Volume 4 No 2 Desember (2021)

e-ISSN: **2615-3270**

p-ISSN: **2615-3599**

Eigen Mathematics Journal

Homepage jurnal: http://eigen.unram.ac.id

The Power Graph of a Dihedral Group

Evi Yuniartika Asmarani[a], Abdul Gazir Syarifudin[b], I Gede Adhitya Wisnu Wardhana*[c], Ni Wayan Switrayni[d]

[a]Universitas Mataram, Jl. Majapahit No 62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: eviyuniartikaas@gmail.com
[b]Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesa No 10, Bandung, 40132, Indonesia. Email: 20121015@mahasiswa.itb.ac.id
[c]Universitas Mataram, Jl. Majapahit No 62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: adhitya.wardhana@unram.ac.id
[d]Universitas Mataram, Jl. Majapahit No 62, Mataram, 83125, Indonesia. Email: niwayanswitrayni@unram.ac.id

ABSTRACT

Graph theory is one of the topics in mathematics that is quite interesting to study because it is applicable and can be combined with other mathematical topics such as group theory. The combination of graph theory and group theory is that graphs can be used to represent a group. An example of a graph is a power graph. A power graph of the group G is defined as a graph whose vertex set is all elements of G and two distinct vertices a and b are connected if and only if $a^x = b$ or *$b^y = a$ for a positive integer x and y. In this study, the author discusses the power graph of the dihedral group D_{2n}. The results obtained from this study are the power graph of the dihedral group D_{2n} where $n = p^m$ with p prime numbers and an m natural number is a graph consisting of two non-disjoint subgraphs, namely complete subgraphs and star subgraphs. And we find that its radius and diameter are 1 and 2.*

Keywords: *power graph, dihedral group, complete subgraph, star subgraph*

ABSTRAK

Teori graf merupakan salah satu topik dalam matematika yang cukup menarik untuk dikaji karena bersifat aplikatif dan dapat dikombinasikan dengan topik matematika lainnya seperti teori grup. Bentuk kombinasi antara teori graf dan grup adalah graf dapat digunakan untuk merepresentasikan suatu grup. Salah satu contoh graf adalah graf pangkat. Graf pangkat dari grup G didefinisikan sebagai graf yang himpunan titiknya adalah semua elemen dari G dan dua titik berbeda a dan b terhubung jika dan hanya jika $a^x = b$ atau $b^y = a$ untuk suatu x dan y bilangan bulat positif. Pada penelitian ini, penulis membahas graf pangkat dari grup dihedral D_{2n}. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka dan melakukan analisis terhadap pola yang terbentuk dari beberapa

* Corresponding author.
Alamat e-mail: *adhitya.wardhana@unram.ac.id*

contoh grup dihedral D_{2n}. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} dimana $n = p^m$ dengan p bilangan prima dan suatu m bilangan asli adalah graf yang terdiri dari dua subgraf yang tidak disjoint yaitu berupa subgraf lengkap dan subgraf bintang dengan radius dan diameter berturut-turut adalah 1 dan 2.

Keywords: graf pangkat, grup dihedral, subgraf lengkap, subgraf bintang

Diserahkan: 24-09-2021; Diterima: 12-01-2022; Doi: https://doi.org/10.29303/emj.v4i2.117

1. Pendahuluan

Teori grup dan teori graf merupakan dua pokok pembahasan dalam matematika yang sering dikombinasikan pada suatu penelitian. Bentuk kombinasi tersebut adalah graf digunakan sebagai representasi suatu grup. Grup dihedral D_{2n} merupakan salah satu jenis grup yang menarik untuk dibahas bentuk representasinya. Grup dihedral merupakan grup simetri dari polygon beraturan yang terdiri dari unsur rotasi dan unsur refleksi. Kemudian terdapat banyak jenis graf sebagai hasil representasi suatu grup yang telah didefinisikan sebelumnya, salah satunya adalah graf pangkat

Peneltian ini berfokus pada jenis graf yang dibentuk oleh graf pangkat dari grup dihedral D_{2n}. Kemudin menentukan derajat, radius, dan diameter graf pangkat dari grup dihedral D_{2n}.

