Pokerin peliteoriaa

Pro Gradu -tutkielma
Aku-Petteri Niemi
Matematiikan tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Kevät 2022

Sisältö

1 Johdanto

Tutkielman aiheena on peliteoria, joka on sovelletun matematiikan osa-alue, jossa tutkitaan pelaajien välistä strategista kanssakäymistä. Tällaisissa strategististisissa peleissä pelaajat valitsevat toimintoja, joilla he pyrkivät maksimoimaan hyötynsä ottaen huomioon vastapelaajien valinnat. Peliteoriassa hyödynnetään lineaarista optimointia ja sen tuloksia, ja sitä sovelletaan paljon muissa tieteissä, kuten taloustieteissä ja tietojenkäsittelytieteissä.

Tutkielman tavoitteena on ymmärtää perusteet yksinkertaiselle pelimuodolle, matriisipelille, ja kuinka sitä hyödyntämällä voidaan ymmärtää monimutkaisempienkin pelien, kuten pokerin, pelistrategioita. Pokerista luodaan tässä tutkielmassa yksinkertaistetumpi versio säilyttäen kuitenkin pelin idea, sillä oikean version tutkiminen olisi liian monimutkaista. Yksinkertaistetussa versiossa korttien määrä on tiputettu kolmeen ja panostuskierroksia on vähennetty. Myös mahdollinen panos on asetettu vakioksi. Pokeria tutkiessa pyritään selvittämään, onko erilaiset pelistrategiat, kuten bluffaaminen ja alipanostaminen todellisuudessa kannattavia strategioita. Tutkielmassa myös todistetaan kuuluisa John Von Neumannin Minimax -lause.

Matriisipelin ratkaisemiseksi täytyy ymmärtää, kuinka lineaarinen optimointiongelma ratkaistaan. Optimointiongelman ratkaisemiseksi ja optimaalisen ratkaisun löytämiseksi käytetään simplex -menetelmää, joka on vahva työkalu pienten ja keskisuurten optimointiongelmien ratkaisemiksi. Lineaarisen optimoinnin yksi tärkein tulos on duaalisuus. Duaalisuuden ymmärtäminen on oleellista pelistrategioiden tehokkaan löytämisen kannalta. Lisäksi, kuten tutkielmassa käy ilmi, Minimax -lause saadaan helposti osoitettua matriisipelin ja duaalisuuden avulla. Tutkielmassa käsitellään matriiseja ja hieman todennäköisyysvektoreita, mutta niiden teoriaa ei käydä läpi, joten lukijalla täytyy olla riittävä perusymmärrys niistä.

Tutkielma on laadittu Robert J. Vanderbein [1] teoksen pohjalta, joka käsittelee laajasti lineaarista optimointia. Tutkielmaa laatiessa luin muitakin teoksia Vanderbein teoksen lisäksi, kuten Oulun yliopiston yliopistolehtori Erkki Laitisen [2] laatimaa lineaarisen optimoinnin kurssimateriaalia, josta poimin myös muutamia tuloksia. Lisätäkseni ymmärrystä pokerista ja päästäkseni kiinni pelin sielunmaailmaan, luin David Sklanskyn [3] kirjoittamaa kirjaa. Sklansky toi hyvin esille mistä pokerissa on kyse ja erilaisten esimerkkien kautta miten sitä tulee pelata menestyksekkäästi. Lisäksi Jason Swanson [4] artikkelissaan käsitteli samaa yksinkertaistettua peliä kuin Vanderbei, mikä lisäsi ymmärrystä asiasta entisestään.

2 Lineaarisesta optimoinnista

Tässä luvussa käydään läpi mitä lineaarinen optimointi on, kuinka optimointitehtävä ratkaistaan, ja kuinka muodostetaan ja ratkaistaan lineaarisen optimointitehtävän duaalitehtävä. Lineaarisesta optimoinnista käytetään jatkossa lyhennettä LP *(linear programming)*.

2.1 Lineaarisen optimoinnin ongelma

LP -ongelmassa on muuttujia, joiden arvo tulee valita optimaalisella tavalla. Näitä muuttujia kutsutaan *valintamuuttujiksi* ja ne kirjoitetaan

$$x_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ongelmassa on tarkoitus maksimoida tai minimoida jokin lineaarinen funktio ζ annetuilla valintamuuttujilla,

$$\zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Tällaista funktiota kutsutaan *kohdefunktioksi*. Valintamuuttujista muodostuneet lineaariset kombinaatiot on aina rajoitettu jollain seuraavista ehdoista:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n &\leq b, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n &= b, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n &\geq b. \end{aligned}$$

Ehtoja on helppo muuttaa keskenään, sillä esimerkiksi epäyhtälö

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

voidaan muuttaa tavalliseksi yhtälöksi lisäämällä *vaje-* eli *slack-muuttuja* w siten, että

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + w &= b, \\ w &\geq 0. \end{aligned}$$

Yhtälö

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

voidaan puolestaan muuttaa kahdeksi epäyhtälöksi

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n &\leq b, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n &\geq b. \end{aligned}$$

Koska LP -ongelmissa on tavoitteena maksimoida/minimoida jokin kohdefunktio, voidaan perustehtävät esittää niin sanotussa *standardimuodossa*:

$$\max_x c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geq 0. \end{aligned}$$

Merkinnöillä

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n};\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\ c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n;\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

tehtävä voidaan kirjoittaa lyhyemmin

$$\max_x c^T x$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} Ax &\leq b, \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Määritelmä 2.1. Määritellään seuraavat termit:

x^* on *ratkaisu*, jos $Ax^* \leq b$,

x^* on *käypä ratkaisu*, jos $Ax^* \leq b$ ja $x^* \geq 0$,

x^* on *optimaalinen käypä ratkaisu*, jos x^* on käypä ratkaisu ja $c^Tx^* \geq c^Tx$ aina kun x on käypä ratkaisu. Tällöin x^* maksimoi kohdefunktion $\zeta = c^Tx$. Vastaavasti jos $c^Tx^* \leq c^Tx$ aina kun x on käypä ratkaisu, niin x^* minimoi kohdefunktion $\zeta = c^Tx$.

Voi olla tapauksia, jolloin optimointitehtävällä ei ole ratkaisua. Jos tehtävällä ei ole käypää ratkaisua, tehtävä itse on *ei-käypä*. Tehtävä voi myös olla *rajoittamaton*, jos sillä on olemassa käypiä ratkaisuja mielivaltaisen suurilla funktion arvoilla.

Seuraavassa kappaleessa käydään läpi kuinka annettu LP -ongelma ratkaistaan ja samalla löydetään sen optimaalinen käypä ratkaisu.

2.2 Optimaalisen käyvän ratkaisun löytäminen

2.2.1 Simplex -menetelmä

Olkoon LP -ongelma

$$\max_x \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad & i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geq 0 \quad & j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Oletetaan lisäksi, että $b_i \geq 0$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, m$. Ensimmäinen askel on määrittää vajemuuttujat ja nimetä kohdefunktio. Olkoon vajemuuttujat

$$\begin{aligned} & w_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ & w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \geq 0. \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ w_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{1}$$

Vajemuuttujat ja valintamuuttujat sekoittuvat keskenään iteraation edetessä. Täten on kätevämpää merkitä vajemuuttujat enemmän tai vähemmän poikkeaviksi valintamuuttujista. Lisätään ne valintamuuttujien sekaan seuraavasti:

$$(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}),$$

missä $x_{n+i} = w_i$. Tämän avulla voimme muokata yhtälön (1) muotoon

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Auki kirjoitettuna

$$
\begin{array}{c}
\zeta = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
\hline
\begin{aligned}
x_{n+1} &= b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n, \\
x_{n+2} &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n, \\
&\vdots \\
x_{n+m} &= b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \ldots - a_{mn}x_n.
\end{aligned}
\end{array}
$$

Tätä kutsutaan *lähtöluetteloksi*. Simplex -menetelmän edetessä siirrymme yhtälöryhmästä toiseen etsimällä optimaalista käypää ratkaisua. Määritetään, että *perusmuuttujilla* tarkoitetaan yhtälöiden vasemmalla puolella olevia muuttujia (poislukien kohdefunktio ζ) ja *ei-perusmuuttujilla* yhtälöiden oikealla puolella olevia muuttujia. Jokainen yhtälöryhmä sisältää m kappaletta perusmuuttujia ja n kappaletta ei-perusmuuttujia.

Olkoon $\mathcal{B}$ perusmuuttujien indeksien joukko ja $\mathcal{N}$ ei-perusmuuttujien indeksien joukko. Aluksi $\mathcal{B} = \{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$ ja $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$, mutta tämä tulee muuttumaan ensimmäisen iteraation jälkeen. Nyt nykyinen yhtälöryhmä näyttää tältä:

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j, \\
x_i &= \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, \qquad i \in \mathcal{B}.
\end{aligned}
$$

Huomaa, että viivalla merkitään kertoimia, jotka muuttuvat iteraation edetessä.

Oletetaan, että alussa $x_i = 0$ kaikilla $i \in \mathcal{N}$. Jokaisella iteraatiolla yksi muuttuja siirtyy perusmuuttujista ei-perusmuuttujiin, ja päinvastoin. Ei-perusmuuttujista perusmuuttujiin siirtyvää muuttujaa kutsutaan *saapuvaksi muuttujaksi*. Muuttuja löydetään kasvattamalla kohdefunktion ζ arvoa, sillä se on kohdefunktion muuttuja, jolla on positiivinen kerroin.

Olkoon saapuva muuttuja k:s muuttuja indeksien joukosta $\{j \in \mathcal{N} \mid \bar{c}_j > 0\}$. Mikäli joukko on tyhjä, on nykyinen ratkaisu optimaalinen. Jos joukko koostuu useammasta kuin yhdestä muuttujasta, muuttuja voidaan valita. Valintaperusteita on useita. Nyt valitsemme indeksin k, jolla muuttujalla on suurin kerroin.

