Robust MCDA

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΘΑΛΗΣ – Πανεπιστήμιο Πειραιά
Μεθοδολογικές προσεγγίσεις για τη μελέτη της ευστάθειας σε προβλήματα λήψης αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια

Δ7 – Πειραματική αξιολόγηση προσεγγίσεων για την ανάλυση ευστάθειας πολυκριτήριων προβλημάτων

Π7 – Τεχνική έκθεση (πειραματική αξιολόγηση μέτρων ευστάθειας σε προβλήματα ταξινόμησης)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Στοιχεία παραδοτέου

Δράση: Δ7 – Πειραματική αξιολόγηση προσεγγίσεων για την ανάλυση ευστάθειας πολυκριτήριων προβλημάτων

Τίτλος παραδοτέου: Π7 – Τεχνική έκθεση (πειραματική αξιολόγηση μέτρων ευστάθειας σε προβλήματα ταξινόμησης)

Τύπος παραδοτέου: S - PU

Έκδοση: 02

Ημερομηνία: 1 Σεπτεμβρίου 2013

Υπεύθυνος σύνταξης: Καθηγητής Κωνσταντίνος Ζοπουνίδης

Ομάδα σύνταξης: Καθηγητής Νικόλαος Ματσατσίνης

Αναπληρωτής Καθηγητής Μιχάλης Δούμπος

Επίκουρος Καθηγητής Παύλος Δελιάς

Professor Alexis Tsoukias

Ελευθέριος Μαναρώλη, MSc.

Δημήτριος Νίκλης, MSc

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Ο καθορισμός, μοντελοποίηση και αναπαράσταση προτιμησιακών πληροφοριών αποτελεί βασικό στοιχείο στη διαδικασία υποστήριξης των αποφασιζόντων σε προβλήματα λήψης αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια. Για το σκοπό αυτό, η πολυκριτήρια ανάλυση αποφάσεων (ΠΑΑ) παρέχει ένα ευρύ σύνολο μεθόδων και προσεγγίσεων που επιτρέπουν τη διαμόρφωση μοντέλων αποφάσεων που διευκολύνουν την αξιολόγηση εναλλακτικών τρόπων δράσης.

Ο ορισμός των παραμέτρων που περιγράφουν το σύστημα αξιών ενός αποφασίζοντα μπορεί να γίνει είτε άμεσα από τον ίδιο σε συνεργασία με τον αναλυτή είτε έμμεσα μέσω αναλυτικών-συνθετικών διαδικασιών (preference disaggregation, Jacquet-Lagrèze and Siskos, 2001). Σε πολλές περιπτώσεις η χρήση αναλυτικών-συνθετικών διαδικασιών διευκολύνει σημαντικά την κατασκευή του μοντέλου απόφασης, καθώς τέτοιες διαδικασίες δεν απαιτούν από τον αποφασίζοντα τον προσδιορισμό σύνθετων και δυσνόητων τεχνικών παραμέτρων, αλλά βασίζονται στην ανάλυση ενός περιορισμένου αριθμού χαρακτηριστικών παραδειγμάτων αποφάσεων του αποφασίζοντα (παραδείγματα/σύνολο αναφοράς).

Η ποιότητα των μοντέλων που αναπτύσσονται μέσω αναλυτικών-συνθετικών διαδικασιών καθορίζεται από την επάρκεια της πληροφορίας που παρέχει το σύνολο αναφοράς αλλά και την υπολογιστική μεθοδολογία που χρησιμοποιείται για την προσαρμογή του μοντέλου στα διαθέσιμα δεδομένα. Στο πλαίσιο αυτό, η έννοια της ευστάθειας (robustness) έχει πρόσφατα συγκεντρώσει σημαντικό ενδιαφέρον μεταξύ των ερευνητών του χώρου (Roy, 2010). Η έρευνα στο αντικείμενο της ευστάθειας στα πλαίσια της αναλυτικής- συνθετικής προσέγγισης (ΑΣΠ) της ΠΑΑ μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε δύο κύριες ομάδες. Η πρώτη αφορά τη χρήση αναλυτικών διαδικασιών (Greco et al., 2010; Kadziński et al., 2012) ή τεχνικών προσομοίωσης (Kadziński and Tervonen, 2013) για τη διαμόρφωση προτιμησιακών σχέσεων και προτάσεων λαμβάνοντας υπόψη ένα ευρύ σύνολο διαφορετικών μοντέλων απόφασης που είναι συμβατά με τις αξιολογήσεις του αποφασίζοντος για τα δεδομένα του συνόλου αναφοράς. Η δεύτερη προσέγγιση έχει επικεντρωθεί στην ανάπτυξη ευσταθών μοντέλων απόφασης που χαρακτηρίζουν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο το σύνολο της πληροφορίας που ενσωματώνουν τα παραδείγματα αναφοράς (Bous et al., 2010; Doumpos and Zopounidis, 2007; Greco et al., 2011).

Η δεύτερη από τις παραπάνω δύο εναλλακτικές προσεγγίσεις έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς βασίζεται στην ανάπτυξη ενός μοντέλου απόφασης, σε αντίθεση με την πρώτη προσέγγιση που βασίζεται στη σύνθεση πολλαπλών μοντέλων. Η χρήση ενός μοντέλου προφανώς αποτελεί μια πολύ απλούστερη και εύχρηστη προσέγγιση, η οποία επιπλέον προσθέτει διαφάνεια στη διαδικασία της απόφασης, καθώς η δομή και τα χαρακτηριστικά ενός μοντέλου είναι σαφώς πιο κατανοητά από τη σύνθεση πολλαπλών μοντέλων (Greco et al., 2011).

Μια διαδεδομένη μεθοδολογία για την ανάπτυξη ενός χαρακτηριστικού μοντέλου απόφασης από παραδείγματα αναφοράς βασίζεται στη χρήση τεχνικών μεταβελτιστοποίησης (Siskos et al., 2005) μέσω γραμμικού προγραμματισμού. Πρόσφατα στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες νέες τεχνικές. Για παράδειγμα, οι Greco et al. (2011) πρότειναν τη χρήση διατυπώσεων βελτιστοποίησης της μορφής max-min για την κατασκευή μιας προσθετικής συνάρτησης αξίας που αναπαριστά τα αποτελέσματα ενός μοντέλου ευσταθούς μονότονης παλινδρόμησης. Οι Doumpos and Zopounidis (2007) παρουσίασαν μια εναλλακτική διατύπωση που βασίζεται στην αρχή της “κανονικοποίησης” (regularization principle), η οποία είναι ιδιαίτερα διαδεδομένη στη στατιστική θεωρία μάθησης. Τέλος, οι Bous et al. (2010) πρότειναν τη χρήση ενός μοντέλου βελτιστοποίησης που βασίζεται στην έννοια του αναλυτικού κέντρου ενός πολυέδρου.

Στα πλαίσια του παρόντος ερευνητικού έργου, έγινε μια υπολογιστική πειραματική αξιολόγηση αυτών των μεθοδολογιών (καθώς και ενός νέου πρωτότυπου υποδείγματος γραμμικού προγραμματισμού) με στόχο να διερευνηθεί ο τρόπος με τον οποίο τα αποτελέσματά τους σχετίζονται με την έννοια της ευστάθειας. Η ανάλυση πραγματοποιείται για πολυκριτήρια προβλήματα ταξινόμησης (Zopounidis and Doumpos, 2002) και βασίζεται σε τεχνητά δεδομένα διαμορφωμένα με κατάλληλα επιλεγμένα χαρακτηριστικά. Στην έρευνα εξετάζονται γραμμικές και μη γραμμικές προσθετικές συναρτήσεις αξιών, οι οποίες αποτελούν μια ιδιαίτερα διαδεδομένη μορφή πολυκριτήριων μοντέλων αποφάσεων. Τα αποτελέσματα συμβάλουν στην καλύτερη κατανόηση των χαρακτηριστικών μεθοδολογιών που βασίζονται στην ΑΣΠ και του τρόπου με τον οποίο αυτά συνδέονται με την έννοια της ευστάθειας

2 Ανάπτυξη χαρακτηριστικών προσθετικών συναρτήσεων αξιών σε πολυκριτήρια προβλήματα ταξινόμησης

2.1 Μεθοδολογικό πλαίσιο

Οι προσθετικές συναρτήσεις αξιών αποτελούν έναν απλό και εύχρηστο εργαλείο για τη διαμόρφωση μοντέλων αποφάσεων σε πολυκριτήρια προβλήματα. Βασίζονται σε ένα ισχυρό θεωρητικό πλαίσιο (θεωρία πολυκριτήριας αξίας), και παρά τις συνθήκες προτιμησιακής ανεξαρτησίας στις οποίες βασίζονται (Keeney and Raiffa, 1993), έχουν βρει ευρύτατη εφαρμογή στην υποστήριξη και λήψη πολυκριτήριων αποφάσεων.

Θεωρώντας ένα πρόβλημα απόφασης που απαιτεί την εξέταση K κριτηρίων, μια προσθετική συνάρτηση αξίας $V(x)$ διαμορφώνει ένα σύνθετο δείκτη αξιολόγησης, σύμφωνα με τον οποίο η συνολική αξιολόγηση (ολική αξία) μιας εναλλακτικής i ορίζεται ως εξής:

$$V(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{K} w_k v_k(x_{ik}) \tag{2.1}$$

όπου x_{ik} είναι η περιγραφή της εναλλακτικής i στο κριτήριο k, $w_k \geq 0$ είναι ο συντελεστής παραχώρησης του κριτηρίου k (συνήθως χρησιμοποιείται η κανονικοποίηση $w_1 + w_2 + \ldots + w_K = 1$ και $v_k(\cdot)$ είναι η συνάρτηση μερικής αξίας του κριτηρίου k, η οποία ορίζει την αξιολόγηση της εναλλακτικής στο συγκεκριμένο κριτήριο (συνήθως σε μια κλίματα μεταξύ μηδέν και ένα).

Σύμφωνα με το μοντέλο απόφασης της μορφής (2.1) μια εναλλακτική i προτιμάται μιας εναλλακτικής j εάν και μόνο εάν $V(\mathbf{x}_i) > V(\mathbf{x}_j)$, ενώ οι εναλλακτικές θεωρούνται ισοδύναμες εάν $V(\mathbf{x}_i) = V(\mathbf{x}_j)$. Σε πολυκριτήρια προβλήματα ταξινόμησης κάθε εναλλακτική θα πρέπει να ταξινομηθεί σε μία από N προκαθορισμένες κατηγορίες επίδοσης $\{\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_\mathrm{N}\}$ ιεραρχημένες έτσι ώστε η κατηγορία C_1 να περιλαμβάνει τις καλύτερες εναλλακτικές επιλογές και η κατηγορία C_N τις χειρότερες. Μια προσθετική συνάρτηση αξίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ταξινόμηση των εναλλακτικών ως εξής:

$$t_\ell < V(\mathbf{x}_i) < t_{\ell-1} \Leftrightarrow \text{Η εναλλακτική } i \text{ ανήκει στην κατηγορία } C_\ell \tag{2.2}$$

όπου $t_0 = 1 > t_1 > t_2 > \ldots > t_{N-1} > t_N = 0$ είναι ένα σύνολο ορίων που διαχωρίζουν τις κατηγορίες.

Η κατασκευή της προσθετικής συνάρτησης αξίας μπορεί να απλοποιηθεί θέτοντας $u_k(x_k) = w_k v_k(x_k)$, ορίζοντας συναρτήσεις μερικής αξίας $u_1, \ldots, u_k$ κανονικοποιημένες στο διάστημα $[0, w_k]$. Με το μετασχηματισμό αυτό το προσθετικό μοντέλο (2.1) διατυπώνεται στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή:

$$V(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{K} u_k(x_{ik}) \tag{2.3}$$

Το προσθετικό μοντέλο μπορεί να είναι γραμμικό ή μη γραμμικό ανάλογα με τη μορφή των συναρτήσεων μερικής αξίας. Ένας απλός και ευέλικτος τρόπος για τη μοντελοποίηση αυτών των συναρτήσεων, είναι να θεωρηθούν ως μονότονες, κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα, το πεδίο τιμών κάθε κριτηρίου k χωρίζεται σε $b_k + 1$ υποδιαστήματα που ορίζονται από b_k διαχωριστικά σημεία $\beta_0^k < \beta_1^k < \ldots < \beta_{b_k+1}^k$, μεταξύ της χειρότερης $\left(\beta_0^k\right)$ και της καλύτερης $\left(\beta_{b_k+1}^k\right)$ επίδοσης στο κριτήριο αυτό. Έτσι, η μερική αξία μιας εναλλακτικής i στο κριτήριο k μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$u_k(x_{ik}) = \sum_{t=1}^{b_k} p_{ik}^t d_{kt} \tag{2.4}$$

όπου $d_{kt} = u_k(b_t^k) - u_k(b_{t-1}^k) \geq 0$ είναι η διαφορά στη μερική αξία δύο διαδοχικών διαχωριστικών σημείων στην κλίμακα του κριτηρίου k και

$$p_{ik}^t = \begin{cases} 0 & \text{αν } x_{ik} < \beta_{t-1}^k \\ \dfrac{x_{ik} - \beta_{t-1}^k}{\beta_t^k - \beta_{t-1}^k} & \text{αν } x_{ik} \in [\beta_{t-1}^k, \beta_t^k] \\ 1 & \text{αν } x_{ik} > \beta_t^k \end{cases} \tag{2.5}$$

Επομένως, η προσθετική συνάρτηση (2.3) μπορεί να οριστεί ως μια γραμμική συνάρτηση των διαφορών στις μερικές συναρτήσεις διαδοχικών διαχωριστικών σημείων στις κλίμακες των κριτηρίων:

$$V(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{p}_{ik}^{\mathsf{T}} \mathbf{d}_k \tag{2.6}$$

όπου $\mathbf{p}_{ik} = (p_{ik}^1, p_{ik}^2, \ldots, p_{ik}^{b_k})$ και $d_k = (d_{k1}, d_{k2}, \ldots, d_{k,b_k})$.

