3 – Preuve de solidité logique de la non-relativité lorentzienne

Jean Stratonovitch

Preuve de solidité logique de la non-relativité lorentzienne

Jean Stratonovitch

Dans l'article *Le paradoxe des jumeaux de Langevin et l'expérience d'aller et retour d'un cylindre en rotation*, nous avons montré que cette expérience produit dans le cadre de la relativité restreinte deux résultats contradictoires.

Dans l'article *La modification minimale à apporter à la relativité restreinte pour qu'elle supporte l'expérience d'aller et retour d'un cylindre en rotation*, nous avons montré que le problème ne provient pas de la transformation de Lorentz, mais de la valeur postulée universelle et absolue du principe de relativité. Les lois régissant le comportement mécanique de la matière élastique ne peuvent pas être toutes relativistes, pas plus que ne peuvent l'être celles qui décrivent le Ciel lointain. L'éventail des espaces galiléens doit être muni d'un zéro permettant d'en individualiser les éléments, de la même façon qu'on installe sur une droite une origine des abscisses. Si le principe de relativité était d'une validité sans faille, ce serait impossible autrement que de façon purement arbitraire, mais tel n'est pas le cas. Dans le désert interstellaire où nous nous installons par la pensée notre laboratoire galiléen, un zéro naturel existe, c'est l'espace isotrope local (E_{is}), celui relativement auquel le Ciel lointain se montre statistiquement isotrope. Les autres espaces galiléens n'étant pas isotropes, la simultanéité-lumière relative à eux doit être tenue pour biaisée, et il n'existe dans ce modèle qu'une simultanéité véritable, celle relative à (E_{is}).

Une règle ou une horloge en mouvement relativement à cet espace, parce que l'univers est alors anisotrope relativement à elle, ne peut être considérée comme parfaitement identique, en elle-même, à ce qu'elle serait si elle était immobile relativement à (E_{is}) : les altérations lorentziennes des règles et des horloges, quand elles sont évaluées relativement à cet espace, doivent être considérées comme objectives.

Nous avons appelé **non-relativité lorentzienne** le modèle ainsi obtenu. Il est voisin de celui qu'on appelle parfois la « relativité de Lorentz », à ceci près que l'espace isotrope n'est en rien identifiable à un espace absolu, et que la problématique de l'éther est hors de propos.

Relativement à un autre espace que l'espace isotrope, les altérations lorentziennes panachent le relatif et l'objectif selon une logique plus complexe qu'en relativité restreinte, faisant intervenir trois espaces et pas deux : l'espace dans lequel les objets sont immobiles, l'espace depuis lequel on les observe et l'espace isotrope.

Un point crucial est à vérifier, auquel nous consacrerons cet article : la solidité logique de ce modèle engendré par la nécessité de remédier au caractère contradictoire de la mécanique relativiste lorentzienne du corps élastique.

1 – LA MÉTHODE

Il s'agit de montrer que *quelle que soit l'expérience de pensée de mécanique des corps élastiques étendus qu'on considère, elle n'engendre aucune contradiction*. Le problème peut sembler désespérément compliqué, mais en fait ce n'est pas le cas.

Car une méthode existe pour vérifier la solidité logique d'une théorie, c'est d'en construire un modèle à l'intérieur d'une autre. Par exemple, Beltrami puis Poincaré montrèrent la solidité de la géométrie de Lobatchevski en en construisant des modèles à l'intérieur de la géométrie euclidienne. Si la géométrie de Lobatchevski recelait une contradiction, ce serait du coup une contradiction de la géométrie euclidienne : la géométrie de Lobatchevski est donc au moins aussi solide que celle d'Euclide ; et, puisque cette dernière est constructible dans le cadre de la théorie des ensembles – comme toutes les mathématiques, au demeurant – la géométrie de Lobatchevski est au moins aussi solide que la théorie des ensembles.

