Conocer no es como predecir una secuencia numérica impredecible: Bateson y los polinomios de Lagrange

Diego Alonso Becerra [1]

1 Universidad de Santiago de Chile

> Quiero escuchar los vagos ruidos ancestrales de los mamuts y de las ramas quebradas; abandonarme a mi deseo imposible de abrazar el mundo entero en un sólo acto de comprensión.
>
> –Virginia Woolf, Las olas

Introducción

En su libro *Mind and nature* (1979)[1]Gregory Bateson elabora un argumento que él llama 'convencional' para concluir que "nunca podremos ser capaces de reclamar conocimiento definitivo en asunto alguno [*final knowledge of anything whatsoever*]" (p.27).

La conclusión es correcta, pero el argumento es engañoso y desorienta más de lo que ayuda. Además, Bateson, disimuladamente, introduce algunas afirmaciones falsas en medio de premisas verdaderas. Revisarlo nos permitirá aclarar algunos malentendidos comunes en filosofía de la ciencia, además de ser la excusa perfecta para esbozar una introducción a la interpolación polinomial de Lagrange y una pequeña reflexión sobre los límites del conocimiento.

Prueba (demostración) vs. contrastación empírica

Bateson plantea que la ciencia nunca prueba nada (prueba, en el sentido de demostración). Eso es correcto, ya que las pruebas [*proofs*] son argumentos inferenciales que sólo aparecen en las matemáticas; estas, necesariamente, presuponen la existencia de axiomas o premisas. La naturaleza no tiene axiomas ni premisas. Es cierto que mientras evaluamos hipótesis, nosotrxs podemos hacer 'como si' la premisa fuera tal, y de ello deducir consecuencias empíricas. Más o menos así funcionan los llamados enunciados nomológicos, o más familiarmente "leyes científicas". Si asumo la premisa "todos los objetos o sustancias se expanden con el calor" (i.e. el principio de expansión térmica), puedo predecir que el volumen (y por tanto el espacio que ocupa) una reja de hierro a 10°C será menor que el volumen de esa misma reja cuando vuelva a intentar abrirla en la tarde a 35°C. Experimentando puedo llegar a establecer no sólo la dirección de la relación ('a más temperatura, más volumen'), sino, precisar la magnitud con la que el calor afecta al volumen: obtengo un coeficiente de dilatación[2]. El problema, es que el mundo no es tan regular como a veces parece, y no tardaremos en encontrar contraejemplos a nuestra 'premisa universal'.

- El agua se contrae al aumentar su temperatura en el angosto rango entre los 0 y 4°C. En el resto de temperaturas, se adecúa a nuestra premisa.

1 Aunque existe una traducción al español llamada "Espíritu y naturaleza", la desrecomiendo fuertemente. Para este artículo, cuando cite, haré traducción libre desde el libro original.

2 La expresión matemática del coeficiente de dilatación es $\alpha = 1/V\ (\partial V/\ \partial T)$ dónde para cualquier gas, líquido o sólido α denota la expansión térmica, V el volumen, y T la temperatura, asumiendo presión constante.

- Más rebuscado: el compuesto zirconio-tungstato ($CZrW_2O_8$) presenta expansión térmica negativa (i.e. se contrae cuando lo calientas) (Ravindran, Arora & Mary, 2003)[3].

Entonces, por segura o universal que parezca una afirmación empírica, nunca podemos darla por sentado, el mundo siempre puede contradecirnos. Eso lejos de ser una debilidad, es la mayor fortaleza de la ciencia: debemos ser humildes porque nuestras afirmaciones no tienen autoridad autónoma. Es el 'modo de ser del mundo' quién se encarga de confirmarnos o refutarnos, y toda confirmación es siempre provisoria. Hasta aquí todo bien con Bateson.

