

УДК 517.51+517.53

## СТРОЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Н.В. РЯБЧЕНКО, Д.А. РЫКАЧЕВ, А.А. АТВИНОВСКИЙ  
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Рассматриваются строчные аппроксимации Паде гипергеометрических функций. Выбранное направление исследования является наиболее перспективным в теории аппроксимаций Паде. В работе получены точные асимптотические равенства для уклонений рациональных операторов Паде от функции, для которой они строятся, найдены точные порядки убывания строчных последовательностей таблицы Чебышева  $[R_{n,m}(f, \bar{D})]_{n,m=0}^{\infty}$ , где  $\bar{D}_q = \{z: |z| \leq q > 1\}$ . Поскольку асимптотические характеристики используются в многочисленных приложениях аппроксимаций Паде в современной физике, медицине, компьютерной и вычислительной математики, такого рода исследования особенно актуальны.

## § 1. Введение

Обозначим через  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\alpha, \gamma}$  множество функций  $f$ , представимых в виде

$$f(z) = f_{\alpha, \gamma}(z) = {}_2F_1(\alpha, 1; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} z^n, \quad (1)$$

где  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)$  при  $n \geq 1$ . Ряды вида (1) принято называть «гипергеометрическими рядами», а их суммы «гипергеометрическими функциями». Известно [1, гл. 4, § 4.6], что если  $f \in \mathfrak{F}$ , то она аналитически продолжается из круга сходимости  $D = \{z: |z| < 1\}$  ряда (1) в плоскость  $C$  с разрезом по  $[1; +\infty)$ . В дальнейшем ограничимся случаем, когда  $\gamma \in R \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ ,  $\gamma > \alpha$  и  $\gamma - \alpha \in N$ . Заметим, что, например, функция

$$f_{1,2}(z) = z^{-1} \ln(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$$

имеет на границе круга сходимости особую точку  $z_0 = 1$ , которая является логарифмической точкой ветвления этой функции.

Обозначим через  $\mathfrak{R}_{n,m}$  множество всех рациональных функций вида  $p_n/q_m$ , где  $p_n$  и  $q_m$  – многочлены не выше степени  $n$  и  $m$  соответственно. Пусть  $K$  компакт в  $C$  и  $f$  – непрерывна на  $K$ . Через  $R_{n,m}(f; K)$  обозначим наилучшее равномерное приближение  $f$  на  $K$  элементами из  $\mathfrak{R}_{n,m}$ , т.е.

$$R_{n,m}(f; K) = \inf \|f - r\|_K : r \in \mathfrak{R}_{n,m},$$

где  $\|g\|_K = \max |g(z)| : z \in K$ . В частности,  $E_n(f; K) := R_{n,0}(f; K)$  – наилучшее полиномиальное приближение  $f$ .

Аппроксимацией Паде функции  $f \in \mathfrak{F}$  будем называть такую рациональную функцию  $\pi_{n,m}(z; f)$  из  $\mathfrak{R}_{n,m}$ , числитель и знаменатель которой удовлетворяют условию:

$$q_m(z; f) f(z) - p_n(z; f) = O(z^{n+m+1}), \quad z \rightarrow 0.$$

В частности,  $\pi_{n,0}(z; f)$  есть  $n+1$ -я частичная сумма ряда (1).

Для мероморфных функций качественные вопросы сходимости  $\pi_{n,m}(z; f)$  к  $f$  при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированном  $m$  детально проработаны (см., например, обзоры [2], [3]). К настоящему времени имеется уже достаточно много примеров целых функций  $f$ , для которых исследована сходимость аппроксимаций Паде и найдена асимптотика убывания  $f(z) - \pi_{n,m}(z; f)$  для  $|z| \leq 1$  при фиксированном  $m$  и  $n \rightarrow \infty$  (см. [4, 15]). В данной работе аналогичные исследования предприняты для функций, имеющих логарифмические точки ветвления. В частности, для  $f \in \mathfrak{F}$  найдем точные порядки убывания строчных последовательностей таблицы Чебышева  $[R_{n,m}(f, \bar{D})]_{n,m=0}^{\infty}$ , где  $\bar{D}_q = \{z: |z| \leq q < 1\}$ .