Terdapat beberapa penelitian sebelumnya yang membahas graf pangkat dari suatu grup atau semigrup. Keralev dan Quinn (2002) mendefinisikan graf pangkat berarah dari semigrup. Kemudian pada tahun 2009, Chakrabarty, dkk., mendefiniskan graf pangkat tak berarah $\mathcal{G}(S)$ dari semigrup S sebagai graf tak berarah yang himpunan simpulnya adalah S dan dua simpul $u, v \in S$ bertetangga jika dan hanya jika $u \neq v$ dan $u^m = v$ atau $v^m = u$ untuk suatu bilangan bulat positif m. Grup dihedral sendiri sudah menjadi struktur yang menarik untuk diteliti representasi grafnya, seperti graf koprima (Juliana et al., 2020) (Syarifudin et al., 2021) (Nurhabibah et al., 2021), graf non-koprima (Masriani et al., 2020) (Misuki et al., 2021).

Berikut beberapa definisi dan teorema yang mendasari penelitian ini.

Definisi 1.1 (Dummit dan Foote, 2004)
Grup G dikatakan grup dihedral dengan order $2n,\ n \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$, adalah grup yang dibangun oleh dua elemen $a, b \in G$ yang dinotasikan dengan

$$G = \langle a, b | a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

Dari definisi mudah dilihat bahwa grup dihedral memiliki order $2n$, sehingga grup dihedral dengan $2n$ elemen dinotasikan dengan D_{2n}. Grup D_{2n} dapat didaftarkan anggotanya sebagai himpunan yaitu $D_{2n} = \{e, a, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$.

Teorema 1.1 (Syarifudin, 2020)
Misalkan D_{2n} grup dihedral. Untuk bilangan asli u dengan $u \leq n$, berlaku $ba^{n-u} = a^u b$.

Sebagai catatan, unsur $a^k b$ dinamakan unsur refleksi dan berdasarkan Teorema 1.1, unsur refleksi memiliki invers dirinya sendiri.

Definisi 1.2 (Munir, 2010)
Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul.

Definisi 1.3 (Chelvam dan Sattanathan, 2013)
Graf pangkat dari grup G didefinisikan sebagai graf yang himpunan simpulnyanya adalah semua elemen dari G dan dua simpul berbeda a dan b bertetangga jika dan hanya jika $a^x = b$ atau $b^y = a$ untuk suatu x dan y bilangan bulat positif.

Definisi 1.4 (Munir, 2010)
Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n.

Definisi 1.5 (Munir, 2010)
Derajat suatu simpul pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Dinotasikan sebagai $deg(a)$ untuk suatu a sebarang simpul.

Definisi 1.6 (Abdussakir, 2017)
Eksentrisitas titik v di G, dinotasikan dengan $e(v)$ adalah jarak terjauh dari titik v ke semua titik di G. Jadi dapat dituliskan $e(v) = \max\{d(u,v)|u \in V(G)\}$.

Definisi 1.7 (Abdussakir, 2017)
Radius dari G, dinotasikan dengan $rad(G)$, adalah eksentrisitas minimum dari semua titik di G. Jadi, dapat dituliskan $rad(G) = \min\{e(v)|v \in V\}$.

Definisi 1.8 (Abdussakir, 2017)
Diameter dari G, dinotasikan dengan $diam(G)$, adalah eksentrisitas maksimum dari semua titik di G. Jadi, dapat dituliskan $diam(G) = \max\{e(v)|v \in V\}$.

Teorema 1.2 (Chakrabarty, dkk., 2009)
Misalkan G grup berhingga. Maka graf pangkat dari G adalah graf lengkap jika dan hanya jika G adalah grup siklik order 1 atau p^m, untuk p prima dan $m \in \mathbb{N}$.

2. Metode

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka dan melakukan analisis terhadap bentuk graf yang terbentuk, kemudian membangun konjektur bentuk graf tersebut. Kemudian konjektur tersebut dibuktikan, sehingga didapatkan sebuah teorema baru.