Entonces, las matemáticas son estrictamente deductivas, las ciencias –en cambio– requieren percepción e inducción. Las matemáticas prueban (porque se basan en axiomas arbitrarios y se conectan mediante condicionales: si A es verdadero, entonces se sigue necesariamente C; ni A ni C tienen por qué referir al mundo, podemos ser tan abstractos como queramos); las ciencias, en cambio, indagan [*probes*] hipótesis. La hipótesis, o el enunciado nomológico presenta la misma estructura condicional básica que un teorema matemático (si A entonces C), con la diferencia que la premisa o conjunto de premisas "A" intenta reflejar un estado de cosas del mundo; que puede ser o no ser el caso (en matemáticas no tiene sentido cuestionar la premisa); y la confirmación de la consecuencia o conjunto de consecuencias "C" no garantiza la verdad de A (aquello sería caer en la falacia de 'afirmación del consecuente'[4].

El problema viene con las conclusiones que pretende extraer de esta distinción disciplinar:

> "Digamos que la verdad fuera una correspondencia precisa entre nuestra descripción y aquello que describimos, o entre nuestra red completa de abstracciones y deducciones y algún entendimiento total del mundo externo. La verdad, en este sentido, no es obtenible. E incluso si ignorásemos las barreras de la codificación (..) nunca seremos capaces de reclamar conocimiento definitivo en asunto alguno" (Bateson, 1979, p. 27).

Es cierto que nunca reclamaremos que algún sistema de enunciados empíricos es definitivamente verdadero, ni está definitivamente justificado[5] y que eso se sigue de la distinción entre la metodología de las matemáticas y la metodología de las ciencias. No obstante, eso no implica que, ni se sigue de afirmar que la verdad no es posible de obtener. Bate-

3 Si bien cito el artículo técnico, adjunto un artículo de divulgación que puede resultar mucho más esclarecedor (al menos para mí, que no soy físico). Aprovecho de agregar que el plutonio, en sus fases estables sólidas, también se contrae al calentarse. https://physics.aps.org/story/v14/st21

4 La falacia de afirmación del consecuente, resumida mal y rápido es que yo no puedo justificar mi premisa (o antecedente) A con el mero cumplimiento de la consecuencia prevista C, ya que podría haber otras causas o explicaciones del cumplimiento de C. Veamos un ejemplo: si yo fui infectado por el coronavirus SARS-CoV-19, entonces tengo fiebre. Bueno, tengo 39,3°C, estoy con fiebre. ¿Puedo concluir que tengo CoVID-19? No. Podría ser un rinovirus, o influenza; también podría ser CoVID-19, pero el mero cumplimiento de la fiebre no basta para confirmar el antecedente, necesito más evidencia, ojalá independiente entre sí: otros síntomas, un PCR de laboratorio, etc.

5 Por 'knowledge' en filosofía de la ciencia se suele entender 'enunciados (o a veces, creencias) verdaderos y justificados'. Hay contraejemplos relevantes a esta definición (e.g. casos Gettier), pero en general las propuestas alternativas no suelen resultar más ventajosas ni tener menos problemas (ver el artículo de Gracia di Rienzo "Bunge y el problema del conocimiento" . Cabe precisar que si bien no se afirma que la totalidad de enunciados teóricos aceptados en un momento son definitivamente verdaderos, si se afirmase que un enunciado es verdadero, esto al menos significa que el hecho designado por aquel enunciado no es relativo a valores o colecciones de creencias (ya que de serlo, o bien no se está afirmando que el hecho es verdadero, sino sólo que es del agrado de quien lo afirma, o bien se está afirmando que sería relativo [i] a creencias sobre las creencias sobre las creencias, …, ad infinitum; [ii] a la aceptación de teorías sobre aceptaciones de teorías sobre … ad infinitum; [iii] o a hechos mentales objetivos sobre las creencias, que son mucho más difíciles de asegurar (Dennett, 1982) que los hechos físicos), en aquel sentido normativo, el enunciado sería absolutamente verdadero (Boghossian, 2006), sin que ello implique que conozcamos el valor de verdad de todos los enunciados o algo por el estilo.