Σε προβλήματα ταξινόμησης η ανάπτυξη μιας προσθετικής συνάρτησης αξίας στα πλαίσια της ΑΣΠ βασίζεται σε ένα σύνολο αναφοράς που περιλαμβάνει παραδείγματα αποφάσεων που έχει λάβει ο αποφασίζοντας για M εναλλακτικές. Οι εναλλακτικές αυτές ταξινομούνται από τον αποφασίζονται στις προκαθορισμένες κατηγορίες και στόχων είναι ο ροσδιορισμός των παραμέτρων της συνάρτησης αξίας (δηλαδή των διανυσμάτων $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_K$) που συμβαδίζουν με την ταξινόμηση των εναλλακτικών. Επομένως, το μοντέλο απόφασης θα πρέπει να ικανοποιεί τους ακόλουθους γραμμικούς περιορισμούς:

$$\sum_{k=1}^{K} \mathbf{p}_{ik}^{\mathsf{T}} \mathbf{d}_k \geq t_\ell + \delta \quad \forall \text{ εναλλακτική } i \text{ της κατηγορίας } C_\ell \ (1 \leq \ell \leq N-1) \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \mathbf{p}_{ik}^{\mathsf{T}} \mathbf{d}_k \leq t_{\ell-1} - \delta \quad \forall \text{ εναλλακτική } i \text{ της κατηγορίας } C_\ell \ (2 \leq \ell \leq N) \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \mathbf{1}^{\mathsf{T}} \mathbf{d}_k = 1 \tag{2.9}$$

$$\mathbf{d}_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \ldots, K \tag{2.10}$$

Οι περιορισμοί (2.7) και (2.8) εξασφαλίζουν ότι η συνάρτηση αξίας είναι συμβατή με την ταξινόμηση των εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς, σύμφωνα με τον κανόνα ταξινόμησης (2.2). Στους περιορισμούς αυτούς δ είναι μια μικρή θετική σταθερά. Ο περιορισμός (2.9) κανονικοποιεί τη συνάρτηση αξίας έτσι ώστε η συνολική αξία μιας άριστης εναλλακτικής να είναι ίση με ένα (ως $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$ συμβολίζεται το μοναδιαίο διάνυσμα), ενώ οι περιορισμοί μη αρνητικότητας (2.10) εξασφαλίζουν ότι οι συναρτήσεις μερικής αξίας είναι μη φθίνουσες (θεωρώντας ότι τα κριτήρια είναι όλα σε μορφή μεγιστοποίησης).

Εάν η ταξινόμηση των εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς από τον αποφασίζοντα δεν έχει ασυνέπειες, τότε το πολύεδρο που διαμορφώνεται από τους παραπάνω γραμμικούς περιορισμούς θα περιλαμβάνει άπειρες εφικτές λύσεις, κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί σε μια διαφορετική προσθετική συνάρτηση αξίας, η οποία είναι συμβατή με τις αξιολογήσεις του αποφασίζοντος. Επομένως προκύπτει το θέμα που αφορά την επιλογή μιας χαρακτηριστικής συνάρτησης από το εφικτό σύνολο. Το θέμα αυτό υφίσταται ακόμα και σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν ασυνέπειες στις αξιολογήσεις του αποφασίζοντος, καθώς αυτές μπορούν να αντιμετωπιστούν αλγοριθμικά ή αλληλεπιδραστικά σε συνεργασία με τον αποφασίζοντα (Mousseau et al., 2003).

Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται οι μεθοδολογίες που εξετάζονται στην παρούσα έρευνα για την αντιμετώπιση του παραπάνω θέματος. Οι μεθοδολογίες αυτές περιλαμβάνουν: (α) μια διαδικασία μεταβελτιστοποίησης, η οποία ήταν η πρώτη που προτάθηκε στη βιβλιογραφία για τον εντοπισμό χαρακτηριστικών λύσεων από το εφικτό πολύεδρο (2.7)–(2.10) και τη διαμόρφωση μιας συνάρτησης αξίας από μια προσέγγιση του βαρυκέντρου του πολυέδρου, (β) μια διατύπωση max-min, η οποία έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορες έρευνες στα πλαίσια διαδικασιών ανάλυσης ευστάθειας στην ΑΣΠ, (γ) ένα μοντέλο βελτιστοποίησης που βασίζεται στην έννοια του αναλυτικού κέντρου, και (δ) ένα νέο μοντέλο βελτιστοποίησης το οποίο βασίζεται στην έννοια του κέντρου Chebyshev ενός κυρτού πολυέδρου.

2.2 Ανάλυση μεταβελτιστοποίησης

Προκειμένου να αντιμετωπίσουν το θέμα της ύπαρξης πολλαπλών μοντέλων συμβατών με τις αξιολογήσεις του αποφασίζοντος στο σύνολο αναφοράς, οι Jacquet-Lagrèze and Siskos (1982) πρότειναν τη χρήση μιας ευρετικής διαδικασίας μεταβελτιστοποίησης, η οποία βασίζεται στη λύση $2K$ γραμμικών προγραμμάτων, κάθε ζεύγος k εκ των οποίων αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση και μεγιστοποίηση του συντελεστή παραχώρησης του κριτηρίου k:

$$\max/\min\left\{\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_k \mid \text{Υπό: (2.7)-(2.10)}\right\} \tag{2.11}$$

όπου $\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα. Οι $2K$ λύσεις που διαμορφώνονται από αυτή τη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης αντιστοιχούν σε ορισμένες χαρακτηριστικές ακραίες λύσεις του πολυέδρου (2.7)–(2.10). Ο μέρος όρος των λύσεων αυτών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια χαρακτηριστική προσθετική συνάρτηση αξίας, η οποία προσεγγίζει το κέντρο του πολυέδρου και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ευσταθής καθώς θα παραμένει αποδεκτή ακόμα και εάν οι αξιολογήσεις του αποφασίζοντος για κάποιες από τις εναλλακτικές του συνόλου αναφοράς μεταβληθούν.

2.3 Μια διατύπωση max-min

Μοντέλα βελτιστοποίησης max-min είναι ιδιαίτερα διαδεδομένα σε διάφορα πεδία της επιχειρησιακής έρευνας. Στα πλαίσια της ΑΣΠ τέτοια μοντέλα έχουν χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό των παραμέτρων μοντέλων αποφάσεων από παραδείγματα αναφοράς. Για παράδειγμα, οι Zopounidis and Doumpos (2000) χρησιμοποίησαν ένα μοντέλο αυτής της μορφής στη μέθοδο MHDIS, οι Dias et al. (2002) χρησιμοποίησαν ένα ανάλογο μοντέλο για τον καθορισμό των παραμέτρων της μεθόδου ELECTRE, ενώ οι Greco et al. (2011) χρησιμοποίησαν διατυπώσεις της μορφής max-min για την ανάπτυξη μιας χαρακτηριστικής προσθετικής συνάρτησης αξίας σε προβλήματα ταξινόμησης. Παρόμοια μοντέλα προτάθηκαν και από τους Beuthe and Scannella (2001) για προβλήματα κατάταξης.

Στην παρούσα έρευνα το μοντέλο max-min που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό των παραμέτρων μιας προσθετικής συνάρτησης αξίας που είναι συμβατή με τις αξιολογήσεις του αποφασίζοντος διατυπώνεται ως εξής:

$$\max\left\{\delta \mid \text{Υπό: (2.7)-(2.10)}\right\} \tag{2.12}$$

Αυτό το πρόβλημα βελτιστοποίησης μεγιστοποιεί το ελάχιστο διαχωριστικό διάκενο μεταξύ διαδοχικών κατηγοριών. Οι Bous et al. (2010) σημειώνουν ότι με τον τρόπο αυτό περιορίζεται το αρχικό πολύεδρο των εφικτών λύσεων σε μια πιο "κεντρική" περιοχή, οδηγώντας έτσι σε λύσεις που είναι απομακρυσμένες από τα όρια που καθορίζουν τις αποδεκτές λύσεις. Έτσι το τελικό μοντέλο απόφασης αποτυπώνει τις προτιμήσεις του αποφασίζοντος με πιο σαφή και ευσταθή τρόπο.

Η παραπάνω διατύπωση max-min μπορεί επίσης να εξηγηθεί στα πλαίσια της αρχής της κανονικοποίησης, η οποία είναι ιδιαίτερα δημοφιλής στα πλαίσια της στατιστικής θεωρίας μάθησης (Hastie et al., 2001). Ειδικότερα, βασιζόμενοι στην αρχή αυτή, οι Doumpos and Zopounidis (2007) παρουσίασαν ένα μοντέλο βελτιστοποίησης, το οποίο στην περίπτωση όπου οι αξιολογήσεις του αποφασίζοντος είναι συνεπείς, διατυπώνεται ως εξής:

$$\min\left\{\sum_{k=1}^{K}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_k \mid \text{Υπό: (2.7), (2.8), (2.10)}\right\} \tag{2.12}$$

Στη διατύπωση αυτή ο περιορισμός (2.9) δεν χρησιμοποιείται για την κανονικοποίηση της συνάρτησης αξίας. Αντί αυτού, η προσθετική συνάρτηση κανονικοποιείται με βάση τη λύση του παραπάνω γραμμικού προγράμματος. Συγκεκριμένα, συμβολίζοντας ως F^* τη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, η κανονικοποιημένη προσθετική συνάρτηση αξίας διαμορφώνεται διαιρώντας τη βέλτιστη λύση του προβλήματος (2.13) με F^* (οι Doumpos and Zopounidis, 2007 ανάλυσαν τις συνθήκες υπό τις οποίες είναι δυνατόν να συμβεί $F^*=0$ κάτι το οποίο είναι αδύνατο σε περιπτώσεις όπου οι αξιολογήσεις του αποφασίζοντος είναι συνεπείς). Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι οι διατυπώσεις (2.12) και (2.13) είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 1. Οι λύσεις των προβλημάτων (2.12) και (2.13) είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Έστω ότι το πρόβλημα (2.13) λύνεται για κάποιο $\delta=\delta_0>0$ 0 και η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι $F^*>0$. Η βέλτιστη λύση του προβλήματος (2.13) κανονικοποιημένη με τη διαδικασία που αναφέρθηκε παραπάνω είναι εφικτή για το πρόβλημα (2.12) και αποδίδει τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος (2.12) ίση με δ_0/F^*. Εάν υπήρχε λύση στο πρόβλημα (2.12) με $\delta>\delta_0/F^*$, τότε ο πολλαπλασιασμός της με δ_0/δ θα οδηγούσε σε μια εφικτή λύση στο πρόβλημα (2.13) με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ίση με $\delta_0/\delta < F^*$, κάτι που αντιβαίνει στην αρχική υπόθεση ότι η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος (2.13) είναι ίση με F^*.

2.4 Το αναλυτικό κέντρο ενός πολυέδρου

Η τρίτη μεθοδολογία που εξετάζεται στην παρούσα έρευνα βασίζεται στη διατύπωση που παρουσίασαν οι Bous et al. (2010), η οποία βασίζεται στον καθορισμό του αναλυτικού πολυέδρου των λύσεων που συμβαδίζουν με τις αξιολογήσεις του αποφασίζοντα. Το αναλυτικό κέντρο ενός πολυέδρου αντιστοιχεί σε ένα εσωτερικό σημείο του πολυέδρου που μεγιστοποιεί τη λογαριθμική συνάρτηση εμποδίου (logarithmic barrier function) των μεταβλητών απόκλισης των περιορισμών. Στην παρούσα έρευνα το μοντέλο των Bous et al. (2010) προσαρμόστηκε για τον εντοπισμό του αναλυτικού κέντρου του πολυέδρου (2.7)–(2.10). Αυτό γίνεται μέσω της λύσης του ακόλουθου κυρτού μη γραμμικού προγράμματος:

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{i=1}^{M} (\ln s_i^+ + \ln s_i^-) + \sum \mathbf{1}^{\mathsf{T}} \ln \mathbf{y}_k \\
&\text{Υπό:} \\
&\sum_{k=1}^{K} \mathbf{p}_{ik}^{\mathsf{T}} \mathbf{d}_k - t_\ell - s_i^+ = \delta && \forall i \in C_\ell,\ 1 \le \ell \le N-1 \\
&\sum_{k=1}^{K} \mathbf{p}_{ik}^{\mathsf{T}} \mathbf{d}_k - t_{\ell-1} + s_i^- = -\delta && \forall i \in C_\ell,\ 2 \le \ell \le N \\
&\mathbf{d}_k - \mathbf{y}_k = 0 && k = 1, 2, \ldots, K \\
&\sum \mathbf{1}^{\mathsf{T}} \mathbf{d}_k = 1 \\
&s_i^+, s_i^-, t_\ell, \mathbf{y}_k, \mathbf{d}_k \ge 0 && \forall i, \ell, k
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Σε σύγκριση με τις διαδικασίες που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, η παραπάνω διατύπωση βασίζεται σε μια αυστηρή ερμηνεία της έννοιας του κέντρου για το σύνολο των εφικτών λύσεων. Επιπλέον, η βέλτιστη λύση του παραπάνω προβλήματος βελτιστοποίησης είναι μοναδική (Bous et al., 2010), περιορίζοντας έτσι την “αυθαιρεσία” που υπάρχει σε διατυπώσεις γραμμικού προγραμματισμού, όπου η βέλτιστη λύση δεν είναι μοναδική.

2.5 Μια νέα μοντελοποίηση βάσει του κέντρου Chebyshev

Εκτός των παραπάνω μοντέλων από τη βιβλιογραφία, εξετάζεται και ένα νέο πρωτότυπο μοντέλο, το οποίο επεκτείνει το μοντέλο (2.12). Ειδικότερα, το πρόβλημα (2.12) οδηγεί στην ανάπτυξη μιας προσθετικής συνάρτησης αξιολόγησης που μεγιστοποιεί την ελάχιστη ικανοποίηση των περιορισμών (2.7)–(2.8), δηλαδή το ελάχιστο διαχωριστικό διάκενο μεταξύ των κατηγοριών. Παρόλα αυτά δεν υπάρχει κάποια σαφής και αυστηρά ορισμένη σύνθεση μεταξύ του στόχου αυτού και των χαρακτηριστικών και της ευστάθειας του πολυέδρου (2.7)–(2.10). Η διατύπωση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα αντιμετωπίζει το θέμα αυτό εισάγοντας την έννοια του αναλυτικού κέντρου.

Εναλλακτικά, η ανάπτυξη ενός χαρακτηριστικού και ευσταθούς μοντέλου απόφασης μπορεί να βασιστεί στο κέντρο Chebyshev. Το κέντρο Chebyshev ενός πολυέδρου αντι- στοιχεί σε ένα σημείο εντός του πολυέδρου, με κέντρο το οποίο μπορεί να διαμορφωθεί η μέγιστη δυνατή σφαίρα ακτίνας r εντός του πολυέδρου (Boyd and Vandenberghe, 2004). Στην παρούσα έρευνα, η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιείται για να βρεθεί το κέντρο Chebyshev του πολυέδρου (2.7)–(2.10), μέσω της λύσης του ακόλουθου γραμμικού προγράμματος:

$$
\begin{aligned}
&\max r \\
&\text{Υπό:} \\
&\sum_{k=1}^{K} \mathbf{p}_{ik}^{\mathsf{T}} \mathbf{d}_k - t_\ell - a_i r \geq \delta && \forall i \in C_\ell,\ 1 \leq \ell \leq N-1 \\
&\sum_{k=1}^{K} \mathbf{p}_{ik}^{\mathsf{T}} \mathbf{d}_k - t_{\ell-1} + b_i r \leq 0 && \forall i \in C_\ell,\ 2 \leq \ell \leq N \\
&\mathbf{d}_k - \mathbf{1} r \geq 0 && k = 1, 2, \ldots, K \\
&\sum \mathbf{1}^{\mathsf{T}} \mathbf{d}_k = 1 && \\
&t_\ell, \mathbf{d}_k, r \geq 0 && \forall \ell, k
\end{aligned}
\qquad (2.15)
$$

όπου a_i και b_i είναι οι Ευκλείδειες νόρμες των συντελεστών των μεταβλητών απόφασης σε καθέναν από τους περιορισμούς (2.7)–(2.8), δηλαδή $a_i = \left\| \mathbf{p}_{i1} \quad \mathbf{p}_{i2} \quad \cdots \quad \mathbf{p}_{iK} - 1 \right\|_2$.

