



7 – Une axiomatisation de la géométrie fondée sur l'instrument et l'expérience

Jean Stratonovitch

► **To cite this version:**

Jean Stratonovitch. 7 – Une axiomatisation de la géométrie fondée sur l'instrument et l'expérience. 2015. <hal-01238713>

HAL Id: hal-01238713

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01238713>

Submitted on 7 Dec 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Une axiomatisation de la géométrie fondée sur l'instrument et l'expérience

Jean Stratonovitch

Nous avons dans l'article *l'Instrument fondateur de la géométrie* montré que le corps mémoforme, adossé aux concepts de repos galiléen et de superposition durable, permet de construire les notions d'espace galiléen, de longueur et d'alignement, et qu'il est l'instrument nécessaire et suffisant de la géométrie. Sa mise en place mathématique détaillée reste à faire : définir les nouveaux objets, poser de nouveaux axiomes et démontrer un à un, avec patience et minutie, les théorèmes qu'ils génèrent, jusqu'à atteindre ce résultat connu d'avance, que la géométrie *du cadre plat* ainsi construite, celle dont les espaces galiléens doivent être munis, est la géométrie euclidienne de dimension trois. Une telle entreprise procurera à certains, sans aucun doute, le même plaisir que d'autres trouvent à construire une maquette de cathédrale avec des allumettes ; mais beaucoup, devant la longueur prévisible du projet et son manque absolu de suspense, pourraient être tentés de déclarer entre deux bâillements prémonitoires que nous avons déjà largement répondu à la question, qu'il ne manque que quelques détails sans importance, dont nous pouvons sans regrets enjamber l'étude pour nous pencher sur d'autres problèmes. Ils n'auraient pas entièrement tort.

Néanmoins le thème central de notre réflexion est la question de l'axiomatisation de la physique, considérée tantôt sous l'angle général de la philosophie et des principes, tantôt sous l'angle particulier, central et premier du noyau de la cinématique. Dans ce contexte, on ne voit pas comment il serait possible de ne pas proposer pour la cinématique – et donc pour la géométrie – un système d'axiomes fondé sur l'instrument et l'expérience. Ne serait-ce que pour en montrer formellement la possibilité. On le voit d'autant moins que nous avons déjà commencé de le faire en installant le noyau premier, qui met en place les notions préalables à la géométrie : points historicisés,

chronologies personnelles, instants personnels, simultanéité locale, ordre chronologique, instants locaux, moments – ainsi que les axiomes qui les régissent.

Aussi continuerons-nous ce travail, mais sans entrer dans le détail. Je me contenterai de donner les axiomes en les accompagnant seulement de quelques courts commentaires.

De même que la solution d'un exercice peut-être rédigée de diverses façons, le système d'axiomes proposé ci-dessous pourrait certainement être différent, tout en étant construit sur les mêmes exigences philosophiques et en engendrant le même édifice mathématique. Cela n'a pas d'importance. L'enjeu n'est pas d'obtenir *le* système axiomatique parfait, si tant est qu'il existe, mais de montrer que les exigences auxquelles nous a conduits l'analyse philosophique peuvent se concrétiser en *un* système d'axiomes.

Ses axiomes peuvent être organisés en deux catégories : ceux qui décrivent la « logistique » du corps mémoforme, et ceux qui décrivent certaines de ses propriétés que nous pouvons qualifier de « géométriques ».

.....

1 - LES AXIOMES « LOGISTIQUES » DU CORPS MÉMOFORME

Du point de vue axiomatique, les **corps mémoformes** sont des ensembles particuliers de **points historicisés** – en général simplement appelés **points**, mais qui n'en conservent pas moins leurs **chronologies personnelles**.

Pour chaque corps mémoforme, il existe des **moments**, éventuellement éternels, durant lesquels ces corps sont dits au **repos galiléen**¹.

Axiome Mém1 : Toute partie non vide d'un corps mémoforme (K) est elle-même un corps mémoforme, au repos galiléen quand (K) l'est.