son parte de una caracterización de la verdad llamada correspondentista, que, hoy, es defendida por filósofos realistas como Psillos (1999), Niiniluoto (1987, 1999), o Rasmussen (2014). Dicha caracterización plantea que la verdad es una relación semántica entre un lenguaje y la realidad (Niiniluoto, 1999): el enunciado "hay más de dos gatos en el planeta" es verdadero sí y solo sí hay más de dos gatos en el planeta. Pero, en ningún momento se requiere la segunda parte de la afirmación de Bateson: que haya una biyección completa entre la totalidad de los enunciados y la totalidad de los estados de cosas/eventos del mundo. Esa engañosa exigencia puede rastrearse hasta Bradley (1907), si es que no antes; y depende de la sustantivación del uso del predicado 'es verdadero', para obtener una hipóstasis: "la Verdad". No hay razones para afirmar que la veracidad del enunciado "hay más de dos gatos en el planeta" dependa de conocer la cantidad exacta de gatos en el planeta, o de conocer el valor veritativo de todos los enunciados concebibles en la lengua española. La verdad no depende del conocimiento actual, potencial o ideal de lxs hablantes, ni de la manera en la que nuestras mejores teorías estructuran hoy nuestro conocimiento de la realidad, sino, simplemente de la interpretación del enunciado que refiere al mundo (Niiniluoto, 1999; Psillos, 1999). En ese sentido, la verdad no puede ser un sustantivo, una cosa que se pueda tener o no tener, ni el sujeto de alguna extraña oración. No hay por qué entender todo lo que respecta al mundo externo para poder afirmar "*X* es verdadero". Si nos equivocamos, pues la afirmación "*X*" es falsa, y por lo tanto, la afirmación "*X*' es verdadero" es falsa[6]. Cuando decimos que el enunciado "el manto terrestre posee oxígeno, silicio y aluminio" es verdadero, queremos decir que hay oxígeno, silicio y aluminio en el manto terrestre, independiente de si hay consenso al respecto o no, o de si nosotrxs existimos o no. Aunque, Davidson (2005) nos recuerde que sin criaturas pensantes (y sin lenguaje), nada sería verdadero ni falso (claro, el valor veritativo es una propiedad del lenguaje), eso no hace que la verdad sea inalcanzable, sino, más bien, vuelve la misma práctica de hablar con verdad, modesta, y fragmentaria.

Adivina el siguiente número de la secuencia: El argumento escéptico de Bateson-Kripkenstein [7]

Inmediatamente después de afirmar que la verdad, y por tanto, el conocimiento definitivo es inalcanzable, Bateson prosigue diciendo:

"Una manera convencional de argumentar este asunto es más o menos como sigue: Digamos que te ofrezco una serie –quizá numérica, quizá de otras indicaciones– y que te proveo de la presuposición de que la serie es ordenada. En aras de la simplicidad, sea una serie numérica:

2, 4, 6, 8, 10, 12

Entonces te pregunto "¿cuál es el siguiente número en esta serie?" probablemente dirás "14".

Pero sí lo haces, te diré, "Oh, no. El

6 Una crítica común a la teoría correspondentista, en las antípodas de la crítica esbozada por Bateson, es que no le agrega nada al enunciado mismo que se está afirmando. O sea, en vez de ser inobtenible, afirmar que *"X"* es verdadero es tan trivial que es equivalente a afirmar *"X"*. Saber si *"X"* es verdadero depende de hechos extra-lingüísticos, a los que podemos acceder por lo menos en principio mediante distintas prácticas indagatorias, y si no utilizásemos el adjetivo 'verdadero', afirmar que *"X"*, sería en términos prácticos lo mismo. La familia de teorías que sostiene esa crítica se llama teorías deflacionistas de la verdad (de redundancia, prooracionales, y de desentrecomillamiento). Patterson (2003), plantea que muchas veces la caracterización de las teorías correspondentistas no se distingue sustantivamente de las teorías deflacionistas. Discutir los méritos de ambas familias de teorías excedería por mucho los objetivos planteados en este artículo.

7 A la colección de posturas que Kripke vierte en su libro sobre Wittgenstein, las reglas y el lenguaje privado (1982) se le suele llamar 'Kripkenstein', debido a la particularmente heterodoxa interpretación que el autor hace sobre Wittgenstein.

siguiente número es 27." En otras palabras, la generalización a la cuál saltaste desde los datos dados en primera instancia –que la serie era la serie de los números pares– mostró [*was proved*] ser errónea o sólo aproximada por el siguiente evento" (1979, p.28).

