http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6
ISSN: 2254-8351

Educación Matemática en la Infancia

Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas

National Research Council of the National Academies
Washington, D.C., http://www.nationalacademies.org/nrc/

Trabajo solicitado a los autores [1]
Fecha de publicación: 30-11-2014

RESUMEN
En este artículo, sobre fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas, se realiza una revisión de investigaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas en educación infantil. Esta revisión está estructurada según los siguientes apartados: Evidencias sobre la comprensión temprana del número, desarrollo del pensamiento espacial y la geometría, desarrollo de la medición, y regulación de la conducta y la atención.

Palabras clave: Aprendizaje de las matemáticas, educación infantil, investigación, matemáticas.

Cognitive Foundations for Early Mathematics Learning

ABSTRACT
In this article, about cognitive foundations for early mathematics learning, we make a review of research on the learning of mathematics in the early childhood. We structure this review in the following sections: evidence for early understanding of number, development of spatial thinking and geometry, development of measurement, and regulating behavior and attention.

Keywords: Learning mathematics, early childhood, mathematics, research.

1. Introducción

En las dos últimas décadas, una revolución gradual en la psicología del desarrollo y otros campos afines, ha mostrado que los niños poseen destrezas y conceptos relevantes para el aprendizaje de las matemáticas que están presentes de manera temprana, y también, que la mayoría de los niños comienzan a asistir a la escuela con un gran bagaje de conocimientos y habilidades cognitivas que pueden proporcionar los fundamentos del aprendizaje matemático. Al mismo tiempo, estas habilidades fundamentales no son suficientes; los niños necesitan numerosas interacciones matemáticas, tanto en casa como en la escuela, a fin de estar bien preparados ante los retos que

[1] This is a translation of a chapter from *Mathematics Learning in Early Childhood: Paths Toward Excellence and Equity* by Committee on Early Childhood Mathematics; Center for Education; Division of Behavioral and Social Sciences and Education; National Research Council © 2009. First published in English by the National Academies Press. This edition published under agreement with the National Academy of Sciences. Traducción realizada por Marta Linares Alonso y revisada por Carlos de Castro Hernández.

encontrarán durante la educación primaria y en su futuro. El conocimiento e interés que muestran los niños sobre el número, la forma, y otros temas de carácter matemático, proporcionan a los padres y a los maestros de educación infantil una importante oportunidad para ayudarles a desarrollar su comprensión de las matemáticas (Gelman, 1980; Saxe, Guberman y Gearhart, 1987; Seo y Ginsburg, 2004).

En este artículo revisamos la investigación sobre el desarrollo matemático de los bebés y los niños pequeños para caracterizar tanto los recursos con los que los niños llegan a la escuela, como las limitaciones en la comprensión de las matemáticas de los alumnos de Educación Infantil. Puesto que la literatura sobre el tema es muy amplia, no es posible hacerle justicia en un solo artículo. Sin embargo, intentamos aportar una revisión de los asuntos clave y los descubrimientos de la investigación relevantes en el marco de la educación en la primera infancia. Estos incluyen:

- ¿Cuál es la naturaleza de los puntos de partida tempranos universales? Generalmente se piensa que proporcionan una importante fundamentación para el subsecuente desarrollo matemático. (Por ej., Barth y otros, 2005; Butterworth, 2005; Dehaene, 1997; pero se puede ver Holloway y Ansari, 2008, y Rips, Bloomfield y Asmuth, 2008, para contrastar opiniones distintas). Examinamos dos campos básicos para las matemáticas en la primera infancia: 1) número, operaciones incluidas, y 2) pensamiento espacial, geometría y medición.
- ¿Qué cambios en el desarrollo evolutivo durante la educación infantil son importantes para la comprensión matemática en estos campos?
- ¿Cuál es la relación del desarrollo matemático con otros aspectos más generales del desarrollo necesarios para el aprendizaje de las matemáticas, tales como la habilidad de regular la propia conducta y la atención?

2. Evidencias sobre la comprensión temprana del número

2.1. Conocimiento numérico preverbal

Un objetivo principal en la psicología del desarrollo es delinear los puntos de inicio en el conocimiento de campos importantes. Estos puntos de inicio tienen importancia teórica, puesto que conllevan modelos de desarrollo. También tienen una importancia práctica, dado que un principio básico de la instrucción es que la enseñanza que está en contacto con el conocimiento que los niños ya han adquirido sea probablemente más efectiva (por ej., Clements y otros, 1999). Por lo tanto, no es sorprendente que las investigaciones hayan estado trazando de forma activa un mapa de los comienzos del conocimiento numérico preverbal, que parecen ser compartidos por humanos pertenecientes a diferentes contextos culturales, así como con otras especies y, por consiguiente, parte de su herencia evolutiva (por ej., Boysen y Berntson, 1989; Brannon y Terrace, 1998, 2000; Brannon y otros, 2001; Cantlon y Brannon, 2006; Dehaene, 1997; Dehaene, Dehaene-Lambertz y Cohen, 1998, Meck y Church, 1983).

Numerosas investigaciones han examinado un grupo de habilidades numéricas, que incluyen la capacidad de los bebés para discriminar entre conjuntos de diferentes tamaños, reconocer relaciones numéricas y comprender transformaciones de adición y sustracción. El estudio del conocimiento numérico de los bebés representa una importante separación frente a la postura que se mantenía previamente, y que estaba fuertemente influida por los descubrimientos de Piaget (1941 – 1965) sobre la conservación del número y la teoría de los estadios. Estos descubrimientos anteriores mostraban que los niños no conservan el número ante transformaciones espaciales hasta que inician la Educación Primaria, y llevaron a muchos a creer que antes de esa edad los niños no poseen la habilidad de formar conceptos numéricos (para una revisión, ver Mix, Huttenlocher y Levine, 2002). Aunque Piaget reconoció que los niños adquieren algunas habilidades matemáticamente relevantes en edades tempranas, poder realizar tareas de conservación se consideraba generalmente condición sine qua non para la comprensión numérica.

Durante las décadas de 1960 y 1970, los investigadores comenzaron a examinar de forma activa las competencias numéricas tempranas, lo que condujo a una revisión de la comprensión de la competencia numérica infantil. Esta investigación identificó numerosas competencias en los niños de educación infantil, incluyendo estrategias de conteo y correspondencia uno a uno que los niños usan en tareas piagetianas de conservación del número.

Tal y como detallamos, los estudios sobre bebés y niños pequeños se han centrado sobre todo en los números naturales (también llamados números de contar). No obstante, también han examinado las representaciones de cantidades fraccionarias y relaciones geométricas y de proporción, categorías de formas, y mediciones. Además, aunque hay cierto desacuerdo en este campo en cuanto a la interpretación en general de los hallazgos en los estudios sobre bebés y niños pequeños, se suelen considerar dichos hallazgos como puntos de partida para la enseñanza de habilidades verbales y matemáticas simbólicas.

2.1.1. Sensibilidad de los bebés ante los conjuntos de tamaño pequeño

Los estudios sobre bebés suelen utilizar paradigmas de habituación para examinar si los bebés son capaces de discriminar entre pequeños conjuntos de objetos, ya sean estáticos o estén en movimiento (Antell y Keating, 1983; Starkey y Cooper, 1980; Strauss y Curtis, 1981; Van Loosbroek y Smitsman, 1990; Wynn, Bloom y Chiang, 2002). En un estudio de habituación típico, a los bebés se les muestran repetidamente varios conjuntos con el mismo número de objetos (por ej., 2), hasta que pierden el interés, y el tiempo en que mantienen la mirada desciende por debajo de un límite especificado. Entonces se les muestran conjuntos de igual o diferente tamaño, y se graban sus tiempos de mirada. Tiempos más largos indican que el bebé reconoce que la nueva configuración es diferente de la anterior. Los resultados muestran que los bebés (con edades comprendidas entre un día y varios meses) pueden distinguir un conjunto de dos objetos de uno de tres, aunque son incapaces de discriminar un grupo de cuatro objetos de otro de seis, pese a que la ratio (3:2) es la misma. Estos hallazgos indican que la habilidad de los bebés para discriminar conjuntos de tamaño pequeño está limitada por el número en lugar de por la ratio. Huttenlocher, Jordan y Levine (1994) sugieren que la habilidad de los bebés de distinguir conjuntos pequeños (dos en lugar de tres) puede estar basada en una aproximación más que en un sentido exacto del número.

Varios estudios indican que la sensibilidad cuantitativa temprana mostrada por los bebés ante conjuntos de tamaño pequeño se basa realmente en su sensibilidad a la cantidad (área de superficie o longitud del contorno), que covaría con la numerosidad, más que en el número per se (Clearfield y Mix, 1999, 2001). Es decir, a menos que estas variables se controlen cuidadosamente, cuantos más elementos haya, más grande será la cantidad. En los estudios en que varían número y cantidad de manera independiente, Clearfield y Mix, (1999, 2001) encontraron que los bebés entre 6 y 8 meses detectan un cambio en la cantidad (longitud del contorno o área), pero no un cambio en el número. Por lo tanto, si se habituaban a un conjunto de dos elementos, no se deshabituaban con un conjunto de tres, mientras fuera equivalente al original en área o longitud de contorno.

Sin embargo, descubrimientos más recientes indican que los bebés son sensibles tanto a la cantidad como al número (Cordes y Brannon, 2008, en prensa; Kwon y otros, 2009). Lo que es más, Cordes y Brannon (2008) informan que, aunque los bebés de seis meses son sensibles a los cambios en los que se duplica el número, sólo son sensibles a cambios en los que se triplica el área conjunta de varios elementos, lo que sugiere que la sensibilidad temprana al tamaño de los conjuntos puede que sea más ajustada que la correspondiente a las cantidades continuas. Otros estudios que apoyan la sensibilidad numérica temprana incluyen análisis que muestran que los bebés de seis meses son capaces de distinguir entre pequeños conjuntos de sucesos presentados visualmente (saltos de un muñeco) (por ej., Wynn, 1996). Este resultado no está sujeto a la explicación alternativa de la discriminación basada en la cantidad más que en el número, como los hallazgos relativos a grupos de objetos. No obstante, es posible que incluso, aunque se hayan controlado en estos estudios la tasa y la duración de los eventos, la discriminación de los bebés se base en indicios no numéricos, tales como el ritmo (por ej., Demany, McKenzie y Vurpillot, 1977; Mix y otros, 2002). De hecho, en un estudio en el que la tasa de movimiento no era un indicio fiable para la numerosidad, los bebés no distinguieron entre las primeras numerosidades y las siguientes (Clearfield, 2004).

También se observa una limitación de tamaño de los conjuntos en el comportamiento de bebés de entre diez y catorce meses de edad ante tareas de búsqueda (Feigenson y Carey, 2003, 2005; Feigenson, Carey y Hauser, 2002). Por ejemplo, en un estudio con bebés de doce meses se introdujeron galletas en dos contenedores. Los niños escogieron la cantidad más grande de entre 1 y 2, y de entre 2 y 3 galletas, pero se equivocaron en hacer lo mismo de entre 3 y 4, 2 y 4, y 3 y 6 (Feigenson, Carey y Hauser, 2002). Los autores sugieren que estas equivocaciones se deben a la limitación del sistema objeto-fila[2]. Cuando el tamaño de las galletas cambiaba, los niños basaban su búsqueda en la cantidad total de galletas en lugar de en el número. De manera similar, bebés de entre doce y catorce meses buscaban durante más tiempo en una caja en la que se habían escondido dos pelotas, después de ver que el experimentador había sacado una, que en una caja en la que se había escondido una sola pelota y de la que el experimentador había sacado también una (en realidad no había ninguna pelota en ninguna de las dos cajas, puesto que el experimentador había sacado la que quedaba sin que los niños se dieran cuenta). También lo habían conseguido hacer entre tres y dos pelotas, pero no entre cuatro y dos. Es decir, no buscaban más tiempo en una caja en la que se habían escondido cuatro pelotas y habían visto quitar dos que en una caja en la que habían visto esconder dos y sacar dos. El fallo en este caso, que tiene la misma ratio que el problema de dos y una, sugiere que estaban usando el sistema objeto-fila, en lugar del sistema análogo de magnitud, que es el segundo sistema que representa de forma aproximada conjuntos de tamaño grande (de cuatro o más elementos). Además, en este estudio, los niños pequeños basaron su búsqueda en el número de objetos que vieron esconder, en lugar de en el volumen total de objetos. Por lo tanto, al menos a los doce meses de edad, parece que los niños son capaces de representar el número de objetos en grupos de hasta tres elementos (Feigenson y Carey, 2003). Un estudio posterior muestra que este límite en el tamaño del conjunto se puede extender a cuatro si los indicios espacio–temporales permiten a los niños representar los conjuntos como 2 grupos de 2 (Feigenson y Halberda, 2004).

2.1.2. Sensibilidad de los bebés a conjuntos de tamaño grande

Algunos estudios indican que los bebés son capaces de aproximar el número de elementos de objetos visuales (por ej., Brannon, 2002; Brannon, Abbott y Lutz, 2004; Xu, 2003; Xu y Spelke, 2000; Xu, Spelke y Goddard, 2005), acciones (saltos de un muñeco) (Wood y Spelke, 2005), y conjuntos auditivos (Lipton y Spelke, 2003), que están bastante más allá de la aprehensión inmediata de numerosidad (del rango de subitización). De manera consistente con el modelo de acumulación, que hace referencia a un mecanismo de conteo no verbal y que proporciona representaciones numéricas aproximadas en forma de magnitudes análogas, la discriminación que hacen los bebés de conjuntos grandes está limitada por la ratio al comparar los dos conjuntos, más que por tamaño del conjunto. Por consiguiente, a los seis meses de edad, cuando se habitúa a los bebés a una configuración de puntos, se deshabitúan ante un nuevo conjunto siempre que la ratio entre ambos sea de al menos 2:1. A los diez meses, los bebés logran discriminar conjuntos visuales y auditivos que difieren por una ratio 2:3, pero no 4:5 (Lipton y Spelke, 2003, 2004; Xu y Arriaga, 2007). Es importante destacar que estos estudios

[2] El sistema objeto-fila se refiere a la representación de un objeto en un conjunto que consta de números pequeños, los objetos están en una correspondencia 1-a-1 con cada símbolo mental, y no hay representación resumida del tamaño del conjunto (por ejemplo, tres objetos se representan como "este", "este", "este" en lugar de "un conjunto de tres cosas") (Carey, 2004).

controlaron numerosas variables continuas, sugiriendo por lo tanto que las discriminaciones se basaban en el número más que en la cantidad (por ej., Brannon, Abbott y Lutz, 2004; Cordes y Brannon, 2008; Xu, 2003; Xu y Spelke, 2000).