Bien sûr, on peut douter de tout, et même de la solidité de la théorie des ensembles. Mais pour démontrer quelque chose, il faut toujours des prérequis, et la théorie des ensembles ne fait que poser noir sur blanc les outils de base de la pensée logique : la possibilité d'envisager les objets par catégories, de réunir ces catégories par des « ou », de les croiser par des « et », de les combiner par produit cartésien, de faire des sélections à l'intérieur d'une catégorie selon n'importe quel critère correctement défini, etc. Aussi tenons-nous sa solidité pour irréprochable.

La méthode que nous emploierons donc pour vérifier la solidité logique de la mécanique lorentzienne non-relativiste des corps élastiques sera de montrer qu'on peut en construire un modèle à l'intérieur des mathématiques – c'est-à-dire, indirectement, à l'intérieur de la théorie des ensembles.

À ce jour, un siècle et demi après le modèle de Beltrami, et plus d'un siècle après ceux de Poincaré, on ne trouve nulle part – s'il existe il est bien caché ! – de modèle ensembliste ou géométrique de la relativité restreinte incluant la mécanique des corps élastiques. Si un tel modèle existait, il n'aurait pas manqué d'être opposé à ceux qui voient des difficultés logiques dans cette théorie.

Mais son existence est impossible, parce que la théorie est contradictoire à ce niveau. Il sera intéressant de pointer l'endroit du raisonnement de constructibilité en lequel la relativité restreinte se dérobe.

2 – CONSTRUCTIBILITÉ ENSEMBLISTE DE LA MÉCANIQUE LORENTZIENNE NON-RELATIVISTE DES CORPS ÉLASTIQUES CONSIDÉRÉS DANS LEUR ÉTENDUE

Partons d'un modèle de la cinématique lorentzienne tel que sa construction a été rapidement exposée dans l'article *Le paradoxe des jumeaux de Langevin et l'expérience d'aller et retour d'un cylindre en rotation* : un espace galiléen (E_0) identifié à $\mathbb{R}^3$, muni d'un temps identifié à $\mathbb{R}$, des *points*, qui sont des applications dérivables du temps dans cet espace, dont la dérivée est constamment inférieure à C, des *espaces galiléens* formés des points allant à la même vitesse constante inférieure à C, munis de coordonnées spatiotemporelles engendrées à partir de celles de (E_0) par la transformation de Lorentz.

On identifie (E_{is}) à (E_0) : c'est par rapport à lui que seront décrites les situations de la mécanique des corps élastiques et les lois qui les régissent, et que seront calculées les évolutions des systèmes.

Dans ce modèle de la cinématique lorentzienne, on définit ce qu'est un *corps élastique considéré à un instant t*. C'est en premier lieu une famille infinie (K) de points

– deux fois continûment dérivables,

– dont l'ensemble (K)(t) des images dans (E_0) à l'instant t est borné et homéomorphe à une boule ouverte, ou est une réunion finie connexe de tels ensembles,

– et telle que le champ des vitesses de ses points à cet instant soit continu.

Cette description n'est évidemment pas suffisante, et nous devrons la compléter. L'ensemble des corps élastiques considérés à un instant t, et encore incomplètement définis, est ce stade constructible dans le cadre de la théorie des ensembles, et modélise les possibilités cinématiques raisonnables que peut avoir un corps élastique donné à un instant donné. De même qu'on resterait dans le raisonnable en attribuant au champ des vitesses une plus forte régularité mathématique, par exemple celle d'être continûment différentiable ; et que l'ensemble des corps élastiques considérés à l'instant t resterait constructible dans le cadre de la théorie des ensembles.

À forme géométrique égale à un instant donné, un corps effectif peut avoir des contraintes internes différentes – des « déformations invisibles » différentes. Ces dernières ne doivent être installées qu'en ce seul instant t, car aux autres instants elles seront calculables en même temps que l'évolution du système. Les décrire à cet instant revient à décrire la forme d'un voisinage infinitésimal de chaque point M du corps élastique relativement à la forme qu'aurait ce voisinage s'il était extrait du corps et au repos dans l'espace isotrope. Décrire tous les possibles raisonnables de ces déformations revient à installer sur le corps de toutes les façons possibles des champs de tenseurs de déformations, qu'on suppose continus, voire différentiables, là encore c'est sans incidence sur la constructibilité, puisque l'une et l'autre possibilité laissent place à des ensembles de solutions ni vides ni triviaux.