Bateson plantea que el criterio de simplicidad no garantiza estar en lo correcto. Cierto. Pero ¿cómo justifica el extender las conclusiones de su ejemplo numérico al mundo empírico si él mismo acaba de sugerir la diferencia metodológica entre matemática y ciencias? Es más, si aceptamos la premisa de que la serie es ordenada, y nada más, la respuesta correcta es "existen infinitas series finitas e infinitas que contienen esos seis elementos, todas esas series pueden ser generadas mediante reglas, tal que el siguiente término no está determinado de forma unívoca". Dentro de las matemáticas, es posible incluso demostrar que esa respuesta es correcta (ver siguiente sección). Nada garantiza que la naturaleza esté compuesta de, o sea representable necesariamente mediante series ordenadas. Y así como tener fiebre no es criterio suficiente para afirmar que he sido infectado por el CoV-19, tener seis datos que trazan aparentemente una función sencilla no es criterio suficiente para fijar el siguiente punto del gráfico. La función que mejor calza con los datos está infradeterminada por los datos (tomándonos prestada la expresión de Quine).

Cuando Bateson concluye que la "[p] redicción nunca podrá ser absolutamente válida y entonces la ciencia nunca podrá probar una generalización o siquiera testear un solo enunciado descriptivo y de esa manera llegar a una verdad definitiva" (1979, p.29), la primera parte del enunciado (hasta "generalización") es trivialmente cierta; y la parte que sigue, injustificada. La predicción no tiene como objetivo "validez absoluta" (sea lo que sea eso), sino, minimizar el riesgo de una afirmación o de una decisión. Es una herramienta contingente frente a la incertidumbre en un mundo que nos aparece cambiante y complejo. Luego, es difícil ver cómo enunciados descriptivos como "hay más de dos gatos en el planeta" no son definitiva y establemente verdaderos mientras hayan más de dos gatos en el planeta, asunto que no requiere técnicas avanzadas de laboratorio para ser comprobado. Ante la objeción de que enunciados descriptivos de ese tipo no son muy informativos, cabe esgrimir una especie de *trade-off*, cuanto más definitivo quieras tu enunciado, probablemente sea más irrelevante. Son los enunciados teóricos, o las predicciones cuantitativamente precisas aquellas más falibles y a la vez más útiles en disminuir nuestra incertidumbre/riesgo.

Saul Kripke, un par de años más tarde, en su libro acerca de Wittgenstein, reglas y el lenguaje privado (1982), formula un argumento similar para promover un escepticismo –ahora sí– en el ámbito correcto: el matemático, que traduzco a continuación:

> "Si bien un evaluador de inteligencia puede suponer que hay sólo una continuación posible a la secuencia 2, 4, 6, 8, …, [las personas] matemática y filosóficamente sofisticadas saben que un número indefinido de reglas (incluso reglas enunciadas en términos de funciones matemáticas tan convencionales como polinomios ordinarios) son compatibles con tal segmento inicial finito. Entonces, si el evaluador me urge a responder, después de 2, 4, 6, 8, …, con el único número siguiente apropiado, la respuesta correcta es que no existe tal número único, ni hay una secuencia infinita (determinada por regla) que continúe la [secuencia] dada. (…) ¿En qué sentido está mi procedimiento computacional actual, que siguiendo un algoritmo produce '125', más justificado por mis instrucciones pasadas que un procedimiento alternativo que hubiese resultado en "5"? ¿no estoy siguiendo simplemente un impulso injustificable?" (1982, p.18).

La idea de Kripke es ejemplificar un escepticismo acerca de la justificación de las reglas, si me preguntan por qué sigo una regla inferencial (e.g. adición, integración, composición de funciones, permutación, etc), puedo apuntar a una regla más básica, pero en algún punto el proceso se detiene y quedo con una regla irreductible a cualquier otra; si hay un número indefinido de otras reglas que pueden ser aplicadas ahí, ¿no estoy acaso aplicando la regla ciegamente?