Muuttujaa, joka siirtyy perusmuuttujista ei-perusmuuttujiin, kutsutaan *lähteväksi muuttujaksi*. Se valitaan säilyttämään nykyisten perusmuuttujien ei-negatiivisuus. Kun valitaan x_k saapuvaksi muuttujaksi, sen arvo kasvaa. Tämä arvon nousu muuttaa perusmuuttujien arvoja seuraavasti:

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik}x_k, \quad i \in \mathcal{B}.$$

Täytyy varmistaa, että perusmuuttujat pysyvät ei-negatiivisina. Täten täytyy olla

$$\bar{b}_i - \bar{a}_{ik}x_k \geq 0, \quad i \in \mathcal{B}. \tag{2}$$

Nyt ainoat perusmuuttujat x_i, jotka voivat mennä negatiivisiksi, ovat ne, joilla $\bar{a}_{ik}$ on positiivinen. Täten huomioidaan vain ne indeksit i, joilla $\bar{a}_{ik}$ on positiivinen. Muilla perusmuuttujilla x_i saapuvan muuttujan x_k arvon kasvattaminen kasvattaa myös perusmuuttujan arvoa. Muuttujaa x_k voidaan siis kasvattaa kunnes $\bar{b}_i - \bar{a}_{ik}x_k = 0$. Tällaiselle indeksille i muuttujan x_k arvo, jolla perusmuuttujan x_i arvo on nolla, on

$$x_k = \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}.$$

Koska tämän täytyy olla ei-negatiivinen, on muuttujan x_k arvoa kasvatettava vain pienimmäksi mahdolliseksi, eli

$$x_k = \min_{i \in \mathcal{B} : \bar{a}_{ik} > 0} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}.$$

Nyt, koska vapautta valita on vielä jäljellä, lähteväksi muuttujaksi valitaan l:s muuttuja joukosta $\{i \in \mathcal{B} \mid \bar{a}_{ik} > 0,\ \min \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}\}$.

Tämä voidaan lausua yksinkertaisemmin: etsitään ne perusmuuttujat x_i, joille $\bar{a}_{ik} > 0$, ja valitaan niistä se, jolle suhde $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$ on kaikista pienin. Tämä siksi, että pienin suhde antaa rajoitusehdon, joka toteuttaa muiden suhteiden antamat rajoitusehdot.

On myös vaihtoehtoinen tapa. Tämän tavan johtamiseen täytyy sopia, että $\frac{0}{0} = 0$, ja kirjoittaa epäyhtälöt (2) muotoon

$$\frac{1}{x_k} \geq \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i}, \quad i \in \mathcal{B}.$$

Nyt, päinvastoin kuin aiemmin, valitaan x_k siten, että

$$x_k = \left(\max_{i \in \mathcal{B} : \bar{a}_{ik} > 0} \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i} \right)^{-1}.$$

Nyt sääntö lähtevän muuttujan valinnalle, on valita l:s muuttuja joukosta $\{i \in \mathcal{B} \mid \bar{a}_{ik} > 0,\ \max \frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i}\}$.

Näiden kahden tavan perustavanlaatuinen ero on se, että ensimmäisessä tavassa minimoidaan suhde $\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$, kun taas toisessa maksimoidaan suhde $\frac{\bar{a}_{ik}}{\bar{b}_i}$.

Seuraavassa esimerkissä käydään läpi miten menetelmä toimii käytännössä, miten oikeat muuttujat valitaan ja miten optimaalinen ratkaisu löydetään. Jatkossa käytetään ensimmäistä tapaa lähtevän muuttujan löytämiseksi, eli suhteen minimoimista.

2.2.2 Esimerkkitehtävä

Olkoon LP -ongelma

$$\max_x \ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 8, \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Lisätään jokaiseen epäyhtälöön aiemmin määritetty ei-negatiivinen vajemuuttuja, jolloin epäyhtälöt muuttuvat tavallisiksi yhtälöiksi. Olkoon vajemuuttujat w_1, w_2 ja w_3. Lisäksi olkoon kohdefunktio $\zeta = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$. Nyt

$$\max_x \ \zeta = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3, \\ w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3, \\ w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3, \\ x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 &\ge 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Aloitetaan etsimällä käyvät ratkaisut $x_1, x_2, \ldots, w_3$, jonka jälkeen pyritään etsimään uudet paremmat ratkaisut $\bar{x_1}, \bar{x_2}, \ldots, \bar{w_3}$, joilla kohdefunktion arvo on suurempi:

$$5\bar{x_1} + 4\bar{x_2} + 3\bar{x_3} > 5x_1 + 4x_2 + 3x_3.$$

Jatketaan tätä prosessia kunnes löytyy ratkaisu, jota ei voi parantaa. Lopullinen ratkaisu on optimaalinen käypä ratkaisu.

Prosessin alkamiseksi tarvitaan käypä ratkaisu. Esimerkkitapauksessa on helppo valita vaikkapa

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad w_1 = 5, \quad w_2 = 11, \quad w_3 = 8.$$

Kohdefunktio saa tällöin arvon $\zeta = 0$.

Seuraavaksi on mietittävä voiko tulosta parantaa. Jos kasvatetaan muuttujan x_1, x_2 tai x_3 arvoa nollasta joksikin positiiviseksi luvuksi, myös funktion ζ arvo muuttuu suuremmaksi. Tästä seuraa, että myös vajemuuttujien arvot muuttuvat.

Valitaan muuttuja x_1 (koska sen kerroin on suurin) ja kasvatetaan sen arvoa eli valitaan se saapuvaksi muuttujaksi. Koska $x_2 = x_3 = 0$, niin $w_1 = 5 - 2x_1$, ja koska w_1 on ei-negatiivinen luku, niin saadaan ehto $x_1 \leq 5/2$. Vastaavasti $w_2 = 11 - 4x_1$ ja $w_3 = 8 - 3x_1$, joista saadaan ehdot $x_1 \leq 11/4$ ja $x_1 \leq 8/3$. Yhdistämällä nämä ehdot jäljelle jää $x_1 \leq 5/2$. Tästä lähteväksi muuttujaksi valikoituu w_1. Nyt uusi parannettu käypä ratkaisu on

$$x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = \frac{1}{2}.$$

Kohdefunktio saa tällöin arvon $\zeta = \frac{25}{2}$.

Ensimmäisen vaiheen teki helpoksi se, että meillä oli joukko muuttujia, jotka olivat alkujaan arvoltaan nolla, ja loput muuttujat ilmaistiin näiden avulla. Samaa menetelmää voidaan hyödyntää seuraavassakin vaiheessa.

Muokataan yhtälöt (4) sellaiseen muotoon, että muuttujat x_1, w_2, w_3 ja ζ ilmaistaan muuttujien x_2, x_3 ja w_1 avulla. Ratkaistaan ensimmäisenä x_1 muuttujan w_1 suhteen:

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3.$$

Yhtälöt muuttujille w_2, w_3 ja ζ täytyy muokata siten, että muuttuja x_1 ei löydy yhtälön oikealta puolelta. Seuraavaksi sijoitetaan saatu yhtälö muihin yhtälöihin. Otetaan esimerkiksi

$$\begin{aligned} w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ &= 11 - 4\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3\right) - x_2 - 2x_3 \\ &= 11 - 10 + 2w_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_2 - 2x_3 \\ &= 1 + 2w_1 + 5x_2. \end{aligned}$$

Tekemällä vastaavanlaiset sijoitukset muillekin yhtälöille, saamme uudet yhtälöt

$$\begin{array}{l} \zeta = \frac{25}{2} - \frac{5}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ \hline x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ w_2 = 1 + 2w_1 + 5x_2, \\ w_3 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3. \end{array} \tag{5}$$

Tästä näemme selvästi, että kasvattamalla muuttujien w_1 ja x_2 arvoja kohdefunktion ζ arvo pienenee. Tällöin x_3 on ainoa muuttuja, jonka arvoa kasvattamalla myös kohdefunktion arvo kasvaa ja siten valitaan meidän saapuvaksi muuttujaksi. Nyt on selvitettävä kuinka paljon voimme kasvattaa muuttujan x_3 arvoa ehtojen $x_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$ ja $w_3 \geq 0$ rajoissa. Huomataan, että muuttuja w_2 ei ole riippuvainen muuttujasta x_3. Vain x_1 ja w_3 rajoittavat muuttujaa x_3 ehdoilla $x_3 \leq 5$ ja $x_3 \leq 1$. Yhdistämällä ehdot jäljelle jää $x_3 \leq 1$. Nyt meidän lähtevä muuttuja on w_3, ja parannetuksi käyväksi ratkaisuksi saamme

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 0.$$

Kohdefunktio saa tällöin arvon $\zeta = 13$.

Jälleen on selvitettävä, voidaanko kohdefunktion arvoa kasvattaa. Nyt täytyy ilmaista muuttujat ζ, x_1, w_2 ja x_3 muuttujien w_1, x_2 ja w_3 avulla. Ratkaisemalla yhtälöiden (5) viimeisen yhtälön muuttujan x_3 suhteen, saamme

$$x_3 = 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3.$$

Sijoittamalla muihin yhtälöihin saamme

$$\begin{array}{l} \zeta = 13 - w_1 - 3x_2 - w_3, \\ \hline x_1 = 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3, \\ w_2 = 1 + 2w_1 + 5x_2, \\ x_3 = 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3. \end{array} \tag{6}$$

Nyt voidaan aloittaa kolmas iteraatio. Tällä kertaa kuitenkaan kohdefunktiossa ζ ei ole ainuttakaan muuttujaa, jota kasvattamalla myös kohdefunktion arvo kasvaisi. Koska yhtälöt (6) ovat ekvivalentteja yhtälöiden (4) kanssa, ja kaikkien muuttujien on oltava ei-negatiivisia, täytyy $\zeta \leq 13$ kaikille käyville ratkaisuille. Koska saatu ratkaisu saavuttaa arvon 13, on se tehtävän optimaalinen käypä ratkaisu.

2.2.3 Apuongelma

Edellä käyty menetelmä toimii vain, jos $b_i \geq 0$. Tällöin lähtöluettelo on käypä ja ensimmäinen ratkaisu saadaan asettamalla ei-perusmuuttujat x_j nolliksi. Jos $b_i \leq 0$, tarvitaan apuongelma käyvän lähtöluettelon ja käyvän ratkaisun löytämiseksi.

Olkoon annettu LP -ongelma

$$\max_{x} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad & i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geq 0 \quad & j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Tällöin apuongelma on

$$\max_{x} \; -x_0$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_0 \leq b_i \quad & i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geq 0 \quad & j = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Näytetään seuraavan esimerkin kautta kuinka apuongelma toimii käytännössä.

Esimerkki 2.2.

$$\max_{x} \; -2x_1 - x_2$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq -1, \\ -x_1 - 2x_2 &\leq -2, \\ x_2 &\leq 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nyt apuongelma on muotoa

$$\max_x \; -x_0$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_0 &\leq -1, \\ -x_1 - 2x_2 - x_0 &\leq -2, \\ x_2 - x_0 &\leq 1, \\ x_0, x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Seuraavaksi nimetään kohdefunktio $\zeta = -x_0$ ja vajemuuttujat $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$, ja muodostetaan lähtöluettelo:

$$\begin{aligned} \zeta &= -x_0, \\ \hline w_1 &= -1 + x_1 - x_2 + x_0, \\ w_2 &= -2 + x_1 + 2x_2 + x_0, \\ w_3 &= 1 - x_2 + x_0. \end{aligned}$$

Tämä luettelo ei ole käypä, sillä jos asetetaan $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, niin saadaan $w_1 = -1$, $w_2 = -2$ ja $w_3 = 1$, joten kaikki perusmuuttujat eivät ole ei-negatiivisia. Huomataan, että w_2 on ns. "epäkäyvin" perusmuuttuja, koska sen arvo on kaikkein pienin. Valitaan se lähteäväksi muuttujaksi ja siirretään se ei-perusmuuttujiin.