Nous complétons donc la définition du corps élastique considéré à l'instant t en lui attribuant, de toutes les façons possibles, un tel système de déformations. L'ensemble des corps élastiques ainsi modifié – démultiplié – reste constructible.

Ayant installé à l'instant t l'ensemble de toutes les éventualités cinématiques « externes » possibles de tous les corps élastiques possibles multiplié par l'ensemble de toutes leurs déformations « internes » possibles, il faut encore le multiplier par l'ensemble de toutes les caractéristiques mécaniques possibles, qui en un point donné sont par l'hypothèse de l'élasticité indépendantes du temps. Là encore, une description des caractéristiques mécaniques d'un corps est possible dans le cadre de la théorie des ensembles, au moyen d'applications de l'ensemble de ses points dans un espace de paramètres, fini ou infini, peu importe. Nous ne nous soucions pas de leur donner pour le moment une signification, ce ne sont que des paramètres en réserve.

Nous pouvons donc construire, dans le cadre de la théorie des ensembles, une entité que nous appelons encore *corps élastique considéré à un instant* t. Cette entité est complexe, mais son support reste fait de points, qui sont des applications deux fois dérivables du temps dans l'espace. Elle n'est modélisée qu'à l'instant t, aux autres instants les points qui la composent ont chacun leur trajectoire propre. Un même corps élastique *effectif* considéré à l'instant t existe donc dans notre modèle d'une infinité de façons, qui toutes coïncident à cet instant tant pour les positions de leurs points que pour leurs vitesses, que pour leurs déformations internes que pour leurs caractéristiques mécaniques, et qui représentent tous les devenirs cinématiquement possibles de ce corps élastique effectif, sans se soucier des lois de la mécanique.

Une dernière fois, modifions notre définition, et appelons *corps élastique considéré à l'instant* t l'ensemble infini de tous ces corps identiques à cet instant, chacun ayant son évolution particulière parmi toutes celles qui sont potentiellement possibles.

Une *situation* est la donnée d'une famille finie de corps élastiques considérés à un instant t, disjoints deux à deux à cet instant, en ce sens qu'aucun point de l'un d'entre eux n'a les mêmes coordonnées spatiales qu'aucun point d'un autre. C'est un objet constructible dans le cadre de la théorie des ensembles, tout comme l'est l'ensemble des situations.

Les *lois de la mécanique*, de ce point de vue ensembliste, sont une fonction qui à toute situation (S) considérée à un certain instant t associe le champ des accélérations de ses points à cet instant.

	LOIS DE LA MÉCANIQUE	
Ensemble des situations	$\longrightarrow$	Ensemble des champs d'accélération définissables sur les situations
Situation (S) à l'instant t	$\longmapsto$	Le champ des accélérations des points de (S) à l'instant t : $\mathrm{M} \in (\mathrm{S}) \longmapsto \vec{\gamma}(\mathrm{M}, \mathrm{t})$

Ce champ est calculable en M par l'algorithme suivant :

– On considère un voisinage infinitésimal de M, par exemple un pavé élémentaire centré en M ;

– on calcule les contraintes exercées sur ce voisinage, et leur résultante $\vec{\mathrm{F}}$;

– on calcule la masse m de ce voisinage ;

– on en déduit, par la loi fondamentale de la mécanique $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ l'accélération du voisinage infinitésimal de M relativement à (E_0) à l'instant t ; donc celle de M.