¹ Ces concepts sont définis dans les articles *le Noyau Premier* (hal-01064270) et *l'Instrument et l'expérience fondateurs de la géométrie* (hal-01069147).

Deux corps mémoformes (K) et (K') sont **superposés** durant le moment \mathcal{M} s'ils sont alors l'un et l'autre au repos galiléen et s'il existe une bijection f de l'un vers l'autre qui fait coïncider les points et leurs images.

Axiome Mém2 : Tout corps mémoforme, lors de chacun de ses moments de repos galiléen, est superposé à un corps mémoforme éternellement au repos galiléen.

Axiome Mém3 : Si (K) et (K') sont deux corps mémoformes éternellement au repos galiléen, tels qu'une partie non vide de l'un soit durant un certain moment superposée à une partie non vide de l'autre, alors

- cette superposition est éternelle ;
- la réunion de (K) et de (K') est un corps mémoforme éternellement au repos galiléen.

Si (K) est un corps mémoforme éternellement au repos galiléen, on appelle *espace galiléen* engendré par (K) la réunion de tous les corps mémoformes éternellement au repos galiléen dont une partie non vide est superposée à une partie non vide de (K).

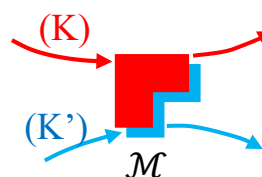
Axiome Mém4 : Toute partie finie d'un espace galiléen est un corps mémoforme éternellement au repos galiléen.

Si nous refusons d'admettre que certaines régions du cosmos sont définitivement hors de toute atteinte géométrique, nous devons modéliser les espaces galiléens comme étant aussi vastes que lui.

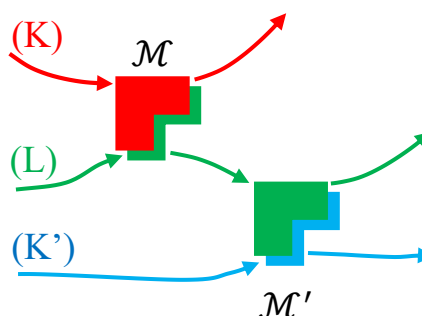
Axiome Mém5 : Soit (E) un espace galiléen. Tout point historicisé, à tout instant de sa chronologie, coïncide avec un point de (E).

On dit que deux corps mémoformes (K) et (K') sont **superposables...**

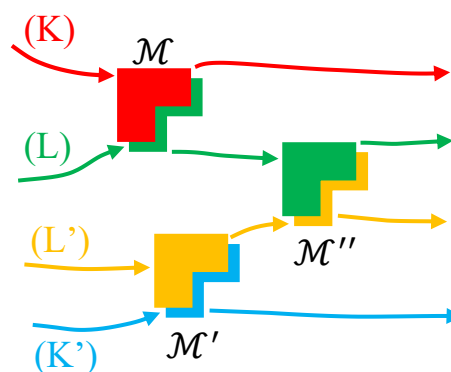
a) Premier essai : lorsqu'il existe un moment \mathcal{M} au cours duquel ils sont superposés. Mais cette définition n'est pas suffisante puisque deux corps mémoformes peuvent être superposables sans jamais être superposés.



b) Deuxième essai : Lorsqu'il existe un corps mémoforme (L) et deux moments \mathcal{M} et \mathcal{M}' tels que (L) soit superposé à (K) durant \mathcal{M} et à (K') durant \mathcal{M}' . Cette définition n'est pas suffisante elle non plus puisque (K) et (K') peuvent n'avoir chacun dans toute son existence qu'un seul moment de repos galiléen, et ces deux moments \mathcal{M} et \mathcal{M}' peuvent être tels qu'aucun corps mémoforme (L) n'est assez rapide pour aller de l'un à l'autre.