2.1.3. ¿Tienen los bebés el concepto de número?

Los bebés pueden ser capaces de discriminar entre conjuntos de tamaños diferentes, pero no tienen noción de que todos los conjuntos que tienen la misma numerosidad forman una categoría o clase de equivalencia (término matemático para tal categoría). Esta noción se refiere al concepto de cardinalidad (saber que tres flores, tres saltos, tres sonidos y tres pensamientos son equivalentes en número). El número cubre aspectos tales como la lista de números de conteo, (1, 2, 3...) y su uso para describir cuántas cosas hay en una colección. También cubre la posición ordinal (primero, segundo, tercero...), la idea de valor cardinal (p. ej. ¿Cuántos hay?) y las diversas operaciones con el número (p. ej. adición y sustracción). La noción de correspondencia uno a uno conecta los números de contar con el valor cardinal de los conjuntos. Otro aspecto importante del número es la forma en que se escribe y se dice, usando el sistema de base diez. El conocimiento del número es fundamental para el desarrollo matemático de los niños, y se desarrolla gradualmente a lo largo del tiempo, así que no todos los aspectos del número están presentes durante los primeros años.

Varios estudios (p. ej., Starkey, Spelke y Gelman, 1990; Strauss y Curtis, 1984) examinaron si los bebés comprenden que los conjuntos pequeños que comparten la numerosidad, pero que contienen diferentes tipos de entidades, forman una categoría (p. ej. dos perros, dos pollitos, dos saltos, dos redobles de tambor). Starkey et al (1990), examinaron esta cuestión habituando a bebés a fotografías aéreas de dos o tres objetos domésticos. En el test, a los bebés se les enseñaron fotografías nuevas que alternaban entre conjuntos de dos y de tres elementos. Los bebés se deshabituaban al nuevo tamaño del conjunto, lo que sugiere que consideraban conjuntos diferentes de dos elementos (o tres) como similares. Aunque se puede considerar que estos estudios sugieren que los bebés forman clases de equivalencia numérica a partir de conjuntos visuales de objetos dispares, dichas investigaciones pueden haber tratado en realidad la sensibilidad de los niños a cantidades continuas en lugar de al número, según se describe antes (Clearfield y Mix, 1999, 2001). Es decir, a menos que se establezcan controles más cuidadosos, los conjuntos de dos elementos serán, en media, más pequeños en superficie que los conjuntos de tres elementos (por ej., Clearfield y Mix, 1999, 2001; Mix y otros, 2002).

Los resultados que muestran que los bebés consideran que dos objetos o dos sonidos forman una categoría, no estarían sujetos a esta crítica y, por tanto, podrían considerarse como una fuerte evidencia a favor de las categorías numéricas abstractas. En un importante estudio, Starkey, Spelke y Gelman (1983) comprobaron si los bebés poseían tales categorías. Mientras que los resultados parecían indicar que los bebés de siete meses consideraban los conjuntos de dos (o tres) objetos, y redobles de tambor, como similares, varios intentos de replicar estos importantes hallazgos los han cuestionado (Mix, Levine y Huttenlocher, 1997; Moore y otros, 1987). Además, sigue abierta la cuestión de si los bebés tienen un concepto abstracto de número que les permita agrupar conjuntos distintos del mismo tamaño (cardinal). Los descubrimientos, que se revisan más adelante, que muestran que los niños de tres años tienen dificultades en asociar conjuntos visuales y auditivos en base a su número, y que esta destreza está relacionada con el conocimiento de palabras numéricas convencionales, sugiere que la capacidad de formar clases de equivalencia a partir de conjuntos que contienen diferentes clases de elementos puede depender de la adquisición de destrezas numéricas convencionales. Kobayashi, Hiraki, Mugitani y Hasegawa (2004) sugieren que los métodos usados pueden ser demasiado abstractos para detectar este conocimiento intermodal, y que cuando los sonidos se conectan con objetos, por ejemplo, el sonido de un objeto que cae sobre una superficie, puede revelarse evidencia de categorías numéricas abstractas en edades más tempranas, quizá incluso en bebés.

2.1.4. Sensibilidad de los bebés a los cambios en tamaño del conjunto

Varios estudios informan de que los bebés realizan el seguimiento de los resultados de transformaciones numéricamente relevantes, tales como añadir o quitar objetos de un conjunto. Es decir, cuando se añade un objeto a un conjunto, esperan ver más objetos de los que había previamente en el conjunto, y cuando se quita un objeto, esperan ver menos. Wynn (1992a) encontró que, después de transformar un conjunto mediante la adición o sustracción de un objeto, bebés de cinco meses miraban más tiempo al resultado "imposible" (por ej., 1 + 1 = 1) que al resultado "correcto". Sin embargo, en cuanto a la discriminación numérica, estudios posteriores sugieren que su desempeño puede reflejar sensibilidad a cantidades continuas (tamaño acumulado de los objetos) más que a la numerosidad (Feigenson, Carey y Spelke, 2002). Ante el problema 1+1, los bebés miraban más tiempo al 2, el número de objetos esperado, cuando el tamaño acumulado de los dos objetos se cambió a tres, el número imposible de objetos, que cuando el tamaño acumulado de los objetos era correcto, es decir, cuando el área acumulada de los tres objetos era equivalente al área que habría resultado de la suma 1+1.

Cohen y Marks (2002) sugirieron una explicación alternativa para los resultados de Wynn. En particular, sugirieron que los hallazgos se podían atribuir a preferencias por familiaridad antes que a la capacidad para llevar a cabo transformaciones numéricas. Para el problema 1 + 1 = 2, destacaron que los bebés ven más a menudo un objeto, puesto que había un sólo objeto en la primera muestra de cada prueba, y que por lo tanto, basándose en la familiaridad, miraban más a 1 (la respuesta incorrecta). Se argumentó de forma similar el hecho de que mirasen más al 2 en el problema 2 – 1.

Aunque sus descubrimientos apoyan esta hipótesis, un estudio más reciente de Kobayashi et al (2004), aporta evidencias de que los bebés miran durante más tiempo a 1 + 1 = 3 y a 1 + 2 = 3 que a 1 + 1 = 2 y a 1 + 2 = 3 cuando el primer sumando es un objeto visible y el segundo consiste en un tono (o varios). La preferencia por familiaridad no basta para explicar este paradigma porque, para cada problema, los bebés ven sólo un elemento en el escenario.

2.1.5. Relaciones de orden

Unos pocos estudios han examinado la sensibilidad de los bebés hacia las relaciones de numéricas de orden (más que, menos que). Un estudio de habituación mostró que niños de diez y doce meses distinguían conjuntos equivalentes (por ej., un conjunto de dos seguido de otro también de dos) de otros conjuntos no equivalentes (por ej., un conjunto de dos seguido de otro de tres) (Cooper, 1984). En otro estudio, Cooper (1984) habituó a bebés de diez, doce, catorce y dieciséis meses a secuencias no equivalentes. En la condición "menos que", la primera muestra del par era siempre menor que la segunda (por ej., a los niños se les enseñaban dos objetos seguidos de tres objetos). Se mostró el orden inverso en la condición "más grande que". En el test, los bebés de catorce y dieciséis meses mostraron más interés en la relación opuesta que en la que se les mostraba, lo que sugiere que sí representaban las relaciones menor que y mayor que, mientras que los bebés de diez y doce meses no. Sin embargo, Brannon (2002) aporta evidencias de que los bebés son sensibles a las relaciones numéricas de orden sobre los once meses de edad.

2.1.6. Resumen

Los resultados de los estudios con bebés que utilizan conjuntos de tamaño pequeño muestran que, de forma muy temprana, los niños poseen una habilidad limitada para discriminar conjuntos de tamaños diferentes (por ej., 2 de 3, pero no 4 de 6). La limitación tamaño del conjunto se ha interpretado como reflejo de uno de los dos sistemas nucleares del número: el sistema objeto-fila. También esperan el resultado apropiado de pequeñas transformaciones de adición y sustracción (por ej., 1 + 1 = 2 y 2 – 1 = 1), al menos cuando la cantidad continua covaría con el número. Algo más tarde, sobre los diez meses de edad, los bebés discriminan entre conjuntos equivalentes y no equivalentes, y sobre los catorce meses pueden distinguir las relaciones "mayor que" de "menor que". Debido a que muchos de estos estudios no controlaron las variables que covarían con el número (es decir, longitud de contorno y área de la superficie), la base de la discriminación todavía se debate. Sin embargo, estudios recientes indican que los bebés son sensibles tanto al número de objetos en conjuntos pequeños como a variables continuas, y que podrían ser más sensibles al número que a la superficie acumulada. Varios estudios con bebés también han examinado la sensibilidad a números aproximados usando conjuntos más grandes de elementos (por ej., 8 frente a 16). Estos estudios han descubierto que los bebés de seis meses son capaces de discriminar entre grupos con ratios 2:1, y los de nueve meses entre grupos con ratios 2:3, siempre que los tamaños de los conjuntos implicados sean mayores o iguales a cuatro; es decir, los bebés de seis meses no lograron discriminar 2 de 4.

También mencionamos que el conocimiento numérico temprano de los bebés es en gran parte implícito, y tiene importantes limitaciones que se exponen más abajo. En ninguno de los estudios descritos anteriormente aparecieron palabras numéricas. Esto quiere decir que el aprendizaje de palabras numéricas y su conexión con grupos de objetos es un nuevo tipo de aprendizaje que los niños pequeños de 2 a 4 años llevan a cabo en casa o en centros educativos. Este aprendizaje extiende de forma muy potente el conocimiento numérico, y los niños que lo adquieren a edades tempranas tendrán una clara ventaja.

2.2. Representaciones mentales numéricas en niños en edad prescolar[3]

Al igual que muchas de las investigaciones con bebés tienen un enfoque teórico sobre la naturaleza de las representaciones numéricas en bebés, así, también, ocurre con parte de la investigación con niños de 2 y 3 años[4], y niños en edad prescolar (3 y 4 años). El objetivo es comprender cómo y cuándo representan los niños de estas edades los números pequeños y grandes. Para lograr esto, se utilizan tareas especiales con objetos ocultos, de manera que los niños tengan que usar representaciones mentales para resolver dichas tareas. Algunas veces se muestran los objetos y luego se esconden, y otras veces nunca se llegan a mostrar sino que se dan los números con palabras. Estas tareas son bastante diferentes de aquellas en las que los niños aprenden sobre los números en casa o en el centro educativo, y pueden llevarlas a cabo en casa o en escenarios naturales considerablemente antes que en laboratorio (por ej., Mix, 2002). En casa o en el centro educativo, los números se presentan con objetos (cosas, dedos), y los niños y los adultos pueden ver, o contar, o emparejar, o mover los objetos. Los objetos no desaparecen, ni están escondidos. El aprendizaje infantil bajo estas condiciones se describe en otro artículo[5]. Aquí seguiremos centrándonos en los aspectos teóricos de las representaciones numéricas.

2.2.1. Conjuntos de tamaño pequeño

Del mismo modo que los bebés, los niños de 2 y 3 años muestran un conocimiento numérico más avanzado de lo que habían supuesto enfoques previos. Según se ha comentado anteriormente, la conservación del número se consideraba una marca distintiva del desarrollo numérico (Piaget 1941/1965). Sin embargo, el "experimento mágico" de Gelman (1972) mostró que niños mucho más pequeños eran capaces de conservar el número si la transformación espacial era menos destacada y se usaban conjuntos de tamaños bastante más pequeños. En este estudio, se les decía a niños de 3 a 6 años que un grupo de dos o de tres ratones era el "ganador". Después se cubrían ambos conjuntos y se movían. Después de que los niños aprendieran a elegir al ganador, el experimentador alteraba el conjunto ganador, bien cambiando la disposición espacial de los ratones, o bien añadiendo o

[3] La Asociación Nacional para la Educación Infantil de EEUU (NAEYC) clasifica a los niños en edad infantil en los siguientes rangos de edad: *Infants* (bebés), 0 a 15 meses; *toddlers/two*, de 12 a 36 meses; *preschool* (traducido en este artículo como "niños en edad prescolar"), de 2,5 años hasta 5 años; *kindergarten*, de 5 años.

[4] El término usado en el original para niños de 2 y 3 años es *toddlers*.

[5] *Nota del traductor:* Se refiere al capítulo 5 del libro, que será publicado en *Edma 0-6*.

sustrayendo un ratón. Incluso los niños de tres años reconocieron correctamente que la reorganización mantenía el estatus del ganador, mientras que la transformación mediante la adición o sustracción no.

Huttenlocher, Jordan y Levine (1994), examinaron la aparición de la representación numérica exacta en niños de 2 y 3 años. Plantearon que los modelos mentales que representan características matemáticas críticas (el número de elementos en el conjunto, y la naturaleza de la transformación) eran necesarios para representar exactamente los resultados de un cálculo. De forma similar, Klein y Bisanz (2000) sugieren que el éxito de los niños pequeños a la hora de resolver cálculos no verbales depende de su habilidad para mantener y manipular representaciones cuantitativas en la memoria de trabajo, así como de su comprensión de las transformaciones numéricas.