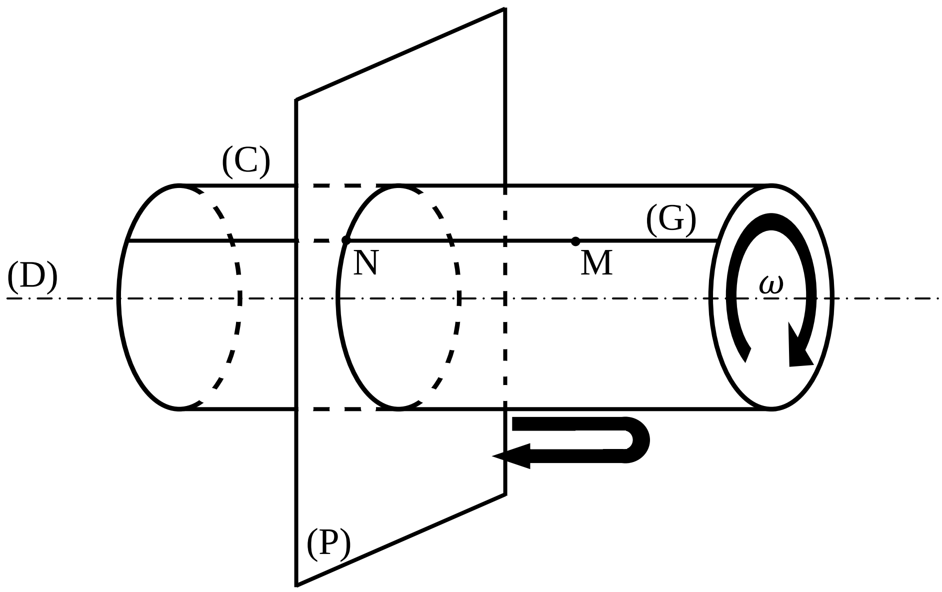
Du point de vue ensembliste qui est le nôtre en ce moment, les « contraintes », la « masse » sont des objets dont il importe peu qu'ils aient une quelconque signification physique. Ce sont des variables auxiliaires calculables quelle que soit la situation, et rien de plus. On pourrait remplacer les règles pertinentes que la physique a fini par élaborer par d'autres complètement farfelues que cela ne poserait aucun problème de consistance logique, pourvu que ces nouvelles règles déterminent pour toute situation une évolution instantanée sans équivoque, et soient suffisamment régulières mathématiquement.

> Elles doivent vérifier une forme « forte » de continuité par rapport à la situation : être localement lipschitziennes relativement à elle.

Connaissant le champ des positions et des vitesses à l'instant t, nous connaissions celui des positions à l'instant $t + dt$; et maintenant que nous connaissons le champ des accélérations à l'instant t, nous connaissons aussi celui des vitesses à l'instant $t + dt$: nous avons donc déterminé quelle est la situation à l'instant $t + dt$. Nous pouvons itérer ce processus : la connaissance des lois de la physique, jointe à celle de la situation, nous fournit une équation différentielle « téradimensionnelle » qui, à partir des conditions initiales, et sous couvert de régularité mathématique suffisante des lois de la mécanique, ce que nous postulons, a en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz une solution maximale et une seule définie sur un intervalle semi-ouvert maximal $[t, t'[$. Il n'est pas certain que $t' = \infty$: rien n'exclut que certaines situations sortent au bout d'un certain temps du domaine de la mécanique des corps élastiques, par exemple parce que les contraintes en un lieu deviennent infinies. Mais c'est sans importance. Le point essentiel est qu'il existe un critère mathématique permettant de sélectionner, parmi toutes les éventualités cinématiques des corps élastiques appartenant à une situation quelconque donnée, l'unique évolution obéissant aux lois de la mécanique des corps élastiques. Comme la sélection des éléments d'un ensemble selon un critère formulable en langage mathématique fournit légitimement un ensemble, on peut construire, dans le cadre de la cinématique lorentzienne non-relativiste, l'ensemble de toutes les évolutions conformes aux lois de la mécanique de toutes les situations possibles impliquant des corps élastiques.

La mécanique lorentzienne non-relativiste des corps élastiques est constructible dans le cadre de la théorie des ensembles.

