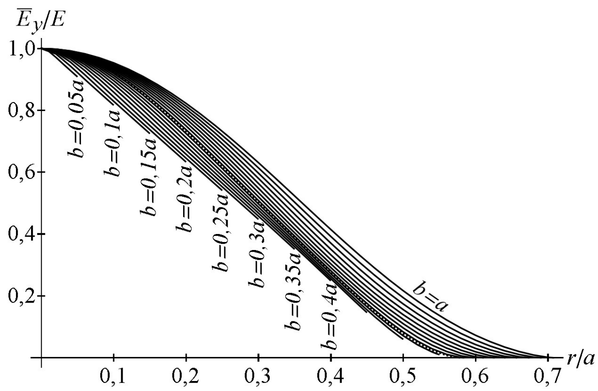

Рис. 4 Розподіл модуля $\overline{E}_y$

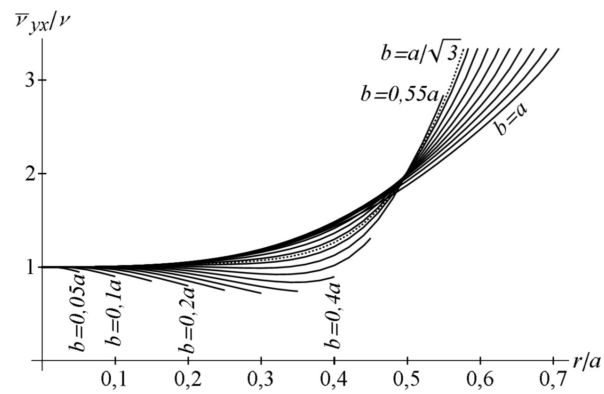

Рис. 6 Розподіл коефіцієнта $\overline{\nu}_{yx}$

Список використаних джерел

1. *Фильштинский Л. А.* Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий / Л. А. Фильштинский // ПММ – 1964. – №3. – С. 430–441.
2. *Григолюк Э. И.* Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – Москва: Наука, 1970. – 556 с.
3. *Dhondt G.* The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications / G. Dhondt. – Hoboken: Wiley, 2004. – 362 p.
4. A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program [Електронний ресурс]. – 2020. – Режим доступу до ресурсу: https://www.calculix.de.
5. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – Москва: Гостехиздат, – 1957. – 463 с.

References

1. FILSHTINSKY, L.A. (1964) Napryazheniya i smescheniya v uprugoy ploskosti, oslablennoy dvoyakoperiodicheskoy sistemoy odinakovyih kruglyih otverstiy. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 28(3). p. 430–441.
2. GRIGOLUK, E.I. and FILSHTINSKY, L.A. (1970) *Perforirovannyie plastinyi i obolochki*. Moskva: Nauka.
3. DHONDT, G. (2004) *The Finite Element Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications.* Hoboken: Wiley.
4. (2020) A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program. Available from: https://www.calculix.de.
5. LEKHNITSKII, S.H. (1957) *Anizotropnye plastinki*, Moskva: Hostekhizdat.

Надійшла до редколегії 29.08.21