c) Troisième essai : lorsqu'il existe deux corps mémoformes (L) et (L') et trois moments \mathcal{M} , \mathcal{M}' et \mathcal{M}'' tels que (L) soit superposé à (K) durant \mathcal{M} , (L') à (K') durant \mathcal{M}' , et (L) à (L') durant \mathcal{M}'' . Cette définition fonctionne puisqu'elle laisse autant de temps qu'il le faudra autant de temps qu'il le faudra (dans le futur ou dans le passé) pour réaliser l'expérience de superposition durable entre (L) et (L'). La tentative b) n'en est d'ailleurs qu'un cas particulier, obtenu en identifiant (L') à (K'), de même que a) est un cas particulier de b), obtenu en identifiant (L) à (K'). Donc :



Deux corps mémoformes (K) et (K') sont **superposables** s'il existe deux corps mémoformes (L) et (L') qui leur sont superposés chacun à un certain moment, et qui sont superposés l'un à l'autre à un troisième moment.

Axiome Mém6 : La relation « être superposable » est une relation d'équivalence parmi les corps mémoformes.

Il est clair qu'elle est réflexive (tout corps mémoforme est superposable à lui-même) et symétrique (si (K) est superposable à (K') , alors (K') l'est à (K)). Aussi, cet axiome n'affirme en fait que sa transitivité : Si (K) et (K') sont superposables par la bijection f , et (K') et (K'') par la bijection g , (K) et (K'') le sont par la bijection $g \circ f$.

Axiome Mém7 : Soit (K) un corps mémoforme, O un point de (K) , (E) un espace galiléen, O' un point de (E) . On peut découper dans (E) des corps mémoformes (K') superposables à (K) , de telle façon que O et O' se correspondent.

En d'autres termes, on peut transporter un corps mémoforme donné à tout endroit de tout espace galiléen.

Axiome Mém8 : Soit (K) et (K') deux parties superposables de deux espaces galiléens (E) et (E') . Alors (E) et (E') sont superposables, en prolongeant la façon dont (K) et (K') le sont.

Cet axiome demande d'étendre aux espaces galiléens la notion de superposabilité : (E) et (E') sont **superposables** par la bijection f signifie que l'image par f de tout corps mémoforme (K) inclus dans (E) est un corps mémoforme superposable à (K) par la restriction à (K) de f , et de même avec f^{-1} .

.....

2 – LES AXIOMES GÉOMÉTRIQUES

On appelle **bipoint** tout corps mémoforme formé de deux points.

Axiome Géom1 : Les bipoints AB et BA sont superposables.

La relation de superposabilité est une relation d'équivalence entre bipoints. On appelle **longueurs** ses classes. On note AB la longueur du bipoint AB .

Tout point d'un espace galiléen en forme une partie finie, et est donc un corps mémoforme au repos éternel, superposable à tout autre point. Les bipoints du type AA sont donc tous superposables, et ont donc tous la même longueur, la **longueur nulle**. On note $AA = 0$.

On appelle **triangle** tout corps mémoforme formé de trois points.

Axiome Géom2 : Deux triangles dont les côtés homologues ont deux à deux la même longueur sont superposables.

Si O est un point d'un espace galiléen (E) et R une longueur, on appelle **sphère** de centre O et de rayon R l'ensemble des points M de (E) tels que $OM = R$.

Si A et B sont deux points de (E) on appelle **chemin** de A à B la trajectoire dans (E) d'un point historicisé allant de A à B , c'est-à-dire l'ensemble des points de (E) qui coïncident avec ce point historicisé lors des instants de sa chronologie compris entre celui où il est en A et celui où il est en B .

On dit qu'une partie (F) de (E) est **connexe par arcs** si, étant donné deux points A et B quelconques de (F) , il existe toujours un chemin allant de A à B inclus dans (F) .

Soit (S) une sphère tracée dans (E) . On dit que deux points A et B de (E) sont **du même côté** de (S) s'il existe un chemin allant de A à B qui ne rencontre pas (S) .