3 Το πλαίσιο της ανάλυσης

Η συγκριτική αξιολόγηση των μεθοδολογιών που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα πραγματοποιήθηκε μέσω μιας προσομοίωσης Monte Carlo βάσει τεχνητών δεδομένων, ακολουθώντας το πειραματικό πλαίσιο που χρησιμοποίησαν οι Vetschera et al. (2010).

Η ανάλυση βασίστηκε σε δεδομένα που διαμορφώθηκαν από την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν, τυπική απόκλισης μονάδα, και συσχετίσεις ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα [0, 0.2]. Παρόμοια με την ανάλυση των Vetschera et al. (2010), εξετάστηκαν διάφορα εναλλακτικά σενάρια για τις διαστάσεις των δεδομένων του συνόλου αναφοράς, ως εξής:

- Αριθμός κατηγοριών: N = 2, 3, 4.
- Αριθμός εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς ανά κατηγορία: M/N = 3, 5, 10, 15.
- Αριθμός κριτηρίων: K = 3, 5, 7.

Η παραμετροποίηση των δεδομένων με τον τρόπο αυτό, οδηγεί στην εξέταση περιπτώσεων όπου το σύνολο αναφοράς περιλαμβάνει ένα μικρό αριθμό εναλλακτικών και είναι χαμηλής πολυπλοκότητας, αλλά και πιο σύνθετες περιπτώσεις (μεγαλύτερα σύνολα αναφοράς με περισσότερα κριτήρια και κατηγορίες). Σε όλες τις περιπτώσεις διαμορφώθηκε και ένα δεύτερο σύνολο δεδομένων (δείγμα ελέγχου) αποτελούμενο από 50 εναλλακτικές ανά κατηγορία, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση των αποτελεσμάτων των μοντέλων απόφασης σε δεδομένα διαφορετικά από το σύνολο αναφοράς.

Για κάθε συνδυασμό των παραπάνω τριών παραγόντων πραγματοποιήθηκαν 100 επαναλήψεις. Σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας, παράγονται δύο σύνολα δεδομένων των 1 000 εναλλακτικών. Οι εναλλακτικές αυτές αξιολογούνται μέσω μιας τυχαίας προσθετικής συνάρτησης αξίας και ταξινομούνται στις προκαθορισμένες κατηγορίες. Στη συνέχεια η πρώτη ομάδα εναλλακτικών χρησιμοποιείται για την επιλογή (τυχαία) των εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς, ενώ οι εναλλακτικές του δείγματος ελέγχου επιλέγονται από τη δεύτερη ομάδα δεδομένων.

Προκειμένου να διευκολυνθεί η ανάλυση, θεωρείται ότι οι προτιμήσεις του αποφασίζοντα μοντελοποιούνται μέσω μιας γραμμικής συνάρτησης αξίας. Επομένως, τόσο οι εναλλακτικές του συνόλου αναφοράς, όσο και του δείγματος ελέγχου ταξινομούνται μέσω μιας γραμμικής συνάρτησης. Παρόλα αυτά, εξετάζεται και η περίπτωση όπου το μοντέλο απόφασης που αναπτύσσεται αποκλίνει από το πραγματικό, θεωρώντας και τις περιπτώσεις όπου αναπτύσσεται μια μη γραμμική προσθετική συνάρτηση, παρότι το “πραγματικό” μοντέλο που περιγράφει τη συμπεριφορά του αποφασίζοντα είναι γραμμικό. Έτσι διερευνάται και η επίδραση που έχει ο σωστός καθορισμός της μορφής του μοντέλου στην ευστάθεια και την ποιότητα των αποτελεσμάτων.

Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε σε περιβάλλον MATLAB R2012b χρησιμοποιώντας έναν Η/Υ με επεξεργαστή Intel i7-2600K και 16GB μνήμης RAM.

4 Αποτελέσματα

4.1 Ανάλυση της ευστάθειας των αποδεκτών μοντέλων απόφασης

Προκειμένου να διερευνηθούν τα χαρακτηριστικά της ευστάθειας των μεθοδολογιών που εξετάζονται στην έρευνα, αρχικά αναλύεται το πολύεδρο που ορίζεται από τους περιορισμούς (2.7)–(2.10), για τα δεδομένα που εξετάστηκαν στην ανάλυση. Συγκεκριμένα, για κάθε σύνολο αναφοράς χρησιμοποιήθηκε ένας αλγόριθμος “hit-and-run” (Kroese et al., 2011; Tervonen et al., 2013) για την ομοιόμορφη δειγματοληψία 5000 προσθετικών συναρτήσεων αξιών από το πολύεδρο που οριοθετεί τα μοντέλα που είναι συμβατά με την προκαθορισμένη ταξινόμηση των εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς. Όπως προαναφέρθηκε, η δειγματοληψία αυτή πραγματοποιήθηκε δύο φορές, αρχικά για γραμμικές συναρτήσεις αξιών και στη συνέχεια για μη γραμμικές (κατά τμήματα γραμμικές) συναρτήσεις.

Έχοντας ως βάση αυτά τα 5000 συμβατά μοντέλα απόφασης χρησιμοποιούνται δύο εναλλακτικοί κανόνες για την ταξινόμηση των εναλλακτικών στο αντίστοιχο δείγμα ελέγχου:

- *Ευσταθής κανόνας ταξινόμησης*: Κάθε εναλλακτική i ταξινομείται χρησιμοποιώ- ντας κάθε μία από τις συναρτήσεις αξίας (ΣΑ) και υπολογίζεται ο δείκτης εμπιστοσύνης της ταξινόμησης (assignment confidence index) ACI_ℓ ως η συχνότητα με την οποία η i ταξινομείται C_ℓ. Επομένως, ο δείκτης ACI αναπαριστά την πιθανότητα μια εναλλακτική να ανήκει σε μια συγκεκριμένη κατηγορία, βάσει της πληροφορίας που παρέχουν οι αξιολογήσεις του αποφασίζοντος στο σύνολο αναφοράς. Η σύνθεση όλων των επιμέρους ταξινομήσεων από τα εναλλακτικά μοντέλα απόφασης γίνεται μέσω του κανόνα της πλειοψηφίας, σύμφωνα με τον οποίο η εναλλακτική i ταξινομείται στην κατηγορία για την οποία ο δείκτης ACI είναι μεγαλύτερος.
- *Ταξινόμησης μέσω της κεντροειδούς λύσης*: Υπολογίζεται ο μέσος όρος όλων των συναρτήσεων αξίας ώστε να διαμορφωθεί μια μοναδική συνάρτηση αξιολόγησης, η οποία αντιστοιχεί στο κεντροειδές της εφικτής περιοχής. Αυτή η συνάρτηση αξιολόγησης χρησιμοποιείται στη συνέχεια για την ταξινόμηση των εναλλακτικών του δείγματος ελέγχου.

Ο ευσταθής κανόνας αποτελεί τη βάση σύγκρισης των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τις μεθοδολογίας που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 2. Αυτός όμως ο κανόνας ταξινόμησης βασίζεται στη χρήση πολλαπλών μοντέλων απόφασης και επομένως δεν παρέχει στον αποφασίζοντα μια ξεκάθαρη εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο προκύπτουν τα αποτελέσματα από τα διαθέσιμα δεδομένα. Ο κεντροειδής κανόνας αντιμετωπίζει τη δυσκολία αυτή, καθώς βασίζεται στη χρήση μίας μόνο συνάρτησης αξίας, η οποία αναμένεται να προσεγγίζει τα αποτελέσματα του ευσταθή κανόνα.

Για την αξιολόγηση της ευστάθειας της πληροφορίας που παρέχει το σύνολο αναφοράς χρησιμοποιούνται τα ακόλουθα μέτρα:

- *Μέσος δείκτης εμπιστοσύνης της ταξινόμησης (mean assignment confidence index, MACI*). Όπως προαναφέρθηκε, ο δείκτης ACI_ℓ αναπαριστά το ποσοστό των συμβατών συναρτήσεων αξιών, οι οποίες ταξινομούν την εναλλακτική i στην κατηγορία C_ℓ. Ο δείκτης *MACI* υπολογίζεται ως ο μέσος όρος του δείκτη ACI_ℓ για όλες τις εναλλακτικές του δείγματος ελέγχου για καθένα από τους παραπάνω δύο κανόνες ταξινόμησης. Τιμές του δείκτη *MACI* κοντά στο 100% δείχνουν ότι οι ταξινομήσεις του εξεταζόμενου κανόνα ταξινόμησης για τις εναλλακτικές του δείγματος ελέγχου είναι ευσταθείς, καθώς επιβεβαιώνονται από όλες σχεδόν τις συναρτήσεις αξίες που είναι συμβατές με την πληροφορία που παρέχει το σύνολο αναφοράς.
- Μέση εντροπία των ταξινομήσεων. Ενώ δείκτης *MACI* υπολογίζεται για κάθε κατηγορία ξεχωριστά, η εντροπία παρέχει ένα μέτρο της τυχαιότητας των συνολικών αποτελεσμάτων ταξινόμησης των μοντέλων απόφασης. Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιείται ο ακόλουθος δείκτης εντροπίας για τις ταξινομήσεις της εναλλακτικής i:

  $$E_i = 100\left(1 + \frac{1}{\ln N}\sum_{\ell=1}^{N} ACI_{i\ell} \ln ACI_{i\ell}\right)$$

  Εναλλακτικές για τις οποίες αυτός ο δείκτης εντροπίας είναι κοντά στο 100 ταξινομούνται σε μια συγκεκριμένη κατηγορία από όλες τις συναρτήσεις αξίας που είναι συμβατές με το σύνολο αναφοράς. Αντίθετα, η αβεβαιότητα της ταξινόμησης μιας εναλλακτικής αυξάνει όταν η εντροπία είναι σχεδόν μηδέν (στις περιπτώσεις αυτές ο δείκτης ACI_ℓ είναι περίπου ίσος με $1/N$ για κάθε $\ell = 1, 2, \ldots, N$). Ο μέσος όρος της εντροπίας υπολογίζεται από όλες τις εναλλακτικές του δείγματος ελέγχου.

- Συντελεστής μεταβλητότητας (coefficient of variation, CV) των παραχωρήσεων των κριτηρίων στις συναρτήσεις αξίας. Τα προηγούμενα δύο μέτρα αφορούν τις ταξινομήσεις των εναλλακτικών. Προκειμένου να εξεταστεί επιπλέον και η ευστάθεια των παραμέτρων των μοντέλων απόφασης, χρησιμοποιείται και ο συντελεστής μεταβλητότητας των παραχωρήσεων των κριτηρίων στις συναρτήσεις αξίας. Μικρές τιμές του δείκτη CV αντιστοιχούν σε περιπτώσεις όπου όλες οι συναρτήσεις αξίας είναι σχεδόν ταυτόσημες, ενώ αντίθετα υψηλές τιμές του δείκτη υποδεικνύουν την αστάθεια των μοντέλων απόφασης που εξηγούν τις αξιολογήσεις του αποφασίζονται στο σύνολο αναφοράς.

Ο Πίνακας 4.1 συνοψίζει τα αποτελέσματα για τους παραπάνω δείκτες. Παρόμοια με τα αποτελέσματα των Vetschera et al. (2010), όλοι οι δείκτες υποδεικνύουν ότι η ευστάθεια βελτιώνεται όταν το σύνολο αναφοράς ενσωματώνει περισσότερη πληροφορία (όταν αυξάνει το πλήθος των εναλλακτικών ανά κατηγορία, M/N). Αντίθετα, καθώς αυξάνει το πλήθος των κριτηρίων (K), η ευστάθεια μειώνεται. Όπως φαίνεται από τιμές του συντελεστή μεταβλητότητας (CV), αυτό οφείλεται στην αυξημένη αστάθεια των παραχωρήσεων των κριτηρίων στα μοντέλα αξιολόγησης. Τα αποτελέσματα ενός ελέγχου ANOVA επιβεβαιώνουν (σε επίπεδο σημαντικότητας 1%) ότι η επίδραση όλων των παραγόντων που εξετάζονται στη ανάλυση είναι στατιστικά σημαντική (οι αλληλεπιδράσεις τους επίσης βρέθηκαν σημαντικές, εκτός από την αλληλεπίδραση που αφορά τα τρία χαρακτηριστικά των συνόλων αναφοράς με τον τύπο του μοντέλου απόφασης).

Πίνακας 4.1: Σύνοψη των δεικτών ευστάθειας

		Γραμμική ΣΑ			Μη γραμμική ΣΑ		
		MACI	Εντροπία	CV	MACI	Εντροπία	CV
K	3	92.35	82.78	0.32	89.40	76.93	0.28
	5	89.77	76.97	0.44	86.73	71.13	0.34
	7	88.08	73.21	0.51	85.50	68.59	0.37
N	2	90.34	70.02	0.53	89.73	67.66	0.39
	3	89.70	79.12	0.40	86.56	72.77	0.33
	4	90.16	83.82	0.33	85.35	76.22	0.28
M/N	3	83.47	64.30	0.54	81.43	60.87	0.39
	5	88.26	73.67	0.47	85.43	68.55	0.36
	10	93.27	84.22	0.36	89.89	77.55	0.30
	15	95.27	88.42	0.32	92.09	81.90	0.28
Μέσος όρος		90.07	77.65	0.42	87.21	72.22	0.33

Όσον αφορά την επίδραση του πλήθους των κατηγοριών (N), ο δείκτης εντροπίας και ο συντελεστής μεταβλητότητας δείχνουν ότι η ευστάθεια αυξάνει σε προβλήματα με περισσότερες από δύο κατηγορίες. Αντίθετα, ο δείκτης MACI δεν παρέχει σαφείς ενδείξεις. Ειδικότερα, όταν χρησιμοποιείται η σωστή μορφή του μοντέλου απόφασης (γραμμική συνάρτηση αξίας) οι διαφορές στον δείκτη MACI μεταξύ προβλημάτων με διαφορετικό αριθμό κατηγοριών είναι περιορισμένες (μη στατιστικά σημαντικές σύμφωνα με έναν έλεγχο ANOVA σε επίπεδο 1%), ενώ όταν χρησιμοποιείται μια εσφαλμένη μορφή για το μοντέλο απόφασης(μη γραμμική συνάρτηση αξίας) ο δείκτης MACI μειώνεται για προβλήματα με περισσότερες κατηγορίες.