Перейдем к формулировке основных результатов работы. В дальнейшем будем говорить, что бесконечно малые величины  $(\alpha)_n$  и  $(\beta)_n$  имеют одинаковый порядок малости  $(\alpha)_n \cup (\beta)_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , если для некоторых положительных чисел  $A$  и  $B$   $A\alpha_n \leq \beta_n \leq B\alpha_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $f$  представима рядом (1). Тогда для любого фиксированного  $m \in N \cup 0$  локально равномерно по  $z \in D$  при  $n \rightarrow \infty$

$$f(z) - \pi_{n,m}(z); f = L_{n,m} \frac{\Psi_{n,m}(z)}{1-z} z^{n+m+1} + o(1),$$

где

$$L_{n,0} = \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_{n+1}}, L_{n,m} = m! \frac{\alpha_{n+1}}{\gamma_{n+1}} \prod_{k=1}^m \frac{\gamma - \alpha + k - 1}{\gamma + n + k - 1}, \text{ при } m \geq 1,$$

а

$$\Psi_{n,m}(z) = \frac{n+m+1}{m+\gamma-\alpha-1} \int_0^\infty t^{m+\gamma-\alpha-1} \frac{e^{-n+m+1t}}{1-ze^{-t}} dt.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть представима рядом (1). Тогда для любого фиксированного  $m \in N \cup 0$  при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1 - |o(1)|}{(1+q)^{2m+1}} \leq \frac{R_{n,m}(f; \overline{D}_q)}{q^{n+m+1} L_{n,m}} \leq \frac{1 + |o(1)|}{(1-q)^{2m+1}},$$

$$R_{n,m}(f; \overline{D}_q) \cup \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+\gamma-\alpha}} \cup \frac{q^n}{n^{2m}} E_n; f; \overline{D}_q.$$

При  $\alpha=1$  и  $\gamma=2$  теоремы 1 и 2 ранее доказаны в [16]. В этом случае из теоремы 2 получаем, что

$$R_{n,m}(f; \overline{D}_q) \cup \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+1}} \cup \frac{q^n}{n^{2m}} E_n; f_{1,2}; \overline{D}_q.$$

Доказательству теорем 1 и 2 посвящен § 2; в § 3 работы рассматриваются некоторые обобщения теорем 1 и 2.

**§ 2. Доказательство основных результатов**

Обозначим через  $f_n = (\alpha)_n / (\gamma)_n$  коэффициенты Тейлора ряда (1), рассмотрим определители Адамара функции  $f \in \mathfrak{S}$

$$D_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \dots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}.$$

Многочлены Паде  $p_n(z; f)$  и  $q_m(z; f)$  (см. [1]) определяются с точностью до постоянного множителя. Будем называть стандартной такую их нормировку, при которой  $q_m(0; f) = D_{n,m}$ . Рассмотрим также определители

$$D_{n,m,k} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \dots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ f_{n+k} & f_{n+k+1} & \dots & f_{n+m+k-1} & f_{n+m+k} \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА 1. Если  $n \geq m \geq 2$ , то

$$D_{n,m} = \prod_{i=1}^m \frac{(\alpha)_{n-m+i}}{(\gamma)_{n-m+i}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m-1} (\gamma - \alpha + i - 1)^{m-i} (m-i)!}{\prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=i}^{m-1} (\gamma + n - i + 2j - 2)_2}, \tag{2}$$

$$D_{n,m,k} = \prod_{i=0}^m \frac{(\alpha)_{n+k+i}}{(\gamma)_{n+k+i}} \prod_{i=1}^m (k+i-1) \frac{(\gamma+n-m+i+1)_{m+k-2}}{(\alpha+n-m+i)_{m+k}} \cdot \frac{(\gamma-\alpha)^m \prod_{i=1}^{m-1} (\gamma-\alpha+i-1)^{m-i} (m-i)!}{\prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} (\gamma+n-i+2j-2)_2} \quad (3)$$

Равенства (2) доказаны в [1] (см. [1, § 2.1, формула (1.6)]). Доказательство равенств (3) проводится аналогично. При  $\alpha=1$  и  $\gamma=2$  соотношения (2) и (3) установлены в [16] с помощью леммы Коши. По определению полагаем  $D_{n,0}=1$ ,  $D_{n,1}=f_n$ ,  $D_{n,0,k}=f_{n+k}$  и заметим, что  $D_{n,m,1}=D_{n+1,m+1}$ . Равенства (3) справедливы также и при  $m=1$ , если считать в них последний множитель равным  $\gamma-\alpha$ .

Из (2) и (3) с помощью элементарных преобразований получаем, что

$$L_{n,m} = \frac{D_{n+1,m+1}}{D_{n,m}} = m! \frac{(\alpha)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}} \prod_{i=1}^m \frac{\gamma-\alpha+i-1}{(\gamma+n+i-1)_2}, \quad (4)$$

$$\frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} = \frac{(k)_m}{m!} \frac{(\alpha+n+1)_{k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}}. \quad (5)$$

Рассмотрим аналитическую в  $D$  функцию (см. [17, глава 5, § 2.3, равенство 1])

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+n+1)^{m+\gamma-\alpha}} = \frac{1}{(m+\gamma-\alpha-1)!} \int_0^{\infty} t^{m+\gamma-\alpha-1} \frac{e^{-(n+1)t}}{1-ze^{-t}} dt.$$