La distancia entre usar la impredecibilidad inherente de una secuencia numérica incompleta para argumentar un escepticismo empírico/epistémico, y un escepticismo normativo es enorme. Lo primero no se sigue del ejemplo, lo segundo sí se sigue[8]. Aún si evito usar la palabra "verdadero/falso", mi acción de afirmar enunciados es inentendible si no se me atribuye, en al menos algunos casos, que estoy afirmando 'que son enunciados verdaderos'. Lo mismo, si empiezo a decir 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...; mi acción es inentendible si no se me atribuye estar computando alguna secuencia, que puede ser la secuencia determinada por $n_0=2$ & $n_m = n_{m-1} + 2$ ($n \in N$); por $F(n)=2n$; o bien por.

$$F(n) = \frac{13n^6}{720} - \frac{91n^5}{240} + \frac{455n^4}{144} - \frac{637n^3}{48} + \frac{2639n^2}{90} - \frac{597n}{20} + 13.$$

Estoy, de todas maneras, y aún si yo intento no hacerlo, generando una pauta. La probabilidad de que yo esté enunciando números que no siguen ningún patrón tiende a cero en la medida que la estabilidad de "n+2" o cualquier otra regla (no necesariamente recursiva[9]) se mantiene en el tiempo. Dicha probabilidad nunca será cero, pero, al tratarse de un humán, podemos estar casi seguros de que algún patrón habrá: somos pésimos generadores de números aleatorios (Jokar & Mikaili, 2012).

En la naturaleza, en cambio, los patrones numéricos que podemos extraer son aproximados, no precisos, entonces es más que encontrar el siguiente único número que calce con determinada secuencia de datos al investigar un fenómeno, obtenemos (procedimientos estadísticos mediante) un intervalo de números probables, reduciendo las infinitas opciones a un puñado finito de probables 'siguientes números'.

Interpolación polinomial de Lagrange: restricciones cognoscibles a las posibilidades infinitas

En la sección anterior dije (i) que era posible demostrar que hay infinitas secuencias ordenadas que calzan con los números 2, 4, 6, 8, 10, 12; y (ii) di ejemplos de algunas de ellas

$$\left(F(n) = 2n; F(n) = \frac{13n^6}{720} - \frac{91n^5}{240} + \frac{455n^4}{144} - \frac{637n^3}{48} + \frac{2639n^2}{90} - \frac{597n}{20} + 13\right)$$

Hasta el momento, si no sabemos exactamente cómo obtener infinitas secuencias distintas de una secuencia ordenada finita de números, habríamos de creer en la palabra de Kripke o mía de que esas secuencias de algún modo existen. Lo que haré a continuación es mostrar que no sólo hay infinitas secuencias ordenadas, sino que hay infinitas funciones polinomiales que pasan por los puntos 2, 4, 6, 8, ...; y esbozaré una explicación de cómo generar tus propias funciones según qué número quieres que continúe la secuen-

8 Respecto al argumento escéptico o finitista respecto al seguimiento de reglas [*rule-following*] de Kripke, una respuesta es que si bien no hay nada que determine unívocamente el siguiente número de una secuencia numérica, aquello no es un problema matemático per se: es posible construir reglas recursivas que determinan una secuencia infinita por medios finitos (e.g. n0 = 2, & nm = nm-1 + 2, que puedan ser comprendidas por una mente finita y a la vez sean aplicables a un número indefinido de situaciones – las condiciones subjetiva y objetiva dadas por Pettit, 1992), entonces, si bien pueden existir problemas sociológicos acerca de cuál regla matemática se está siguiendo, y cuál es la justificación de que sea esa regla y no otra; el carácter normativo de las especificaciones matemáticas no colapsa con este tipo de objeciones (Niiniluoto, 1999).

9 Por ejemplo, Bateson (1979, p.28) luego revela que su secuencia, en vez de estar generada por una regla sencilla, es una repetición periódica: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 27, 2, 4, ...; amenazando, por supuesto, con alterar la periodicidad cuando menos lo esperemos.

cia, y qué restricciones (funciones que no podrían calzar con los números anteriores) nos muestra este procedimiento.