Koska yhdenkään ei-perusmuuttujan kasvattaminen ei kasvata kohdefunktion arvoa, eikä lähtöluettelo ole käypä, niin aiempaa sääntöä saapuvalle muuttujalle ei voida soveltaa. Saapuvaksi muuttujaksi voidaan valita sellainen ei-perusmuuttuja, joka voidaan ratkaista lähtevää muuttujaa vastaavasta rajoiteyhtälöstä. Valitaan saapuvaksi muuttujaksi x_0 ja ratkaistaan se rajoiteyhtälöstä:

$$x_0 = 2 - x_1 - 2x_2 + w_2.$$

Tehdään sijoitus, ja uudeksi luetteloksi saadaan

$$\begin{aligned} \zeta &= -2 + x_1 + 2x_2 - w_2, \\ \hline w_1 &= 1 - 3x_2 + w_2, \\ x_0 &= 2 - x_1 - 2x_2 + w_2, \\ w_3 &= 3 - x_1 - 3x_2 + w_2. \end{aligned}$$

Nyt luettelo on sellaisessa muodossa, että se voidaan ratkaista simplex -menetelmällä. Lähtöluettelon käypä ratkaisu on

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad w_1 = 1, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 3.$$

Koska muuttujan x_2 kerroin on suurin kohdefunktiossa, valitaan se saapuvaksi muuttujaksi. Rajoitteista saadaan ehdot $x_2 \leq \frac{1}{3}$ ja $x_2 \leq 1$, jotka yhdistämällä jää $x_2 \leq \frac{1}{3}$. Tästä lähteväksi muuttujaksi valikoituu w_1. Ratkaistaan x_2 lähtevän muuttujan rajoiteyhtälöstä ja sijoitetaan muihin yhtälöihin, niin saadaan uusi luettelo

$$\begin{array}{l} \zeta = -\dfrac{4}{3} + x_1 - \dfrac{2}{3}w_1 - \dfrac{1}{3}w_2, \\ \hline x_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}w_1 + \dfrac{1}{3}w_2, \\ x_0 = \dfrac{4}{3} - x_1 + \dfrac{2}{3}w_1 + \dfrac{1}{3}w_2, \\ w_3 = 2 - x_1 + w_1. \end{array}$$

Uusi paranneltu käypä ratkaisu on

$$x_0 = \frac{4}{3}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 2.$$

Nyt ainoa muuttuja, joka nostaa kohdefunktion arvoa, on x_1, joten valitaan se saapuvaksi muuttujaksi. Lähteväksi muuttujaksi valikoituu x_0, sillä ensimmäinen rajoiteyhtälö ei sisällä muuttujaa x_1, ja kahdesta muusta rajoiteyhtälöstä on helppo nähdä, että $\frac{4}{3} < 2$, joten ehdoksi jää $x_1 < \frac{4}{3}$. Lisäksi huomataan, että $x_0 = -\zeta$, joten päästään haluttuun apuongelman tilanteeseen. Ratkaistaan x_1 lähtevän muuttujan rajoiteyhtälöstä, tehdään sijoitus ja saadaan

$$\begin{array}{l} \zeta = 0 - x_0, \\ \hline x_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}w_1 + \dfrac{1}{3}w_2, \\ x_1 = \dfrac{4}{3} - x_0 + \dfrac{2}{3}w_1 + \dfrac{1}{3}w_2, \\ w_3 = \dfrac{2}{3} + x_0 + \dfrac{1}{3}w_1 - \dfrac{1}{3}w_2. \end{array}$$

Nyt ollaan tilanteessa, jossa kohdefunktion arvoa ei enää voida kasvattaa kasvattamalla jonkin ei-perusmuuttujan arvoa, ja siten luettelo on optimaalinen apuongelmalle. Alkuperäisen tehtävän käypään lähtöluetteloon päästään, kun tiputetaan x_0 pois ja otetaan käyttöön alkuperäinen kohdefunktio

$$\begin{aligned}\zeta &= -2x_1 - x_2 \\ &= -2(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2) \\ &= -3 - w_1 - w_2.\end{aligned}$$

Nyt lähtöluettelo alkuperäiselle tehtävälle on

$$\begin{array}{c}\zeta = -3 - w_1 - w_2, \\ \hline x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2, \\ x_1 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}w_1 + \frac{1}{3}w_2, \\ w_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2.\end{array}$$

Huomataan, että luettelo on optimaalinen alkuperäiselle tehtävälle, sillä kohdefunktion arvoa ei voida kasvattaa. Kohdefunktio saa optimaalisen arvon $\zeta = -3$, ja tehtävän optimaalinen käypä ratkaisu on

$$x = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Tilanne ei ole aina näin positiivinen, mutta tällä kertaa meillä kävi tuuri. Menetelmällä kuitenkin saadaan muodostettua käypä luettelo alkuperäiselle ongelmalle.

2.3 Optimointitehtävän duaalitehtävä

Oletetaan, että meille on annettu LP -ongelma

$$\max_x \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7}$$

ehdoilla

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad & i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_j \geq 0 \quad & j = 1, 2, \ldots, n.\end{aligned}$$

Tällöin on olemassa *LP -tehtävän duaalitehtävä*

$$\min_y \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{8}$$

ehdoilla

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$
$$y_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Yhtälöä (7) kutsumme *perustehtäväksi*. Jatkon kannalta meidän on syytä todeta, että perustehtävän duaalin duaali on perustehtävä.

Duaalitehtävä voidaan kirjoittaa standardimuotoon, kun minimointiongelma muutetaan maksimoinniksi ja rajoitteiden epäyhtälöiden suunnat muutetaan. Koska funktion ζ minimoiminen on sama, kuin funktion $-\zeta$ maksimoiminen, voidaan duaaliongelma muuttaa maksimointimuotoon kirjoittamalla

$$\min_y \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \max_y \left(-\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \right).$$

Lause 2.3. *Duaalitehtävän (8) duaali on perustehtävä (7).*

2.3.1 Duaalitehtävän yhteys perustehtävään

Seuraavaksi esitellään kaksi tärkeää lausetta duaalitehtävän ja perustehtävän välisen yhteyden kannalta. Lauseita ei tässä todistella, vaan ne otetaan totuutena. Tarkemmat todistukset löytyvät lähteestä [1] kappaleista 5.2 ja 5.3.

Lause 2.4. ***(heikko duaalilause)*** *Jos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on käypä perusratkaisu ja $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ on käypä duaaliratkaisu, niin*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$$

kaikilla

$$j = 1, 2, \ldots, n$$
$$i = 1, 2, \ldots, m.$$

Käytännössä lause kertoo, että perustehtävän kohdefunktion arvojoukko on korkeintaan duaalitehtävän kohdefunktion arvojoukon suuruinen. Seuraava lause kertoo sen, että arvojoukkojen välillä ei ole eroa.

Lause 2.5. ***(vahva duaalilause)*** *Jos perustehtävällä on optimaalinen ratkaisu* $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$*, niin duaalitehtävälläkin on optimaalinen ratkaisu* $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ *siten, että*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

Lauseen idea on, että kun simplex -menetelmällä ratkaistaan perustehtävä, niin se ratkaisee samalla epäsuorasti duaalitehtävän. Tämä nähdään käytännössä myöhemmin.

2.3.2 Esimerkkitehtävä

Muodostetaan luvun 2.2.2 esimerkkitehtävästä duaali ja ratkaistaan se simplex -menetelmällä. Nyt

$$\max_x \; 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 8, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Koska perustehtävä on maksimointitehtävä, tulee duaalitehtävästä minimointitehtävä. Merkitään duaalimuuttujia y_i, ja niitä on yhtä monta kuin perustehtävässä rajoitusehtoja. Duaalin kohdefunktion duaalimuuttujien kertoimiksi tulee perustehtävän vastaavan rajoitusehdon vakiotermit:

$$\min_y \; 5y_1 + 11y_2 + 8y_3.$$

Duaalille saadaan yhtä monta rajoitusehtoa kuin perustehtävällä on muuttujia. Ensimmäinen rajoitusehto saadaan muodostettua perustehtävän muuttujan x_1 kertoimista. Rajoitusehdon muuttujien y_i kertoimet muodostuvat rajoitusehtojen muuttujan x_1 kertoimista, kun taas rajoite saadaan perustehtävän kohdefunktion muuttujan x_1 kertoimesta:

$$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 5.$$

Huomaa, että epäyhtälön suunta täytyy vaihtaa. Muut rajoitukset tulevat vastaavasti, jolloin lopullinen duaali näyttää seuraavalta:

$$\min_y \; 5y_1 + 11y_2 + 8y_3$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 &\geq 5, \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 &\geq 4, \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\geq 3, \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Muutetaan tehtävä standardimuotoon, jotta simplexiä voidaan käyttää. Nyt

$$\max_y \; -5y_1 - 11y_2 - 8y_3$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} -2y_1 - 4y_2 - 3y_3 &\leq -5, \\ -3y_1 - y_2 - 4y_3 &\leq -4, \\ -y_1 - 2y_2 - 2y_3 &\leq -3, \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nyt olemme tilanteessa, jossa epäyhtälörajoitteiden oikealla puolella olevat luvut ovat negatiivisia, joten käyvän lähtöluettelon löytämiseen tarvitsemme luvun 2.2.3 apuongelmaa

$$\max_y \; -y_0$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} -2y_1 - 4y_2 - 3y_3 - y_0 &\leq -5, \\ -3y_1 - y_2 - 4y_3 - y_0 &\leq -4, \\ -y_1 - 2y_2 - 2y_3 - y_0 &\leq -3, \\ y_0, y_1, y_2, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nimetään kohdefunktio $\zeta = -y_0$, vajemuuttujat $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$ ja muodostetaan lähtöluettelo

$$\begin{array}{l} \zeta = -y_0, \\ \hline w_1 = -5 + 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + y_0, \\ w_2 = -4 + 3y_1 + y_2 + 4y_3 + y_0, \\ w_3 = -3 + y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_0. \end{array}$$

Tämä luettelo ei ole käypä, sillä jos asetamme ei-perusmuuttujat nollaksi, saa perusmuuttujat arvot $w_1 = -5, w_2 = -4$ ja $w_3 = -3$, mikä on ristiriita.