Huttenlocher, Jordan y Levine (1994) dieron a niños con edades comprendidas entre los 2 y los 4 años una tarea de emparejar numerosidades y una tarea de cálculo con objetos (llamada no verbal, ver Caja 1). En la tarea de emparejamiento, a los niños se les enseñó un conjunto de discos que posteriormente se escondían debajo de una caja. Entonces se les pedía que pusieran el mismo número de discos. En la tarea de cálculo, se les mostró un grupo de discos que después se tapaban. A continuación, al conjunto original se le añadían o quitaban elementos. La tarea del niño era indicar el número total de discos que estaban escondidos, colocando el mismo número ("haz que los tuyos sean como los míos").

CAJA 1

Aclaración sobre denominaciones experimentales equívocas

Los investigadores han utilizado tareas en las cuales dos condiciones varían de dos formas importantes, como en Huttenlocher, Newcombe y Sandberg (1994). En una condición, primero se muestran objetos a los niños, y después los objetos se ocultan. En esta condición no se usan palabras numéricas. En la otra condición, los niños no ven objetos nunca pero deben imaginarlos o producirlos (por ej., levantando un cierto número de dedos). En este caso, los números implicados se transmiten mediante el uso de palabras numéricas, en enunciados de problemas verbales o solo como palabras (por ej., "¿Cuántos son dos y uno?"). En sus informes, los investigadores llaman a la primera condición *no verbal* y a la segunda condición *verbal*. Pero estas etiquetas son un poco engañosas, porque suenan como si no verbal y verbal describieran los métodos de resolución de los niños. En este informe utilizamos el lenguaje mencionando ambos aspectos que variaban: con objetos (llamada no verbal) y sin objetos (llamada verbal).

Tanto en las tareas de emparejamiento como de transformación, el desempeño aumentó gradualmente con la edad. Los niños consiguieron en primer lugar resolver problemas con bajas numerosidades, como 1 y 2, logrando gradualmente extender su éxito a tareas con numerosidades mayores. Lo que también es importante es que cuando los niños contestaban incorrectamente, sus respuestas no eran aleatorias, sino aproximadamente acertadas. Estas respuestas aproximadamente correctas se encontraron en niños de incluso dos años, el grupo de menor edad incluido en el estudio. En base a estos hallazgos, Huttenlocher, Jordan y Levine (1994) argumentaron que las representaciones de conjuntos de tamaño pequeño comienzan siendo representaciones aproximadas y se vuelven más exactas según los niños desarrollan la habilidad de crear un modelo mental. La exactitud se desarrolla más y se extiende a conjuntos de tamaño mayor cuando los niños establecen correspondencias de sus representaciones numéricas no verbales con palabras numéricas.

El desempeño de los niños en tareas de emparejamiento de numerosidades indica que, según van creciendo, mejoran en representar de forma abstracta la cantidad. Este logro parece estar relacionado con la adquisición de palabras numéricas (Mix, 2008). Mix mostró que la habilidad de los niños de edad prescolar para discriminar numerosidades depende en gran medida de la similitud entre los objetos de los conjuntos. De este modo, los niños de tres años pudieron emparejar las numerosidades de conjuntos que consistían en dibujos de puntos negros con discos negros muy similares. Entre los 3 y los 5 años, los niños conseguían emparejar las numerosidades de conjuntos progresivamente más diferentes (por ej., a los tres años y medio, puntos negros con conchitas de pasta, y con discos negros ordenados de distintos tamaños; a los cuatro años, puntos negros con objetos heterogéneos).

El grado de abstracción de las representaciones numéricas en los niños de prescolar también fue evaluado en un estudio (Mix, Huttenlocher y Levine (1996) que examinaba su habilidad para hacer correspondencias numéricas entre conjuntos auditivos y visuales, una habilidad que Starkey, Spelke y Gelman (1990) habían atribuido a los bebés. Los investigadores presentaron a niños de 3 y 4 años un conjunto de dos o tres palmadas, y se les pidió que señalaran qué configuración visual correspondía al número de palmadas. A los tres años, los niños ejecutan esta tarea como si la hicieran al azar[6], mientras que a los cuatro años, la ejecutan significativamente por encima del azar. Por el contrario, ambos grupos de edad ejecutan una tarea de control que consistía en emparejar conjuntos de discos con imágenes de puntos, al nivel del azar. Otro estudio evaluó el efecto de la heterogeneidad de los conjuntos en la habilidad de niños de 3 a 5 años para hacer emparejamientos numéricos y juicios sobre el orden. Los resultados replicaban el descubrimiento de Mix (1999b) sobre que la heterogeneidad de los conjuntos reduce la habilidad de los niños para hacer emparejamientos equivalentes. Sin embargo, la heterogeneidad u homogeneidad de los conjuntos no afectaban su habilidad para hacer juicios sobre el orden (es decir, para juzgar cuál de dos conjuntos es más pequeño) (Cantlon y otros, 2007).

Mix también ha examinado la emergencia del conocimiento numérico a través de un estudio diario de su hijo, Spencer. En su estudio, encontró indicios de un conocimiento más temprano del que los experimentos antes descritos parecían indicar. A los 21 meses, Spencer era capaz de irse a otra habitación y buscar exactamente dos galletas de perro para sus dos perros, mucho antes de que los niños consiguieran resolver las tareas de emparejamiento de grupos homogéneos o heterogéneos descritas más arriba. De hecho, el propio Spencer no había conseguido resultados por encima del azar en esas tareas de laboratorio. Por consiguiente, parece que el conocimiento temprano de la equivalencia numérica puede surgir gradualmente, y primero en situaciones altamente contextualizadas. Para Spencer, estos emparejamientos tempranos de equivalencia numérica sucedieron en situaciones sociales (por ej., galletas para perros, barras para invitados). Queda abierta la cuestión de si esto es un patrón general o si existen grandes diferencias individuales en tales conductas (ver también Mix, Sandhofer y Baroody, 2005, como revisión).

Levin, Jordan y Huttenlocher (1992) compararon la habilidad de niños prescolares (3-4 años) de llevar a cabo cálculos que implicaban numerosidades de hasta seis, con objetos (llamados no verbales) y sin ellos (llamados verbales) (los cálculos fueron similares a los que se han descrito en el estudio de 1994 de Huttenlocher, Jordan y Levine). Los cálculos sin objetos (los llamados verbales) se plantearon en forma de problemas verbales ("Ellen tiene dos canicas y su padre le da una más. ¿Cuántas canicas tiene ahora?"), y en forma de combinaciones numéricas (por ej., "¿Cuántos son 2 y 1?"). Los niños con edades entre cuatro y cinco años y medio actuaron significativamente mejor en las tareas de cálculo en las que podían ver los objetos y las transformaciones que en las que no. Esto ocurrió tanto en los cálculos de adición, como para los de sustracción. Esta diferencia en el desempeño de cálculos no verbales y verbales se daba especialmente en niños provenientes de un bajo entorno sociocultural. Estos niños parecen tener más dificultad en el acceso al significado de las palabras numéricas (Jordan y otros, 2006), lo que puede estar relacionado con su exposición a herramientas culturales de aprendizaje (por ej., símbolos numéricos, palabras numéricas).

2.2.2. Tamaño de conjuntos grande

[6] *Nota del traductor:* El término "*chance level*" se refiere al nivel de ejecución de una tarea que se esperaría si la tarea se resolviera mediante elecciones aleatorias. Por ejemplo, en un test de elección múltiple, en que cada ítem tiene 4 opciones, con una verdadera, si se responde al azar, se espera que una de cada cuatro preguntas esté bien. Cualquier resultado superior al 25% de acierto en este caso, se dirá que está por encima del "*chance level*".

Para investigar cómo llevan a cabo cálculos aproximados con números más grandes, se presentaron a niños de cinco años de edad varias tareas de comparación y adición en una pantalla de ordenador (Barth y otros, 2005, 2006). En las tareas de comparación, se les enseñaba un conjunto de puntos (con tamaños de conjuntos entre 10 y 58) que después se tapaban. A continuación, se les enseñaba un conjunto de puntos rojos, y se les preguntaba de cuáles había más, si rojos o azules. En los problemas de adición, se les enseñaba un conjunto de puntos azules que luego se cubrían. Seguidamente se les mostraba otro conjunto de puntos azules, que también se ocultaban. Finalmente, se les enseñaba un conjunto de puntos rojos y se les preguntaba de cuáles había más, si puntos rojos o azules. Posteriores experimentos demostraron que el desempeño de los niños era similar cuando los puntos rojos se presentaban como una secuencia de tonos y cuando se presentaban visualmente. En cada condición, el desempeño era superior al del azar, y equivalente en los problemas de comparación y de adición, disminuyendo según la ratio de los puntos rojos con respecto a los azules se acercaba a 1. Esta dependencia de la ratio indica que los niños están usando un sistema de magnitudes análogas. Este sistema es diferente al de las representaciones exactas de números más grandes formadas trabajando con objetos organizados en grupos de decenas y unidades.

2.2.3. Resumen

Los niños de educación infantil hasta los 5 años continúan desarrollando los dos sistemas de representación identificados en bebés: el sistema de objeto-fila, que se limita a conjuntos de hasta tres elementos, y proporciona una representación de cada elemento del grupo, pero no una representación resumida o sintética del tamaño del conjunto, y el sistema de magnitud análoga, que provee una representación resumida aproximada del tamaño del conjunto, pero no una representación de los elementos individuales, y tampoco una forma de diferenciar entre tamaños muy similares de conjuntos, como 10 u 11 (Carey, 2004; Feigenson, Dehaene y Spelke, 2004; Spelke y Kinzler, 2007). La investigación existente muestra también que el conocimiento numérico temprano de los niños depende en gran medida del contexto, y a menudo está supeditado a la presencia de objetos o dedos que representen los conjuntos. Aunque sus habilidades numéricas son limitadas, los niños pequeños tienen una competencia numérica considerablemente mayor de lo que se infiere de las investigaciones de Piaget. Incluso desarrollan un conocimiento informal temprano en otras muchas áreas matemáticas, además de la representación de los números de contar (ver las secciones siguientes). Sin embargo, el camino que lleva del conocimiento informal al formal no es necesariamente un camino sencillo.

El impresionante desarrollo de la competencia numérica de los niños con edades comprendidas entre los 2 y los 6 años es estimulado por el aprendizaje de herramientas numéricas culturales importantes: palabras numéricas habladas, símbolos numéricos escritos, y métodos de resolución culturales, tales como contar o emparejar. Según se muestra en la investigación de Wynn (1990, 1992b), la adquisición de la comprensión de los significados cardinales de las palabras numéricas es un largo proceso. En un estudio longitudinal, Wynn descubrió que un niño tarda cerca de un año desde que consigue dar un conjunto de “uno” cuando se le pide, hasta que es capaz de dar el número apropiado para todos los numerales de su secuencia de conteo. La adquisición de tal conocimiento numérico es importante para promover la abstracción de los conceptos numéricos, es decir, el concepto de *cardinalidad* (que todos los conjuntos de una numerosidad dada forman una clase de equivalencia). También es importante para promover la exactitud de las representaciones numéricas y la compresión de las relaciones numéricas, puesto que únicamente los niños que han adquirido este conocimiento comprenden que añadir un elemento a un conjunto supone pasar al número inmediatamente siguiente en la lista de conteo (Sarnecka y Carey, 2008). La investigación relativa a estos logros del aprendizaje cultural aparece resumida en el capítulo 5[7], al identificar objetivos de enseñanza –aprendizajes fundamentales

[7] Cualquier referencia a un capítulo, se refiere al libro original (ver nota al pie, p. 21).

y alcanzables. Se debate en el capítulo 4 como una de las mayores causas de diferencias socioeconómicas, conectadas con el diferente grado de exposición a las conversaciones acerca del número en casa y en el colegio.

3. Desarrollo del pensamiento espacial y la geometría

El pensamiento espacial, al igual que el pensamiento numérico, es un componente fundamental de las matemáticas que tiene sus raíces en capacidades básicas desarrolladas de manera temprana. El pensamiento espacial tiene una importancia crítica en varios temas matemáticos, incluyendo la geometría, la medición, y las relaciones parte-todo (por ej., Ansari y otros, 2003; Fennema y Sherman, 1977, 1978; Guay y McDaniel, 1977; Lean y Clements, 1981; Skolnick, Langbort y Day, 1982; ver capítulo 6). Se ha descubierto que el pensamiento espacial es un predictor significativo de los logros en matemáticas y en ciencias, incluso en situaciones en que se controla el rendimiento global en destrezas verbales y matemáticas (por ej., Clements y Sarama, 2007; Hedges y Chung, en preparación; Lean y Clements, 1981; Shea, Lubinski y Benbow, 2001; Stewart, Leeson y Wright, 1997; Wheatley, 1990). Una razón de que el pensamiento espacial prediga el desempeño en matemáticas y ciencias es porque proporciona una forma de conceptualizar las relaciones en un problema previa a resolverlo (Clements y Sarama, 2007).

Las funciones mentales que abarca el pensamiento espacial incluyen categorizar formas y objetos y codificar las relaciones métricas y de categoría entre formas y objetos. El pensamiento espacial también es crucial en la representación de transformaciones de objetos y los resultados de esas transformaciones (por ej., rotación, traslación, amplificación y plegado), así como los cambios de perspectiva que se producen cuando uno cambia de posición. El pensamiento espacial está implicado en la navegación por el entorno para llegar a un lugar propuesto, y para encontrar la forma de volver al lugar de partida. El uso de sistemas simbólicos espaciales, incluyendo lenguaje, mapas, gráficos, diagramas y herramientas espaciales, tales como instrumentos de medida, contribuyen a aumentar y refinar el desarrollo del pensamiento espacial.