3. Hasil dan Pembahasan

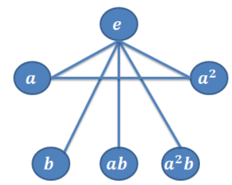
3.1 Graf pangkat dari grup dihedral $D_{2.3}$

Dalam menentukan representasi graf dari grup dihedral $D_{2.3} = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$, dibuat tabel berikut

Tabel 3.1.1 Pangkat dari anggota grup dihedral $D_{2.3}$

Pangkat	e	a	a^2	b	ab	a^2b
1	e	a	a^2	b	ab	a^2b
2	e	a^2	a	e	e	e
3	e	e	e	b	ab	a^2b

Berdasarkan tabel 3.1.1 diperoleh bentuk graf dibawah ini



Gambar 3.1.1 Graf pangkat dari grup dihedral $D_{2.3}$

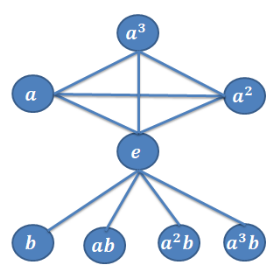
3.2 Graf pangkat dari grup dihedral $D_{2.4}$

Dalam menentukan representasi graf dari grup dihedral $D_{2.4} = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ dibuat table berikut

Tabel 3.2.1 Pangkat dari anggota grup dihedral $D_{2.4}$

Pangkat	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
2	e	a^2	e	a^2	e	e	e	e
3	e	a^3	a^2	a	b	ab	a^2b	a^3b
4	e	e	e	e	e	e	e	e

Berdasarkan tabel 3.2.1 diperoleh bentuk graf dibawah ini



Gambar 3.2.1 Graf pangkat dari grup dihedral $D_{2.4}$

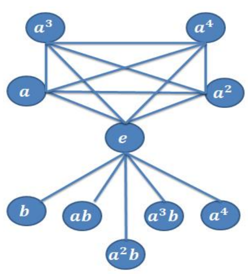
3.3 Graf pangkat dari grup dihedral $D_{2.5}$

Dalam menentukan representasi graf dari grup dihedral $D_{2.5} = \{e, a, a^2, a^3, a^4, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b\}$, dibuat tabel berikut

Tabel 3.3.1 Pangkat dari anggota grup dihedral $D_{2.5}$

Pangkat	e	a	a^2	a^3	a^4	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
1	e	a	a^2	a^3	a^4	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
2	e	a^2	a^4	a	a^3	e	e	e	e	e
3	e	a^3	a	a^4	a^2	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b
4	e	a^4	a^3	a^2	a	e	e	e	e	e
5	e	e	e	e	e	b	ab	a^2b	a^3b	a^4b

Berdasarkan tabel 3.3.1 diperoleh bentuk graf dibawah ini



Gambar 3.3.1 Graf pangkat dari grup dihedral $D_{2.5}$

3.4 Graf pangkat dari grup dihedral secara umum

Berdasarkan beberapa kasus yang didapatkan, akan diberikan beberapa hasil secara umum.

Teorema 3.1

Graf pangkat dari grup dihedral adalah graf terhubung.

Bukti:
Karena grup dihedral adalah grup hingga, maka untuk setiap $x, y \in D_{2n}$ maka senantiasa terdapat $k, l \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku $y^l = x^k = e$. Artinya senenatiasa terdapat lintasan $y - e - x$. Untuk sebarang $x, y \in D_{2n}$. Jadi graf pangkat dari grup dihedral senantiasa merupakan graf terhubung. ■

Untuk kasus n suatu bilangan pangkat prima, didapatakan bentuk graf merupakan kombinasi graf lengkap dan graf bintang.

Teorema 3.2

Jika $n = p^m$ dengan p bilangan prima dan suatu m bilangan asli, maka graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} memiliki dua subgraf yang tidak disjoint yaitu subgraf lengkap dan subgraf bintang.