Apuongelman nojalla voidaan lähteväksi muuttujaksi valita perusmuuttujista se, joka saa epäkäyvimmän arvon. Tässä tapauksessa w_1 saa kaikista epäkäyvimmän arvon, joten valitaan se lähteväksi muuttujaksi. Valitaan saapuvaksi muuttujaksi y_0, sillä se voidaan ratkaista lähtevän muuttujan rajoiteyhtälöstä helposti. Nyt

$$y_0 = 5 - 2y_1 - 4y_2 - 3y_3 + w_1,$$

ja sijoitetaan tämä muihin yhtälöihin, jolloin saadaan uusi lähtöluettelo

$$\begin{array}{rl} \zeta = & -5 + 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 - w_1, \\ \hline y_0 = & 5 - 2y_1 - 4y_2 - 3y_3 + w_1, \\ w_2 = & 1 + y_1 - 3y_2 + y_3 + w_1, \\ w_3 = & 2 - y_1 - 2y_2 - y_3 + w_1. \end{array}$$

Tämä luettelo on käypä, sillä jos asetamme ei-perusmuuttujat nollaksi, niin jokainen perusmuuttuja on ei-negatiivinen. Nyt voidaan soveltaa simplex - menetelmää.

Nyt käypä ratkaisu on muotoa

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_0 = 5, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 2.$$

Koska muuttujalla y_2 on suurin kerroin kohdefunktiossa, valitaan se saapuvaksi muuttujaksi. Koska $y_1 = y_3 = w_1 = 0$, niin $y_0 = 5 - 4y_2$, ja koska y_0 on ei-negatiivinen luku, niin saadaan ehto $y_2 \leq \frac{5}{4}$. Vastaavasti muista rajoitteista saadaan ehdot $y_2 \leq \frac{1}{3}$ ja $y_2 \leq 1$, ja yhdistämällä rajoitusehdot, saadaan $y_2 \leq \frac{1}{3}$. Näin lähteväksi muuttujaksi valikoituu w_2. Ratkaistaan y_2 lähtevän muuttujan rajoiteyhtälöstä, tehdään sijoitus ja saadaan uusi luettelo

$$\begin{array}{rl} \zeta = & -\frac{11}{3} + \frac{10}{3}y_1 + \frac{13}{3}y_3 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{4}{3}w_2, \\ \hline y_0 = & \frac{11}{3} - \frac{10}{3}y_1 - \frac{13}{3}y_3 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{4}{3}w_2, \\ y_2 = & \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2, \\ w_3 = & \frac{4}{3} - \frac{5}{3}y_1 - \frac{5}{3}y_3 + \frac{1}{3}w_1 + \frac{2}{3}w_2. \end{array}$$

Uudeksi saapuvaksi muuttujaksi valitaan y_3. Rajoitusehdot tarkistamalla ja ne yhdistämällä, saadaan ehto $y_3 \leq \frac{11}{13}$, joka vastaa rajoitteen $y_0 =$

$\frac{11}{3} - \frac{10}{3}y_1 - \frac{13}{3}y_3 - \frac{1}{3}w_1 + \frac{4}{3}w_2$ ehtoa, joten y_0 valitaan lähteväksi muuttujaksi. Ratkaistaan y_3 lähtevän muuttujan rajoiteyhtälöstä, tehdään sijoitus ja saadaan uusi luettelo

$$\zeta = 0 - y_0,$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= \frac{11}{13} - \frac{3}{13}y_0 - \frac{10}{13}y_1 - \frac{1}{13}w_1 + \frac{4}{13}w_2, \\
y_2 &= \frac{24}{39} - \frac{3}{39}y_0 + \frac{3}{39}y_1 + \frac{12}{39}w_1 - \frac{9}{39}w_2, \\
w_3 &= -\frac{3}{39} + \frac{15}{39}y_0 - \frac{15}{39}y_1 + \frac{18}{39}w_1 + \frac{6}{39}w_2.
\end{aligned}$$

Päästiin tilanteeseen, jossa kohdefunktion arvoa ei enää voida kasvattaa kasvattamalla jonkin ei-perusmuuttujan arvoa, ja siten luettelo on optimaalinen apuongelmalle. Alkuperäisen tehtävän käypään lähtöluetteloon päästään, kun tiputetaan y_0 pois ja otetaan käyttöön alkuperäinen kohdefunktio

$$\begin{aligned}
\zeta &= -5y_1 - 11y_2 - 8y_3 \\
&= -5y_1 - 11(\frac{24}{39} + \frac{3}{39}y_1 + \frac{12}{39}w_1 - \frac{9}{39}w_2) - 8(\frac{11}{13} - \frac{10}{13}y_1 - \frac{1}{13}w_1 + \frac{4}{13}w_2) \\
&= -\frac{528}{39} + \frac{12}{39}y_1 - \frac{108}{39}w_1 + \frac{3}{39}w_2.
\end{aligned}$$

Nyt lähtöluettelo on

$$\zeta = -\frac{528}{39} + \frac{12}{39}y_1 - \frac{108}{39}w_1 + \frac{3}{39}w_2,$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= \frac{33}{39} - \frac{30}{39}y_1 - \frac{3}{39}w_1 + \frac{12}{39}w_2, \\
y_2 &= \frac{24}{39} + \frac{3}{39}y_1 + \frac{12}{39}w_1 - \frac{9}{39}w_2, \\
w_3 &= -\frac{3}{39} - \frac{15}{39}y_1 + \frac{18}{39}w_1 + \frac{6}{39}w_2.
\end{aligned}$$

Jos nyt valitaan y_1 saapuvaksi muuttujaksi, seuraa ristiriita, sillä rajoiteyhtälöstä $w_3 = -\frac{3}{39} - \frac{15}{39}y_1 + \frac{18}{39}w_1 + \frac{6}{39}w_2$ saadaan ehto $y_1 \leq -\frac{1}{5}$. Saapuvaksi muuttujaksi täytyy siis valita w_2. Ehdoksi saadaan $\frac{1}{2} \leq w_2 \leq \frac{8}{3}$, joista valitaan rajoiteyhtälöä $y_2 = \frac{24}{39} + \frac{3}{39}y_1 + \frac{12}{39}w_1 - \frac{9}{39}w_2$ vastaava ehto $w_2 \leq \frac{8}{3}$. Ratkaistaan w_2 lähtevän muuttujan y_2 rajoiteyhtälöstä, tehdään sijoitus ja saadaan uusi luettelo

$$\begin{array}{l} \zeta = -\frac{40}{3} + \frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 - 24w_1, \\ \hline y_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}y_1 - \frac{4}{3}y_2 + \frac{1}{3}w_1, \\ w_2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}y_1 - \frac{13}{3}y_2 + \frac{4}{3}w_1, \\ w_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}w_1. \end{array}$$

Saapuvaksi muuttujaksi jää enää mahdollista valita y_1. Rajoiteyhtälöstä $w_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 + \frac{2}{3}w_1$ saatu ehto $y_1 \leq 1$ toteuttaa muut ehdot. Ratkaistaan y_1 lähtevän muuttujan w_3 rajoiteyhtälöstä, tehdään sijoitus ja saadaan uusi luettelo

$$\begin{array}{l} \zeta = -13 - y_2 - 2w_1 - w_3, \\ \hline y_3 = 1 - w_1 + 2w_3, \\ w_2 = 3 - 5y_2 + 2w_1 - w_3, \\ y_1 = 1 - 2y_2 + 2w_1 - 3w_3. \end{array}$$

Nyt kohdefunktion arvoa ei voi enää kasvattaa. Täten saatu kohdefunktion optimaalinen arvo $\zeta = -13$ ja käypä optimaalinen ratkaisu on.

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lisäksi huomataan, että asettamalla ei-perusmuuttujat nollaksi, saadaan perusmuuttujille arvot, jotka ovat vastaluvut perustehtävän optimaalisen käyvän luettelon kohdefunktion kertoimille luettelossa (6). Eli jatkossa voimme poimia duaalitehtävän optimaalisen käyvän ratkaisun suoraan perustehtävän optimaalisesta käyvästä ratkaisusta seuraavasti:

Alkuperäisen LP -tehtävän ratkaisussa kohdefunktio yhtälössä (6) on muotoa

$$\zeta = 13 - w_1 - 3x_2 - w_3,$$

missä muuttujat w_1 ja w_3 ovat komplementaariset duaalitehtävän muuttujille y_1 ja y_3, ja vastaavasti muuttuja x_2 on komplementaarinen duaalitehtävän muuttujalle w_2. Nyt kohdefunktiosta voidaan suoraan poimia muuttujien kertoimet ja ottaa niistä vastaluvut. Tällöin muuttujan w_1 kertoimen vastaluku vastaa muuttujan y_1 arvoa 1 ja muuttujan w_3 kertoimen vastaluku vastaa muuttujan y_3 arvoa 1. Koska muuttujaa w_2 ei löydy kohdefunktiosta, sen kerroin on 0 ja siten vastaa muuttujan y_2 arvoa 0.

Jos palataan yhtälöön (6) ja poimitaan alkuperäisen LP -tehtävän optimaalinen ratkaisu

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

huomataan, että voimme poimia alkuperäisen LP -tehtävän optimaalisen ratkaisun suoraan duaalitehtävän kohdefunktiosta samalla tavalla. Nyt duaalitehtävän kohdefunktion muuttujan w_1 kertoimen vastaluku vastaa muuttujan x_1 arvoa 2, muuttujan w_3 kertoimen vastaluku vastaa muuttujan x_3 arvoa 1 ja muuttujaa w_2 ei kohdefunktiossa ole, niin x_2 saa arvon 0.

3 Matriisipeli

Tässä luvussa tutustutaan peliteoriaan ja nähdään miten lineaarista optimointia voidaan hyödyntää käytännössä. Lähdetään liikkeelle yksinkertaisimmasta pelimuodosta, eli *rajoitetusta kahden pelaajan nollasummapelistä*, eli *matriisipelistä*.