Γενικά, είναι εμφανές ότι σύμφωνα με τους δείκτες εντροπίας και MACI, η μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων ταξινόμησης είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση της μη γραμμικής συνάρτησης αξίας, αν και ο συντελεστής μεταβλητότητας των παραχωρήσεων των κριτηρίων είναι μικρότερος σε σχέση με χρήση γραμμικών μοντέλων. Θα πρέπει πάντως να σημειωθεί ότι σε μια μη γραμμική συνάρτηση αξίας, οι παραχωρήσεις των κριτηρίων δεν είναι η μόνη παράμετρος που ορίζει τη μορφή του μοντέλου αξιολόγησης, καθώς η μορφή των συναρτήσεων αξιών παίζει επίσης ρόλο. Επομένως, τα αποτελέσματα για το συντελεστή μεταβλητότητας των παραχωρήσεων σε γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα αποφάσεων δεν είναι άμεσα συγκρίσιμα.

Παρόλα αυτά, είναι σαφές ότι εκτός από τα χαρακτηριστικά του συνόλου αναφοράς, η ευστάθεια των αποτελεσμάτων επηρεάζεται σημαντικά και από την επιλογή της μορφής του μοντέλου απόφασης. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας ένα πιο σύνθετο μοντέλο απόφασης (μη γραμμική συνάρτηση αξίας) επηρεάζει αρνητικά την ευστάθεια των αποτελεσμάτων.

Όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.2 αυτό έχει επιπτώσεις και στην ακρίβεια ταξινόμησης των μοντέλων. Τα αποτελέσματα για τον ευσταθή κανόνα ταξινόμησης δείχνουν ότι η χρήση ενός εσφαλμένου μοντέλου απόφασης (μη γραμμική συνάρτηση αξίας) είναι σημαντικά χειρότερα σε σχέση με τη χρήση του σωστού (γραμμικού) μοντέλου (τα αποτελέσματα ενός ελέγχου t επιβεβαιώνουν ότι η διαφορά μεταξύ των δύο περιπτώσεων είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο 1%). Η επίδραση του πλήθους των κριτηρίων, των κατηγοριών και των εναλλακτικών ανά κατηγορία είναι παρόμοια με τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκα προηγούμενα για τους τρεις δείκτες ευστάθειας. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με εκείνα των Vetschera et al. (2010), οι οποίοι επίσης διαπίστωσαν ότι υπάρχει μια ισχυρή θετική σχέση μεταξύ της ευστάθειας και της ακρίβειας ταξινόμησης.

Οι διαφορές μεταξύ του ευσταθή και του κεντροειδή κανόνα ταξινόμησης είναι περιορισμένες στο 1–1.5% των εναλλακτικών του δείγματος ελέγχου (κατά μέσο όρο) για περιπτώσεις όπου το σύνολο αναφοράς αποτελείται από τρεις εναλλακτικές ανά κατηγορία, ενώ είναι ακόμα μικρότερες σε μεγαλύτερα σύνολα αναφοράς. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει ότι τα αποτελέσματα του κεντροειδή κανόνα είναι ευσταθή, στοιχείο που δικαιολογεί τις προσπάθειες που έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία για την ανάπτυξη μοντέλων απόφασης βάσει της έννοιας του κέντρου του πολυέδρου των εφικτών μοντέλων, όπως οι μεθοδολογίες που εξετάζονται στην παρούσα έρευνα. Τα αποτελέσματα της επόμενης ενότητας βοηθούν στη σύγκριση των μεθοδολογιών αυτών.

4.2 Συγκριτική αξιολόγηση εναλλακτικών προσεγγίσεων

Η ανάλυση που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα επικεντρώθηκε στην ευ- στάθεια του πολυέδρου που ορίζει τα αποδεκτά μοντέλα απόφασης, τα οποία συμφωνούν με τις αξιολογήσεις του αποφασίζοντος στο σύνολο αναφοράς. Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν τη βάση για τη σύγκριση των μεθοδολογιών που παρουσιάστηκαν στην ενό- τητα 2 για τη διαμόρφωση ενός μοντέλου απόφασης που αναπαριστά την πληροφορία που παρέχει το σύνολο αναφοράς.

Η συγκριτική αξιολόγηση που παρουσιάζεται στην ενότητα αυτή αφορά: (α) το βαθμό εμπιστοσύνης των ταξινομήσεων, (β) τη σχέση μεταξύ των εκτιμώμενων παραμέτρων του μοντέλου απόφασης, των πραγματικών παραμέτρων και της εκτίμησής τους μέσω της κεντροειδούς λύσης, (γ) την ακρίβεια ταξινόμησης στο δείγμα ελέγχου.

Πίνακας 4.2: Ακρίβειες ταξινόμησης για τον ευσταθή κανόνα

		Γραμμική ΣΑ						
		K			**N**			
		3	5	7	2	3	4	Μέσος όρος
M/N	3	90.81	86.90	84.54	87.40	86.65	88.21	87.42
	5	94.14	91.76	90.38	91.30	91.61	93.37	92.09
	10	97.59	96.14	94.84	94.67	96.46	97.45	96.19
	15	98.59	97.72	97.10	96.40	98.06	98.95	97.80
Μέσος όρος		95.28	93.13	91.72	92.44	93.19	94.50	93.38
		Μη γραμμική ΣΑ						
M/N	3	87.52	83.21	81.14	87.02	83.33	81.52	83.96
	5	91.38	87.76	85.77	90.40	87.69	86.81	88.30
	10	94.96	92.39	90.54	93.04	92.02	92.82	92.63
	15	96.74	94.80	93.29	94.97	94.30	95.56	94.94
Μέσος όρος		92.65	89.54	87.68	91.36	89.34	89.18	89.96

4.2.1 Ο βαθμός εμπιστοσύνης των ταξινομήσεων

Οι Πίνακες 4.3–4.5 συνοψίζουν τα αποτελέσματα του δείκτη MACI για τις τέσσερις εξεταζόμενες μεθοδολογίες σε σχέση με τα χαρακτηριστικά του συνόλου αναφοράς. Κάθε πίνακας παρουσιάζει τις σχετικές ποσοστιαίες διαφορές μεταξύ του ευσταθή κανόνα ταξινόμησης και του δείκτη MACI για τις εξεταζόμενες μεθοδολογίες. Προφανώς, αυτές οι διαφορές είναι πάντα μη θετικές, καθώς ο ευσταθής κανόνας είναι εκείνος που μεγιστοποιεί τον δείκτη MACI. Επομένως, μεθοδολογίες για τις οποίες οι διαφορές αυτές είναι κοντά στο μηδέν παρέχουν τα πλέον ευσταθή αποτελέσματα.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τα μοντέλα απόφασης που αναπτύσσονται μέσω της διαδικασίας του αναλυτικού κέντρου έχουν τις μικρότερες διαφορές από τον ευσταθή κανόνα, ακολουθούμενα από τα μοντέλα που αντιστοιχούν στο κέντρο Chebyshev. Η διαπίστωση αυτή ισχύει τόσο για γραμμικές όσο και για μη γραμμικές συναρτήσεις αξιών. Όπως και στην ανάλυση της προηγούμενης ενότητας, είναι εμφανές ότι οι αποκλίσεις των τεσσάρων μεθοδολογιών από τον ευσταθή κανόνα μεγαλώνουν στην περίπτωση όπου χρησιμοποιείται εσφαλμένη (μη γραμμική μορφή) για τον καθορισμό του μοντέλου απόφασης. Η αρνητική όμως επίδραση που έχει το στοιχείο αυτό είναι μικρότερη για τα μοντέλα που αντιστοιχούν στο κέντρο Chebyshev και το αναλυτικό κέντρο.

Πίνακας 4.3: Ποσοστιαίες διαφορές του δείκτη MACI σε σχέση με τον ευσταθή κανόνα ταξινόμησης (αποτελέσματα ως προς το πλήθος των κριτηρίων)

Μορφή ΣΑ	Μεθοδολογίες	3	5	7	ΜΟ
Γραμμική	Μεταβελτιστ.	−1.71	−2.04	−3.10	−2.27
	Max-min	−1.43	−2.55	−3.62	−2.52
	Κέντρο Chebyshev	−1.28	−1.86	−2.37	−1.83
	Αναλυτικό κέντρο	−0.58	−0.88	−1.06	−0.84
Μη γραμ.	Μεταβελτιστ.	−7.15	−8.08	−8.86	−8.02
	Max-min	−3.91	−6.55	−8.94	−6.43
	Κέντρο Chebyshev	−2.31	−3.23	−3.99	−3.16
	Αναλυτικό κέντρο	−1.76	−2.12	−2.19	−2.02

Πίνακας 4.4: Ποσοστιαίες διαφορές του δείκτη MACI σε σχέση με τον ευσταθή κανόνα ταξινόμησης (αποτελέσματα ως προς το πλήθος των εναλλακτικών ανά κατηγορία)

Μορφή ΣΑ	Μεθοδολογίες	3	5	10	15	ΜΟ
Γραμμική	Μεταβελτιστ.	−5.30	−2.66	−0.97	−0.54	−2.27
	Max-min	−5.54	−3.03	−1.18	−0.71	−2.52
	Κέντρο Chebyshev	−3.74	−2.21	−1.00	−0.61	−1.83
	Αναλυτικό κέντρο	−1.10	−0.97	−0.71	−0.60	−0.84
Μη γραμ.	Μεταβελτιστ.	−14.82	−10.17	−4.94	−3.01	−8.02
	Max-min	−11.80	−7.84	−4.13	−2.62	−6.43
	Κέντρο Chebyshev	−5.09	−3.81	−2.38	−1.62	−3.16
	Αναλυτικό κέντρο	−1.73	−2.10	−2.15	−2.06	−2.02

Όσον αφορά την επίδραση του πλήθους των κριτηρίων (Πίνακας 4.3), οι διαφοροποιήσεις μεταξύ των τεσσάρων μεθοδολογιών και του ευσταθούς κανόνα αυξάνουν με το πλήθος των κριτηρίων. Αυτό είναι περισσότερο εμφανές για το μοντέλο max-min όπου οι αποκλίσεις στην περίπτωση των επτά κριτηρίων είναι υπερδιπλάσιες σε σχέση με τα τρία κριτήρια.

Πίνακας 4.5: Ποσοστιαίες διαφορές του δείκτη MACI σε σχέση με τον ευσταθή κανόνα ταξινόμησης (αποτελέσματα ως προς το πλήθος των κατηγοριών)

Μορφή ΣΑ	Μεθοδολογίες	2	3	4	ΜΟ
Γραμμική	Μεταβελτιστ.	−2.53	−2.20	−2.09	−2.27
	Max-min	−3.57	−2.31	−1.68	−2.52
	Κέντρο Chebyshev	−2.09	−1.78	−1.62	−1.83
	Αναλυτικό κέντρο	−0.95	−0.84	−0.71	−0.84
Μη γραμ.	Μεταβελτιστ.	−7.56	−8.78	−7.73	−8.02
	Max-min	−7.01	−6.56	−5.68	−6.43
	Κέντρο Chebyshev	−2.75	−3.38	−3.37	−3.16
	Αναλυτικό κέντρο	−1.73	−2.16	−2.18	−2.02

Η αύξηση των εναλλακτικών στο σύνολο αναφοράς έχει ισχυρή θετική επίδραση στο βαθμό εμπιστοσύνης των ταξινομήσεων, όπως φαίνεται στα αποτελέσματα του Πίνακα 4.4. Στην περίπτωση της γραμμική συνάρτησης αξίας και για σύνολα αναφοράς με 15 εναλλακτικές από κάθε κατηγορία, ο δείκτης MACI των τεσσάρων μεθοδολογιών είναι παραπλήσιος με εκείνον του ευσταθούς κανόνα (με τη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης να παρέχει ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα). Στην περίπτωση της μη γραμμική συνάρτησης αξίας, η βελτίωση που προκύπτει από τη χρήση μεγαλύτερων συνόλων αναφοράς είναι μεγαλύτερη για τη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης, το μοντέλο max-min και το κέντρο Chebyshev, ενώ αντίθετα τα αποτελέσματα που προκύπτουν με το αναλυτικό κέντρο είναι ελαφρώς χειρότερα για μεγαλύτερα σύνολα αναφοράς.

Τέλος, σε σχέση με τον αριθμό των κατηγοριών (Πίνακας 4.5), όλες οι μεθοδολογίες παρέχουν καλύτερα αποτελέσματα σε προβλήματα με τέσσερις κατηγορίες όταν χρησιμοποιείται το σωστό (γραμμικό) μοντέλο απόφασης. Αντίθετα, ότι η μορφή του μοντέλου ορίζεται με λάθος τρόπο, τότε η επίδραση του πλήθους των κατηγοριών είναι λιγότερο σαφής.

Ο Πίνακας 4.6 παρέχει μια σύνοψη των συγκρίσεων των τεσσάρων μεθοδολογιών ως προς τον δείκτη MACI. Για κάθε έναν από τους 36 συνδυασμούς των παραγόντων της πειραματικής ανάλυσης (κριτήρια, εναλλακτικές, κατηγορίες), οι διαφορές μεταξύ κάθε ζεύγους μεθοδολογιών αξιολογήθηκαν ως προς τη στατιστική τους σημαντικότητα με τον μονόπλευρο έλεγχο ζευγών t-test (σε 1% επίπεδο σημαντικότητας). Ο πίνακας παρουσιάζει το πλήθος των συνδυασμών των παραγόντων στους οποίους οι μεθοδολογίες στις σειρές έδωσαν σημαντικά καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τις μεθοδολογίες στις στήλες. Όπως φαίνεται, τα αποτελέσματα του αναλυτικού κέντρου δεν ήταν ποτέ χειρότερα σε σχέση με τις άλλες μεθοδολογίες. Μάλιστα, στην περίπτωση της γραμμική συνάρτησης αξίας, τα αποτελέσματα του αναλυτικού κέντρου ήταν καλύτερα των άλλων μεθοδολογιών σε ένα σημαντικό αριθμό συνδυασμών των εξεταζόμενων παραγόντων (10−18), κυρίως σε περιπτώσεις μικρών συνόλων αναφοράς. Στη μη γραμμικής συνάρτησης αξίας, ο αριθμός περιπτώσεων όπου το αναλυτικό κέντρο υπερείχε των άλλων μεθοδολογιών είναι ακόμα μεγαλύτερος, και πάλι όμως κυρίως για μικρά σύνολα αναφοράς (για παράδειγμα, δεν βρέθηκαν σημαντικές διαφορές σε σχέση με τα αποτελέσματα του κέντρου Chebyshev για σύνολα αναφοράς με 10−15 εναλλακτικές από κάθε κατηγορία).