Axiome Géom3 : Une sphère de rayon R partage un espace galiléen en deux régions connexes par arc si R est non nul, ne le partage pas sinon.

Autrement dit, la relation « être du même côté de (S) » est, parmi les points de (E) qui n'appartiennent pas à (S) , une relation d'équivalence à deux classes si $R \neq 0$, à une classe sinon.

Étant donné, dans (E), une sphère de centre O et de rayon R non nul, on appelle *boule ouverte* de centre O et de rayon R l'ensemble des points de (E) qui sont du même côté de (S) que O. La boule ouverte de centre O et de rayon 0 est l'ensemble vide.

Axiome Géom4 : Deux boules ouvertes d'un espace galiléen, de même centre et de rayons distincts, sont telles que l'une, qui ne dépend que de leurs rayons, est strictement incluse dans l'autre.

Si R est le rayon de la boule qui est incluse dans l'autre, dont le rayon est R', on dit que R est **strictement inférieur** à R'. On note $R < R'$.

Axiome Géom5 : Deux boules ouvertes de rayons non nuls et distincts sont disjointes ou incluses l'une dans l'autre si et seulement si les sphères qui les engendrent ont une intersection vide ou réduite à un seul point.

On dit qu'une partie (U) de (E) est **ouverte** si pour tout M dans (U) il existe une boule ouverte centrée en M, de rayon non nul, et incluse dans (U). (E) est ouvert ; la partie vide également.

Axiome Géom6 : Dans un espace galiléen, les deux composantes connexes formant le complémentaire d'une sphère de rayon non nul sont des ouverts.

Nous savons donc que les boules ouvertes sont des ouverts, et que les ouverts sont des réunions quelconques de boules ouvertes. La famille des ouverts de (E) est parfaitement caractérisée. Nous disposons donc d'une topologie sur (E), qui de plus est **séparée** : étant donné deux points distincts, on peut construire deux boules ouvertes centrées en ces points, de rayons non nuls, et ne se rencontrant pas.

Axiome Géom7 : Étant donné un espace galiléen (E) et un point historicisé M, l'application qui à tout instant personnel de M associe le point de (E) avec lequel il coïncide à cet instant est continue.

Une **boule fermée** est la réunion d'une sphère et de la boule ouverte qu'elle engendre.

Axiome Géom8 : Les boules fermées d'un espace galiléen sont compactes.

En d'autres termes, si une famille infinie d'ouverts recouvre une boule fermée, on peut extraire de cette famille une sous-famille finie qui recouvre encore la boule. Cet axiome élimine les géométries de dimension infinie.

Les huit axiomes ci-dessus permettent de munir les espaces galiléens d'une géométrie dans laquelle l'ensemble des longueurs, muni de la relation d'ordre, est homéomorphe à l'ensemble ordonné des nombres réels positifs.

Pour construire l'alignement, on peut commencer par montrer qu'étant donné une sphère (S) et un point A qui n'est pas son centre, il existe sur (S) un unique point à distance maximale de A, et un unique point à distance minimale de A. Trois points distincts A, B et C sont **alignés** lorsque le point B est à distance extrême de A sur la sphère de centre C et de rayon BC. L'inégalité triangulaire découle de cette définition ; de même les notions de somme et de différence de longueurs, qui engendrent à leur tour celles de multiplication et de division d'une longueur par un scalaire. On montre que la droite est homéomorphe à l'ensemble des nombres réels.

On définit la symétrie centrale, dont on montre que c'est une isométrie.

On dit que deux demi-droites d'un espace galiléen sont *parallèles* si la distance à l'une d'un point de l'autre reste bornée quand le point tend vers l'infini. On montre que c'est une relation d'équivalence entre demi-droites d'un espace galiléen ; et qu'à partir d'un point quelconque on peut tracer une et une seule demi-droite parallèle à une demi-droite donnée.