3.1 Pelin idea

Kaksi pelaajaa valitsevat toisistaan riippumatta toiminnon äärellisestä joukosta. Molemmilla pelaajilla on oma joukko toimintoja valittavanaan. Tämän jälkeen molemmat pelaajat näyttävät toisilleen valitsemansa toiminnon. Olkoon i ensimmäisen pelaajan valinta ja j toisen pelaajan valinta tässä tilanteessa. Ensimmäisen pelaajan toiselle pelaajalle maksettava rahamäärä on a_{ij} euroa. Tällöin kaikki mahdolliset maksut löytyvät matriisista

$$A = [a_{ij}].$$

Luonnollisesti, jos a_{ij} on negatiivinen jollakin parilla (i, j), maksu suoritetaan käänteiseen suuntaan, eli pelaaja kaksi maksaa pelaajalle yksi. Koska oletimme, että molemmilla pelaajilla on vain rajallinen määrä toimintoja joista valita, voimme numeroida valinnat siten, että ensimmäinen pelaaja (kutsutaan häntä rivipelaajaksi) voi valita toimintonsa $i = 1, \ldots, n$. Vastaavasti toinen pelaaja (kutsutaan häntä sarakepelaajaksi) voi valita toimintonsa $j = 1, \ldots, m$. Selvennetään vielä, että pelaajien valinnoilla ei ole mitään tekemistä toistensa kanssa (rivin 3 toiminnolla ei ole tekemistä sarakkeen 3 toiminnon kanssa, vaan numero 3 kertoo monesko toiminto on kyseessä).

3.2 Kivi, paperi, sakset!

Otetaan esimerkki tutusta kivi-paperi-sakset -pelistä. Kaksi pelaajaa valitsevat yhden kolmesta vaihtoehdosta toisistaan riippumatta. Pelin säännöissä kivi voittaa sakset, paperi voittaa kiven ja sakset voittaa paperin. Mikäli molemmat pelaajat valitsevat saman, tulos on tasapeli. Tässä versiossa pelistä häviäjä maksaa voittajalle yhden euron. Numeroimalla jokaisen toiminnon voimme muodostaa pelistä matriisin. Olkoon 1 = kivi, 2 = paperi ja 3 = sakset, jolloin matriisi saa muodon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällaisessa pelissä kummallakaan pelaajista ei voi olla selvää voittamisstrategiaa, vaan molempien pelaajien kannattaa vaihdella sattumanvaraisesti kaikkien kolmen toiminnon välillä. Tällöin todennäköisyys voittaa pysyy samana.

Jos vaihdamme matriisin arvoja siten, että eri toiminnoilla voi voittaa eri summan vastapuolen pelaajalta, niin pelin strategia muuttuu. Muutetaan matriisi esimerkiksi muotoon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tällöin pelin idea pysyy edelleen samana ja sattumanvaraisuus parhaana strategiana, mutta todennäköisyys jäädä voitolle ei enää ole tasaisesti $1/3$. Lisäksi näyttää siltä, että toisella pelaajista on pieni etu: maksut yhteenlaskettuna rivipelaaja tulee saamaan 11 euroa sarakepelaajalta, mutta joutuu maksamaan vain 10 euroa. Näin ollen voidaan ajatella, että rivipelaajalla on pieni etu sarakepelaajaa vastaan. Tarkastellaanpa tätä tarkemmin.

Sattumanvaraisella strategialla tarkoitamme, että pelaajien näkökulmasta toinen pelaajista tekee päätöksensä sattumanvaraisesti jonkin ennalta määrätyn todennäköisyyden perusteella. Olkoon y_i rivipelaajan todennäköisyys valita toiminto i. Vektori $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$ on ns. *todennäköisyysvektori*, eli sillä on pelkästään ei-negatiivisia komponentteja, jotka summautuvat ykköseksi. Toisin sanoen

$$y_i \geq 0$$

ja

$$e^T y = 1,$$

missä e on pystyvektori, joka koostuu pelkistä ykkösistä. Vastaavasti olkoon x_j sarakepelaajan todennäköisyys valita toiminto j. Tällöin sarakepelaajan todennäköisyysvektori on $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix}^T$. Oletettu sarakepelaajan saama voitto saadaan laskemalla yhteen kaikki mahdolliset tuloksiin liittyvät voitot kerrottuna tulosten todennäköisyydellä. Kaikki mahdolliset tulokset muodostavat parit (i, j), missä $i = 1, \dots, n$ ja $j = 1, \dots, m$. Jokaiselle tulokselle (i, j) voitto on a_{ij}. Mikäli oletetaan pelaajien valintojen olevan toisistaan riippumattomia, saadaan tuloksen (i, j) todennäköisyydeksi $y_i x_j$. Täten odotettu sarakepelaajan saama voitto on

$$\sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j = y^T A x.$$

3.3 Optimaalinen strategia

Oletetaan, että sarakepelaaja valitsee strategian x. Tällöin rivipelaajan paras taktiikka sarakepelaajaa vastaan on käyttää strategiaa y^*, joka saa seuraavan minimin:

$$\min_y y^T Ax \tag{9}$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} e^T y &= 1, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Huomataan, että kyseessä on tavallinen LP -ongelma, jolle on olemassa optimaalinen ratkaisu. Ongelman ratkaisut ovat kaikki vektorit y, joiden komponentit ovat 0, poislukien yksi komponentti, joka on 1. Tulos on selvä, jos tarkastelemme aiempaa esimerkkiä.

Oletetaan seuraavaksi, että

$$x = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Nyt jos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix},$$

niin

$$Ax = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix},$$

jolloin rivipelaajan paras valinta on joko $i = 1$ (kivi) tai $i = 3$ (sakset). Tällöin eräs optimaalinen ratkaisu on $y^* = (1, 0, 0)$. Näin ollen mille tahansa sarakepelaajan strategialle x, rivipelaaja omaa strategian, jolla saavuttaa halutun minimin. Tällöin sarakepelaajan täytyy käyttää strategiaa x^*, joka saa seuraavan maksimin:

$$\max_x \,(\min_y y^T Ax), \tag{10}$$

jossa sekä maksimi että minimi ovat todennäköisyysvektoreita. Nyt

$$\min_y y^T Ax = \min_i e_i^T Ax,$$

jossa e_i on vektori, jonka kaikki komponentit ovat 0, paitsi komponentti paikalla i on 1. Täten lausekkeen (10) ongelma voidaan kirjoittaa muodossa

$$\max_x \; (\min_i e_i^T Ax)$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} x_j &= 1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Koska sarakepelaaja haluaa maksimoida voittonsa, on luonnollista rajoittaa mahdollisen voiton määrää alhaalta. Olkoon v alaraja lausekkeelle $e_i^T Ax$. Nyt max-min -ongelma voidaan muotoilla uudelleen LP -ongelmaksi:

$$\max v$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} v &\leq e_i^T Ax \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j &= 1, \\ x_j &\geq 0 \qquad\quad j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Vektorimuodossa esitettynä

$$\max v$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} ve - Ax &\leq 0, \\ e^T x &= 1, \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Lopuksi matriisimuotoon kirjoitettuna

$$\max \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -A & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}&, \\ x \geq 0&, \\ v \text{ on vapaa}&. \end{aligned} \tag{11}$$

Symmetrian vuoksi laaditaan sama rivipelaajan strategialle y^*. Nyt

$$\min_y \, (\max_x y^T Ax),$$

jossa sekä maksimi, että minimi ovat jälleen todennäköisyysvektoreita, ja

$$\max_x y^T Ax = \max_j y^T Ae_j,$$

josta saadaan

$$\min_y \, (\max_j y^T Ae_j)$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i &= 1, \\ y_i &\geq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nyt rivipelaaja haluaa minimoida sarakepelaajan voiton, joten hän rajoittaa sarakepelaajan mahdollisen voiton määrää ylhäältä. Olkoon u yläraja lausekkeelle $y^T Ae_j$. Tällöin

$$\min u$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} u &\geq y^T Ae_j \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{i=0}^{n} y_i &= 1, \\ y_i &\geq 0 \qquad\quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Kyseinen min-max -ongelma voidaan nyt muotoilla LP -ongelmaksi:

$$\min u$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} ue^T - y^T A &\geq 0 \quad | \; ()^T \\ \Leftrightarrow \quad ue - A^T y &\geq 0, \\ e^T y &= 1, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Matriisimuotoon kirjoitettuna

$$\min \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -A^T & e \\ e^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} &\begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ y &\geq 0, \\ u &\text{ on vapaa.} \end{aligned} \tag{12}$$

3.4 Minimax -lause

Lause 3.1. *On olemassa todennäköisyysvektorit x^* ja y^*, joille pätee*

$$\max_x y^{*T} Ax = \min_y y^T Ax^*.$$

Todistus. Todistus seuraa suoraan yhtälöiden (11) ja (12) duaalisuudesta. Täten $v^* = u^*$. Nyt

$$v^* = \min_i e_i^T Ax^* = \min_y y^T Ax^*$$

ja vastaavasti

$$u^* = \max_j e_j^T A^T y^* = \max_x x^T A^T y^* = \max_x y^{*T} Ax.$$

Näin ollen

$$\max_x y^{*T} Ax = \min_y y^T Ax^*.$$

□

Pää- ja duaalitehtävän yhteistä optimaalista arvoa $v^* = u^*$ kutsutaan pelin *arvoksi*. Lauseesta 3.1 nähdään, että rivipelaaja voi varmistaa strategian y^* avulla, että hän häviää keskimäärin korkeintaan v yksikköä jokaisella kierroksella. Vastaavasti sarakepelaaja varmistaa strategian x^* avulla voittavansa vähintään v yksikköä jokaisella kierroksella. Täten peliä, jonka arvo on 0, kutsutaan *reiluksi peliksi*. Peli, jossa kahden pelaajan roolit ovat keskenään vaihtokelpoiset, on selkeästi reilu. Tällaistä peliä kutsutaan *symmetriseksi*.

Kivi-paperi-sakset -pelissä sarakepelaajan on ratkaistava LP -ongelma

$$\max z$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ z \end{bmatrix} &\begin{matrix} \leq \\ \leq \\ \leq \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \\ z &\text{ on vapaa.} \end{aligned}$$

Avataan matriisimuoto, ja saadaan

$$\max z$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 + z &\leq 0, \\ 3x_1 - 4x_3 + z &\leq 0, \\ -5x_1 + 6x_2 + z &\leq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Tämä LP -ongelma poikkeaa standardista muodosta kahdella tavalla: siinä on rajoitteena yhtälö ja vapaa muuttuja. Tämä muoto voidaan muokata standardiin muotoon seuraavalla tavalla: käytetään yhtälörajoitetta ratkaisemaan jokin muuttuja x_j, ja valitaan x_3, joka ratkaisemalla saadaan

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2.$$

Sijoitetaan tämä aiempiin epäyhtälöihin:

$$\max z$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + z &\leq -2, \\ 7x_1 + 4x_2 + z &\leq 4, \\ -5x_1 + 6x_2 + z &\leq 0, \\ x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Muuttujan x_3 eliminointi muutti yhtälörajoitteen epäyhtälöksi.