Igual que en el caso del desarrollo del conocimiento numérico, algunas investigaciones recientes han mostrado sólidos puntos de partida para el pensamiento espacial. A diferencia de la visión de Piaget, que se opone al despliegue gradual de habilidades espaciales durante el curso del desarrollo, evidencias recientes muestran que los bebés son capaces de codificar información espacial sobre objetos, formas, distancias, localizaciones y relaciones espaciales. Esta emergencia temprana de habilidades espaciales es consistente con una perspectiva evolutiva que enfatice la importancia de la navegación para todas las especies móviles (por ej., Newcombe y Huttenlocher, 2000, 2006; Wang y Spelke, 2002). Dicho esto, los humanos somos únicos en que nuestras habilidades espaciales se extienden a través de sistemas simbólicos, tales como el lenguaje espacial, unidades de medida, mapas, gráficos y diagramas. Por tanto, no resulta sorprendente que la trayectoria del desarrollo espacial infantil dependa en gran medida de sus experiencias espaciales relevantes, incluyendo aquellas que conlleven lenguaje y actividades espaciales, como construir con bloques, jugar con puzles y experimentar con determinados videojuegos.

3.1. Puntos de partida en la Infancia

Incluso los bebés más pequeños son capaces de segmentar los entornos visuales complejos en objetos que tienen formas estables, usando principios como la cohesión, las fronteras, y la rigidez (por ej., ver Spelke, 1990). Los bebés también perciben las similitudes entre objetos tridimensionales y las fotografías de esos objetos (DeLoache, Strauss y Maynard, 1979). En estudios de habituación, los bebés muestran sensibilidad a similitudes de forma entre ejemplares (por ej., Bomba y Siqueland, 1983). Además, son capaces de reconocer aspectos invariantes de una misma forma vista desde diferentes ángulos (por ej., Slater y Morison, 1985).

Los bebés también son capaces de formar categorías de relaciones espaciales -una posición ampliamente respaldada; sin embargo, existen diferentes opiniones en relación a la secuencia que sigue el desarrollo de la comprensión infantil de las categorías espaciales (Quinn, 1994, 2004; y Hiele, 1986). Según exponen Bruner, Goodnow y Austin (1956), la categorización conlleva tratar casos que se pueden discriminar como si fuesen iguales. Usando este criterio, Quinn mostró que los bebés de 3 meses de edad son sensibles a las categorías arriba / abajo (por ej., Quinn, 1994) e izquierda / derecha (por ej., Quinn, 2004). Ambas categorías implican la relación de un objeto dado con otro objeto único de referencia (por ej., una barra horizontal o vertical). Sin embargo, los bebés no son capaces de codificar la relación entre un objeto y una barra diagonal, lo que demuestra que ciertas clases de relaciones espaciales tienen prioridad sobre otras. Algo más tarde, sobre los 6 o 7 meses, son sensibles a la categoría de relaciones entre (Quinn y otros, 1999). Esta categoría espacial es más compleja que arriba / abajo o izquierda / derecha, puesto que supone la relación de un objeto con dos objetos de referencia (por ej., dos barras). Sobre la misma edad, los bebés forman otros conceptos espaciales bastante sutiles. Por ejemplo, son sensibles a la diferencia funcional entre un contenedor y un objeto cilíndrico sin el fondo, aunque ambos objetos sean visualmente muy similares (Aguiar y Baillargeon, 1998; Baillargeon, 1995).

Los bebés y los niños pequeños (2-3 años) también poseen habilidades sorprendentes para localizar objetos en el espacio usando puntos de referencia e indicios geométricos. Bebés de incluso cinco meses son capaces de usar los espacios cerrados que definen una forma (por ej., las paredes de un arenero) para codificar la localización de objetos (Newcombe, Huttenlocher y Learmonth, 1999). A los 12 meses, los niños codifican la distancia y la dirección, y usan esta información para buscar objetos escondidos tras pantallas (Bushnell y otros, 1995). A los 16 o 17 meses, pueden usar la forma rectangular de un espacio cerrado así como puntos de referencia (tanto adyacentes a la ubicación del escondite como a distancia de él) para buscar objetos (Hermer y Spelke, 1994, 1996; Huttenlocher, Newcombe y Sandberg, 1994; Learmonth, Newcombe y Huttenlocher, 2001).

3.2. Transformación mental de formas

La rotación mental (la habilidad de visualizar y manipular el movimiento de objetos bidimensionales y tridimensionales) y la visualización espacial (mantener una forma en la mente y localizar dicha forma en figuras más complejas, combinando formas o asociando orientaciones) son habilidades espaciales fundamentales, esenciales para el aprendizaje de las matemáticas (Linn y Peterson, 1985). Diversos estudios recientes han demostrado que los niños menores de 5 años son capaces de rotar formas mentalmente en imágenes planas. En un estudio, Marmor (1975) expuso que los niños incluso de 5 años consiguen rotar mentalmente imágenes visuales en el plano, para determinar si una imagen coincide con otra. De forma similar, Levine y otros (1999), mostraron que niños de sólo cuatro años y medio son capaces de ejecutar transformaciones mentales que impliquen rotación y traslación con un rendimiento por encima del azar.

En aquellas tareas que requieren visualización espacial (por ej., mantener una imagen, como una letra de imprenta, en la mente, para compararla más tarde con una letra de imprenta estándar), los niños de entre 4 y 5 años encuentran dificultades a menos que la imagen visualizada tenga la misma orientación que el objeto de comparación, mientras que a los niños de entre 6 y 10 años no parecen afectarles las diferencias en orientación (Smothergill y otros, 1975). Es más, la habilidad espacial para manipular la orientación que tienen niños de 7 años, pero no de 3 a 5 años (Test de líneas enmarcadas[8], Test Prescolar de Figuras Enmarcadas), predice futuras habilidades espaciales de visualización mucho más tarde, a los 18 años (Ozer, 1987). Este cambio evolutivo en la habilidad de visualización espacial seguramente refleje diferencias en la habilidad de rotar mentalmente figuras y en la toma de perspectiva. Por tanto, cuanta más habilidad tengan los niños para manipular imágenes mentalmente (por ej., imaginar la letra "F" y rotarla en el sentido de las agujas del reloj o al contrario), serán más precisos al determinar cómo aparecerán esas imágenes desde distintos puntos de vista.

De forma similar, cuando se le pide a un niño que imagine qué aspecto tendrá un objeto desde la perspectiva de otra persona, la tarea será más fácil si puede imaginar mentalmente la escena y moverse él mismo o el objeto, y así tomar la perspectiva de la escena de esa otra persona. Por ejemplo, un niño se sienta frente a una mesa que tiene un coche de juguete a la izquierda de un lápiz. El maestro se sienta al otro lado de la mesa, de cara al niño, y le pregunta si puede colocar el coche y el lápiz para que coincidan con lo que ve el maestro. La tarea resulta más fácil si el niño consigue imaginar la mesa con los dos objetos y "caminar" de mentalmente hasta el otro lado para dar con la respuesta (lápiz a la izquierda, coche a la derecha) o imaginar los objetos y rotarlos mentalmente haciendo que giren 180 grados.

A medida que la habilidad para la rotación mental y la toma de perspectiva se incrementan con el tiempo, estos factores y los cambios en la orientación se vuelven menos problemáticos en aquellas tareas en las que se debe emparejar algo que se muestra con una orientación diferente a la del objeto visualizado. El hecho de que la medida de la visualización espacial temprana a los 3-4 años no correlacione con la visualización espacial más tardía, puede sugerir que la base para las habilidades espaciales, tales como la rotación mental y la toma de perspectiva, se moldean durante estos años de educación inicial y son susceptibles de cambiar, más que durante la educación elemental posterior. Esto tiene implicaciones importantes para los resultados que se han encontrado, que muestran diferencias según el género en el desempeño en tareas como la rotación mental alrededor de los cuatro años y medio (Levine y otros, 1999) y según diferencias socioeconómicas en segundo de primaria (Levine y otros, 2005). Es decir, esas diferencias en la habilidad espacial pueden ser, en su mayor parte, el resultado de diferencias experienciales durante la primera infancia, y el periodo de Educación Infantil puede ser un momento especialmente importante para comenzar a abordar estos aspectos a través de programas educativos que promuevan el aprendizaje espacial[9].

La emergencia temprana de la habilidad para rotar mentalmente puede estar relacionada con la capacidad de los niños de Educación Infantil para usar mapas. Mediante mapas sencillos, los niños de cuatro años y la mayoría de los de tres años pueden localizar un objeto escondido en un arenero (Huttenlocher, Newcombe y Vasilyeva, 1999), los niños de tres a cinco años y medio pueden encontrar un juguete en un espacio abierto (Stea y otros, 2004) y los niños de cinco a seis años pueden moverse por el vestíbulo de un colegio desconocido (Sandberg y Huttenlocher, 2001). Para conseguir llevar a cabo estas tareas, los niños tienen que reconocer la correspondencia entre el mapa y el espacio real con una forma similar y con una distancia a escala (lo que describiremos más adelante en la sección sobre medidas), así como realizar una rotación mental del mapa con respecto al espacio real. El uso correcto de mapas por parte de niños de Educación Infantil se dio cuando los mapas estaban orientados con respecto al espacio, y la rotación mental se limitaba al plano vertical (con el fin de que encaje con la percepción del espacio basada en la experiencia infantil). El incremento en la complejidad de las rotaciones mentales necesarias para realinear espacios causa que los mapas se hagan más complicados para los niños en edad prescolar y seguramente expliquen algunas de las

[8] *Nota del traductor:* El *Rod-and-Frame Test*, traducido aquí como test de líneas enmarcadas, es un test que evalúa ciertos aspectos de la percepción. En él se usan líneas dentro de un marco, para valorar si la percepción de propiedades de las líneas, como la verticalidad, dependen del marco en que se sitúa el segmento.

[9] Recientemente, se han hallado evidencias de diferencias entre sexos en tareas de rotación mental en bebés de 4 y 5 meses, que no son atribuibles a factores experimentales (ver Moore y Johnson, 2008; Quinn y Liben, 2008). Implicaciones de estos estudios sugieren que los niños pueden tener ventaja en el aprendizaje espacial temprano.

dificultades que muestran en interpretar mapas incluso durante Educación Primaria (Liben y Downs, 1989; Liben y Yekel, 1996; Piaget y Inhelder, 1967; Uttal, 1996; Wallace y Veek, 1995). Aunque el nivel de sofisticación de las transformaciones mentales madura mucho a lo largo de toda la infancia, la habilidad inicial para transformar objetos en el espacio de manera mental durante Educación Infantil, permite interacciones productivas con representaciones espaciales, como los mapas.

3.3. Aprendizaje de términos espaciales: relación con las habilidades matemáticas espaciales

Según se ha resumido más arriba, los bebés forman categorías espaciales desde temprana edad (por ej., Quinn, 1994, 2004). Estas categorías visuales pueden suponer las bases del posterior aprendizaje de los términos espaciales que etiqueten esas categorías (por ej., Mandler, 1992). Sin embargo, también es posible que el input lingüístico guíe el aprendizaje de conceptos espaciales, resaltando ciertos conceptos espaciales preverbales y no otros, o quizás conduciendo hacia la formación de nuevos conceptos espaciales. Un ejemplo de cómo el lenguaje puede dar forma a un concepto no verbal ya existente se puede encontrar en evidencias recientes que muestran que los bebés anglohablantes forman categorías para estrecho / suelto, una relación que está etiquetada en coreano, pero no en inglés (por ej., Casasola y Cohen, 2002; Hespos y Spelke, 2004; McDonough, Choi y Mandler, 2003). A los 29 meses, los bebés angloparlantes todavía categorizan relaciones de encaje ajustado en las relaciones entre contenedor/contenido, pero las de encaje holgado ya no. En la edad adulta, los angloparlantes no prestan atención al tipo de encaje, categorizando ajustado y holgado como "dentro" (McDonough, Choi y Mandler, 2003). Por tanto, en este caso la exposición a la lengua inglesa parece jugar una función selectiva, destacando algunas categorías preexistentes ("dentro" frente a "encima") y minimizando otras (encaje ajustado / encaje holgado).

La exposición al lenguaje espacial durante las experiencias espaciales también parece ser particularmente útil en "el aprendizaje y retención (de los conceptos espaciales)... animando a los niños a almacenar la información y su etiqueta" (Gentner, 2003, pp. 207-208). Gentner descubrió que los niños que habían escuchado etiquetas de carácter específicamente espacial durante un experimento de laboratorio en el que se escondían objetos ("voy a poner esto encima / dentro / debajo de la caja") fueron capaces de encontrar con más facilidad dichos objetos que los niños a los que se les había dado una referencia general de localización ("voy a poner esto aquí"). Es más, continuaba siendo así incluso dos días después, sin más exposición al lenguaje espacial (Loewenstein y Gentner, 2005). De forma similar, Szetcher y Liben (2004) observaron en el laboratorio a padres e hijos mientras leían un libro infantil con contenido gráfico espacial. Estos investigadores encontraron relación entre la frecuencia con la que los padres dirigían la atención de los niños al contenido gráfico espacial durante la lectura (por ej., "el gallo ahora es muy pequeñito") y el desempeño de los niños en tareas de comprensión espacial – gráfica.

Cannon, Levine y Huttenlocher (2007) han examinado también el uso del lenguaje espacial que hacen los padres durante el juego con puzles, en un estudio longitudinal en el cual se observaban las diadas padre / niño durante interacciones naturales cada cuatro meses, de los 26 a los 46 meses. Sus hallazgos muestran que el juego con puzles se correlaciona con la habilidad para la rotación mental a los 54 meses, tanto en niños como en niñas. Sin embargo, en las chicas pero no en los chicos, la cantidad de lenguaje espacial que usan los padres durante el juego de puzles (controlando sobretodo el input lingüístico) es también un predictor significativo la habilidad de rotación mental a los 54 meses. Este descubrimiento puede estar relacionado a las diferencias de género en la forma en que se codifica la información (por ej., Kail, Carter y Pellegrino, 1979; Lourenco, Huttenlocher y Fabian, en revisión).