En particulier, elle ne peut engendrer de contradiction. Ce qui ne veut pas dire qu'elle soit automatiquement pertinente. Les lois farfelues que nous évoquions plus haut pourraient peut-être, sans contradiction *logique*, interne au modèle, transformer un porte-avions en un plat de spaghettis. Mais si nous supposons raisonnables ces lois, le cylindre (C) restera durant l'expérience d'aller et retour constamment semblable – difféomorphe – à ce qu'il est dans la première partie de l'expérience, lorsque son mouvement est uniforme dans toutes ses composantes ; il continuera de croiser le plan (P) dans le sens aller puis dans le sens retour en tournant sur lui-même, à vitesse a priori non uniforme ; la génératrice (G) gravée sur lui restera une courbe longitudinale rencontrant le plan (P) en N durant tout l'aller et retour ; le point M gravé sur elle traversera à l'aller et au retour (P) en deux instants i et j ; et l'expérience, qui restera globalement la même qu'en relativité restreinte, fournira les nombres n et m de tours fait par M et N dans l'intervalle $[i, j]$.



Comme la mécanique lorentzienne relativiste est modélisable dans le cadre de la théorie des ensembles :

La contradiction à laquelle aboutit l'expérience d'aller et retour dans le cadre de la relativité restreinte disparaît dans le cadre lorentzien non-relativiste.

L'entier $n - m$ dépend continûment des conditions de l'expérience, qu'on peut faire varier continûment en déplaçant (P), jusqu'à une situation où $i = j$; par continuité, il garde la même valeur, qui est alors $0 - 0 = 0$. Donc $n = m$.

Dans le cadre non-relativiste lorentzien, les points N et M font exactement le même nombre de tours autour de l'axe du cylindre.

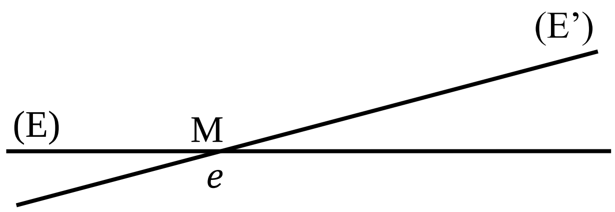
....

3 – ÉCHEC DE LA DÉMONSTRATION DE CONSTRUCTIBILITÉ DE LA MÉCANIQUE DES CORPS ÉLASTIQUES DANS LE CADRE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

On l'aura observé, le fait que la cinématique soit lorentzienne ou non n'intervient pas dans le raisonnement qui vient d'être fait. On peut en le décalquant quasiment à l'identique montrer la consistance de la mécanique galiléenne des corps élastiques.

Dans le contexte de la relativité restreinte, il peut être refait pas à pas relativement à *un* espace galiléen particulier (E), et il détermine l'évolution de la situation (S) à partir de l'instant t de (E). Il n'y a jusqu'ici aucune différence.

Soit $e = (\mathrm{M}, t)$ un évènement décrit relativement à (E), pris dans le domaine de (S) à cet instant. Si (E') est un autre espace galiléen, soit t' l'instant de (E') tel que $e = (\mathrm{M}, t')$. Puisque toutes les simultanéités ont la même valeur, il est tout aussi légitime de calculer l'évolution de la situation depuis (E') à l'instant t', avec les mêmes règles de calcul. Cependant, puisque les simultanéités sont différentes, le panel des données initiales n'est plus le même.



Il ne coïncide avec le précédent que sur un ensemble de mesure nulle. On peut faire varier M d'une infinité de façons, on obtient une infinité de panels de données initiales aussi légitimes les unes que les autres. Et pour chaque M on peut faire varier (E') d'une infinité de façons, qui multiplient à l'infini les panels de données initiales légitimes pour calculer l'évolution de (S).

Ainsi, l'évolution d'une situation à un instant donné, en non-relativité lorentzienne, dépend d'un seul panel de données initiales, et se trouve par là à l'abri de tout conflit ; tandis qu'en relativité restreinte, elle dépend de n'importe quel panel parmi une infinité de possibles, qui tous doivent engendrer via la même fonction de calcul la même évolution effective. Cette « multi-contrainte » supplémentaire fait que le raisonnement montrant la constructibilité à l'intérieur de la théorie des ensembles de la mécanique des corps élastiques ne peut pas s'appliquer à la relativité restreinte.