Seuraavaksi muodostettavaa lähtöluetteloa varten on määritettävä vajemuuttujat. Olkoon ne $w_1, w_2, w_3 \geq 0$ ja $\zeta = z$ on kohdefunktio. Lisäksi on luonnollista valita viimeisellä rajoitteelle vajemuuttujaksi x_3. Nyt lähtöluettelo saa muodon

$$\begin{array}{l} \zeta = z, \\ \hline w_1 = -2 + 2x_1 + 3x_2 - z, \\ w_2 = 4 - 7x_1 - 4x_2 - z, \\ w_3 = 5x_1 - 6x_2 - z, \\ x_3 = 1 - x_1 - x_2. \end{array}$$

Muuttuja z ei ole rajoitettu ei-negatiiviseksi, joten ei ole mitään syytä, että se olisi ei-perusmuuttuja. Siirrytään luettelosta toiseen mielivaltaisesti muuttujan z ollessa saapuva muuttuja ja minkä tahansa perusmuuttujan ollessa lähtevä muuttuja (poislukien x_3, koska sen rajoiteyhtälö ei sisällä muuttujaa z). Valitsemalla w_1 lähteväksi muuttujaksi, saadaan

$$\begin{array}{rl} \zeta &= -2 + 2x_1 + 3x_2 - w_1, \\ \hline z &= -2 + 2x_1 + 3x_2 - w_1, \\ w_2 &= 6 - 9x_1 - 7x_2 + w_1, \\ w_3 &= 2 + 3x_1 - 9x_2 + w_1, \\ x_3 &= 1 - x_1 - x_2. \end{array}$$

Koska z on vapaa, se ei voi olla lähtevä muuttuja (lähtevä muuttuja on muuttuja, joka savuttaa sen alarajan, ja z ei ole rajoitettu). Täten z voidaan poistaa luettelosta kokonaan ja se voidaan laskea lopuksi mukaan. Nyt

$$z = -2 + 2x_1 + 3x_2 - w_1,$$

eli

$$z = \zeta,$$

jolloin luettelo saa muodon

$$\begin{array}{rl} \zeta &= -2 + 2x_1 + 3x_2 - w_1, \\ \hline w_2 &= 6 - 9x_1 - 7x_2 + w_1, \\ w_3 &= 2 + 3x_1 - 9x_2 + w_1, \\ x_3 &= 1 - x_1 - x_2. \end{array}$$

Nyt ollaan tilanteessa, jossa voidaan soveltaa simplex -menetelmää. Edetään luvun 2.2.2 esimerkin mukaisesti.

Asetetaan $x_1 = x_2 = 0$, mistä saadaan $x_3 = 1$. Jäljelle jää

$$\begin{aligned} w_2 &= 6 + w_1, \\ w_3 &= 2 + w_1, \end{aligned}$$

joista saadaan ehdot $w_1 \geq -6$ ja $x_4 \geq -2$. Yhdistämällä ehdot saadaan $w_1 \geq -2$, mutta koska w_1 on ei-negatiivinen, rajoittuu se $w_1 \geq 0$. Käyväksi ratkaisuksi saadaan

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 6, \quad w_3 = 2.$$

Aloitetaan nostamalla muuttujan x_1 arvoa nollasta positiiviseksi. Selvitetään paljonko sitä voidaan nostaa, tutkimalla muuttujien x_3, w_2 ja w_3 asettamia rajoitteita. Nyt

$$\begin{aligned} w_2 &= 6 - 9x_1, \\ w_3 &= 2 + 3x_1, \\ x_3 &= 1 - x_1, \end{aligned}$$

mistä saadaan rajoitteet $x_1 \leq \frac{2}{3}$ ja $x_1 \leq 1$. Ja koska $x_1 \geq 0$, niin $w_3 > 0$ ja se ei siten aseta rajoitteita. Yhdistämällä rajoitteet saadaan $x_1 \leq \frac{2}{3}$. Sijoittamalla saadaan uudet parannetut käyvät ratkaisut:

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{3}, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 4.$$

Ratkaistaan seuraavaksi muuttujat ζ, x_1, x_3 ja w_3 muuttujien x_2, w_1 ja w_2 suhteen. Valitaan yhtälö

$$w_2 = 6 - 9x_1 - 7x_2 + w_1,$$

ja ratkaistaan tästä x_1:

$$x_1 = \frac{2}{3} - \frac{7}{9}x_2 + \frac{1}{9}w_1 - \frac{1}{9}w_2.$$

Sijoitetaan muuttuja x_1 muihin yhtälöihin, ja saadaan uusi luettelo

$$\begin{array}{l} \zeta = -\frac{2}{3} + \frac{13}{9}x_2 - \frac{7}{9}w_1 - \frac{2}{9}w_2, \\ \hline x_1 = \frac{2}{3} - \frac{7}{9}x_2 + \frac{1}{9}w_1 - \frac{1}{9}w_2, \\ x_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x_2 - \frac{1}{9}w_1 + \frac{1}{9}w_2, \\ w_3 = 4 - \frac{102}{9}x_2 + \frac{4}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2. \end{array}$$

Huomataan, että ainoastaan muuttuja x_2 kasvattaa kohdefunktion ζ arvoa. Tutkitaan muuttujien x_1, x_3 ja w_3 asettamia ehtoja. Nyt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3} - \frac{7}{9}x_2, \\ x_3 &= \frac{1}{3} - \frac{2}{9}x_2, \\ w_3 &= 4 - \frac{102}{9}x_2, \end{aligned}$$

mistä saadaan ehdot $x_2 \leq \frac{18}{21}$, $x_2 \leq \frac{3}{2}$ ja $x_2 \leq \frac{36}{102}$. Yhdistämällä nämä päädytään ehtoon $x_2 \leq \frac{36}{102}$ ja jälleen uuteen käypään ratkaisuun

$$x_1 = \frac{40}{102}, \quad x_2 = \frac{36}{102}, \quad x_3 = \frac{26}{102}, \quad w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0.$$

Ratkaistaan muuttujat ζ, x_1, x_2 ja x_3 muuttujien w_1, w_2 ja w_3 suhteen. Valitaan

$$w_3 = 4 - \frac{102}{9}x_2 + \frac{4}{3}w_1 - \frac{1}{3}w_2,$$

josta ratkaistaan x_2:

$$x_2 = \frac{36}{102} + \frac{12}{102}w_1 - \frac{3}{102}w_2 - \frac{9}{102}w_3.$$

Sijoitetaan muuttuja x_2 muihin yhtälöihin, ja saadaan jälleen uusi luettelo

$$\begin{array}{l}
\zeta = -\frac{16}{102} - \frac{62}{102}w_1 - \frac{27}{102}w_2 - \frac{13}{102}w_3, \\
\hline
x_1 = \frac{40}{102} + \frac{2}{102}w_1 - \frac{9}{102}w_2 + \frac{7}{102}w_3, \\
x_2 = \frac{36}{102} + \frac{12}{102}w_1 - \frac{3}{102}w_2 - \frac{9}{102}w_3, \\
x_3 = \frac{26}{102} - \frac{14}{102}w_1 + \frac{12}{102}w_2 + \frac{2}{102}w_3.
\end{array}$$

Nyt kohdefunktion ζ arvoa ei voi enää kasvattaa, joten simplex -menetelmä on tullut päätökseen.

Optimaaliseksi käyväksi ratkaisuksi saadaan

$$x^* = \begin{bmatrix} 40/102 \\ 36/102 \\ 26/102 \end{bmatrix}.$$

Nyt muuttujat w_1, w_2 ja w_3 ovat komplementaariset muuttujille y_1, y_2 ja y_3 duaalitehtävässä. Lauseen 2.5 mukaan koska perustehtävällä on optimaalinen ratkaisu, niin sellainen on myös duaalitehtävällä. Esimerkkitehtävän 2.3.2 nojalla voidaan optimaalinen duaaliratkaisu poimia suoraan perustehtävän ratkaisusta:

$$y^* = \begin{bmatrix} 62/102 \\ 27/102 \\ 13/102 \end{bmatrix}.$$

Nyt, koska $w_1 = w_2 = w_3 = 0$, niin kohdefunktio saa arvon $\zeta = -\frac{16}{102} =$ -0,156862 . . ., ja koska pelaamme rahasta, voimme pyöristää tuloksen lähimpään sadasosaan, eli $\zeta \approx$ -0,16, mikä on tämän pelin arvo. Toisin sanoen, rivipelaajalla on pieni etu sarakepelaajaan nähden, koska hän voi odottaa keskimääräistä voittoa noin 16 senttiä jokaiselta erältä.

4 Pokeri

Eräissä korttipeleissä, kuten pokerissa, on panostuskierroksia, joissa pelaajat yrittävät *bluffata* toisia pelaajia korottamalla heidän panostaan ja yrittämällä näin saada toiset pelaajat luovuttamaan, vaikka omat todennäköisyydet voittoon ovatkin hyvin pienet, jos vastustajat pysyvät pelissä. Vastaavasti pelaajat voivat "korottaa liian vähän" eli *alipanostaa*, antaen näin vastustajille turhia toiveita. Tässä luvussa tarkastelemme yksinkertaistettua versiota pokerista, jotta voimme tarkastella ovatko bluffaaminen ja alipanostaminen hyödyllisiä strategioita.

4.1 Yksinkertaistettu peli

Yksinkertaistetussa pokerissa on kaksi pelaajaa, A ja B, ja pakassa vain kolme korttia, 1, 2 ja 3. Ensimmäisen kierroksen alussa ennen korttien jakoa molemmat pelaajat maksavat yhden euron *anten*, eli maksun, jolla pottia saadaan kasvatettua. Tämän pakollisen maksun jälkeen molemmille pelaajille jaetaan yksi kortti pakasta. Ensimmäinen panostuskierros alkaa, jolla molemmat pelaajat vuorollaan alkaen pelaajasta A joko *panostavat* eli lisäävät pottiin yhden euron tai *passaavat* eli eivät lisää pottiin rahaa. Panostuskierros loppuu, kun

a) panostusta seuraa panostus,
b) passaamista seuraa passaaminen tai
c) panostusta seuraa passaaminen.

Ensimmäisessä kahdessa tapauksessa voittaja selviää kortteja vertaamalla, ja potti menee pelaajalle, jonka kortin arvo on suurempi. Viimeisessä tapauksessa voitto menee suoraan pelaajalle, joka panostaa, riippumatta korttien arvosta (oikeassa pokerissa tätä kutsutaan *foldaamiseksi*).