3.4. Comprensión de las formas geométricas y la composición de formas

Varias propuestas han influido en el modo de ver las categorías de formas en los niños. Piaget e Inhelder (1967) propusieron una secuencia de desarrollo según la cual los niños primero discriminan los objetos en base a rasgos topológicos (por ej., una forma cerrada, que tiene un espacio interno definido por el límite cerrado, frente a una forma abierta sin límites internos o externos definidos) y únicamente más tarde en base a rasgos euclidianos, como rectilíneo frente a curvilíneo. Aún más tarde, según esta teoría, los niños son capaces de discriminar entre formas rectilíneas (por ej., cuadrados y diamantes). Sin embargo, esta secuencia ha sido cuestionada a partir de la evidencia de que los niños pequeños son capaces de representar tanto los aspectos proyectivos de la forma (por ej., curvilíneos o rectilíneos), como los euclídeos (Clements y Battista, 1992; Ginsburg y otros, 2006; Kato, 1986; Lovell, 1959).

Otro marco teórico basado en etapas, propuesto por van Hiele (1986), plantea que los niños primero identifican formas a nivel visual en base a su aspecto, luego a nivel "descriptivo" en base a sus propiedades, y finalmente progresan hacia clases más formales de pensamiento geométrico basadas en habilidades lógicas de razonamiento. De acuerdo con la primera etapa de van Hiele, las categorías de forma elaboradas por niños de Educación Infantil se centran en prototipos y el parecido en cualidades perceptivas superficiales de las formas se utiliza para determinar la inclusión de clases. Por ejemplo, los niños de Educación Infantil no aceptan un triángulo invertido o los triángulos no isósceles como triángulos (por ej., Clements y otros, 1999). Además, tienden a considerar a los cuadrados como una categoría propia, y no como una clase especial de rectángulo con los cuatro lados iguales (Clements y otros, 1999). Los niños de Educación Infantil en ocasiones sobregeneralizan etiquetas de forma a no ejemplares. Por ejemplo, a veces extienden la etiqueta "rectángulo" a trapezoides, así como a paralelogramos que tienen dos lados mucho más largos que los otros dos (Hannibal y Clements, 2008).

Durante los años de educación primaria, las categorías de forma incorporan un conocimiento más profundo de las reglas y teorías que son definitorias (Burger y Shaughnessy, 1986; Satlow y Newcombe, 1998). El momento en que se pasa de depender de características perceptivas típicas a depender de características dadas por definiciones varía dependiendo de la forma. Por ejemplo, Satlow y Newcombe (1998) informan que este cambio se da entre los 3 y los 5 años para círculos y rectángulos, antes de segundo grado, para los triángulos, y durante segundo grado, para los pentágonos. Durante educación infantil, el cambio principal en la clasificación atendiendo a la forma es una tendencia creciente a aceptar ejemplares atípicos como miembros de la categoría – esto es, a extender las categorías de forma más allá de los ejemplares prototípicos (por ej., Burger y Shaughnessy, 1986; Usiskin, 1987). La habilidad para ampliar categorías de formas para incluir ejemplos no prototípicos depende de la exposición a distintos ejemplares más que sólo a ejemplos prototípicos, como triángulos equiláteros e isósceles (Por ej., Clements y otros, 1999). Ni la teoría de etapas de Piaget ni la de van Hiele reconocen la habilidad de los niños de educación infantil para representar y clasificar formas.

El aprendizaje infantil de términos espaciales específicos también ayuda a resaltar categorías espaciales. Estos términos espaciales incluyen vocabulario de formas geométricas (por ej., círculo, cuadrado, triángulo, rectángulo), así como palabras que describen rasgos espaciales (por ej., curvado, recto, línea, lado, esquina, ángulo), dimensiones espaciales (por ej., grande, pequeño, largo, corto, ancho, estrecho) y relaciones espaciales (frente a, detrás, junto a, entre, sobre, debajo de). Entre los dos y los cuatro años, los niños aprenden términos para formas nuevas con mayor facilidad que otras características, tales como un color nuevo o palabras relacionadas con texturas (Heibeck y Markman, 1987; O'Hanlon y Roberson, 2006). Fuson y Murray (1978) encontraron que más del 60% de los niños de tres años pueden nombrar un círculo, un cuadrado y un triángulo. A los cinco años, el 85% pueden nombrar un círculo, el 78% un cuadrado, y el 80% un triángulo. Además, el 44% pueden nombrar correctamente un rectángulo (Klein, Starkey y Wakesley, 1999). En un estudio de comprensión de vocabulario de formas geométricas, los resultados fueron similares.

Clements y otros (1999) informaron que más del 90% de los niños con edades comprendidas entre los 3 años y 5 meses y los 4 años y 4 meses supieron señalar correctamente un círculo; sobre los 6 años lo hicieron el 99% de los niños. Sólo unos pocos niños del grupo de menor edad eligieron incorrectamente una elipse o alguna otra forma curva. Si se trataba de un cuadrado, los números también fueron altos, pero no tanto: respondió correctamente el 82% de los niños de menor edad y el 91% de los de 6 años. Algunos de los niños más pequeños identificaron de manera incorrecta rombos como cuadrados. La precisión en el caso de los triángulos y los rectángulos fue significativamente inferior (60% y 50%, respectivamente, en los niños con edades de 4 a 6 años).

Los niños también aprenden palabras espaciales para las dimensiones de las formas (por ej., grande, pequeño, largo, corto, ancho, estrecho) y palabras para las relaciones entre formas (por ej., en, sobre, debajo de, frente a, detrás de, entre). Por ejemplo, Clark (1972) expone que para cada par de adjetivos dimensionales, los niños aprenden el término no marcado antes que el marcado, es decir, aprenden grande antes que pequeño. Nótese que preguntar cómo es de grande una cosa no presupone que sea grande o pequeña, mientras que preguntar cómo es de pequeña conlleva la presuposición de que se está hablando de cosas pequeñas. Lo mismo se aplica para otros pares como largo/corto. El aprendizaje de estos términos, al igual que otras palabras, está muy relacionado con la frecuencia de ocurrencia en el discurso dirigido de los niños (por ej., Levine y otros, 2008).

Se ha descubierto que los niños que escuchan mayor cantidad de lenguaje espacial tienen un mejor desempeño en diversas tareas espaciales no verbales, incluyendo el subtest de Diseño de Bloques del WPPSI-3, y en tareas de rotación mental (Levine y otros, 2008). Esta correlación puede basarse en la asociación entre lenguaje espacial y actividades espaciales. Además, el lenguaje espacial puede servir para focalizar la atención de los niños en las relaciones espaciales y conducir a un procesamiento más completo de esta información (por ej., la formación de categorías de formas y relaciones espaciales). Sin embargo, se ha descubierto que el lenguaje espacial usado por las familias se da con mayor frecuencia en actividades tales como el juego con bloques y puzles que durante otras como la lectura de libros (Levine y otros, 2008; Shallcross y otros, 2008). Es más, la cantidad de lenguaje espacial utilizado por los padres es mayor durante el juego con bloques guiado en el cual existe un objetivo que el juego libre (Shallcross y otros, 2008). Por lo tanto, es posible que las actividades espaciales, el lenguaje espacial o ambos, fomenten el desarrollo de habilidades espaciales, tales como la construcción con bloques y la rotación mental.

3.5. Resumen

Al igual que en el caso del número, hay puntos de partida sólidos durante la infancia para el aprendizaje sobre el espacio, incluyendo formas, ubicaciones, distancias, y relaciones espaciales. Estos puntos de partida tempranos, de la misma manera que en el caso del número, experimentan su mayor desarrollo durante los años de Educación Infantil y más adelante. Además, los índices de desarrollo y las competencias adquiridas dependen en gran manera del acceso a actividades espaciales, lenguaje espacial y las oportunidades de aprendizaje en casa y en la escuela.

Los niños son capaces de comprender y razonar sobre la forma a edades más tempranas y con un grado más complejo de detalle de lo que anteriormente se pensaba. Durante la educación infantil, los niños se benefician del aprendizaje de diversas formas, tanto típicas como atípicas, y este conocimiento está influido por la adquisición del lenguaje espacial. La aportación lingüística y las actividades espaciales parecen influir notablemente en el desarrollo de las categorías y destrezas espaciales durante los años de Educación Infantil.

4. Desarrollo de la medición

La medición es un aspecto fundamental de las matemáticas, que "crea puentes entre dos áreas principales de las matemáticas escolares (la geometría y el número)" a través de la unión del número a las dimensiones espaciales (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). El desarrollo de las habilidades de medición suele comenzar con la comparación directa de objetos a lo largo de una dimensión. Por ello, los niños generalmente miden de forma correcta la longitud antes que el área y el volumen (Hart, 1984; pero ver Curry y Outherd, 2005, para tareas en las que se mide adecuadamente el volumen al llenar un contenedor).

Ciertas destrezas, como la sensibilidad a las variaciones en cantidad, pueden entenderse como precursores de habilidades de medición más maduras, y se han visto en niños pequeños. La capacidad para comparar directamente la longitud de objetos es una habilidad que surge de manera temprana, e inicialmente parece tener una base perceptiva (Boulton-Lewis, 1987). Los bebés demuestran ser conscientes de variaciones en cantidad en una dimensión (por ej., darse cuenta de la altura) incluso a los cuatro meses de edad (Baillargeon, 1991) y a los seis meses saben discriminar entre dos objetos basándose en la altura (Gao, Levine y Huttenlocher, 2000). Por ejemplo, los bebés de seis meses y los niños de dos años son capaces de discriminar la longitud de unos tacos de madera cuando aparecen en presencia de un estándar constante y alineado, pero no cuando no hay un estándar disponible con el que compararlo (Huttenlocher, Duffy y Levine, 2002).

Estudios posteriores han mostrado que los bebés y los niños pequeños responden al tamaño relativo del estándar y de los objetos del test (Duffy, Huttenlocher y Levine, 2005a, 2005b). Este resultado es acorde con la teoría (Bryant, 1974) de que la codificación relativa precede a la absoluta. La habilidad para discriminar longitudes de forma más precisa (distinguiendo dos alturas que sean muy similares, sin la presencia de un estándar alineado) se desarrolla en algún momento entre los dos y los cuatro años. Sin embargo, aún a los cuatro años, la sensibilidad de los niños a las variaciones en el tamaño está a menudo influida por la relación entre dos objetos.

Esta temprana dependencia en un estándar para evaluar el tamaño puede parecer en contraste con los descubrimientos de Piaget y sus colaboradores, que muestran que los niños pequeños no utilizan de manera espontánea un estándar para medir objetos (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960). Piaget y sus colaboradores argumentaron que, antes de la edad escolar, la habilidad de los niños para codificar información métrica es limitada porque carecen de la capacidad de hacer inferencias transitivas que se necesitan en la medición, es decir, si A = B (en medida) y B = C, entonces A y C son equivalentes. Sin embargo, a diferencia de la tarea de Piaget y sus colaboradores, en la que se requería que el niño utilizase espontáneamente un palito para comparar las alturas de dos torres que no están alineadas (N. del tr.: con sus bases a diferentes alturas), los experimentos que muestran una destreza mucho más temprana suponen el uso de un estándar visualmente alineado.

Hasta aquí hemos debatido sobre el desarrollo de la habilidad de discriminar extensiones lineales, y no la comprensión de la equivalencia o no equivalencia de esas extensiones, o la sensibilidad a las transformaciones de cantidad (añadir o sustraer cantidades). A pesar de que, tal y como se ha revisado antes, los investigadores han examinado estos temas con respecto a conjuntos discretos, hay muy pocos trabajos en relación a cantidades continuas. Sin embargo, algunas evidencias indican que la habilidad para ordenar cantidades continuas está presente al menos en los años de Educación Infantil. Por ejemplo, Brainerd (1973) encontró que los niños de esta etapa son capaces de organizar tres barras de arcilla de acuerdo con su peso, y tres palos de acuerdo a su longitud.

4.1. La comprensión de las unidades y la medición convencional

La sensibilidad temprana a la extensión lineal en relación a un estándar queda lejos de la habilidad más madura para medir la longitud. Hasta los ocho años los niños normalmente no son capaces de discriminar entre objetos de diferente longitud cuando no está presente un estándar constantemente alineado. Esta habilidad es mucho más cercana a la medición convencional que las habilidades mostradas por los niños hasta 4 años (Duffy y otros, 2005a). Estos cambios en la sensibilidad hacia la variación de cantidad que se dan entre los 4 y los 8 años pueden estar relacionados con la exposición a mediciones convencionales en el colegio y con la habilidad de formar y mantener imágenes con determinados atributos. Sin embargo, el desarrollo de una comprensión conceptual sofisticada de la medición lineal tiene una trayectoria de evolución sorprendentemente larga en el tiempo (por ej., Copeland, 1979; Hiebert, 1981, 1984; Miller, 1984, 1989).

La medición convencional requiere diversas operaciones básicas. En primer lugar, es importante darse cuenta de que las unidades deben tener el mismo tamaño y estar especificadas. En segundo lugar, la unidad escogida deberá repetirse si es más pequeña que el objeto que se está midiendo. Para finalizar, dicha unidad deberá subdividirse, cuando no cubra completamente el objeto o la parte restante del objeto (Nunes, Light y Mason, 1993).