Πίνακας 4.6: Διμερείς συγκρίσεις των μεθοδολογιών στον δείκτη MACI

	Μεταβελ.	**Max-min**	**Chebyshev**	**Αναλ. κέντρο**
Μεταβελ.	–	1 (2)	0 (0)	0 (0)
Max-min	2 (15)	–	0 (0)	0 (0)
Κέντρο Chebyshev	2 (31)	5 (27)	–	0 (0)
Αναλ. κέντρο	16 (30)	18 (27)	10 (15)	–

Πλήθος συνδυασμών των παραγόντων του πειραματικού σχεδιασμού στους οποίους οι μεθοδολογίες στις γραμμές υπερείχαν σημαντικά των μεθοδολογιών στις στήλες (μονόπλευρος έλεγχος ζευγών t, 1% επίπεδο σημαντικότητας). Εκτός (εντός) παρενθέσεων τα αποτελέσματα για γραμμικές (μη γραμμικές) συναρτήσεις αξιών.

Τα παραπάνω αποτελέσματα για τη σχέση μεταξύ του ευσταθούς κανόνα και των τεσσάρων εξεταζόμενων μεθοδολογιών επιβεβαιώνονται και από το ποσοστό των εναλλακτικών του δείγματος ελέγχου που για τις οποίες οι ταξινομήσεις του ευσταθούς κανόνα διαφοροποιούνται από τις ταξινομήσεις των μοντέλων απόφασης που αναπτύσσονται από τις τέσσερις μεθοδολογίες. Συγκεκριμένα, για γραμμικές συναρτήσεις αξίας, το ποσοστό αυτό είναι 3.88% για το αναλυτικό κέντρο (κατά μέσο όρο), 6.05% για το κέντρο Chebyshev, 6.78% για τη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης, και 7.08% για τη διατύπωση max-min. Στην περίπτωση των μη γραμμικών συναρτήσεων αξίας, οι αποκλίσεις είναι μεγαλύτερες (6.94% για το αναλυτικό κέντρο, 9.06% για το κέντρο Chebyshev, 13.54% για το max-min μοντέλο, και 15.46% για τη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης).

4.2.2 Οι βαθμοί παραχώρησης των κριτηρίων

Εκτός από την ανάλυση των ταξινομήσεων των μοντέλων απόφασης που αναπτύσσονται μέσω των εξεταζόμενων μεθοδολογιών εξετάστηκαν και οι εκτιμήσεις για τους βαθμούς παραχώρησης των κριτηρίων. Αξίζει να σημειωθεί ότι τρεις από τις μεθοδολογίες (μεταβελτιστοποίηση, κέντρο Chebyshev, αναλυτικό κέντρο) βασίζουν την ανάπτυξη των μοντέλων απόφασης σε κεντρικές λύσεις του εφικτού πολυέδρου. Επομένως, έχει ενδιαφέρον να γίνει σύγκριση των εκτιμήσεων που προκύπτουν για τους βαθμούς παραχώρησης τόσο σε σχέση με το πραγματικό μοντέλο απόφασης όσο και με τη κενδροειδή λύση. Για το σκοπό αυτό υπολογίστηκε η μέση απόλυτη απόκλιση μεταξύ των βαθμών παραχώρησης των κριτηρίων στις συναρτήσεις αξιών που αναπτύσσονται μέσω των τεσσάρων μεθοδολογιών, των πραγματικών παραχωρήσεων των κριτηρίων, και των παραχωρήσεων στην κεντροειδή λύση. Τα σχετικά αποτελέσματα συνοψίζονται στους Πίνακες 4.7–4.9.

Πίνακας 4.7: Μέση απόλυτη απόκλιση (σε %) σε σχέση με τους πραγματικούς συντελεστές παραχώρησης (σε παρένθεση οι αποκλίσεις από την κεντροειδή λύση), ως προς τον αριθμό των κριτηρίων

Μορφή ΣΑ	Μεθοδολογίες	3	5	7	ΜΟ
Γραμμική	Κεντροειδής λύση	4.53	4.42	3.94	4.29
	Μεταβελτιστ.	5.26 (2.79)	5.35 (3.11)	4.95 (3.37)	5.19 (3.09)

	Max-min	6.39 (4.66)	6.23 (4.88)	5.69 (4.72)	6.10 (4.76)
	Κέντρο Chebyshev	5.67 (4.00)	5.23 (3.61)	4.67 (3.27)	5.19 (3.63)
	Αναλυτικό κέντρο	5.55 (3.11)	5.02 (2.55)	4.34 (2.08)	4.97 (2.58)
Μη γραμ.	Κεντροειδής λύση	6.94	6.12	5.22	6.10
	Μεταβελτιστ.	10.21 (8.66)	8.62 (4.91)	7.66 (3.61)	8.83 (5.73)
	Max-min	8.89 (7.40)	7.77 (5.38)	6.92 (4.44)	7.86 (5.74)
	Κέντρο Chebyshev	7.07 (4.41)	6.06 (2.80)	5.14 (2.10)	6.09 (3.10)
	Αναλυτικό κέντρο	6.19 (4.19)	5.56 (2.27)	4.76 (1.48)	5.50 (2.65)

Χρησιμοποιώντας τη σωστή μορφή για το μοντέλο απόφασης (γραμμική συνάρτηση αξίας), η κεντροειδής λύση είναι αυτή που είναι πλησιέστερη στις πραγματικούς βαθμούς παραχώρησης των κριτηρίων, βάσει των οποίων έγινε η διαμόρφωση και ταξινόμηση των δεδομένων (η μέση απόλυτη απόκλιση είναι ίση με 4.29%). Μεταξύ των τεσσάρων εξεταζόμενων μεθοδολογιών καλύτερα αποτελέσματα παρέχει το αναλυτικό κέντρο, ενώ η χρήση του κέντρου Chebyshev παρέχει αποτελέσματα ελαφρώς καλύτερα από τη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης, κυρίως σε πιο σύνθετες περιπτώσεις (προβλήματα με επτά κριτήρια και 10–15 εναλλακτικές από κάθε κατηγορία), χωρίς όμως οι διαφορές μεταξύ των δύο αυτών μεθόδων να είναι στατιστικά σημαντικές (σε επίπεδο σημαντικότητας 1%, σύμφωνα με τον έλεγχο ζευγών t). Γενικά, τα αποτελέσματα του κέντρου Chebyshev φαίνεται ότι είναι συγκριτικά καλύτερα σε πιο σύνθετες περιπτώσεις. Μάλιστα, σε προβλήματα με τέσσερις κατηγορίες, τα αποτελέσματα του κέντρου Chebyshev υπερέχουν του αναλυτικού κέντρου, με τη διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 1%. Το ίδιο συμβαίνει και σε περιπτώσεις μεγαλύτερων συνόλων αναφοράς (10–15 εναλλακτικές από κάθε κατηγορία). Στον αντίποδα, τα αποτελέσματα του υποδείγματος max-min παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες αποκλίσεις από τις πραγματικές παραχωρήσεις των κριτηρίων αν και παρουσιάζουν σημαντική βελτίωση σε προβλήματα με περισσότερες κατηγορίες και μεγαλύτερα σύνολα αναφοράς.

Πίνακας 4.8: Μέση απόλυτη απόκλιση (σε %) σε σχέση με τους πραγματικούς συντελεστές παραχώρησης (σε παρένθεση οι αποκλίσεις από την κεντροειδή λύση), ως προς τον αριθμό των εναλλακτικών

Μορφή ΣΑ	Μεθοδολογίες	3	5	10	15	ΜΟ
Γραμμική	Κεντροειδής λύση	6.73	4.97	3.14	2.33	4.29
	Μεταβελτιστ.	8.30 (5.24)	5.99 (3.60)	3.73 (2.04)	2.73 (1.47)	5.19 (3.09)
	Max-min	10.58 (8.61)	7.12 (5.47)	3.83 (2.93)	2.89 (2.02)	6.10 (4.76)
	Κέντρο Chebyshev	8.53 (5.92)	6.04 (4.14)	3.52 (2.56)	2.67 (1.90)	5.19 (3.63)
	Αναλυτικό κέντρο	7.32 (3.02)	5.66 (2.87)	3.75 (2.35)	3.15 (2.08)	4.97 (2.58)
Μη γραμ.	Κεντροειδής λύση	8.45	6.80	5.10	4.03	6.10
	Μεταβελτιστ.	13.23 (7.92)	10.34 (6.63)	6.71 (4.66)	5.04 (3.69)	8.83 (5.73)
	Max-min	12.16 (8.25)	8.86 (6.56)	5.76 (4.56)	4.66 (3.60)	7.86 (5.74)
	Κέντρο Chebyshev	8.21 (3.55)	6.67 (3.38)	5.13 (2.93)	4.34 (2.54)	6.09 (3.10)
	Αναλυτικό κέντρο	7.89 (2.00)	6.08 (2.53)	4.36 (2.98)	3.69 (3.07)	5.50 (2.65)

Στην περίπτωση όπου η μορφή του μοντέλου απόφασης ορίζεται με εσφαλμένο τρόπο (μη γραμμική συνάρτηση αξίας), οι εκτιμήσεις των βαθμών παραχώρησης μέσω του αναλυτικού κέντρου παρουσιάζουν τις μικρότερες αποκλίσεις από τις πραγματικές παραχωρήσεις των κριτηρίων (η μέση απόλυτη απόκλιση είναι 5.5%). Ακολουθούν οι εκτιμήσεις του κέντρου Chebyshev και της κεντροειδούς λύσης. Στην περίπτωση αυτή, η διαδικασία μεταβελτιστοποίησης είναι εκείνη που οδηγεί σε μεγαλύτερες αποκλίσεις.

Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι συγκριτικά με τη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης και το υπόδειγμα max-min, οι εκτιμήσεις των παραχωρήσεων που προκύπτουν από τα μοντέλα του κέντρου Chebyshev και του αναλυτικού κέντρου, παρουσιάζουν σημαντικά μικρότερες αποκλίσεις από την κεντροειδή λύση (οι αποκλίσεις είναι μικρότερες για το αναλυτικό κέντρο). Η διαπίστωση αυτή επιβεβαιώνει ότι οι δύο αυτές μεθοδολογίες όντως παρέχουν αποτελέσματα που είναι κεντρικά στο εφικτό πολύεδρο. Παρόλα αυτά, όταν το εφικτό πολύεδρο είναι μεγάλο (όπως συμβαίνει, για παράδειγμα, σε σύνολα αναφοράς με μικρό αριθμό εναλλακτικών), οι αποκλίσεις από το βαρύκεντρο του πολυέδρου παρουσιά- ζονται μεγαλύτερες.

Πίνακας 4.9: Μέση απόλυτη απόκλιση (σε %) σε σχέση με τους πραγματικούς συντελεστές παραχώρησης (σε παρένθεση οι αποκλίσεις από την κεντροειδή λύση), ως προς τον αριθμό των κατηγοριών

Μορφή ΣΑ	Μεθοδολογίες	2	3	4	ΜΟ
Γραμμική	Κεντροειδής λύση	6.48	3.87	2.53	4.29
	Μεταβελτιστ.	7.93 (4.89)	4.51 (2.64)	3.11 (1.74)	5.19 (3.09)
	Max-min	10.11 (8.45)	5.10 (3.63)	3.11 (2.19)	6.10 (4.76)
	Κέντρο Chebyshev	7.97 (5.66)	4.63 (3.10)	2.97 (2.12)	5.19 (3.63)
	Αναλυτικό κέντρο	7.45 (3.86)	4.43 (2.29)	3.03 (1.59)	4.97 (2.58)
Μη γραμ.	Κεντροειδής λύση	8.64	5.66	3.99	6.10
	Μεταβελτιστ.	12.22 (7.88)	8.33 (5.50)	5.94 (3.80)	8.83 (5.73)
	Max-min	12.07 (8.59)	6.83 (5.23)	4.68 (3.40)	7.86 (5.74)
	Κέντρο Chebyshev	8.42 (3.64)	5.70 (3.24)	4.14 (2.42)	6.09 (3.10)
	Αναλυτικό κέντρο	7.49 (2.95)	5.17 (2.84)	3.85 (2.15)	5.50 (2.65)

4.2.3 Ακρίβεια ταξινόμησης

Το τελευταίο στάδιο της ανάλυσης αφορά τη συγκριτική αξιολόγηση της ακρίβειας ταξινόμησης (στο δείγμα ελέγχου) των μοντέλων που αναπτύσσονται μέσω των τεσσάρων εξεταζόμενων μεθοδολογιών. Η ακρίβεια ταξινόμησης ορίζεται ως το ποσοστό των εναλλακτικών του δείγματος ελέγχου που ταξινομούνται σωστά από ένα μοντέλο απόφασης.

Τα σχετικά αποτελέσματα συνοψίζονται στους Πίνακες 4.10–4.12.

Τα συνολικά αποτελέσματα δείχνουν ότι η ακρίβεια των μοντέλων απόφασης που αναπτύσσονται με τη διαδικασία του αναλυτικού κέντρου είναι υψηλότερη των άλλων μεθοδολογιών, ενώ ακολουθούν το κέντρο Chebyshev και το υπόδειγμα max-min. Συγκριτικά με τον ευσταθή κανόνα ταξινόμησης (Πίνακας 4.2), οι ακρίβειες των τεσσάρων μεθοδολογιών είναι συστηματικά χαμηλότερες. Ειδικότερα, για τη γραμμική συνάρτηση αξίας, οι διαφορές σε σχέση με τον ευσταθή κανόνα κυμαίνονται από 0.98% για το αναλυτικό κέντρο έως 2.75% για τη διαδικασία μεταβελτιστοποίησης. Στην περίπτωση της μη γραμμικής συνάρτησης αξίας, οι διαφορές είναι μεγαλύτερες (από 2.14% για το αναλυτικό κέντρο έως 7.65% για τη μεταβελτιστοποίηση). Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν τη σχέση μεταξύ της ευστάθειας και της ακρίβειας ταξινόμησης, η οποία διαπιστώθηκε στην ενότητα 4.1, επιβεβαιώνοντας τα αποτελέσματα των Vetschera et al. (2010).