Tällaisessa yksinkertaistetussa panostuskierroksessa on vain viisi mahdollista tilannetta:

A passaa, B passaa:	2 € korkeamman kortin pelaajalle,
A passaa, B panostaa, A passaa:	3 € pelaajalle B,
A passaa, B panostaa, A panostaa:	4 € korkeamman kortin pelaajalle,
A panostaa, B passaa:	3 € pelaajalle A,
A panostaa, B panostaa:	4 € korkeamman kortin pelaajalle.

Kun kortit ovat jaettu, pelaajalla A on valittavinaan kolme mahdollista tapaa pelata:

1. Passata. Jos B panostaa, passaa uudestaan.
2. Passata. Jos B panostaa, panosta.
3. Panosta.

Vastaavasti pelaajalla B on valittavinaan neljä erilaista *pelitapaa* pelata:

1. Passaa joka tapauksessa.
2. Jos A passaa, passaa, mutta jos A panostaa, panosta.
3. Jos A passaa, panosta, mutta jos A panostaa, passaa.
4. Panosta joka tapauksessa.

4.2 Optimaalisen pelistrategian löytäminen

Jotta tilanne voidaan muokata matriisipeliksi, täytyy identifioida molempien pelaajien strategiat. *Strategiat* ovat tässä valintoja mitä pelitapaa pelaajat käyttävät valittavinaan olevista tavoista, kun kortit ovat jaettu. Täten pelaajien strategiat voidaan lausua kolmikkona (y_1, y_2, y_3), missä y_i on pelaajan valitsema tapa pelata kun kädessä on kortti i. Pelaajalle A pelitapa y_i voi olla 1, 2 tai 3, kun puolestaan pelaajalle B pelitapa y_i voi olla 1, 2, 3 tai 4.

Kun strategiat ovat valittu, voidaan laskea keskiarvollinen maksu. Sovitaan, että positiivinen maksu on pelaajalta A pelaajalle B. Otetaan esimerkkinä tilanne, jossa pelaaja A on valinnut strategian (3, 1, 2) ja pelaaja B strategian (3, 2, 4). Nyt on kuusi tapaa miten kortit voidaan jakaa:

jaetut kortit A, B	panostuskierros	maksu A:lta B:lle
1, 2	A panostaa, B panostaa	2
1, 3	A panostaa, B panostaa	2
2, 1	A passaa, B panostaa, A passaa	1
2, 3	A passaa, B panostaa, A passaa	1
3, 1	A passaa, B panostaa, A panostaa	-2
3, 2	A passaa, B passaa	-1

Koska kaikki tilanteet ovat yhtä todennäköisiä, keskiarvollinen maksu pelaajalta A pelaajalle B on $(2 + 2 + 1 + 1 - 2 - 1)/6 = 0{,}5$.

Maksun keskiarvo täytyy laskea kaikkien mahdollisten pelitapojen kombinaatiolle. Pelaajalla A on $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ mahdollista strategiaa ja pelaajalla B on $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ mahdollista strategiaa. Yhteensä strategioita on siis $27 \cdot 64 = 1728$. Kaikkien keskiarvojen laskeminen olisi turhan työlästä, mutta onneksi voimme vähentää laskettavien keskiarvojen määrää muutamalla havainnolla.

Pelaaja, jolla on kädessään kortti 1, ei tulisi koskaan vastata panostukseen panostamalla, sillä hän häviää tilanteen joka tapauksessa. Tällöin kannattaa passata, sillä häviö on pienempi. Tällä logiikalla

jos pelaajalla A on kortti 1, hänen ei pidä pelata tavalla 2,
jos pelaajalla B on kortti 1, hänen ei pidä pelata tavoilla 2 ja 4.

Jos pelaajalla on kädessään pelin korkein kortti, eli kortti 3, ei hänen koskaan tulisi vastata panostukseen passaamalla, sillä passaamalla hän häviää ja panostamalla hän voittaa. Lisäksi pelaajan tulisi aina vastata passaamiseen panostamalla, sillä hän tulee voittamaan joka tapauksessa, mutta panostamalla hänellä on mahdollisuus voittaa isompi potti. Täten

jos pelaajalla A on kortti 3, hänen ei pidä pelata tavalla 1,
jos pelaajalla B on kortti 3, hänen ei pidä pelata tavoilla 1, 2 ja 3.

Eliminoimalla nämä pelitavat, pelaajalle A jää jäljelle $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ strategiaa ja pelaajalle B jää $2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$ strategiaa. Yhteensä strategioita on nyt $12 \cdot 8 = 96$, mikä on huomattava parannus aiempaan.

Sen lisäksi, että "huonot" strategiat eliminoidaan matemaattisesta mallista, oletetaan myös pelaajien A ja B olevan tietoisia näistä strategioista ja siitä, että niitä ei käytetä. Toisin sanoen, pelaaja A voi olettaa pelaajan B pelaavan fiksusti ja toisin päin. Tällä tiedolla, jos pelaajalla A on kortti 2, hänen ei tule pelata tavalla 3. Tämä siksi, että tällöin pelaajalla B on kädessään joko 1 tai 3, ja pelaaja A tietää millä tavalla pelaajan B kannattaa pelata kummassakin tilanteessa. Jos pelaajalla B on kortti 1, hän ei tule panostamaan pelaajan A panostaessa, jolloin voitto jää vähäiseksi. Jos puolestaan pelaajalla B on kortti 3, hän voittaa tilanteen joka tapauksessa, ja pelaaja A häviää suuremman summan pelaamalla tavalla 3. Pitkällä juoksulla pelaaja A tulee jäämään häviölle tällä pelitavalla.

Vastaavanlaisella päätelmällä, jos pelaajalla B on kortti 2, hänen ei tule pelata tavoilla 3 ja 4. Jos pelaaja B pelaa strategialla 3 ja pelaaja A passaa, tällöin pelaaja B panostaa. Nyt jos pelaajalla A on kädessään kortti 3, hän pelaa fiksusti ja panostaa, jolloin pelaaja B häviää suuremman summan. Jos pelaajalla A olisi kädessään kortti 1, hän todennäköisesti passaa ja voitto jää vähäiseksi. Turvallisempaa olisi pelaajan B pelata strategialla 1 ja passata joka tapauksessa, jolloin mahdollinen häviökin jäisi vähäiseksi.

Jos pelaaja B pelaa strategialla 4, niin hän panostaa joka tapauksessa. Tällöin sama tilanne, jos pelaajalla A on kädessään kortti 1, hän tuskin panostaa ja voitto jää vähäiseksi. Jos pelaajalla A on kortti 3, hän panostaa ja voittaa joka tapauksessa. Jälleen olisi turvallisinta pelaajan B pelata strategialla 1 ja passata joka tapauksessa.

On myös mahdollista, että pelaajalla A on kädessään kortti 1 ja hän pelaa strategialla 3 ja yrittää bluffata panostamalla. Tällöin pelaajan B on suotavaa harkita pelistrategiaa 2, jolloin hän panostaa pelaajan A panostaessa ja voittaa pelin. Palataan myöhemmin siihen, onko bluffaaminen oikeasti toimiva strategia.

Nyt jäljelle jääviä strategioita on pelaajalla A enää $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ja pelaajalla B enää $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, yhteensä siis $8 \cdot 4 = 24$ strategiaa.

Nyt ei voida enää vähentää strategioiden määrää. Nyt kuitenkin voidaan luoda matrsiisi kaikkien tilanteiden keskiarvollisista maksuista:

$$\begin{array}{c} \\ (1,1,2) \\ (1,1,3) \\ (1,2,2) \\ (1,2,3) \\ (3,1,2) \\ (3,1,3) \\ (3,2,2) \\ (3,2,3) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1,1,4) & (1,2,4) & (3,1,4) & (3,2,4) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & -1/6 & -1/6 \\ 1/6 & 0 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ -1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/3 & 1/6 \\ 0 & 1/3 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \end{array},$$

missä matriisin ulkopuolella suluissa olevat kolmikot ovat kaikki pelaajien "järkevät" strategiat. Muokataan matriisi tuloksen (11) mukaiseen muotoon

$$\max z$$

ehdoilla

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/6 & -1/6 & 1 \\ 0 & 1/6 & -1/3 & -1/6 & 1 \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 & 1/6 & 1 \\ -1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 1 \\ 1/6 & -1/3 & 0 & -1/2 & 1 \\ 1/6 & -1/6 & -1/6 & -1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/3 & -1/6 & 1 \\ 0 & -1/3 & 1/6 & -1/6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ z \end{bmatrix} \begin{matrix} \leq \\ \leq \\ \leq \\ \leq \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0, \\ z &\text{ on vapaa.} \end{aligned}$$

Nyt ratkaistaan matriisipeli. Avataan matriisimuoto, ja saadaan

$$\max z$$

ehdoilla

$$\begin{aligned} -1/6x_3 - 1/6x_4 + z &\leq 0, \\ 1/6x_2 - 1/3x_3 - 1/6x_4 + z &\leq 0, \\ -1/6x_1 - 1/6x_2 + 1/6x_3 + 1/6x_4 + z &\leq 0, \\ -1/6x_1 + 1/6x_4 + z &\leq 0, \\ 1/6x_1 - 1/3x_2 - 1/2x_4 + z &\leq 0, \\ 1/6x_1 - 1/6x_2 - 1/6x_3 - 1/2x_4 + z &\leq 0, \\ -1/2x_2 + 1/3x_3 - 1/6x_4 + z &\leq 0, \\ -1/3x_2 + 1/6x_3 - 1/6x_4 + z &\leq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Muokataan tämä standardiin muotoon ratkaisemalla jokin muuttuja ja sijoittamalla se muihin yhtälöihin. Ratkaistaan muuttuja x_4 yhtälöstä

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

ja sijoitetaan tämä aiempiin epäyhtälöihin:

$$\max z$$

ehdoilla

$$\begin{aligned}
1/6x_1 + 1/6x_2 + z &\leq 1/6,\\
1/6x_1 + 1/3x_2 - 1/6x_3 + z &\leq 1/6,\\
-1/3x_1 - 1/3x_2 + z &\leq -1/6,\\
-1/3x_1 - 1/6x_2 - 1/6x_3 + z &\leq -1/6,\\
2/3x_1 + 1/6x_2 + 1/2x_3 + z &\leq 1/2,\\
2/3x_1 + 1/3x_2 + 1/3x_3 + z &\leq 1/2,\\
1/6x_1 - 1/3x_2 + 1/2x_3 + z &\leq 1/6,\\
1/6x_1 - 1/6x_2 + 1/3x_3 + z &\leq 1/6,\\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1,\\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Muuttujan x_4 eliminointi muutti yhtälörajoitteet epäyhtälöiksi.