Los niños pequeños tienen dificultad en comprender la importancia de utilizar una unidad que tenga siempre el mismo tamaño. Miller (1984) mostró que niños de educación infantil, entre las edades de 4 y 5 años, tenían dificultades en apreciar que el tamaño de los objetos (unidades) debía permanecer constante en las situaciones de medición. En un ejemplo bastante conocido, Miller encontró que niños en edad prescolar, a los que se pedía que repartieran equitativamente caramelos entre niños, consideraban justo partir el último por la mitad si se les acababan los caramelos. En otras palabras, siempre que cada uno obtenga un trozo, no les importa que los tamaños de los trozos no sean iguales. En un estudio con niños de 5 y 6 años, en que se diseñaban reglas escribiendo los números, Nunes y Bryant (1996) encontraron que los niños fallaban en espaciar los números de manera aproximadamente igual. En otro informe de investigación de Nunes y Bryant, niños de edades entre 5 y 7 años no tuvieron problemas en responder si una cinta de 7 cm, u otra de 6 cm, era más larga. Sin embargo, cuando les preguntaron cuál era más larga, entre una cinta de 2 pulgadas o una de 2 cm, los niños de 5 años mostraron un nivel de acierto equivalente a responder al azar. Aunque los niños de 7 años tuvieron un rendimiento superior al azar, su ejecución fue significativamente inferior cuando las unidades eran desiguales que cuando eran iguales, incluso aunque todos los niños supieran que una pulgada tiene mayor longitud que un centímetro. Incluso los niños de primer a tercer grado tienen dificultad en comprender la importancia de que las unidades en la regla tengan el mismo tamaño. Pettito (1990) dio a niños de educación primaria varias reglas para elegir una con la que debían medir un segmento. Encontró que la mayoría de niños de primer y segundo curso de primaria aceptaban usar una regla cuyas unidades variaban en tamaño –de hecho, solo cerca de la mitad de los alumnos de tercero elegían la unidad estándar.

Los niños en edad prescolar tienen dificultad en comprender que los cambios en las unidades de medida cambian la respuesta numérica (1 pie = 12 pulgadas), pero no la longitud del objeto medido. A los niños de Educación Infantil habitualmente les cuesta captar la propiedad fundamental de una unidad, que un objeto completo puede segmentarse en partes de varios tamaños sin cambiar la cantidad global de lo que se está midiendo. A menudo, cuentan las partes discretas de los objetos como ejemplos de un todo en lugar de agrupar objetos y contar cantidades en base a unidades significativas (por ej., las dos mitades de un huevo de plástico cuentan como un huevo cada una, en vez de que la combinación de las dos partes sean un huevo) (Shipley y Shepperson, 1990; Sophian y Kailihiwa, 1998). De forma similar, Galperin y Georgiev (1969) dieron a niños de Educación Infantil dos tazas iguales llenas de arroz, y luego hicieron que las vaciaran haciendo montones sobre una mesa, usando una cuchara sopera o una de postre. Cuando se preguntó qué grupo de montoncitos contenía más arroz (la respuesta correcta era ninguno), la mayoría de los niños eligió el que habían formado con la cuchara de postre, porque contenía más montones, en lugar de escoger el grupo hecho con la cuchara de sopa, que tenía menos montones, pero más grandes. Es decir, estuvieron influidos por su propensión a contar el número total de montones. En este sentido, la habilidad infantil para el conteo puede interferir con su comprensión de la medición. Estos descubrimientos resaltan que las relaciones parte-todo son fundamentales para entender la relación entre unidades y todos (ver Sophian, 2002, para una revisión).

Una comprensión más madura de las unidades de medida también implica darse cuenta de que, cuanto más pequeña es la unidad, mayor será el número de unidades que el objeto abarcará. La investigación de Sophian, Garyantes y Chang (1997) mostró que los niños de preescolar tienen dificultades en entender esta relación inversa, pero que pueden aprenderla con instrucción. Los niños pequeños sí muestran cierta comprensión de los principios de la medición, tales como la relación inversa entre el tamaño de la unidad y el número de unidades, después de un periodo de instrucción o cuando las actividades de medición se sitúan en un contexto familiar (por ej., parte de una rutina cotidiana, o con el uso de objetos familiares). Sophian (2002) enseñó a niños con edades comprendidas entre los 3 y los 4 años a juzgar correctamente si cabría mejor un objeto pequeño o uno grande en un espacio determinado. En las pruebas anteriores al test, los niños elegían, de forma incorrecta, el objeto más grande, pero después de seis demostraciones del experimentador, en las que éste ubicaba objetos de los dos tamaños, uno a uno, en dos contenedores idénticos, los resultados en las pruebas post-test fueron significativamente mejores. Estos resultados identifican las dificultades que los niños muy pequeños tienen para comprender las unidades, y sugieren que los niños de Educación Infantil (de entre 2 años 9 meses a 4 años 7 meses) se benefician de la intervención instruccional que destaque la relación entre tamaño de la unidad y el número. De este modo, los niños muestran cierta comprensión de conceptos matemáticos fundamentales que son relevantes para la medición, si se les da la oportunidad de explorar esos conceptos en contextos interactivos y que faciliten un mayor apoyo.

4.2. Escalas y proporciones

Los niños demuestran un uso temprano de habilidades fundamentales relacionadas con la medición y el razonamiento proporcional en el uso de mapas. Un factor crítico para el uso correcto de los mapas es la escala, que está relacionada con la medición y el razonamiento proporcional. La escala se refiere a la capacidad de codificar la distancia y entender cómo se corresponde la distancia en un mapa con la del mundo real (Huttenlocher y otros, 1999). Newcombe y Huttenlocher (2000, 2005) revisan la naturaleza jerárquica de la codificación espacial, lo que sugiere que hay disponibles varios sistemas de codificar la ubicación espacial, y que su uso depende de diversos factores (por ej., lo llamativo de las referencias en el entorno externo, la complejidad de los movimientos requeridos para la acción por parte del observador). Además, estos sistemas ya están disponibles a los seis meses de edad tanto para los sistemas con referencia externa como para aquellos centrados en el observador, mucho antes de lo que, por lo general, se describe en la literatura sobre el tema. En relación al uso de mapas, los niños necesitan, no sólo codificar las ubicaciones en el espacio, sino también adaptarse a los cambios en la escala, lo que exige una forma de medición (por ej., comparar la distancia entre dos localizaciones en un mapa y la distancia correspondiente en el mundo real). Se ha considerado que la escala implicaba razonamiento proporcional y que por tanto debía darse en un momento mucho más avanzado del desarrollo, entre los 10 y los 12 años (Piaget e Inhelder, 1967). Sin embargo, las evidencias de usos correctos de mapas en niños de 3 a 6 años, indican que la escala, al menos en estos casos puede representar un precursor de formas más precisas de medición, y se consigue a través de la codificación espacial (Huttenlocher y otros, 1999; Sandberg y Huttenlocher, 2001; Stea y otros, 2004).

5. Regulación de la conducta y la atención

El desarrollo matemático de los bebés y los niños pequeños también tiene lugar en el contexto de la regulación cognitiva y conductual, que si se estimula y apoya apropiadamente, puede potenciar el aprendizaje matemático. Diversas investigaciones sugieren que la función ejecutiva se asocia con mayor intensidad a una adecuada transición a la escolarización formal que el IQ, la lectura de "nivel de entrada", o las habilidades matemáticas (Diamond, 2008). La función ejecutiva se define a partir de tres componentes centrales (Diamond, 2008). El primero es el control inhibitorio, que es la habilidad de seguir una tarea y hacer lo que sea más necesario, a pesar de la inclinación o impulso a hacer otra cosa. El segundo es la memoria de trabajo, que es la capacidad de mantener información en la mente a pesar de estar manipulándola o cambiándola mentalmente; "la memoria de trabajo debe considerarse como un 'espacio de trabajo' a corto plazo que puede almacenar información de forma temporal mientras un participante está implicado en otras tareas" (Passolunghi, Vercelloni y Schadee, 2007, p. 166). En matemáticas, concretamente, esto posibilita realizar mentalmente operaciones aritméticas, como la adición o la sustracción. El tercer componente es la flexibilidad cognitiva, que permite poder cambiar entre diversas tareas, demandas, prioridades o perspectivas. Según explica Diamond, la función ejecutiva, y particularmente el componente relativo al control inhibitorio, es muy similar a la auto-regulación, pero tiende a centrarse más en tareas cognitivas y menos en situaciones sociales. Hay numerosas habilidades relacionadas con la función ejecutiva que pueden ser valiosas en el aprendizaje matemático temprano, como la habilidad para continuar en una tarea e ignorar las distracciones, la capacidad de seguir las instrucciones del maestro, la habilidad de mantener dos estrategias mentales al mismo tiempo, la motivación para el éxito, la capacidad de planear y reflexionar sobre las propias acciones y la habilidad para cooperar (Leong, n.d.; McClelland y otros, 2007).

El vínculo entre el rendimiento en matemáticas y la función ejecutiva puede tener diversas causas subyacentes. Blair y sus colaboradores (2007) revisaron investigaciones neurocientíficas que indicaban que, en adultos, puede haber una relación entre las habilidades matemáticas y el funcionamiento ejecutivo a nivel neuronal. Al revisar los cambios en el currículo de matemáticas, también encontraron que, cada vez más, se enfatiza en menor medida el conocimiento automático, y más las tareas que requieren habilidades relacionadas con la función ejecutiva (resolución de patrones, razonamiento relacional y conceptos geométricos). Según se lleven a cabo más investigaciones, esta área continuará arrojando luz sobre la relación entre la función ejecutiva y el desarrollo matemático.

Algunos estudios han encontrado de forma explícita un vínculo entre la función ejecutiva y las habilidades matemáticas tempranas. En un estudio con 170 niños participantes en el programa "Head Start[10]", Blair y Razza (2007) descubrieron que múltiples aspectos de la auto-regulación (incluyendo el control inhibitorio, el control esforzado y la comprensión de falsas creencias, junto con la inteligencia fluida) realizan contribuciones independientes al conocimiento matemático infantil temprano. De forma similar, McClelland y colaboradores (2007) administraron el test *Head to Toes Task* a más de 300 niños en edad preescolar. En esta tarea, se pide a los niños que hagan lo contrario de lo que el instructor les diga. Así que, por ejemplo, si el instructor les pide que se toquen la cabeza, los niños se tienen que tocar los dedos de los pies. Esta tarea mide la regulación conductual (un componente de la auto-regulación) en la que se exige a los niños emplear el control inhibitorio, la atención y la memoria de trabajo. Los investigadores encontraron que la puntuación en regulación de conducta predecía significativamente las puntuaciones en matemática emergente. Concluyeron que "el fortalecimiento de la atención, la memoria de trabajo y las habilidades de control inhibitorio antes de los 5-6 años pueden ser una forma efectiva de asegurar que los niños también tengan una base de habilidades

[10] *Nota del traductor:* El programa *Head Start* nace en Estados Unidos en 1965 con el fin de facilitar la transición de la educación preescolar a la educación primaria. Sus objetivos principales son garantizar el bienestar físico y emocional de los pequeños y promover el desarrollo de las destrezas básicas necesarias para iniciar la escolaridad. En 2005, habían participado en este programa 22 millones de niños y niñas.

académicas tempranas" (p. 956). Espy y colaboradores (2004) estudiaron de forma específica el papel de la memoria de trabajo y el control inhibitorio en casi 100 niños de Educación Infantil. Descubrieron que ambos componentes de la función ejecutiva contribuían a la competencia matemática infantil, siendo el control inhibitorio el más prominente. Passolunghi y colaboradores (2007) estudiaron a 170 niños de 6 años en Italia. Examinaron el papel de la memoria de trabajo, la habilidad fonológica, la competencia numérica y el IQ en la predicción de logros matemáticos. Encontraron que las habilidades de la memoria de trabajo predecían de forma significativa el aprendizaje de las matemáticas al comienzo de Educación Primaria.

6. Resumen

Este capítulo subraya el hecho de que los niños pequeños poseen un mayor conocimiento matemático, en términos de pensamiento numérico y espacial, de lo que se antes se pensaba. Desde muy pronto, los bebés son capaces de distinguir entre conjuntos de tamaño grande, por ejemplo, un conjunto de 8 objetos de otro de 16, pero su habilidad para ello es sólo aproximada y está limitada por la ratio entre el número de objetos en los conjuntos. Se cree que la limitación en el tamaño de los conjuntos refleja uno de los dos sistemas fundamentales para el número (Feigenson, Dehaene y Spelke, 2004; Spelke y Kinzler, 2007). Además, el conocimiento temprano sobre la cantidad en niños pequeños es implícito, en cuanto a que no usan palabras numéricas, lo que significa que aprender estas palabras numéricas y relacionarlas con los objetos es una de las tareas más importantes en el desarrollo en la primera infancia.

Los bebés y los niños de prescolar evolucionan a lo largo de la infancia desde un conocimiento numérico implícito hacia un conocimiento numérico formal. Las palabras numéricas, los símbolos numéricos escritos y métodos culturales de resolución son importantes herramientas que sustentan esta progresión evolutiva.

Los niños pequeños también aprenden sobre el espacio, incluyendo formas, posiciones, distancias y relaciones espaciales, que también muestran un gran desarrollo durante los primeros años. La adquisición del lenguaje espacial juega un papel importante en el desarrollo de habilidades y categorías espaciales. Además de aprender sobre los números y las formas, en la primera infancia también se desarrolla la medición, aspecto fundamental de las matemáticas que conecta la geometría y los números. La comprensión infantil sobre la medición comienza con la longitud, basada en la percepción, y un rasgo importante de su aprendizaje durante este periodo es que los niños tienen dificultades para comprender las unidades de medida, pero pueden superarlas con una enseñanza adecuada.

También es importante destacar que, a lo largo de la primera infancia, el desarrollo matemático se sitúa en un entorno que promueve la regulación de las actividades cognitivas, y que la conducta puede mejorar ese desarrollo matemático. Específicamente, cuando los niños pequeños tienen la oportunidad de practicar de forma continua en una misma tarea, mantener información en la mente mientras la manipulan o la cambian mentalmente, y practicar el cambio entre diferentes tareas, mejora el aprendizaje matemático y a su vez mejoran estos procesos regulatorios.

Aunque en este capítulo exponemos puntos de partida universales para el desarrollo matemático, es evidente que hay diferencias entre los niños. El siguiente capítulo explora la variación en el desarrollo matemático infantil y en los resultados del aprendizaje, y las fuentes de esta variación. También debatiremos el papel de la familia y las experiencias informales de aprendizaje matemático en el estímulo del desarrollo matemático.