Bukti:
Misalkan $D_{2n} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$, grup dihedral dengan $n = p^m$dimana p bilangan prima dan suatu m bilangan asli. Partisi grup menjadi tiga subhimpunan partisi, yaitu $V_1 = \{e\}$, $V_2 = \{a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$, dan $V_3 = \{b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}$. Perhatikan bahwa $V_1 \cup V_2$ merupakan subgrup siklik dari D_{2n} yang dibangun oleh a dengan $|V_1 \cup V_2| = n$, sehingga berdasarkan teorema 1.2 maka graf pangkat yang dibentuk oleh V_1dan V_2 adalah graf lengkap. Kemudian perhatikan partisi V_1 dan V_3 , berdasarkan teorema 1.1 maka $b.a^k = a^{n-k}b$ dan $b^{-1} = b$, akibatnya $x^2 = (a^k b)(a^k b) = a^k b.a^k b = a^k a^{n-k} bb = a^{n+k-k} bb = a^n = e$, sehingga didapat $x = a^k b, k \in \{1, \dots., n-1\}$ adalah unsur refleksi. Hal ini berarti semua anggota di V_3 memiliki orde 2 dan inversnya adalah dirinya sendiri yang berakibat hasil pangkat dari anggota-anggota V_3 adalah dirinya sendiri atau e. Dan untuk sembarang a^k dengan $1 \le k \le n-1$ adalah suatu pangkat dari a yang berarti bukan merupakan suatu pangkat dari anggota-anggota V_3. Jadi berdasarkan definisi graf pangkat, semua anggota partisi V_3 hanya beretetangga dengan e (anggota partisi V_1) sehinga terbentuk graf bipartit lengkap, kemudian karena V_1 hanya terdiri dari satu simpul maka disebut graf bintang. Sehingga diperoleh bahwa graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} dimana $n = p^m$ dengan p bilangan prima dan suatu m bilangan asli adalah graf yang terdiri dari dua subgraf yang tidak disjoint yaitu berupa subgraf lengkap dan subgraf bintang. ■

Sebagai contoh, graf pangkat $D_{2.5}$ pada Gambar 3.3.1 memiliki subgraph lengkap dengan simpul-simpul $\{e, a, a^2, a^3, a^4\}$ dan subgraph bintang dengan simpul-simpul $\{e, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b\}$.

Derajat dari setiap simpul graf pangkat atas grup dihedral diberikan pada teorema berikut

Teorema 3.3

Derajat simpul graf pangkat dari grup dihedral adalah

a. $\deg(e) = 2n - 1$
b. $\deg(a^i) = n - 1$ untuk setiap $i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n - 1$
c. $\deg(a^j b) = 1$ untuk setiap $j \in \mathbb{Z},\ 0 \leq i \leq n - 1$

Bukti:
Misalkan $D_{2n} = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, \dots, a^{n-1}b\}$, grup dihedral dengan $n = p^m$ dimana p bilangan prima dan suatu m bilangan asli. Berdasarkan teorema 3.2 diketahui bahwa graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} adalah graf yang terdiri dari dua subgraf yang tidak disjoint yaitu subgraf lengkap dan subgraf bintang dimana partisi $V_1 = \{e\}$ dengan jumlah anggota 1, $V_2 = \{a^i\}$ dengan jumlah anggota $n - 1$, dan $V_3 = \{a^j b\}$ dengan jumlah anggota n. Mudah dilihat bahwa simpul e bertetangga dengan setiap simpul lainnya yang berarti $\deg(e) = 2n - 1$. Kemudian setiap simpul di V_2 bertetangga dengan e dan semua simpul lainnya di V_2 akibatnya $\deg(a^i) = n - 1$ untuk setiap $i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n - 1$. Demikian juga setiap simpul di V_3 hanya bertetangga dengan e sehingga $\deg(a^j b) = 1$ untuk setiap $j \in \mathbb{Z},\ 0 \leq i \leq n - 1$. ■

Radius dan diameter dari graf pangkat atas grup dihedral diberikan pada teorema berikut

Teorema 3.4

Radius dan diameter graf pangkat dari grup dihedral masing-masing adalah 1 dan 2

Bukti:
Berdasarkan bukti pada Teorema 3.1, simpul e terhubung langsung dengan semua simpul lain di D_{2n} yang berakibat $e(e) = 1$. Karena radius adalah nilai eksentrisitas terkecil di D_{2n}, maka diperoleh radius graf pangkat dari grup dihedral adalah 1. Kemudian karena semua simpul terhubung langsung dengan e di D_{2n} maka hanya ada dua kemungkinan jarak dua simpul berbeda di D_{2n} yaitu 1 atau 2 sehingga diperoleh nilai eksentrisitas terbesar adalah 2. Karena diameter adalah nilai eksentrisitas terbesar di D_{2n} maka diperoleh diameter graf pangkat dari grup dihedral adalah 2. ■

4. Kesimpulan dan Saran

Adapun kesimpulan dari artikel ini sebagai berikut.