Seuraavaksi muodostettavaa lähtöluetteloa varten on määritettävä vajemuuttujat. Olkoon ne $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8 \geq 0$ ja $\zeta = z$ on kohdefunktio. Lisäksi on luonnollista valita viimeiselle rajoitteelle vajemuuttujaksi x_4. Nyt lähtöluettelo saa muodon

$$\begin{aligned}
\zeta &= z,\\
\hline
w_1 &= 1/6 - 1/6x_1 - 1/6x_2 - z,\\
w_2 &= 1/6 - 1/6x_1 - 1/3x_2 + 1/6x_3 - z,\\
w_3 &= -1/6 + 1/3x_1 + 1/3x_2 - z,\\
w_4 &= -1/6 + 1/3x_1 + 1/6x_2 + 1/6x_3 - z,\\
w_5 &= 1/2 - 2/3x_1 - 1/6x_2 - 1/2x_3 - z,\\
w_6 &= 1/2 - 2/3x_1 - 1/3x_2 - 1/3x_3 - z,\\
w_7 &= 1/6 - 1/6x_1 + 1/3x_2 - 1/2x_3 - z,\\
w_8 &= 1/6 - 1/6x_1 + 1/6x_2 - 1/3x_3 - z,\\
x_4 &= 1 - x_1 - x_2 - x_3.
\end{aligned}$$

Muuttuja z ei ole rajoitettu ei-negatiiviseksi, joten ei ole mitään syytä, että se olisi ei-perusmuuttuja. Siirrytään luettelosta toiseen mielivaltaisesti muuttujan z ollessa saapuva muuttuja ja minkä tahansa perusmuuttujan ollessa lähtevä muuttuja (poislukien x_4, koska sen rajoiteyhtälö ei sisällä muuttujaa z). Valitsemalla w_4 lähteväksi muuttujaksi, ratkaistaan yhtälöstä muuttuja

z ja sijoitetaan se muihin yhtälöihin, niin saadaan

$$\begin{aligned}
\zeta &= -1/6 + 1/3x_1 + 1/6x_2 + 1/6x_3 - w_4, \\
\hline
w_1 &= 1/3 - 1/2x_1 - 1/3x_2 - 1/6x_3 + w_4, \\
w_2 &= 1/3 - 1/2x_1 - 1/2x_2 + w_4, \\
w_3 &= 1/6x_2 - 1/6x_3 + w_4, \\
z &= -1/6 + 1/3x_1 + 1/6x_2 + 1/6x_3 - w_4, \\
w_5 &= 2/3 - x_1 - 1/3x_2 - 2/3x_3 + w_4, \\
w_6 &= 2/3 - x_1 - 1/2x_2 - 1/2x_3 + w_4, \\
w_7 &= 1/3 - 1/2x_1 + 1/6x_2 - 2/3x_3 + w_4, \\
w_8 &= 1/3 - 1/2x_1 - 1/2x_3 + w_4, \\
x_4 &= 1 - x_1 - x_2 - x_3.
\end{aligned}$$

Koska z on vapaa, se ei voi olla lähtevä muuttuja (lähtevä muuttuja on muuttuja, joka savuttaa sen alarajan, ja z ei ole rajoitettu). Täten z voidaan poistaa luettelosta kokonaan ja se voidaan laskea lopuksi mukaan. Nyt luettelo saa muodon

$$\begin{aligned}
\zeta &= -1/6 + 1/3x_1 + 1/6x_2 + 1/6x_3 - w_4, \\
\hline
w_1 &= 1/3 - 1/2x_1 - 1/3x_2 - 1/6x_3 + w_4, \\
w_2 &= 1/3 - 1/2x_1 - 1/2x_2 + w_4, \\
w_3 &= 1/6x_2 - 1/6x_3 + w_4, \\
w_5 &= 2/3 - x_1 - 1/3x_2 - 2/3x_3 + w_4, \\
w_6 &= 2/3 - x_1 - 1/2x_2 - 1/2x_3 + w_4, \\
w_7 &= 1/3 - 1/2x_1 + 1/6x_2 - 2/3x_3 + w_4, \\
w_8 &= 1/3 - 1/2x_1 - 1/2x_3 + w_4, \\
x_4 &= 1 - x_1 - x_2 - x_3.
\end{aligned}$$

Nyt voidaan soveltaa simplex -menetelmää. Kohdefunktion muuttujan x_1 kerroin on suurin, joten se on saapuva muuttuja. Rajoitteista saadaan ehdot $x_1 \leq 2/3$ kaikista muista, paitsi muuttujan x_4 rajoiteyhtälöstä, joka antaa ehdon $x_1 \leq 1$. Muuttujan w_3 rajoiteyhtälössä ei ole muuttujaa x_1. Valitaan mielivaltaisesti lähteväksi muuttujaksi w_1 ja ratkaistaan x_1 sen rajoiteyhtälöstä. Tämän jälkeen tehdään sijoitus, jolloin saadaan uusi luettelo

$$\zeta = 1/18 - 1/18x_2 + 1/18x_3 - 2/3w_1 - 1/3w_4,$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2/3 - 2/3x_2 - 1/3x_3 - 2w_1 + 2w_4,\\
w_2 &= -1/6x_2 + 1/6x_3 + w_1,\\
w_3 &= 1/6x_2 - 1/6x_3 + w_4,\\
w_5 &= 1/3x_2 - 1/3x_3 + 2w_1 - w_4,\\
w_6 &= 1/6x_2 - 1/6x_3 + 2w_1 - w_4,\\
w_7 &= 1/2x_2 - 1/2x_3 + w_1,\\
w_8 &= 1/3x_2 - 1/3x_3 + w_1,\\
x_4 &= 1/3 - 1/3x_2 - 2/3x_3 + 2w_1 - 2w_4.
\end{aligned}$$

Nyt saapuvaksi muuttujaksi valikoituu x_3, koska sillä on ainoa positiivinen kerroin kohdefunktiossa. Kuitenkin huomataan, että rajoiteyhtälöistä saadaan ehdoksi, että $x_3 \leq 0$, joten $x_3 = 0$. Tämän vuoksi lähtevä muuttuja voidaan valita mielivaltaisesti. Valitaan lähteväksi muuttujaksi w_8, ratkaistaan x_3 sen rajoiteyhtälöstä, tehdään sijoitus ja saadaan luettelo

$$\zeta = 1/18 - 1/2w_1 - 1/3w_4 - 1/6w_8,$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2/3 - x_2 - 3w_1 + 2w_4 + w_8,\\
w_2 &= 3/2w_1 - 1/2w_8,\\
w_3 &= -1/2w_1 + w_4 + 1/2w_8,\\
w_5 &= w_1 - w_4 + w_8,\\
w_6 &= 3/2w_1 - w_4 + 1/2w_8,\\
w_7 &= -1/2w_1 + 3/2w_8,\\
x_3 &= x_2 + 3w_1 - 3w_8,\\
x_4 &= 1/3 - x_2 - 2w_4 + 2w_8.
\end{aligned}$$

Nyt kohdefunktion arvoa ei voi enää nostaa, joten tilanne on optimaalinen. Optimaalisiksi ratkaisuiksi saadaan

$$x^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$$

ja

$$y^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}^T.$$

Todennäköisyysvektorit voidaan todeta olevan yksinkertaisia toteamuksia kahden pelaajan optimaalisista sattumanvaraisista strategioista. Pelaajan A optimaalinen strategia voidaan löytää helposti aiemmin tehdyllä keskiarvotaulukolla. Otetaan vain kaikki mahdolliset jaettujen korttien tilanteet, kun kädessä on tietty kortti, ja katsotaan pelitapojen avulla maksun määrä. Esimerkiksi tilanteessa, jossa pelaajalla A on kädessään kortti 1, niin tällöin

pelitapa A, B	jaeutut kortit A, B	panostuskierros	maksu A:lta B:lle
1, 1	1, 2	A passaa, B passaa	1
1, 2	1, 2	A passaa, B passaa	1
1, 4	1, 3	A passaa, B panostaa, A passaa	1
3, 1	1, 2	A panostaa, B passaa	-1
3, 2	1, 2	A panostaa, B panostaa	2
3, 4	1, 3	A panostaa, B panostaa	2

Kuten taulukosta huomataan, pelaajan A kannattaa käyttää pelitapaa 1 kaikista kuudesta tilanteesta muissa, paitsi yhdessä. Tilanteissa 5 ja 6 pelaaja A häviää enemmän, kuin tilanteissa 1, 2 ja 3, joten pelitapa 1 on pelitapaa 3 parempi. Ainoastaan tilanteessa 4 kannattaa käyttää pelitapaa 3, sillä se on ainoa tilanne, jossa A voi voittaa, jolloin pelitapojen suhteeksi saadaan 5:1. Samanlaista taulukkoa ja logiikkaa voidaan käyttää muillekin korteille ja pelitavoille. Pelaajan A optimaalinen strategia on nyt:

jos hänellä on kortti 1, hänen pitää sekoittaa pelitavat 1 ja 3 suhteessa 5:1,
jos hänellä on kortti 2, hänen pitää sekoittaa pelitavat 1 ja 2 suhteessa 1:1,
jos hänellä on kortti 3, hänen pitää sekoittaa pelitavat 2 ja 3 suhteessa 1:1.

Vastaavasti pelaajan B optimaalinen strategia on:

jos hänellä on kortti 1, hänen pitää sekoittaa pelitavat 1 ja 3 suhteessa 2:1,
jos hänellä on kortti 2, hänen pitää sekoittaa pelitavat 1 ja 2 suhteessa 2:1,
jos hänellä on kortti 3, hänen pitää pelata tavalla 4.

Huomataan, että pelaajan A on optimaalista pelata ainakin osan ajasta pelitavalla 3, kun kädessä on kortti 1. Koska pelitapa 3 käskee panostamaan, se on selvästi bluffi. Pelaaja B myös bluffaa joskus, sillä pelitapaa 3 käytetään joskus, kun kädessä on kortti 1. Selvästi optimaaliset strategiat sisältävät myös hieman alipanostamistakin, sillä esimerkiksi tilanne, jossa pelaajalla A on kädessään kortti 3, olisi hänen optimaalista puolet ajasta passata ja odottaa, panostaako pelaaja B.

Lähteet

[1] R. J. Vanderbei. “Linear programming: Foundations and extensions”. *Dept. of Operations Research and Financial Engineering Princeton University, USA*, 2008.

[2] E. Laitinen. “Lineaarinen optimointi”. *Oulun yliopisto*, 2019.

[3] D. Sklansky. “The theory of poker”. *Two plus two publishing, Las Vegas*, 1999.

[4] J. Swanson. “Game theory and poker”. 2005.