Para que el procedimiento sea lo más claro posible, utilicemos la secuencia 2, 4, 6, … para ejemplificar. Revisemos el ejemplo inspirado en el de Kripke que da Tasić (2001, p. 123-124):

"Una matemática desempleada, Sue, está por ser evaluada como parte de una postulación laboral. Una de las preguntas del test es "Cuál es el siguiente número en la secuencia 2, 4, 6, …?" El administrador del test, un manager de recursos humanos llamado Hank, está convencido de que la respuesta correcta es 8, (…) la cuál es la secuencia de valores de la función F(n) = 2n. (…) Sue responde las 159 preguntas restantes de la manera que Hank cree que es la correcta, pero su respuesta a la pregunta de arriba es, digamos, 10.

Ya que ella puntuó más alto que los demás postulantes, Sue es llamada a una entrevista, [dónde] se le requiere que explique esta rareza. Ella responde que los números 2, 4, 6 son los primeros tres elementos de la secuencia de números recolectada de acuerdo con la regla.

$$G(n)=\tfrac{1}{3}n^3-2n^2+\tfrac{17}{3}n-2$$

Hank computa un par de cosas en su calculadora y confirma que G(1) = 2, G(2) = 4, G(3) = 6, y G(4) = 10. (…) Hank está temporalmente confundido".¿Cómo Sue llegó a ?

$$G(n)=\frac{1}{3}n^3-2n^2+\frac{17}{3}n-2$$

Sean (1,2), (2,4), (3,6), tres puntos en un plano tal que [F (1), F (2), F (3), ∈ R^3]. Para obtener la función de menor grado que pase por todos los puntos que acabamos de definir, es posible escribir lo anterior como una combinación lineal de vectores, tal que inventemos una ecuación F(x) que de 1 cuando x=1 (F(1)=1), y en todos los demás puntos F(x)=0.[10] Y bueno, ¿cuál es la forma más fácil de obtener nuestra F(x)? (ver F5)

$$F(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}=\frac{(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)}=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$$

$$F(1)=\frac{(1-2)(1-3)}{(1-2)(1-3)}=\frac{2}{2}=1$$

$$F(2)=\frac{(2-2)(2-3)}{(1-2)(1-3)}=\frac{(0-2)(2-3)}{(1-2)(1-3)}=\frac{0}{2}=0$$

$$F(3)=\frac{(3-2)(3-3)}{(1-2)(1-3)}=\frac{(3-2)(0)}{(1-2)(1-3)}=\frac{0}{2}=0$$

Entonces, tenemos el vector [1, 0, 0]. Y queremos ahora, obtener el primer valor de la secuencia {2, 4, 6}: 2. Para esto, simplemente multiplicamos por dicho valor la fórmula anterior, obteniendo P(x):

$$P(x)=y\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}=2\cdot 1=2$$

Haciendo eso con todos los términos, de tal manera que la función sólo cobre valor distinto a cero en uno de los puntos {1,2,3}, obtenemos un polinomio interpolante, o polinomio de Lagrange:

$$\mathcal{L}(x)=2\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+4\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+6\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

$$=2\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{2}+4\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{-1}+6\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$=(x-2)(x-3)+(-4)\cdot(x-1)(x-3)+3\cdot(x-1)(x-2)$$

$$=4x^2-4x^2+16x-14x+12-12$$

$$=2x$$

Obtenemos entonces, que 2x es el polinomio de menor grado (1) que satisface una función que en x=1, x=2 y x=3, pase por los puntos 2, 4, 6, respectivamente. Si P(x)=2x, entonces el siguiente término de la secuencia (cuando x=4), sería 8.

Pasemos ahora a entender qué hizo Sue para obtener su secuencia:

Sean (1,2), (2,4), (3,6), (4,10), cuatro puntos en un plano tal que [F(1), F(2), F(3), F(4) ∈ R^4].