1. Graf pangkat dari grup dihedral senantiasa merupakan graf terhubung karena setiap simpul pada graf senantiasa terhubung dengan simpul identitas grup.
2. Bentuk graf pangkat dari grup dihedral D_{2n} dimana $n = p^m$ dengan p bilangan prima dan suatu m bilangan asli adalah graf yang terdiri dari dua subgraf yang tidak disjoint yaitu berupa subgraf lengkap dan subgraf bintang.
3. Ketika bentuk graf pangkat terdiri dari dua subgraf yang tidak disjoint yaitu berupa subgraf lengkap dan subgraf bintang maka memiliki 3 derajat simpul yang berbeda. Adapun untuk radius dan diameter graf pangkat dari grup dihedral berturut-turut adalah 1 dan 2.

Daftar Pustaka

Abdussakir. (2017). Radius, Diameter, Multiplisitas Sikel, dan Dimensi Metrik Graf Komuting dari Grup Dihedral. *Jurnal Matematika "Mantik"*, 3 (1), pp. 1-4.

Chakrabarty, I., Ghosh, S., and Sen, M.K. (2009). Undirected power graphs of semigroups. *Semigroup Forum*, 78(3), pp.410-426.

Chelvam, T.T. and Sattanathan, M. (2013). Power graph of finite abelian groups. *Algebra and Discrete Mathematics*, 16(1), pp.33-41.

Dummit, S. D., Foote, M. R. (2004). *Abstract Algebra Third* Edition, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Fraleigh, J. B. (2014). *A First Course in Abstract Algebra Seventh Edition*. United States of America: Pearson Education Limited.

Gazir, A. S., Wardhana, I G. A. W., 2019. Subgrup Nontrivial dari Grup Dihedral. *Eigen Mathematic Journal*, Vol.2 No.2.

Juliana, R., Masriani, Wardhana, I.G.A.W., Switrayni, N.W., and Irwansyah, 2020, Coprime graph of integers modulo n group and its subgroups, *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA) 3 (1)*, 15-18

Kelarev, A. V. and Quinn, S.J. (2002). Directed graphs and combinatorial properties of semigroups. *Journal of Algebra*, 251(1), pp.16-26.

Masriani, Juliana, R., Syarifudin, A.G., Wardhana, I.G.A.W., Irwansyah, and Switrayni, N.W., 2020, Some Result of Non-Coprime Graph of Integers Modulo n Group for n a Prime Power, *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA) 3 (2)*, 107-111

Misuki, W.U., Wardhana, I.G.A.W., Switrayni, N.W., and Irwansyah, 2021, Some Results of Non-Coprime Graph of The Dihedral Group D_{2n} for n a Prime Power, *AIP Conference Proceedings 2329*, 020005 (2021)

Munir, Rinaldi. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung:Informatika Bandung.

Nurhabibah, Syarifudin, A.G., and Wardhana, I.G.A.W., 2021, Some Results of The Coprime Graph of a Generalized Quaternion Group Q_{4n}, *Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics 3 (1)*, pp. 29-33

Syarifudin, A.G., Nurhabibah, Malik, D.P. and, Wardhana, I.G.A.W., Some characterizatsion of coprime graph of dihedral group D_{2n}, *J. Phys.: Conf. Ser. 1722*, 012051

Syarifudin, A.G. Wardhana, I.G.A.W., Switrayni, N.W., and Aini, Q., 2021, The Clique Numbers and Chromatic Numbers of The Coprime Graph of a Dihedral Group, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 1115 (1)*, 012083

Syarifudin A.G., and Wardhana, I.G.A.W., 2021, Beberapa Graf Khusus Dari Grup Quaternion, Eigen Mathematics Journal 4 (1), pp. 1-7.