Πίνακας 4.10: Ακρίβειες ταξινόμησης (σε %) ως προς τον αριθμό των κριτηρίων

Μορφή ΣΑ	Μεθοδολογίες	3	5	7	ΜΟ
Γραμμική	Μεταβελτιστοποίηση	93.01	90.70	88.17	90.63
	Max-min	93.50	90.46	88.04	90.66
	Κέντρο Chebyshev	93.67	91.28	89.40	91.45
	Αναλυτικό κέντρο	94.57	92.01	90.61	92.39
Μη γραμ.	Μεταβελτιστοποίηση	84.74	82.15	80.03	82.31
	Max-min	88.30	83.59	80.66	84.18
	Κέντρο Chebyshev	89.86	86.44	84.69	86.99
	Αναλυτικό κέντρο	90.27	87.27	85.90	87.82

Πίνακας 4.11: Ακρίβειες ταξινόμησης (σε %) ως προς τον αριθμό των εναλλακτικών του συνόλου αναφοράς

Μορφή ΣΑ	Μεθοδολογίες	3	5	10	15	ΜΟ
Γραμμική	Μεταβελτιστοποίηση	81.74	88.97	94.88	96.92	90.63
	Max-min	81.77	88.86	95.03	97.00	90.66
	Κέντρο Chebyshev	83.56	89.82	95.29	97.13	91.45
	Αναλυτικό κέντρο	86.21	91.05	95.49	96.82	92.39
Μη γραμ.	Μεταβελτιστοποίηση	71.08	78.84	87.71	91.59	82.31
	Max-min	74.55	81.48	88.56	92.14	84.18
	Κέντρο Chebyshev	80.14	84.73	90.07	93.04	86.99
	Αναλυτικό κέντρο	82.86	86.49	89.94	91.97	87.82

Η ακρίβεια ταξινόμησης για τα μοντέλα που αναπτύσσονται με τη διαδικασία του αναλυτικού κέντρου παρουσιάζει επιπλέον μικρότερη μεταβλητότητα (συγκριτικά με τις άλλες μεθοδολογίες) ως προς τα χαρακτηριστικά του συνόλου αναφοράς (πλήθος κριτηρίων και εναλλακτικών). Από την άλλη, παρατηρείται ότι οι υπόλοιπες μεθοδολογίες παρουσιάζουν σαφή βελτίωση, κυρίως σε περιπτώσεις όπου η ανάπτυξη του μοντέλου απόφασης βασίζεται σε σύνολα αναφοράς με μεγαλύτερο αριθμό εναλλακτικών. Μάλιστα, τόσο το υπόδειγμα max-min όσο και το κέντρο Chebyshev υπερέχουν σε περιπτώσεις όπου το σύνολο αναφοράς περιλαμβάνει 15 εναλλακτικές ανά κατηγορία (οι διαφορές στην περίπτωση της μη γραμμικής συνάρτησης αξίας είναι στατιστικά σημαντικές σε επίπεδο σημαντικότητας 1% level). Όσον αφορά, το πλήθος των κατηγοριών, η επίδρασή του είναι λιγότερο σαφής, καθώς με τη γραμμική συνάρτηση τα αποτελέσματα εμφανίζονται βελτιωμένα σε προβλήματα με περισσότερες κατηγορίες, ενώ το αντίθετο παρατηρείται στην περίπτωση του εσφαλμένου ορισμού του μοντέλου απόφασης (μη γραμμική συνάρτηση αξίας).

Πίνακας 4.12: Ακρίβειες ταξινόμησης (σε %) ως προς τον αριθμό των κατηγοριών

Μορφή ΣΑ	Μεθοδολογίες	2	3	4	ΜΟ
Γραμμική	Μεταβελτιστοποίηση	89.66	90.64	91.58	90.63
	Max-min	88.81	90.51	92.68	90.66
	Κέντρο Chebyshev	90.47	91.15	92.73	91.45
	Αναλυτικό κέντρο	91.49	92.21	93.48	92.39
Μη γραμ.	Μεταβελτιστοποίηση	84.07	81.10	81.75	82.31
	Max-min	85.55	83.00	84.00	84.18
	Κέντρο Chebyshev	89.36	85.71	85.91	86.99
	Αναλυτικό κέντρο	90.46	86.74	86.25	87.82

Ο Πίνακας 4.13 παρουσιάζει μια σύνοψη όλων των διμερών συγκρίσεων των τεσσάρων μεθοδολογιών λαμβάνοντας υπόψη τη στατιστική σημαντικότητα των διαφορών μεταξύ τους ως προς την ακρίβεια ταξινόμησης (σε επίπεδο σημαντικότητας 1%).

Πίνακας 4.13: Διμερείς συγκρίσεις των μεθοδολογιών ως προς την ακρίβεια ταξινόμησης

	Μεταβ.	Max-min	Chebyshev	Αναλ. κέντρο
Μεταβ.	–	0 (1)	0 (0)	0 (2)
Max-min	4 (19)	–	0 (0)	2 (3)
Κέντρο Chebyshev	4 (28)	3 (21)	–	0 (5)
Αναλ. κέντρο	14 (26)	13 (23)	4 (9)	–

Πλήθος συνδυασμών των παραγόντων του πειραματικού σχεδιασμού στους οποίους οι μεθοδολογίες στις γραμμές υπερείχαν σημαντικά των μεθοδολογιών στις στήλες (μονόπλευρος έλεγχος ζευγών t, 1% επίπεδο σημαντικότητας). Εκτός (εντός) παρενθέσεων τα αποτελέσματα για γραμμικές (μη γραμμικές) συναρτήσεις αξιών.

Όταν η μορφή του μοντέλου απόφασης ορίζεται σωστά (γραμμική συνάρτηση), σε 14 συνδυασμούς των παραγόντων του πειραματικού σχεδιασμού, τα αποτελέσματα του υποδείγματος που βασίζεται στο αναλυτικό κέντρο βρέθηκε να υπερέχουν της ανάλυσης μεταβελτιστοποίησης, σε 13 περιπτώσεις υπερείχαν του υποδείγματος max-min, και σε τέσσερις περιπτώσεις υπερείχαν του κέντρου Chebyshev (οι τέσσερις αυτές περιπτώσεις αφορούν σύνολα αναφοράς με τρεις εναλλακτικές από κάθε κατηγορία). Στον αντίποδα, τα αποτελέσματα του υποδείγματος max-min υπερείχαν του αναλυτικού κέντρου σε δύο περιπτώσεις (προβλήματα με τέσσερις κατηγορίες, 15 εναλλακτικές στο σύνολο αναφοράς και 3−5 κριτήρια). Στην περίπτωση της μη γραμμική συνάρτησης αξίας αυξάνει ο αριθμός των συνδυασμών των παραγόντων του πειραματικού σχεδιασμού στους οποίους τα αποτελέσματα του αναλυτικού κέντρου υπερέχουν των άλλων μεθοδολογιών, αλλά το ίδιο συμβαίνει και στην αντίθετη κατεύθυνση. Συγκεκριμένα, η διαδικασία μεταβελτιστοποίησης υπερείχε του αναλυτικού κέντρου σε δύο περιπτώσεις, το υπόδειγμα max-min model σε τρεις, ενώ το κέντρο Chebyshev υπερείχε σε πέντε. Όπως και προηγούμενα, όλες αυτές οι περιπτώσεις αφορούσαν προβλήματα πολλαπλών κατηγοριών με 15 εναλλακτικές στο σύνολο αναφοράς από κάθε κατηγορία

5 Συμπεράσματα

Στην πειραματική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε εξετάστηκε η συμπεριφορά ορισμένων τυπικών μεθοδολογιών για την ανάπτυξη ενός μοντέλου απόφασης (υπό τη μορφή μιας προσθετική συνάρτησης αξίας) από ένα σύνολο παραδειγμάτων αποφάσεων που παρέχει ο αποφασίζων σε προβλήματα πολυκριτήριας ταξινόμησης. Επιπλέον, αναπτύχθηκε και ένα νέο υπόδειγμα το οποίο βασίζεται στην έννοια του κέντρου Chebyshev ενός πολυέδρου.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι υπάρχει μια ισχυρή θετική σχέση μεταξύ της ευστάθειας ενός μοντέλου απόφασης και της έννοιας του κεντρικού σημείου του πολυέδρου που οριοθετεί τα μοντέλα απόφασης που συμβαδίζουν με τις αξιολογήσεις του αποφασίζοντος. Το στοιχείο αυτό δικαιολογεί και τα ικανοποιητικά αποτελέσματα που παρείχαν δύο τα μοντέλα που βασίζονται στον εντοπισμό κεντρικών σημείων στο πολύεδρο (αναλυτικό κέντρο και κέντρο Chebyshev). Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι η αύξηση του αριθμού των εναλλακτικών στο σύνολο αναφοράς έχει σημαντική θετική επίδραση τόσο στην ευστάθεια του μοντέλου απόφασης όσο και στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων, περιορίζοντας ταυτόχρονα την επίπτωση που έχει η χρήση διαφορετικών μεθοδολογιών για την προσαρμογή του μοντέλα στα δεδομένα. Στον αντίποδα, ο εσφαλμένος καθορισμός της μορφής του μοντέλου που περιγράφει τις προτιμήσεις του αποφασίζοντος επιδρά αρνητικά και αυξάνει τις διαφοροποιήσεις στα αποτελέσματα διαφορετικών μεθοδολογιών ανάπτυξης του μοντέλου.

Τα συμπεράσματα που προέκυψαν από αυτή την πειραματική ανάλυση συμβάλουν στην κατανόηση των χαρακτηριστικών και συγκριτικών πλεονεκτημάτων/μειονεκτημάτων διαφόρων εναλλακτικών μεθοδολογιών για την ανάπτυξη μοντέλων αποφάσεων στα πλαίσια της ΑΣΠ για προβλήματα ταξινόμησης. Η ανάλυση θα μπορούσε να επεκταθεί και σε προβλήματα μονότονης παλινδρόμησης (ordinal regression), σε άλλους τύπους πολυκριτήριων μοντέλων αποφάσεων (για παράδειγμα, σε σχέσεις υπεροχής), καθώς και σε διαφορετικές διαδικασίες ανάλυσης του συνόλων των μοντέλων που συμβαδίζουν με τα παραδείγματα αποφάσεων που παρέχει ένας αποφασίζοντας με έμφαση σε αλληλεπιδραστικές τεχνικές (Greco et al., 2011). Επιπλέον, σημαντικά συμπεράσματα μπορούν να προκύψουν από πρακτικές εφαρμογές σε δεδομένα από διάφορα πεδία, οι οποίες θα συμβάλλουν στη γενίκευση των αποτελεσμάτων της παρούσας έρευνας και την αξιοποίησή τους για τη βελτίωση της διαδικασίας υποστήριξης και λήψης αποφάσεων. Τέλος, έμφαση πρέπει να δοθεί και στην ανάπτυξη μεθοδολογιών που θα επιτρέψουν τη βελτίωση της ευστάθειας ενός μοντέλου απόφασης το οποίο αναπτύσσεται μέσω τεχνικών της ΑΣΠ. Ο συνδυασμός με πρόσφατα ερευνητικά αποτελέσματα σε άλλα συναφή πεδία όπως ο χώρος της τεχνητής νοημοσύνης θα μπορούσε επίσης να συμβάλει στην ανάπτυξη νέων ευσταθών προσεγγίσεων υποστήριξης αποφάσεων.

Βιβλιογραφία

Beuthe, M., Scannella, G., 2001. Comparative analysis of UTA multicriteria methods. European Journal of Operational Research 130 (2), 246-262.

Bous, G., Fortemps, P., Glineur, F., Pirlot, M., 2010. ACUTA: A novel method for eliciting additive value functions on the basis of holistic preference statements. European Journal of Operational Research 206 (2), 435–444.

Boyd, S., Vandenberghe, L., 2004. Convex Optimization. Cambridge University Press, Cambridge.

Dias, L., Mousseau, V., Figueira, F., Clímaco, J., 2002. An aggregation/disaggregation approach to obtain robust conclusions with ELECTRE TRI. European Journal of Operational Research 138 (2), 332–348.

Doumpos, M., Zopounidis, C., 2007. Regularized estimation for preference disaggregation in multiple criteria decision making. Computational Optimization and Applications 38 (1), 61–80.

Greco, S., Kadziński, M., Słowiński, R., 2011. Selection of a representative value function in robust multiple criteria sorting. Computers & Operations Research 38 (11), 1620–1637.

Greco, S., Mousseau, V., Słowiński, R., 2010. Multiple criteria sorting with a set of additive value functions. European Journal of Operational Research 207 (3), 1455–1470.

Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J., 2001. Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference and Prediction. Springer, New York.

Jacquet-Lagrèze, E., Siskos, J., 1982. Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision-making, the UTA method. European Journal of Operational Research 10 (2), 151–164.

Jacquet-Lagrèze, E., Siskos, Y., 2001. Preference disaggregation: 20 years of MCDA experience. European Journal of Operational Research 130 (2), 233–245.

Kadziński, M., Greco, S., Słowiński, R., 2012. Extreme ranking analysis in robust ordinal regression. Omega 40 (4), 488–501.

Kadziński, M., Tervonen, T., 2013. Stochastic ordinal regression for multiple criteria sorting problems. Decision Support Systems 55 (1), 55

Keeney, R., Raiffa, H., 1993. Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs. Cambridge University Press, Cambridge.

Kroese, D. P., Taimre, T., Botev, Z. I., 2011. Handbook of Monte Carlo Methods. Wiley, New York.

Mousseau, V., Figueira, J., Dias, L., Gomes da Silva, C., Clímaco, J., 2003. Resolving inconsistencies among constraints on the parameters of an MCDA model. European Journal of Operational Research 147 (1), 72–93.

Roy, B., 2010. Robustness in operational research and decision aiding: A multi-faceted issue. European Journal of Operational Research 200 (3), 629–638.

Siskos, Y., Grigoroudis, E., Matsatsinis, N. F., 2005. UTA methods. In: Figueira, J., Greco, S., Ehrogott, M. (Eds.), Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Springer, New York, pp. 297–334.

Tervonen, T., van Valkenhoef, G., Baştürk, N., Postmus, D., 2013. Hit-and-run enables efficient weight generation for simulation-based multiple criteria decision analysis. European Journal of Operational Research 224 (3), 552–559.

Vetschera, R., Chen, Y., Hipel, K. W., Marc Kilgour, D., 2010. Robustness and information levels in case-based multiple criteria sorting. European Journal of Operational Research 202 (3), 841–852.

Zopounidis, C., Doumpos, M., 2000. Building additive utilities for multi-group hierarchical discrimination: the M.H.Dis method. Optimization Methods and Software 14 (3), 219–240.

Zopounidis, C., Doumpos, M., 2002. Multicriteria classification and sorting methods: A literature review. European Journal of Operational Research 138 (2), 229–246.