Referencias

Aguiar, A., and Baillargeon, R. (1998). Eight-and-a-half-month-old infants' reasoning about containment events. *Child Development, 69*, 636-653.

Ansari, D., Donlan, C., Thomas, M.S.C., Ewing, S.A., Peen, T., and Karmiloff-Smith, A. (2003). What makes counting count: Verbal and visuo-spatial contributions to typical and atypical number development. *Journal of Experimental Child Psychology, 85*, 50-62.

Antell, S.E., and Keating, L.E. (1983). Perception of numerical invariance by neonates. *Child Development, 54*, 695-701.

Baillargeon, R. (1991). Reasoning about the height and location of a hidden object in 4.5 and 6.5 month-old children. *Cognition, 38*, 13-42.

Baillargeon, R. (1995). Physical reasoning in infancy. In M.S. Gazzaniga (Ed.), *The Cognitive Neurosciences* (pp. 181-204). Cambridge, MA: Bradford Press.

Barth, H., LaMont, K., Lipton, J. and Spelke, E.S. (2005). Abstract number and arithmetic in preschool children. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 102*, 14116-14121.

Barth, H., LaMont, K., Lipton, J., Dehaene, S., Kanwisher, N., and Spelke, E. (2006). Nonsymbolic arithmetic in adults and young children. *Cognition, 98*, 199-222.

Blair, C., and Razza, R.P. (2007). Relating effortful control, executive function, and false belief understanding to emerging math and literacy ability in kindergarten. *Child Development, 78*, 647-663.

Blair, C., Knipe, H., Cummings, E., Baker, D.P., Gamson, D., Eslinger, P., and Thorne, S.L. (2007). A developmental neuroscience approach to the study of school readiness. In R.C. Pianta, M.J. Cox, and K.L. Snow (Eds.), *School Readiness and the Transition to Kindergarten in the Era of Accountability* (pp. 149-174). Baltimore, MD: Paul H. Brookes.

Bomba, P.C., and Siqueland, E.R. (1983). The nature and structure of infant form categories. *Journal of Experimental Child Psychology, 35*, 294-328.

Boulton-Lewis, G.M. (1987). Recent cognitive theories applied to sequential length measuring knowledge in young children. *British Journal of Educational Psychology, 57*, 330-342.

Boysen, S.T. and Berntson, G.G. (1989). Numerical competence in a chimpanzee (Pan troglodytes). *Journal of Comparative Psychology, 103*, 23-31.

Brainerd, C.J. (1973). Mathematical and behavioral foundations of number. *Journal of General Psychology, 11*, 369-381.

Brannon, E.M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition, 83*, 223-240.

Brannon, E.M., and Terrace, H.S. (1998). Ordering of the numerosidades 1 to 9 by monkeys. *Science, 282*, 746-749.

Brannon, E.M., and Terrace, H.S. (2000). Representation of the numerosidades 1-9 by rhesus macaques (Macaca mulatta). *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes, 26*, 31-49.

Brannon, E.M., Wushoff, C.J., Gallistel, C.R., and Gibbon, J. (2001). Numerical subtraction in the pigeon: Evidence for a linear subjective number scale. *Psychological Science, 12*, 238-243.

Brannon, E.M., Abbott, S., and Lutz, D. (2004). Number bias for the discrimination of large visual sets in infancy. *Cognition, 93*, B59-B68.

Bruner, J., Goodnow, J., and Austin, A. (1956). *A Study of Thinking*. New York: Wiley.

Bryant, P.E. (1974). *Perception and Understanding in Young Children*. London: Methuen.

Burger, W.F., and Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 31-48.

Bushnell, E.W., McKenzie, B.E., Lawrence, D., and Connell, S. (1995). The spatial coding strategies of 1-year-old infants in a locomotor search task. *Child Development, 66*, 937-958.

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 46*(1), 3-18.

Cannon, J., Levine, S.C., and Huttenlocher, J. (2007, March). *Sex Differences in the Relation of Early Puzzle Play and Mental Rotation Skill*. Paper presented at the biennial meeting of the Society for Research on Child Development, Boston, MA.

Cantlon, J.F., and Brannon, E.M. (2006). Shared system for ordering small and large numbers in monkeys and humans. *Psychological Science, 17*, 401-406.

Cantlon, J., Fink, R., Safford, K., and Brannon, E. (2007). Heterogeneity impairs numerical matching but not numerical ordering in preschool children. *Developmental Science, 10*, 431-441.

Carey, S. (2004). Bootstrapping and the origins of concepts. *Daedalus*, 59-68.

Casasola, M., and Cohen, L.B. (2002). Infant categorization of containment, support and tight-fit spatial relationships. *Developmental Science, 5*, 247-264.

Clark, E. (1972). On the child's acquisition of antonyms in two semantic fields. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 11*, 750-758.

Clearfield, M.W. (2004). Infants' enumeration of dynamic displays. *Cognitive Development, 19*(3), 309-324.

Clearfield, M.W., and Mix, K.S. (1999). Number versus contour length in infants' discrimination of small visual sets. *Psychological Science, 10*, 408-411.

Clearfield, M.W., and Mix, K.S. (2001). Infants' use of area and contour length to discriminate small sets. *Journal of Cognition and Development, 2*, 243-260.

Clements, D.H., and Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.

Clements, D.H., and Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 461-555). New York: Information Age.

Clements, D.H., Swaminathan, S., Hannibal, M.A.Z., and Sarama, J. (1999). Young children's concept of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*, 192-212.

Cohen, L.B., and Marks, K.S. (2002). How infants process addition and subtraction events. *Developmental Science, 5*, 186-201.

Cooper, R.G., Jr. (1984). Early number development: Discovering number space with addition and subtraction. In C. Sophian (Ed.), *Origins of Cognitive Skills* (pp. 157-192). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Copeland, R.W. (1979). *How Children Learn Mathematics: Teaching Implications of Piaget's Research* (3rd ed.). New York: Macmillan.

Cordes, S., and Brannon, E.M. (2008). The difficulties of representing continuous extent in infancy: Using numbers is just easier. *Child Development, 79*, 476-489.

Cordes, S., and Brannon, E.M. (in press). The relative salience of discrete and continuous quantity in infants. *Developmental Science*.

Curry, M., and Outhred, L. (2005). Conceptual understanding of spatial measurement. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, and A. Roche (Eds.), Building Connections: Theory, Research and Practice (*Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Melbourne, pp. 265-272). Sydney: MERGA.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S., Dehaene-Lambertz, G., and Cohen, L. (1998). Abstract representations of numbers in the animal and human brain. *Trends in Neurosciences, 21*, 355-361.

DeLoache, J.S., Strauss, M., and Maynard, J. (1979). Picture perception in infancy. *Infant Behavior and Development, 2*, 77-89.

Demany, L., McKenzie, B., and Vurpillot, E. (1977). Rhythm perception in early infancy. *Nature, 266*, 218-219.

Diamond, A. (2008, June). Cognitive control (executive functions) in young children: Relevance of what we know to what can be done to help children. In *Emotion Regulation, Children's Brains and Learning*, plenary session presented at Head Start's Ninth National Research Conference, Washington, DC.

Diamond, A., Barnett, W.S., Thomas, J., and Munro, S. (2007). Preschool program improves cognitive control. *Science, 318*, 1387-1388.

Duffy, S., Huttenlocher, J., and Levine, S.C. (2005a). It's all relative: How young children encode extent. *Journal of Cognition and Development, 6*, 51-63.

Duffy, S., Huttenlocher, J., and Levine, S.C. (2005b). How infants encode spatial extent. *Infancy, 8*, 81-90.

Espy, K.A., McDiarmid, M.M., Cwik, M.F., Stalets, M.M., Hamby, A., and Senn, T.E. (2004). The contribution of executive functions to mathematic skills in preschool children. *Developmental Neuropsychology, 26*, 465-486.

Feigenson, L., and Carey, S. (2003). Tracking individuals via object-files: Evidence from infants' manual search. *Developmental Science, 6*, 568-584.

Feigenson, L., and Carey, S. (2005). On the limits of infants' quantification of small object arrays. *Cognition, 97*, 295-313.

Feigenson, L., and Halberda, J. (2004). Infants chunk object arrays into sets of individuals. *Cognition, 91*, 173-190.

Feigenson, L., Carey, S., and Hauser, M. (2002). The representations underlying infants' choice of more: Object files vs. analog magnitudes. *Psychological Science, 13*, 150-156.

Feigenson, L., Carey, S., and Spelke, L. (2002). Infants' discrimination of number vs. continuous extent. *Cognitive Psychology, 44*, 33-66.

Feigenson, L., Dehaene, S., and Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences, 8*, 307-314.

Fennema, E.H., and Sherman, J.A. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization, and affective factors. *American Education Research Journal, 14*, 51-71.

Fennema, E.H., and Sherman, J.A. (1978). Sex-related differences in mathematics achievement and related factors. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*, 189-203.

Fuson, K.C., and Murray, C. (1978). The haptic-visual perception, construction, and drawing of geometric shapes by children aged two to five: A Piagetian extension. In R. Lesh and D. Mierkiewicz (Eds.), *Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts* (pp. 49-83). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Galperin, P., and Georgiev, L. (1969). The formation of elementary mathematical notions. In J. Kilpatrick and I. Wirzup (Eds.), *The Learning of Mathematical Concepts. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics* (Vol. 1). Palo Alto, CA: SMSG.

Gao, F., Levine, S.C., and Huttenlocher, J. (2000). What do infants know about continuous quantity? *Journal of Experimental Child Psychology, 77*, 20-29.

Gelman, R. (1972). Logical capacity of very young children: Number invariance rules. *Child Development, 43*, 75-90.

Gelman, R. (1980). What young children know about numbers. *Educational Psychologist, 15*, 54-68.

Gentner, D. (2003). Why we're so smart. In D. Gentner and S. Goldin-Madow (Eds.), *Language in Mind: Advances in the Study of Language and Thought* (pp. 195-235). Cambridge: MA: MIT Press.

Ginsburg, H.P., Cannon, J. Eisenband, and Pappas, S. (2006). Mathematical thinking and learning. In K. McCartney and D. Phillips (Eds.), *Handbook of Early Child Development* (pp. 208-229). Oxford, England: Blackwell.

Guay, R.B., and McDaniel, E. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education, 8*, 211-215.

Hannibal, M.A.Z., and Clements, D.H. (2008). *Young children's understanding of basic geometric shapes*. Manuscript submitted for publication, Indiana University of Pennsylvania, Indiana, PA.

Hart, K. (1984). Which comes first—length, area, or volume? *Arithmetic Teacher, 31*, 16-18, 26-27.

Hedges, L.V., and Chung, V. (in preparation). *Does spatial ability predict STEM college major and employment?: An examination of two longitudinal studies*. University of Chicago.

Heibeck, T.H., and Markman, E.M. (1987). Word learning in children: An examination of fast mapping. *Child Development, 67*, 850-866.

Hermer, L., and Spelke, E.S. (1994). A geometric process for spatial reorientation in young children. *Nature, 37 0*, 57-59.

Hermer, L., and Spelke, E.S. (1996). Modularity and development: The case of spatial reorientation. *Cognition, 61*, 195-232.

Hespos, S.J., and Spelke, E.S. (2004). Conceptual precursors to language. *Nature, 43 0*, 453-456.

Hiebert, J. (1981). Cognitive development and learning linear measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*, 197-210.

Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measurement concepts? *Arithmetic Teacher, 31*, 19-24.

Holloway, I., and Ansari, D. (2008). Domain-specific and domain-general changes in children's development of number comparison. *Developmental Science, 11*, 644-649.

Huttenlocher, J., Jordan, N.C., and Levine, S.C. (1994). A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General, 123*, 284-296.

Huttenlocher, J., Newcombe, N., and Sandberg, E.H. (1994). The coding of spatial location in young children. *Cognitive Psychology, 27*, 115-148.

Huttenlocher, J., Newcombe, N. and Vasilyeva, M. (1999). Spatial scaling in young children. *Psychological Science, 10*, 393-398.

Huttenlocher, J., Duffy, S., and Levine, S.C. (2002). Infants and toddler discriminate amount: Are they measuring? *Psychological Science, 13*, 244-249.

Jordan, N.C., Kaplan, D., Nabors Oláh, L. and Locuniak, M.N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development, 77*, 153-175.

Kail, R., Carter, P. and Pellegrino, J. (1979). The locus of sex differences in spatial skill. *Perception and Psychophysics, 26*, 182-186.

Kato, Y. (1986). Development of spatial recognition in preschool children: On Piaget and Inhelder's hypothesis of topological space. *Perceptual and Motor Skills, 63*, 443-450.

Klein, A., Starkey, P., and Wakesley, A. (1999). *Enhancing Pre-kindergarten Children's Readiness for School Mathematics*. Paper presented at the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Klein, J.S., and Bisanz, J. (2000). Preschoolers doing arithmetic: The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psychology, 54*, 105-114.

Kobayashi, T., Hiraki, K., Mugitani, R., and Hasegawa, T. (2004). Baby arithmetic: One object plus one tone. *Cognition, 91*, B23-B34.

Kwon, M.-K., Levine, S.C., Suriyakham, L.W., and Ehrlich, S.B. (2009). *Infants' Quantitative Sensitivity: Number, Continuous Extent or Both*. Presented at the Society for Research on Child Development Biennial Meeting, Denver, CO.

Lean, G., and Clements, M.A. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 267-299.

Learmonth, A., Newcombe, N., and Huttenlocher, J. (2001). Toddlers' use of metric information and landmarks to reorient. *Journal of Experimental Child Psychology, 80*(3), 225-244.

Leong, D.J. (n.d.). *Tools of the Mind: Pre-K, Preschool*. Available in:

http://www.mscd.edu/extendedcampus/toolsofthemind/assets/pdf/Preschool%20Brochure%20(acrobat).pdf [accessed June 2008].