À ce point de la construction de la géométrie, la question qui se pose est de savoir si le parallélisme s'étend aux droites entières : quand

deux demi-droites sont parallèles, leurs opposées le sont-elles également ?

Or, dans le système d'axiomes jusque-là mis en place, cette propriété est indécidable. Nous pouvons y répondre positivement, et construire alors une géométrie euclidienne, comme y répondre négativement, et construire une géométrie de Lobatchevski (elle ne peut pas être elliptique à cause de l'axiome Géom3).

Dans la première, les directions de demi-droites – c'est-à-dire leurs classes d'équivalence modulo la relation de parallélisme – sont associées deux par deux, l'une étant l'opposée de l'autre.

Dans la deuxième, étant donné deux directions de demi-droites, il existe toujours une droite et une seule dont les demi-droites, dans un sens, sont de la première direction, et dans l'autre de la deuxième. (Et cela, même si ces deux directions, vues depuis un point O donné, paraissent arbitrairement proches l'une de l'autre. La droite qui les joint, considérée depuis O , semble en épingle à cheveux, mais considérée depuis un de ses points, elle apparaîtrait conforme à l'intuition que nous avons d'un objet rectiligne.)

La géométrie des espaces galiléens doit-elle être euclidienne ou pas ? La chose demande à être discutée, mais la réponse ne fait pas l'objet d'un bien grand suspense : c'est le cadre euclidien qui doit être retenu et qui le sera. Aussi pouvons-nous différer cette discussion, le temps d'achever notre axiomatisation la géométrie.

Axiome Géom9 : Les trajectoires dans un espace galiléen (E) de deux points d'un autre espace galiléen (E') sont des droites à distance bornée l'une de l'autre.

Par conséquent, les directions de demi-droites portées par ces droites sont deux à deux parallèles, et la géométrie est euclidienne.

Le système d'axiomes jusqu'ici proposé engendre un édifice dans lequel les espaces galiléens sont des espaces euclidiens de même dimension finie supérieure ou égale à 2. Reste à « caler » cette dimension.

Axiome Géom10 : La dimension d'un espace galiléen est 3.

Ainsi, en faisant varier dans ce dernier axiome le paramètre de la dimension, on obtient une axiomatisation élémentaire de la géométrie euclidienne de dimension n supérieure ou égale à 2.

.....

3 – VÉRIFICATION DE CONSISTANCE

Elle consiste à s’assurer qu’on peut construire dans le cadre de la théorie des ensembles un modèle vérifiant les axiomes proposés.

Un tel modèle n’est pas difficile à trouver : c’est celui de l’espace et du temps absolus, identifiés l’un à l’ensemble des triplets de nombres réels et l’autre à l’ensemble des nombres réels. Les points historicisés sont des applications continues du temps absolu dans l’espace absolu. Un espace galiléen est l’ensemble des points historicisés ayant tous éternellement une même vitesse constante. Un corps mémoforme est un ensemble d’point historicisés gardant entre eux des distances invariables – il est donc infiniment rigide – et ses moments de repos galiléen sont ceux où il coïncide durablement avec une partie d’un espace galiléen. Tous les axiomes déjà posés se démontrent aisément dans ce modèle, ce qui prouve la consistance de leur système.

Bien évidemment, ce modèle de l’espace absolu, du temps absolu et de la rigidité infinie n’est en rien celui auquel l’analyse philosophique nous a conduits. Il présuppose l’existence du temps mesuré, notion que nous n’avons pas encore construite. Mais pour montrer la consistance logique du système d’axiomes jusqu’ici posés, il suffit d’exhiber un modèle mathématique les vérifiant, et je prends le premier et le plus simple qui nous tombe sous la main.

.....

TABLE DES MATIÈRES

1 – LES AXIOMES « LOGISTIQUES » DU CORPS MÉMOFORME	2
2 – LES AXIOMES GÉOMÉTRIQUES	5
3 – VÉRIFICATION DE CONSISTANCE.....	10