Generamos el polinomio de La-

10 Esta idea de una función que te arroja 1 en un punto y 0 en todos los demás, veremos que se repetirá en otros contextos de la matemática y de la física. Por ejemplo, con las funciones delta de Kronecker y de Dirac.

grange correspondiente (ver F8):

$$\mathcal{L}(x)=2\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}+4\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}+6\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}+10\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

Esto mismo puede realizarse para obtener la secuencia 2, 4, 6, 8, 10, 12, 27, … de Bateson, sin embargo, la cantidad de términos es tan larga, que me remitiré a mostrar el simbolismo abreviado de la interpolación polinomial de Lagrange, les prometo que no contiene nada más ni nada menos que lo que llevamos haciendo

$$\mathcal{L}(x)=\sum_{i=1}^{k}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Dónde $(a_i\ ,\ b_i),\ 1\ \leq\ \ i\ \leq\ k\ ;$ sean puntos en el plano, con $a_i\neq a_j\forall i\neq j$. De lo anterior, (además del horrible polinomio:

$$\mathcal{L}(n)=\frac{13n^6}{720}-\frac{91n^5}{240}+\frac{455n^4}{144}-\frac{637n^3}{48}+\frac{2639n^2}{90}-\frac{597n}{20}+13)$$

obtenemos algunas conclusiones interesantes en las que no me extenderé: para una secuencia de k+1 puntos (o datos, o números), el polinomio de menor grado en pasar por todos los puntos suele ser un polinomio de grado K. Si el grado es <k, la estructura de los datos es –hasta el momento– más sencilla de lo que podemos esperar; pero en ningún caso, se justifica utilizar un polinomio con un grado mayor a k. No hay suficientes datos ni evidencia para afirmar que la estructura pueda ser más compleja, y, hasta que los haya, es razonable ceñirse a la navaja de Occam. Bateson afirma que dicha preferencia por la parsimonia es injustificada:

> "Asumes que puedes predecir, y de hecho te sugerí esa presuposición. Pero la única base que tienes es tu preferencia (entrenada) por la respuesta más simple y tu confianza en que mi desafío efectivamente implica que la secuencia está incompleta y ordenada. Desafortunadamente (o quizá afortunadamente), el caso es que el siguiente hecho nunca está disponible. Todo lo que tienes es la esperanza de simplicidad, y el siguiente hecho puede siempre llevarte al siguiente nivel de complejidad." (1979, p.28).

Y esto es correcto, no obstante, la interpolación polinomial muestra cuál es la regla más segura para abordar dicho siguiente nivel de complejidad. Esto no es una receta del éxito, el siguiente número puede parecer acomodarse a alguna regla sencilla (digamos, 2x) pero ser parte de un patrón muchísimo más complicado (digamos, un polinomio de quinto, sexto, o séptimo grado). Lo que sí resulta insensato, es presuponer un exceso de complejidad cuando no tenemos suficientes datos para afirmarla. O, más lejos, inferir de una secuencia de datos finita la ausencia de orden, la incognoscibilidad, o la imposibilidad de inferir.

Dicho de otro modo, siempre debemos estar abiertos y atentos al error que surge de suponer mayor simplicidad de la que un fenómeno realmente tiene; pero no hay razón alguna para presuponer mayor complejidad (sea conceptual, sea de cálculo) que la que los datos limitados nos sugieren[11].

¿Es posible conocer de antemano cuáles son los límites del conocimiento?

Lo anterior nos conduce a una pequeña reflexión de cierre. Bateson (1979), en su premisa, habla de que una correspondencia precisa entre nuestras descripciones y el mundo es inalcanzable. Esto no es un problema particular ni de la ciencia ni del conocimiento de una época determinada, más bien, aquello (el ser impreciso) es característica definitoria del conocimiento expresado a través de cualquier

11 No es tan infrecuente encontrar modelos matemáticos de grado mayor a la cantidad de datos disponibles (pensemos, por ejemplo, en intentar ajustar una sigmoidea a un conjunto de menos de 5 datos).

lenguaje. Pero eso no afecta en nada a la verdad, siguiendo a Rescher (2010), la realidad determina las verdades admisibles (lo que Niiniluoto (1999) llamaría la factualidad de los hechos: su capacidad de oponerse a ciertas descripciones), pero no necesariamente se corresponde con ellas. Podemos formular verdades imprecisas sin problema, por ejemplo, la disyunción "ó el acero tiene un coeficiente de expansión térmica mayor al del hierro ó los arácnidos son artrópodos" es verdadera, sin embargo, si uno no es familiar con ambos campos temáticos, no nos dice mucho: ¿cuál de los dos enunciados es verdadero? ¿acaso ambos lo son? ¿la disyunción es inclusiva o exclusiva? "La tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.37 x 106" suena bastante preciso, pero como cualquier medición, no es determinado ni exacto.