> Nous savons toutefois que la mécanique relativiste lorentzienne des points matériels isolés est consistante.
>
> Dans le modèle proposé pour cette mécanique, les points matériels isolés ont hors interaction des vitesses uniformes, et les différents panels de conditions initiales sont alors immédiatement déductibles les uns des autres via l'uniformité des mouvements et la transformation de Lorentz, si bien que leur multiplicité n'est qu'apparente ; d'autre part l'exigence relativiste quant aux lois du choc conduit, dans ce cas simplifié où la forme des corps n'intervient pas, à des conditions mathématiques possibles à satisfaire.

4 – LA NON-RELATIVITÉ LORENTZIENNE OUVRE DES DEGRÉS DE LIBERTÉ DONT LA RELATIVITÉ RESTREINTE NE DISPOSE PAS

Lorsqu'une théorie est contradictoire, c'est que sa barque axiomatique est trop chargée. Elle porte en elle des contraintes impossibles à faire coexister. Pour lui éviter de couler, il faut jeter du lest, la remplaçant ainsi par une théorie moins contraignante dans laquelle la contradiction pourra s'évanouir.

Or telle est bien la position de la non-relativité lorentzienne par rapport à la relativité restreinte.

Dans cette dernière, en effet, chaque espace galiléen est isotrope, et constitue donc un « centre de symétrie » de l'univers ; tandis que dans la non-relativité lorentzienne, il n'y a plus qu'un seul espace isotrope, un seul « centre de symétrie ». C'est donc bien un allègement des contraintes.

De même, contrairement à ce qu'on pourrait hâtivement croire, postuler l'unicité de la simultanéité physique est moins contraignant que d'admettre qu'il en existe une infinité, tout aussi valables les unes que les autres. C'est en effet le corollaire de l'alternative entre l'existence d'un unique ou d'une infinité d'espaces isotropes.

La vitesse de la lumière n'est postulée égale à C que relativement à l'espace isotrope : c'est donc aussi un allègement des contraintes – même si on démontre par la suite qu'avec les choix instrumentaux qui sont faits, elle vaut C relativement à tout espace galiléen.

Seul point où il n'y a pas allègement, le postulat que la matière élastique avec laquelle nous fabriquons règles et horloges est un objet ondulatoire synchronisé entre ses différents lieux par la lumière ; et qu'elle conserve à l'identique son architecture vibratoire lorsque change sa vitesse de repos galiléen ; mais il adhère suffisamment bien à ce que nous savons aujourd'hui de la matière pour paraître hors de doute. Il opère en outre, sous une forme très générale, un rapprochement basique entre la mécanique quantique et les fondements de la cinématique qui comble en partie le fossé entre elles.

Ce postulat oblige la matière à modifier sa géométrie objective, mais la contraction de Lorentz n'est pas la seule réponse possible : toutes les déformations proportionnelles aux lorentziennes conviendraient aussi ; aussi ce postulat s'accompagne-t-il du choix particulier de la contraction lorentzienne, qui parmi elles est la seule à engendrer une cinématique relativiste.

Reste que globalement, c'est bien un allègement. La preuve en est qu'on se retrouve devant une théorie non seulement solide logiquement, mais encore infiniment plus souple. Alors que la relativité restreinte, en raison de l'absolue rigidité du principe de relativité, ne supporte aucune loi possible pour la mécanique des corps élastiques, la non-relativité lorentzienne peut supporter n'importe lesquelles, sous couvert d'une régularité mathématique suffisante. Cela ne veut bien entendu pas dire qu'elles seront pertinentes, mais simplement qu'elles n'ouvriront la porte à aucune contradiction logique interne à la théorie.

Parmi toutes les lois possibles, on peut évidemment choisir celles basées sur le formulaire relativiste de la masse et de la quantité de mouvement, dont on sait qu'il est pertinent. Mais, au contraire de la relativité restreinte, où ces formules, étant des théorèmes, sont supposées d'une exactitude parfaite, la non-relativité lorentzienne peut sans devenir contradictoire supporter le cas peut-être pas impossible où leur validité n'irait pas indéfiniment au-delà de la milliardième décimale, et laisse ouvert un espace de liberté pour un éventuel affinage.

....

Table des matières