Παραρτήματα

Παράρτημα Α: Υλοποίηση της διαδικασίας του αναλυτικού κέντρου

```
function [utils_train,utils_test,cut_off,accur_train,accur_test,cut,
    marg_utils,yhat,x,RobMeasure] = utadis_margin(data_train,data_test,
    solver_choice,n_cuts,delta,sigma,intervals_method,discrete_vars,
    modelCUTS)

     failure=0;
     data=data_train;
     [m,n]=size(data);
     n=n-1;
     xs=data(:,1:n);
     ys=data(:,n+1);
     ys(find(ys==-1))=2;
     groups=max(ys);
     cont_vars=find(ismember([1:n],discrete_vars)==0);
     st=0;
     for k=1:groups
         g(k)=length(find(ys==k));
         if k>1 & k<groups
             n1=g(k);
         else
             n1=g(k);
         end;
         if groups>2 & k>1 & k<groups
             g(k)=2*g(k);
         end
         c1(st+1:st+g(k))=1;
         st=st+g(k);
     end;
     for i=1:length(discrete_vars)
         cut(1:length(unique(xs(:,discrete_vars(i)))),discrete_vars(i))=
            unique(xs(:,discrete_vars(i)))';
         cuts(discrete_vars(i))=length(unique(xs(:,discrete_vars(i))));
     end;
         for j=1:length(cont_vars)
                 cut(1,cont_vars(j))=min(xs(:,cont_vars(j)));
                 mx=max(xs(:,cont_vars(j)));mn=min(xs(:,cont_vars(j)));
                 for i=1:n_cuts
                         cut(i+1,cont_vars(j))=prctile(xs(:,cont_vars(j)
                             ),i*(1/(n_cuts+1))*100);
                 end;
```

```
            cut(n_cuts+2,cont_vars(j))=max(xs(:,cont_vars(j)));
            cuts(cont_vars(j))=length(unique(cut(:,cont_vars(j))));
            cut(1:cuts(cont_vars(j)),cont_vars(j))=unique(cut(:,
                cont_vars(j)));
            cut(cuts(cont_vars(j))+1:size(cut,1),cont_vars(j))=inf;
end
for i=1:n
    cut(cuts(i)+1:end,i)=inf;
end
cuts(1:n)=size(modelCUTS,1);
cut=modelCUTS;
t=1;
for j=1:n
    cc=unique(cut(1:cuts(j),j));
    for i=1:cuts(j)-1
        f=find(xs(:,j)>=cc(i));
        A1(f,t)=(xs(f,j)-cc(i))/(cc(i+1)-cc(i));
        A1(find(A1(:,t)>1),t)=1;
        t=t+1;
        clear f
    end;
end;
A1=sparse(A1);
vars=size(A1,2)+groups-1+sum(g);
for k=1:groups
    if k==1
        f=find(ys==k);
        A=[-A1(f,:) ones(g(k),1) zeros(g(k),groups-2) -speye(g(k))
            zeros(g(k),sum(g(2:groups)))];
        clear f
    elseif k==groups
        f=find(ys==k);
        if groups>2
            A=[A;[A1(f,:) zeros(g(k),groups-2) -ones(g(k),1) zeros(
                g(k),sum(g(1:k-1))) -speye(g(k))]];
        else
            A=[A;[A1(f,:) -ones(g(k),1) zeros(g(k),sum(g(1:k-1))) -
                speye(g(k))]];
        end;
        clear f
    else
        f=find(ys==k);
        A=[A;[A1(f,:) zeros(g(k)/2,k-2) -ones(g(k)/2,1) zeros(g(k)
            /2,groups-k) zeros(g(k)/2,sum(g(1:k-1))) -speye(g(k)/2)
```

```
                zeros(g(k)/2,g(k)/2+sum(g(k+1:groups)))]];
            A=[A;[-A1(f,:) zeros(g(k)/2,k-1) ones(g(k)/2,1) zeros(g(k)
                /2,groups-k-1) zeros(g(k)/2,g(k)/2+sum(g(1:k-1))) -
                speye(g(k)/2) zeros(g(k)/2,sum(g(k+1:groups)))]];
            clear f
        end;
    end;
    A(:,size(A1,2)+groups:end)=[];
    nn=size(A,2);
    A=[A;[-eye(size(A1,2)) zeros(size(A1,2),groups-1)];[ones(1,size(A1
        ,2)) zeros(1,groups-1)];[-ones(1,size(A1,2)) zeros(1,groups-1)
        ]];
    b(1:sum(g),1)=-delta;
    bprime(1:sum(g),1)=-delta*1.1;
    b=[b;zeros(size(A1,2),1);1.001;-0.999];
    bprime=[bprime;-0.0001*ones(size(A1,2),1);1.0005;-0.9995];
    model.sense(1:size(A,1),1)='<';
    model.obj=-0*unifrnd(0,1,size(A,2),1);
    model.A=sparse(A);
    model.rhs=bprime;
    params.OutputFlag=0;
    result = gurobi(model,params);
    x_0=result.x;
    [x_star, H, niter] = acent_feas(A,b,x_0);
    x=x_star/sum(x_star(1:size(A1,2)));
    RobMeasure=mean(log(b(1:end-2)./sum(x_star(1:size(A1,2)))-A(1:end
        -2,:)*x));
    utils=A1*x(1:size(A1,2));
    utils_train=utils;
    cut_off=x(size(A1,2)+1:size(A1,2)+groups-1);
    a=zeros(m,1);
    for i=1:groups
        if i==1
            a(find(utils>=cut_off(1)),1)=1;
        elseif i==groups
            a(find(utils<cut_off(groups-1)),1)=groups;
        else
            a(find(utils>=cut_off(i) & utils<cut_off(i-1)),1)=i;
        end
    end
    t=0;
    for i=1:n
        nn=cuts(i);
        mu(:,i)=A1(:,t+1:t+nn-1)*x(t+1:t+nn-1);
```

```
        t=t+nn-1;
    end
    t=1;
    for i=1:n
        marg_utils(i,1)=0;
        for j=2:cuts(i)
            marg_utils(i,j)=marg_utils(i,j-1)+x(t);
            t=t+1;
        end;
    end;
    marg_utils=marg_utils';
    y_train=ys;
    clear xs data ys A1
    data=data_test;
    [m,n]=size(data);
    n=n-1;
    xs=data(:,1:n);
    ys=data(:,n+1);
    ys(find(ys==-1))=2;
     t=1;
    for j=1:n
        cc=unique(cut(1:cuts(j),j));
        for i=1:cuts(j)-1
            f=find(xs(:,j)>=cc(i));
            A1(f,t)=(xs(f,j)-cc(i))/(cc(i+1)-cc(i));
            A1(find(A1(:,t)>1),t)=1;
            t=t+1;
            clear f
        end;
    end;
    utils_test=A1*x(1:size(A1,2));
    a1=zeros(m,1);
    for i=1:groups
        if i==1
            a1(find(utils_test>=cut_off(1)),1)=1;
        elseif i==groups
            a1(find(utils_test<cut_off(groups-1)),1)=groups;
        else
            a1(find(utils_test>=cut_off(i) & utils_test<cut_off(i-1))
                ,1)=i;
        end
    end
    y_test=ys;
    kk=1;
```

```
for i=1:groups
    if ~isempty(length(find(y_train==i)))
        for j=1:groups
            accur(1,kk)=length(find(a(find(y_train==i))==j))/length
                (find(y_train==i));
            accur1(1,kk)=length(find(a1(find(y_test==i))==j))/
                length(find(y_test==i));
            if i==j
                aa(i)=accur(1,kk);
                aa1(i)=accur1(1,kk);
            end
            kk=kk+1;
        end
    end;
end;
accur(1,groups^2+1)=mean(aa(~isnan(aa)));
accur1(1,groups^2+1)=mean(aa1(~isnan(aa1)));
accur1(1,groups^2+2)=length(find(y_test==a1))/length(a1);
accur(1,groups^2+2)=length(find(y_train==a))/length(a);
accur_train=accur;
accur_test=accur1;
yhat.train=a;
yhat.test=a1;
x=x(1:size(A1,2));
```

Παράρτημα Β: Υλοποίηση του μοντέλου που βασίζεται στο κέντρο Chebyshev

```
function [utils_train,utils_test,cut_off,accur_train,accur_test,cut,
   marg_utils,yhat,x,RobMeasure] = utadis_maximumball(data_train,
   data_test,solver_choice,n_cuts,delta,sigma,verbosity,
   intervals_method,discrete_vars,modelCUTS)

    failure=0;
    data=data_train;
    [m,n]=size(data);
    n=n-1;
    xs=data(:,1:n);
    ys=data(:,n+1);
    ys(find(ys==-1))=2;
    groups=max(ys);
    cont_vars=find(ismember([1:n],discrete_vars)==0);
    st=0;
    for k=1:groups
        g(k)=length(find(ys==k));
        if k>1 & k<groups
            n1=g(k);
        else
            n1=g(k);
        end;
        if groups>2 & k>1 & k<groups
            g(k)=2*g(k);
        end
        c1(st+1:st+g(k))=1;
        st=st+g(k);
    end;
    for i=1:length(discrete_vars)
        cut(1:length(unique(xs(:,discrete_vars(i)))),discrete_vars(i))=
           unique(xs(:,discrete_vars(i)))';
        cuts(discrete_vars(i))=length(unique(xs(:,discrete_vars(i))));
    end;
    marg_utils=[];marg_utils_xs=[];
        for j=1:length(cont_vars)
                cut(1,cont_vars(j))=min(xs(:,cont_vars(j)));
                mx=max(xs(:,cont_vars(j)));mn=min(xs(:,cont_vars(j)));
        for i=1:n_cuts
                        cut(i+1,cont_vars(j))=prctile(xs(:,cont_vars(j)
                           ),i*(1/(n_cuts+1))*100);
```

```
            end;
            cut(n_cuts+2,cont_vars(j))=max(xs(:,cont_vars(j)));
            cuts(cont_vars(j))=length(unique(cut(:,cont_vars(j))));
    cut(1:cuts(cont_vars(j)),cont_vars(j))=unique(cut(:,cont_vars(j
       )));
    cut(cuts(cont_vars(j))+1:size(cut,1),cont_vars(j))=inf;
    end;
    cuts(1:n)=size(modelCUTS,1);
cut=modelCUTS;
t=1;
for j=1:n
    cc=unique(cut(1:cuts(j),j));
    for i=1:cuts(j)-1
                f=find(xs(:,j)>=cc(i));
        A1(f,t)=(xs(f,j)-cc(i))/(cc(i+1)-cc(i));
        A1(find(A1(:,t)>1),t)=1;
        t=t+1;
        clear f
            end;
    end;
A1=sparse(A1);

vars=size(A1,2)+groups-1+sum(g);
for k=1:groups
            if k==1
                f=find(ys==k);
                A=[-A1(f,:) ones(g(k),1) zeros(g(k),groups-2) -
                    speye(g(k)) zeros(g(k),sum(g(2:groups)))];
                clear f
            elseif k==groups
                f=find(ys==k);
                if groups>2
                        A=[A;[A1(f,:) zeros(g(k),groups-2) -
                            ones(g(k),1) zeros(g(k),sum(g(1:k
                            -1))) -speye(g(k))]];
                else
                        A=[A;[A1(f,:) -ones(g(k),1) zeros(g(k),
                            sum(g(1:k-1))) -speye(g(k))]];
                end;
        clear f
            else
                f=find(ys==k);
        A=[A;[A1(f,:) zeros(g(k)/2,k-2) -ones(g(k)/2,1) zeros(g(k)
           /2,groups-k) zeros(g(k)/2,sum(g(1:k-1))) -speye(g(k)/2)
```

```
                zeros(g(k)/2,g(k)/2+sum(g(k+1:groups)))]];
            A=[A;[-A1(f,:) zeros(g(k)/2,k-1) ones(g(k)/2,1) zeros(g(k)
               /2,groups-k-1) zeros(g(k)/2,g(k)/2+sum(g(1:k-1))) -
               speye(g(k)/2) zeros(g(k)/2,sum(g(k+1:groups)))]];
            clear f
                end;
        end;
        nn=size(A,1);
    A=[A;[ones(1,size(A1,2)) zeros(1,size(A,2)-size(A1,2))]];
    A(:,size(A1,2)+groups:end)=[];
        A=[A;[-eye(size(A1,2)) zeros(size(A1,2),groups-1)]];
        sumsq=sum(A.^2,2);
        A=[A sqrt(sumsq)];
        A(nn+1,end)=0;
        vars=size(A,2);
        lb=zeros(vars,1);
        ub(1:vars,1)=inf;
        c=zeros(1,size(A,2));
        c(end)=-1;
        b(1:sum(g),1)=0;
        b=[b;1;zeros(size(A1,2),1)];
        if verbosity==1; fprintf('Solving␣initial␣LP␣problem...'); end
        model.sense(1:size(A,1),1)='<';
    model.sense(nn+1,1)='=';
        model.obj=c;
        model.A=A;
        model.rhs=b;
        model.lb=lb;
        model.ub=ub;
        params.OutputFlag=0;
        result = gurobi(model,params);
        if strcmp(result.status,'OPTIMAL')==1
                if verbosity==1; fprintf('Solution␣found\n');end
                        x=result.x;
                else
                        if verbosity==1; fprintf('OPTIMIZATION␣FAILED\n
                           ');end
                        failure=1;
                end;
        end;
    obj=c*x;
    RobMeasure=-obj;
        utils=A1*x(1:size(A1,2));
    cut_off=x(size(A1,2)+1:size(A1,2)+groups-1);
```

```
a=zeros(m,1);
for i=1:groups
    if i==1
        a(find(utils>=cut_off(1)),1)=1;
    elseif i==groups
        a(find(utils<cut_off(groups-1)),1)=groups;
    else
        a(find(utils>=cut_off(i) & utils<cut_off(i-1)),1)=i;
            end
    end
ss=sum(x(1:size(A1,2)));
    utils=utils/ss;
    cut_off=cut_off/ss;
    x(1:size(A1,2)+groups-1)=x(1:size(A1,2)+groups-1)/ss;
    utils_train=utils;
    t=0;
    for i=1:n
            nn=cuts(i);
            mu(:,i)=A1(:,t+1:t+nn-1)*x(t+1:t+nn-1);
            t=t+nn-1;
    end
    t=1;
    for i=1:n
            marg_utils(i,1)=0;
            for j=2:cuts(i)
                    marg_utils(i,j)=marg_utils(i,j-1)+x(t);
                    t=t+1;
            end;
    end;
    marg_utils=marg_utils';
    y_train=ys;
    clear xs data ys A1
    data=data_test;
    [m,n]=size(data);
    n=n-1;
    xs=data(:,1:n);
    ys=data(:,n+1);
    ys(find(ys==-1))=2;
    t=1;
    for j=1:n
            cc=unique(cut(1:cuts(j),j));
            for i=1:cuts(j)-1
                    f=find(xs(:,j)>=cc(i));
        A1(f,t)=(xs(f,j)-cc(i))/(cc(i+1)-cc(i));
```

```
            A1(find(A1(:,t)>1),t)=1;
            t=t+1;
            clear f
                end;
        end;
        utils_test=A1*x(1:size(A1,2));
        a1=zeros(m,1);
        for i=1:groups
                if i==1
                        a1(find(utils_test>=cut_off(1)),1)=1;
                elseif i==groups
                        a1(find(utils_test<cut_off(groups-1)),1)=groups
                            ;
                else
                        a1(find(utils_test>=cut_off(i) & utils_test<
                            cut_off(i-1)),1)=i;
                end
        end

    y_test=ys;
    kk=1;
    for i=1:groups
        if ~isempty(length(find(y_train==i)))
            for j=1:groups
                accur(1,kk)=length(find(a(find(y_train==i))==j))/length
                    (find(y_train==i));
                accur1(1,kk)=length(find(a1(find(y_test==i))==j))/
                    length(find(y_test==i));
                if i==j
                    aa(i)=accur(1,kk);
                    aa1(i)=accur1(1,kk);
                end
                kk=kk+1;
            end
        end;
    end;
    accur(1,groups^2+1)=mean(aa(~isnan(aa)));
    accur1(1,groups^2+1)=mean(aa1(~isnan(aa1)));
    accur1(1,groups^2+2)=length(find(y_test==a1))/length(a1);
    accur(1,groups^2+2)=length(find(y_train==a))/length(a);
    accur_train=accur;
    accur_test=accur1;
    yhat.train=a;
    yhat.test=a1;
```

```
x=x(1:size(A1,2))/sum(x(1:size(A1,2)));
```