Levine, S.C., Jordan, N.C., and Huttenlocher, J. (1992). Development of calculation abilities in young children. *Journal of Experimental Child Psychology, 53*, 72-103.

Levine, S.C., Huttenlocher, J., Taylor, A., and Langrock, A. (1999). Early sex differences in spatial ability. *Developmental Psychology, 35*, 940-949.

Levine, S.C., Vasilyeva, M., Lourenco, S., Newcombe, N., and Huttenlocher, J. (2005). Socioeconomic status modifies the sex difference in spatial skill. *Psychological Science, 16*, 841-845.

Levine, S.C., Huttenlocher, J., Pruden, S., Ratliff, K, and Saunders, J. (2008, June). *Learning to Think Spatially: Role of Early Spatial Language and Activities*. Paper presented at The Ins and Outs of Spatial Language: From Theory to Practice, Chicago, IL.

Liben, L.S., and Downs, R.M. (1989). Understanding maps as symbols: The development of map concepts in children. *Advances in Child Development and Behavior, 22*, 145-201.

Liben, L.S., and Yekel, C.A. (1996). Preschoolers' understanding of plan and oblique maps: The role of geometric and representational correspondence. *Child Development, 67*, 2780-2796.

Linn, M.C., and Peterson, A.C. (1985). Emergence and characterization of sex difference in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development, 56*, 1479-1498.

Lipton, J., and Spelke, E.S. (2003). Origins of number sense: Large number discrimination in human infants. *Psychological Science, 14*, 396-401.

Lipton, J., and Spelke, E.S. (2004). Discrimination of large and small numerosidades by human infants. *Infancy, 5*, 271-290.

Loewenstein, J., and Genter, D. (2005). Relational language and the development of relational mapping. *Cognitive Psychology, 50*, 315-353.

Lourenco, S.F., Huttenlocher, J., and Fabian, L. (under review). *Early sex difference in weighting geometric cues*.

Lovell, K. (1959). A follow-up study of some aspects of the work of Piaget and Inhelder on the child's conceptions of space. *British Journal of Educational Psychology, 29*, 104-117.

Mandler, J.M. (1992). How to build a baby II: Conceptual primitives. *Psychological Review, 99*, 587-604.

Marmor, G.S. (1975). Development of kinetic images: When does the child first represent movement in mental images? *Cognitive Psychology, 7*, 548-559.

McClelland, M.M., Cameron, C.E., Connor, C.M., Farris, C.L., Jewkes, A.M., and Morrison, F.J. (2007). Links between behavioral regulation and preschoolers' literacy, vocabulary, and math skills. *Developmental Psychology, 43*, 947-959.

McDonough, L., Choi, S., and Mandler, J.M. (2003). Understanding spatial relations: Flexible infants, lexical adults. *Cognitive Psychology, 46*, 229-259.

Meck, W.H., and Church, R.M. (1983). A mode control model of counting and timing processes. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes, 9*, 320-334.

Miller, K.F. (1984). Child as the measurer of all things: Measurement procedures and the development of quantitative concepts. In C. Sophian (Ed.), *Origins of Cognitive Skills* (pp. 193-228). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Miller, K.F. (1989). Measurement as a tool for thought: The role of measurement procedures in children's understanding of quantitative invariance. *Developmental Psychology, 25*, 589-600.

Mix, K.S. (1999a). Preschoolers' recognition of numerical equivalence: Sequential sets. *Journal of Experimental Child Psychology, 74*, 309-322.

Mix, K.S. (1999b). Similarity and numerical equivalence: Appearances count. *Cognitive Development, 14*, 269-297.

Mix, K.S. (2002). The construction of number concepts. *Cognitive Development, 17*, 1345‑1363.

Mix, K.S. (2008). Surface similarity and label knowledge impact early numerical comparisons. *British Journal of Developmental Psychology, 26*, 13-32.

Mix, K.S., Huttenlocher, J., and Levine, S.C. (1996). Do preschool children recognize auditoryvisual numerical correspondences? *Child Development, 67*, 1592-1608.

Mix, K.S., Levine, S.C., and Huttenlocher, J. (1997). Numerical abstraction in infants: Another look. *Developmental Psychology, 33*, 423-428.

Mix, K.S., Huttenlocher, J, and Levine, S.C. (2002). *Quantitative Development in Infancy and Early Childhood*. New York: Oxford University Press.

Mix, K.S., Sandhofer, C.M., and Baroody, A. (2005). Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal processes in early quantitative development. In R.V. Kail (Ed.), *Advances in Child Development and Behavior* (vol. 3, pp. 305-346). New York: Elsevier.

Moore, D.S., and Johnson, S.P. (2008). Mental rotation in human infants: A sex difference. *Psychological Science, 19*(11), 1063-1066.

Moore, D., Benenson, J., Reznick, J.S., Peterson, M., and Kagan, J. (1987). Effect of auditory numerical information on infants' looking behavior: Contradictory evidence. *Developmental Psychology, 23*, 665-670.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics: An Overview*. Reston, VA: Author.

Newcombe, N., and Huttenlocher, J. (2000). *Making Space: The Development of Spatial Representation and Reasoning*. Cambridge, MA: MIT Press.

Newcombe, N., and Huttenlocher, J. (2006). Development of spatial cognition. In D. Kuhn and R.S. Siegler (Eds.), *Handbook of Child Psychology* (6th ed., pp. 734-776). New York: Wiley.

Newcombe, N., Huttenlocher, J., and Learmonth, A. (1999). Infants' coding of location in continuous space. *Infant Behavior and Development, 22*, 483-510.

Nunes, T., and Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Cambridge, MA: Blackwell.

Nunes, T., Light, P., and Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and Instruction, 3*, 39-54.

O'Hanlon, C.G., and Roberson, D. (2006). Learning in context: Linguistic and attentional constraints on children's color term learning. *Journal of Experimental Child Psychology, 94*, 25-300.

Ozer, D. (1987). Personality, intelligence, and spatial visualization: Correlates of mental rotation test performance. *Journal of Personality and Social Psychology, 53*, 129-134.

Passolunghi, M.C., Vercelloni, B., and Schadee, H. (2007). The precursors of mathematics learning: Working memory, phonological ability, and numerical competence. *Cognitive Development, 22*, 165-184.

Pettito, A.L. (1990). Development of numberline and measurement concepts. *Cognition and Instruction, 7*, 55-78.

Piaget, J. (1941/1965). *The Child's Conception of Number*. New York: Norton.

Piaget, J., and Inhelder, B. (1967). *The Child's Conception of Space*. (F.J. Langdon and J.L. Lunzer, Trans.). New York: Norton. (Original work published in 1948).

Piaget, J., Inhelder, B., and Szeminska, A. (1960). *The Child's Conception of Geometry*. London: Routledge and Kegan Paul.

Quinn, P.C. (1994). The categorization of above and below spatial relations by young infants. *Child Development, 65*, 58-69.

Quinn, P.C. (2004). Spatial representation by young infants: Categorization of spatial relations or sensitivity to a crossing primitive? *Memory and Cognition, 32*, 852-861.

Quinn, P.C., and Liben, L.S. (2008). A sex difference in mental rotation in young infants. *Psychological Science, 19*(11), 1067-1070.

Quinn, P.C., Norris, C.M., Pasko, R.N., Schmader, T.M. and Mash, C. (1999). Formation of a categorical representation for the spatial relation between by 6- to 7 month old infants. *Visual Cognition, 6*, 569-585.

Rips, L.J., Bloomfield, A., and Asmuth, J. (2008). From numerical concepts to concepts of number. *Behavioral and Brain Sciences, 6*, 623-642.

Sandberg, E.H., and Huttenlocher, J. (2001). Advanced spatial skills and advance planning: Components of 6-year-olds navigational map use. *Journal of Cognition and Development, 2*, 51-70.

Sarnecka, B.W., and Carey, S. (2008). How counting represents numbers: What children must learn and when they learn it. *Cognition, 108*, 662-674.

Satlow, E., and Newcombe, N. (1998). When is a triangle not a triangle? Young children's developing concepts of geometric shape. *Cognitive Development, 13*, 547-559.

Saxe, G.B., Guberman, S.R., and Gearhart, M. (1987). *Social processes in early number development*. Monographs of the Society for Research in Child Development, 52(2), iii-viii.

Seo, K.-H., and Ginsburg, H.P. (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? In D.H. Clements, J. Sarama and A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 91-104). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Shallcross, W.L., Göksun, T., Golinkoff, R. M., Hirsh-Pasek, K., Lloyd, M., Newcombe, N., and Roseberry, S. (2008, March). *Building Talk: Parental Utterances During Construction Play*. Poster presented at the 16th International Conference on Infant Studies, Vancouver, Canada.

Shea, D.L., Lubinski, D., and Benbow, C.P. (2001). Importance of assessing spatial ability in intellectually talented young adolescents. *Journal of Educational Psychology, 93*, 604-614.

Shipley, E.F., and Shepperson, B. (1990). Countable entities: developmental changes. *Cognition, 32*, 109-136.

Skolnick, J., Langbort, C., and Day, L. (1982). *How to Encourage Girls in Mathematics and Science: Strategies for Parents and Educators*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Slater, A., and Morison, V. (1985). Shape constancy and slant perception at birth. *Perception, 14*, 337-344.

Smothergill, D.W., Hughes, F.P., Timmons, S.A., and Hutko, P. (1975). Spatial visualizing in children. *Developmental Psychology, 11*, 4-13.

Sophian, C. (2002). Learning about what fits: Preschool children's reasoning about effects of object size. *Journal of Research in Mathematics Education, 33*, 290-302.

Sophian, C., and Kailihiwa, C. (1998). Units of counting: Developmental changes. *Cognitive Development, 13*, 561-585.

Sophian, C., Garyantes, D., and Chang, C. (1997). When three is less than two: Early development in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology, 33*, 731-744.

Spelke, E.S. (1990). Principles of object perception. *Cognitive Science, 14*, 29-56.

Spelke, E.S., and Kinzler, K.D. (2007). Core knowledge. *Developmental Science, 10*, 89-96.

Starkey, P., and Cooper, R. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science, 210*, 1033-1034.

Starkey, P., Spelke, E.S., and Gelman, R. (1983). Detection of intermodal numerical correspondences by human infants. *Science, 222*, 179-181.

Starkey, P., Spelke, E.S., and Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition, 36*, 97-128.

Stea, D., Kerkman, D.D., Phinon, M.F., Middlebrook, N.N., and Rice, J.L. (2004). Preschoolers use maps to find a hidden object outdoors. *Journal of Environmental Psychology, 24*, 341-345.

Stewart, R., Leeson, N., and Wright, R.J. (1997). Links between early arithmetical knowledge and early space and measurement knowledge: An exploratory study. In F. Biddulph and K. Carr (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (vol. 2, pp. 477-484). Hamilton, New Zealand: MERGA.

Strauss, M.S., and Curtis, L.E. (1981). Infant perception of numerosidad. *Child Development, 52*, 1146-1152.

Strauss, M.S., and Curtis, L.E. (1984). Development of numerical concepts in infancy. In C. Sophian (Ed.), *Origins of Cognitive Skills* (pp. 131-155). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Szechter, L.E., and Liben, L. (2004). Parental guidance in preschoolers' understanding of spatial-graphic representation. *Child Development, 75*, 869-885.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In M.M. Lindquist and A.P. Shulte (Eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 1-31), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Uttal, D.H. (1996). Angles and distances. Children's and adults' reconstruction and scaling of spatial configurations. *Child Development, 67*, 2763-2779.

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press.

Van Loosbroek, E., and Smitsman, A.W. (1990). Visual perception of numerosidad in infancy. *Developmental Psychology, 26*, 916-922.

Wallace, J.R., and Veek, A.L. (1995). *Children's Use of Maps for Direction and Distance Estimation*. Paper presented at the Biennial Meeting of the Society for Research on Child Development, Indianapolis, IN.

Wang, R.F., and Spelke, E.S. (2002). Human spatial representation: Insights from animals. *Trends in Cognitive Sciences, 6*, 376-382.

Wheatley, G.H. (1990). Spatial sense and mathematics learning. *Arithmetic Teacher, 37*, 10-11.

Wood, J.N., and Spelke, E.S. (2005). Infants' enumeration of actions: Numerical discrimination and its signature limits. *Developmental Science, 8*, 173-181.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition, 36*, 155-193.

Wynn, K. (1992a). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749-750.

Wynn, K. (1992b). Children's acquisition of the palabras numéricas and the counting system. *Cognitive Psychology, 24*, 220-251.

Wynn, K. (1996). Infants' individuation and enumeration of actions. *Psychological Science, 7*, 164-169.

Wynn, K., Bloom, P., and Chiang, W-C. (2002). Enumeration of collective entities by 5-monthold infants. *Cognition, 83*, B55-B62.

Xu, F. (2003). Numerosidad discrimination in infants: Evidence for two systems of representations. *Cognition, 89*, B15-B25.

Xu, F., and Arriaga, R.I. (2007). Number discrimination in 10-month-old infants. *British Journal of Developmental Psychology, 25*, 103-108.

Xu, F., and Spelke, E.S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition, 74*, B1-B11.

Xu, F., Spelke, E., and Goddard, S. (2005). Number sense in human infants. Developmental *Science, 8*, 88-101.

National Research Council of the National Academies (Consejo Nacional de Investigación de las Academias Nacionales, de EEUU). La Academia Nacional de Ciencias, la Academia Nacional de Ingeniería, el Instituto de Medicina, y el Consejo Nacional de Investigación son instituciones privadas, sin ánimo de lucro, que ofrecen el asesoramiento de expertos sobre algunos de los retos más urgentes que afrontan la nación y el mundo. Nuestro trabajo ayuda a establecer políticas sólidas, informar a la opinión pública, y avanzar en el desarrollo de la ciencia, la ingeniería y la medicina (*Nota:* Información traducida de la web, del apartado "about us").

Web: http://www.nationalacademies.org/nrc/