Lo mismo con el más prosaico "hay más de dos gatos en el planeta hoy", ¿cuándo es hoy?, y, aun sabiendo la fecha de la emisión del enunciado ¿cómo puedo especificar el segmento de tiempo en el cuál es válido el enunciado? La conclusión que Rescher (2010) obtiene de ejemplos como estos es que la realidad es descriptivamente definida y detallada, la realidad posee "profundidad descriptiva interminable" (2010, p. 40).

En cambio, nuestros enunciados verdaderos acerca del mundo son por lo general incompletos, aproximados (aún si el grado de detalle de la aproximación es abrumador). Otra forma de decirlo es que la realidad es inexhaustible: un infinito número de descripciones verdaderas no agotarían todo lo que es posible decir (verdaderamente) sobre un fragmento del mundo (Niiniluoto, 1999).

De la afirmación de que "nunca podremos ser capaces de reclamar conocimiento definitivo en asunto alguno [*final knowledge of anything whatsoever*]" (Bateson, 1979, p.27) no cabe extraer ninguna consecuencia pesimista. Peirce (1868) argumentó que de existir algo absolutamente incognoscible, no lo podemos concebir. Esto se debe a que una inferencia del tipo "C entonces F" está justificada sí y solo sí la conclusión C explica el hecho F. Suponer que F es inexplicable no es explicarlo, por tanto, esa suposición nunca está justificada.

El conocimiento no es algo que necesite, presuponga, ni apunte a tener un carácter definitivo; y eso no afecta el incremento en precisión conceptual, de medición y de conexión de nuestras diversas hipótesis y teorías. De todas maneras, las advertencias de Bateson son útiles para recordarnos que la empresa en la que nos embarcamos es necesariamente falible, incompleta, y que esa misma flexibilidad y apertura al error es la que permite continuar indefinidamente la conversación (por parafrasear a Rorty), y además, conservar indefinidamente la curiosidad por los objetos y procesos del mundo y su factualidad.

Referencias

Bateson, G. (1979). *Mind and nature: A necessary unity*. New York, NY: E. P. Dutton.

Bradley, F.H. (1907). *On Truth and Copying. Essays on Truth and Reality*. Oxford: Clarendon Press.

Davidson, D. (2005). Truth and predication. Cambridge: Harvard University Press.

Jokar, E., & Mikaili, M. (2012). Assessment of human random number generation for biometric verification. *Journal of medical signals and sensors*, 2(2), 82–87.

Kripke, S. (1982). Wittgenstein on Rules and Private Language. Cambridge: Harvard University Press.

Niiniluoto, I. (1987). *Truthlikeness*. Dordrecht Reidel: Dordrecht.

Niiniluoto, I., (1999). *Critical Scientific Realism*. Oxford University Press, Oxford.

Peirce, C. S. (1868). Some Consequences of Four Incapacities. *Journal of Speculative Philosophy*, 2, (3):140 - 157.

Pettit, P. (1993). Problem of Rule-Following. En Dancy, J. and Sosa, E., (eds.). *A Companion to Epistemology*, pp.386–391. London: Blackwell.

Psillos, S. (1999). Scientific realism: How science tracks truth. London: Routledge.

Rasmussen, J. (2014) *Defending the Correspondence Theory of Truth*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ravindran, T. R., Arora, A. K., & Mary, T. A. (2003). Anharmonicity and negative thermal expansion in zirconium tungstate. *Physical Review B*, 67(6). doi:10.1103/physrevb.67.064301

Rescher, N. (2010). *Reality and its Appearance*. London: Continuum.

Tasić, V. (2001). *Mathematics and the roots of postmodern thought*. Oxford, UK: Oxford University Press.