Παράρτημα Γ: Παραγωγή τυχαίων δεδομένων

```
clear
clc
folder='c:\data\';
CRITERIA=[3 5 7];
ALTERNATIVES=[3 5 10 15];
CLASSES=[2 3 4];
RUNS=100;
epsilon=0.01;

N=1;
for S1=1:size(CRITERIA,2)
    clear mus
    for S2=1:size(ALTERNATIVES,2)
        for S3=1:size(CLASSES,2)
            M=200;
            for S5=1:RUNS
                sigma=unifrnd(0,0.2,CRITERIA(S1));
                sigma=triu(sigma)+triu(sigma,1)';
                for i=1:CRITERIA(S1)
                    sigma(i,i)=1;
                end
                mincutrange=0;
                while mincutrange<epsilon
                    xstr=mvnrnd(zeros(1,CRITERIA(S1)),sigma,1000);
                    xsts=mvnrnd(zeros(1,CRITERIA(S1)),sigma,1000);
                    F_linear=generate_random_AVF(CRITERIA(S1),0,[0 1]);
                    F_nonlinear=generate_random_AVF(CRITERIA(S1),2,[0
                        1]);
                    scores_linear=calculate_scores(xstr,F_linear);
                    scores_nonlinear=calculate_scores(xstr,F_nonlinear)
                        ;
                    scores_linear_test=calculate_scores(xsts,F_linear);
                    scores_nonlinear_test=calculate_scores(xsts,
                        F_nonlinear);
                    cutoffs_linear=[-Inf;zeros(CLASSES(S3)-1,1);Inf];
                    cutoffs_nonlinear=[-Inf;zeros(CLASSES(S3)-1,1);Inf
                        ];
                    if CLASSES(S3)==2
                        cutoffs_linear(2:CLASSES(S3))=prctile(
                            scores_linear,50);
                        cutoffs_nonlinear(2:CLASSES(S3))=prctile(
                            scores_nonlinear,50);
```

```
        elseif CLASSES(S3)==3
            cutoffs_linear(2:CLASSES(S3))=prctile(
                scores_linear,[30 70]);
            cutoffs_nonlinear(2:CLASSES(S3))=prctile(
                scores_nonlinear,[30 70]);
        else
            cutoffs_linear(2:CLASSES(S3))=prctile(
                scores_linear,[20 50 80]);
            cutoffs_nonlinear(2:CLASSES(S3))=prctile(
                scores_nonlinear,[20 50 80]);
        end
        if CLASSES(S3)>2
            mincutrange=min(cutoffs_linear(3:CLASSES(S3))-
                cutoffs_linear(2:CLASSES(S3)-1));
            mincutrange=min([mincutrange;cutoffs_nonlinear
                (3:CLASSES(S3))-cutoffs_nonlinear(2:CLASSES
                (S3)-1)]);
        else
            mincutrange=1;
        end
    end
    F_linear.thresholds=cutoffs_linear;
    F_nonlinear.thresholds=cutoffs_nonlinear;
    xtrain.linear=[];
    xtest.linear=[];
    xtrain.nonlinear=[];
    xtest.nonlinear=[];
    ytrain.linear=[];
    ytest.linear=[];
    ytrain.nonlinear=[];
    ytest.nonlinear=[];
    for k=1:CLASSES(S3)
        aa=find(scores_linear>cutoffs_linear(k)+epsilon &
            scores_linear<cutoffs_linear(k+1)-epsilon);
        ff=randperm(length(aa),ALTERNATIVES(S2));
        xtrain.linear=[xtrain.linear;xstr(aa(ff),:)];
        ytrain.linear=[ytrain.linear;(CLASSES(S3)-(k-1))*
            ones(ALTERNATIVES(S2),1)];
        aa=find(scores_linear_test>cutoffs_linear(k)+
            epsilon & scores_linear_test<cutoffs_linear(k
            +1)-epsilon);
        ff=randperm(length(aa),50);
        xtest.linear=[xtest.linear;xsts(aa(ff),:)];
        ytest.linear=[ytest.linear;(CLASSES(S3)-(k-1))*ones
```

```
                (50,1)];

            aa=find(scores_nonlinear>cutoffs_nonlinear(k)+
                epsilon & scores_nonlinear<cutoffs_nonlinear(k
                +1)-epsilon);
            ff=randperm(length(aa),ALTERNATIVES(S2));
            xtrain.nonlinear=[xtrain.nonlinear;xstr(aa(ff),:)];
            ytrain.nonlinear=[ytrain.nonlinear;(CLASSES(S3)-(k
                -1))*ones(ALTERNATIVES(S2),1)];
            aa=find(scores_nonlinear_test>cutoffs_nonlinear(k)+
                epsilon & scores_nonlinear_test<
                cutoffs_nonlinear(k+1)-epsilon);
            ff=randperm(length(aa),50);
            xtest.nonlinear=[xtest.nonlinear;xsts(aa(ff),:)];
            ytest.nonlinear=[ytest.nonlinear;(CLASSES(S3)-(k-1)
                )*ones(50,1)];

        end
        fname=strcat(folder,num2str(CRITERIA(S1)),'-',num2str(
            ALTERNATIVES(S2)),'-',num2str(CLASSES(S3)),'-',
            num2str(S5),'.mat');
        AVF.linear=F_linear;
        AVF.nonlinear=F_nonlinear;
        save(fname,'xtrain','xtest','ytrain','ytest','AVF');
        if abs(round(N/100)-N/100)==0
            fprintf('Finished␣%6.0f␣simulations\n',N)
        end
        N=N+1;
    end
  end
 end
end
clear
```

Παράρτημα Δ: Προσομοίωση συναρτήσεων αξιών από το σύνολο των εφικτών λύσεων

```
clear
clc
delta=0.001;
S=5000;
folder='c:\data\';
CRITERIA=[3 5 7];
ALTERNATIVES=[3 5 10 15];
CLASSES=[2 3 4];
RUNS=100;
weight_bounds=[0 1];
%N=1;
for LINEAR=1:1
    for S1=1:size(CRITERIA,2)
        for S2=1:size(ALTERNATIVES,2)
            for S3=1:size(CLASSES,2)
                for S4=1:1
                    for S5=1:RUNS
                        if LINEAR==1
                            fprintf('Processing␣LINEAR,␣CRITERIA␣=%2.0f
                                ,␣ALTERNATIVES␣=%2.0f,␣CLASSES␣=%2.0f,␣
                                RUN␣=%3.0f\n',CRITERIA(S1),ALTERNATIVES
                                (S2),CLASSES(S3),S5);
                        else
                            fprintf('Processing␣NONLINEAR,␣CRITERIA␣
                                =%2.0f,␣ALTERNATIVES␣=%2.0f,␣CLASSES␣
                                =%2.0f,␣RUN␣=%3.0f\n',CRITERIA(S1),
                                ALTERNATIVES(S2),CLASSES(S3),S5);
                        end
                        fname=strcat(folder,num2str(CRITERIA(S1)),'-',
                            num2str(ALTERNATIVES(S2)),'-',num2str(
                            CLASSES(S3)),'-',num2str(S5),'.mat');
                        load(fname);
                        if LINEAR==1;
                            xs=xtrain.linear;
                            ys=ytrain.linear;
                            xs_test=xtest.linear;
                            ncuts=size(AVF.linear.CUTS,1);
                            simulAVF.CUTS=AVF.linear.CUTS;
                        else
                            xs=xtrain.nonlinear;
```

```
    ys=ytrain.nonlinear;
    xs_test=xtest.nonlinear;
    ncuts=size(AVF.nonlinear.CUTS,1);
    simulAVF.CUTS=AVF.nonlinear.CUTS;
end
[m,n]=size(xs);
groups=max(ys);
ycoded= full(ind2vec(ys'))';
mgroups=sum(ycoded);
Wbounds=repmat([0.01 1],n,1);
minW=sum(Wbounds(:,1));

t=1;
codedxs=[];
codedxs_test=[];
for j=1:CRITERIA(S1)
    if LINEAR==1
        cc=unique(AVF.linear.CUTS(:,j));
    else
        cc=unique(AVF.nonlinear.CUTS(:,j));
    end
    for i=1:ncuts-1
        f=find(xs(:,j)>=cc(i));
        f1=find(xs_test(:,j)>=cc(i));
        codedxs(f,t)=(xs(f,j)-cc(i))/(cc(i+1)-
           cc(i));
        codedxs_test(f1,t)=(xs_test(f1,j)-cc(i)
           )/(cc(i+1)-cc(i));
        codedxs(find(codedxs(:,t)>1),t)=1;
        codedxs_test(find(codedxs_test(:,t)>1),
           t)=1;
        t=t+1;
        clear f f1
    end;
end;

for k=1:groups
    if k==1
        f=find(ys==k);
        A=[-codedxs(f,:) ones(ALTERNATIVES(S2)
           ,1) zeros(ALTERNATIVES(S2),groups
           -2)];
        clear f
    elseif k==groups
```

```
            f=find(ys==k);
            if groups>2
                A=[A;[codedxs(f,:) zeros(
                    ALTERNATIVES(S2),groups-2) -
                    ones(ALTERNATIVES(S2),1)]];
            else
                A=[A;[codedxs(f,:) -ones(
                    ALTERNATIVES(S2),1)]];
            end;
            clear f
        else
            f=find(ys==k);
            A=[A;[codedxs(f,:) zeros(ALTERNATIVES(
                S2),k-2) -ones(ALTERNATIVES(S2),1)
                zeros(ALTERNATIVES(S2),groups-k)]];
            A=[A;[-codedxs(f,:) zeros(ALTERNATIVES(
                S2),k-1) ones(ALTERNATIVES(S2),1)
                zeros(ALTERNATIVES(S2),groups-k-1)
                ]];
            clear f
        end;
    end
    nconstr=size(A,1);

    A=[A;[ones(1,size(codedxs,2)) zeros(1,groups-1)
        ]];

    A(1:nconstr,1:size(codedxs,2)-1)=A(1:nconstr,1:
        size(codedxs,2)-1)-repmat(A(1:nconstr,size(
        codedxs,2)),1,size(codedxs,2)-1);
    b=[];
    b(1:nconstr,1)=-delta-A(1:nconstr,size(codedxs
        ,2));
    A(:,size(codedxs,2))=[];
    A=[A;-eye(size(A,2))];
    b=[b;1;zeros(size(A,2),1)];

    options = optimset;
    options = optimset(options,'Display', 'off');
    x = linprog(zeros(size(A,2),1),A,b
        ,[],[],[],[],[],options);
    tic;
    simulation_mvs = cprnd(S,A,b,x);
    dt=toc;
```

```
simulation_mvs=[simulation_mvs(:,1:size(codedxs
    ,2)-1) 1-sum(simulation_mvs(:,1:size(
    codedxs,2)-1),2) simulation_mvs(:,size(
    codedxs,2):end)];

V=codedxs_test*simulation_mvs(:,1:size(codedxs
    ,2))';
cutoffs=simulation_mvs(:,size(codedxs,2)+1:end)
    ;
yhat=zeros(size(codedxs_test,1),S);
for k=1:S
    [nn,yhat(:,k)] = histc(V(:,k),[-inf;sort(
        cutoffs(k,:)');inf]);
end
yhat=groups+1-yhat;

if LINEAR==1
    LINEAR_results.CPUtime=dt;
    LINEAR_results.centroidAVF=mean(
        simulation_mvs)';
    LINEAR_results.CV=mean(std(simulation_mvs
        (:,1:size(codedxs,2)))./LINEAR_results.
        centroidAVF(1:size(codedxs,2))');
    simulAVF.MVS=LINEAR_results.centroidAVF;
    V=codedxs_test*LINEAR_results.centroidAVF
        (1:size(codedxs_test,2));
    [nn,yhattest] = histc(V,[-inf;sort(
        LINEAR_results.centroidAVF(size(
        codedxs_test,2)+1:end));inf]);
    yhattest=groups+1-yhattest;
    LINEAR_results.centroidclass=yhattest;
    LINEAR_results.relative_volume=0;
    LINEAR_results.RAI=histc(yhat',1:groups)'/S
        ;
    LINEAR_results.HHI=mean((sum(LINEAR_results
        .RAI.^2,2)-1/groups)/(1-1/groups));
    xx=-nansum(LINEAR_results.RAI.*log(
        LINEAR_results.RAI),2)/log(groups);
    LINEAR_results.entrory=mean(xx);
    [LINEAR_results.robust_prob,LINEAR_results.
        robust_assignment]=max(LINEAR_results.
        RAI,[],2);
    LINEAR_results.assignment_range=[min(yhat
        ,[],2) max(yhat,[],2)];
```

```
                    save(fname,'xtrain','xtest','ytrain','ytest
                        ','AVF','LINEAR_results');
                else
                    NONLINEAR_results.CPUtime=dt;
                    NONLINEAR_results.centroidAVF=mean(
                        simulation_mvs)';
                    simulAVF.MVS=NONLINEAR_results.centroidAVF;
                    V=calculate_scores(xtrain.nonlinear,
                        simulAVF);
                    for k=1:groups
                        mxmn(k,1:2)=[max(V(ys==k)) min(V(ys==k)
                            )];
                    end
                    limits=[inf;(mxmn(1:groups-1,2)+mxmn(2:
                        groups,1))/2;-inf];
                    V=calculate_scores(xtest.nonlinear,simulAVF
                        );
                    yhattest=ones(size(xtest.nonlinear,1),1);
                    for k=2:groups;
                        yhattest(V>=limits(k+1) & V<limits(k)
                            ,1)=k;
                    end
                    NONLINEAR_results.centroidclass=yhattest;
                    NONLINEAR_results.relative_volume=100*S/t;
                    fprintf('       Relative volume %3.1f\n',
                        NONLINEAR_results.relative_volume);
                    NONLINEAR_results.RAI=histc(yhat',1:groups)
                        '/S;
                    xx=-nansum(NONLINEAR_results.RAI.*log(
                        NONLINEAR_results.RAI),2)/log(groups);
                    NONLINEAR_results.entrory=mean(xx);
                    [NONLINEAR_results.robust_prob,
                        NONLINEAR_results.robust_assignment]=
                        max(NONLINEAR_results.RAI,[],2);
                    NONLINEAR_results.assignment_range=[min(
                        yhat,[],2) max(yhat,[],2)];
                    save(fname,'xtrain','xtest','ytrain','ytest
                        ','AVF','LINEAR_results','
                        NONLINEAR_results');
                end
            end
        end
    end
end
```

```
    end
end
clear
```