Нетрудно показать, что при  $z \in D$

$$\varphi^{(m)}(z) = \frac{m!}{(m+\gamma-\alpha-1)!} \int_0^{\infty} t^{m+\gamma-\alpha-1} \frac{e^{-(n+m+1)t}}{1-ze^{-t}} dt = \sum_{k=1}^{\infty} (k)_m \frac{z^{k-1}}{(k+n+m)^{m+\gamma-\alpha}}, \quad (6)$$

а

$$\Psi_{n,m}(z) = \frac{(n+m+1)^{m+\gamma-\alpha}}{m!} \varphi^{(m)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k)_m}{m!} \left( \frac{n+m+1}{n+m+k} \right)^{m+\gamma-\alpha} z^{k-1}. \quad (7)$$

Так как

$$\int_0^{\infty} t^{m+\gamma-\alpha-1} e^{-(n+m+1)t} dt = \frac{(m+\gamma-\alpha-1)!}{(n+m+1)^{m+\gamma-\alpha}}$$

то из (6) и (7) получаем, что для  $z \in D$

$$\frac{1}{(1+|z|)^{m+1}} \leq |\Psi_{n,m}(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^{m+1}}. \quad (8)$$

ЛЕММА 2. Если  $f \in \mathfrak{F}$ , то для любого фиксированного  $m \in N \cup \{0\}$  локально равномерно по  $z \in D$  при  $n \rightarrow \infty$

$$q_m(z; f) f(z) - p_n(z; f) = D_{n,m,1} \Psi_{n,m}(z) z^{n+m+1} \{1 + o(1)\}.$$

Доказательство. Согласно теореме Паде (см. [1], глава 1, § 1), при выбранной нормировке многочленов Паде

$$q_m(z; f) f(z) - p_n(z; f) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{n,m,1} z^{n+m+1} = D_{n,m,1} z^{n+m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1}.$$

Заметим, что при  $\gamma-\alpha \in N$

$$\frac{(\alpha+n+1)_{k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}} = \prod_{j=1}^{m+\gamma-\alpha} \frac{\alpha+n+j}{\alpha+n+k+j-1}.$$

Поэтому, принимая во внимание равенства (5), получим

$$\Psi_{n,m}(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k)_m}{m!} \alpha_{n,m,k} z^{k-1}, \quad (9)$$

где

$$\alpha_{n,m,k} = \left( \frac{n+m+1}{n+m+k} \right)^{m+\gamma-\alpha} - \prod_{j=1}^{m+\gamma-\alpha} \frac{\alpha+n+j}{\alpha+n+k+j-1}.$$

Аналогично, как и в [16] при доказательстве теоремы 1, устанавливается, что

$$|\alpha_{n,m,k}| \leq c \frac{m^2}{n},$$

где  $c = c(\alpha, \gamma)$  – положительная постоянная. Отсюда из (8), (9) и легко проверяемого неравенства  $(k)_m / m! \leq k^m$  получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{n,m,k}}{D_{n,m,1}} z^{k-1} = \Psi_{n,m}(z)(1 + \beta_{n,m,k}(z)),$$

где

$$|\beta_{n,m,k}(z)| \leq c \frac{2^{m+1} m^2}{n} \sum_{k=1}^{\infty} k^m |z|^{k-1}.$$

Из равенства (см. [17, глава 5, § 2.2, равенство 3])

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m |z|^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k |z|^{k-1}}{(1-|z|)^{k+1}} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j C_j^k j^m \right],$$

где  $C_j^k$  – биномиальные коэффициенты, следует, что при  $z \in D$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m |z|^{k-1} \leq \frac{2^m m^{m+1}}{(1-|z|)^{m+1}}.$$

Поэтому

$$|\beta_{n,m,k}(z)| \leq c \frac{2^{2m+1} m^{m+3}}{n(1-|z|)^{m+1}}. \quad (10)$$

Из (10) при фиксированном  $m$  и  $n \rightarrow \infty$  получаем, что  $|\beta_{n,m,k}(z)| = o(1)$  для каждого фиксированного  $z \in D$ . Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Если  $f \in \mathfrak{F}$ , то для любого фиксированного  $m \in N \cup \{0\}$  локально равномерно по  $z \in D$  при  $n \rightarrow \infty$

$$q_m(z; f) = D_{n,m}(1-z)^m(1+o(1)).$$

**Доказательство.** Представим многочлен  $q_m(z; f)$  в виде

$$q_m(z; f) = \sum_{j=0}^{\infty} l_j z^j.$$

Учитывая равенство (1.8) из [1], при  $j \geq 1$  получим:

$$(-1)^j l^j = D_{n,m} C_j^m \prod_{i=1}^j \frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i}.$$

Тогда, принимая во внимание, что  $l_0 = D_{n,m}$ , для любого  $z \in D$

$$D_{n,m}(1-z)^m - q_m(z; f) = D_{n,m} \sum_{j=1}^m C_j^m (-z)^j \left\{ 1 - \prod_{i=1}^j \frac{\alpha+n-i+1}{\gamma+n+m-i} \right\}.$$

Поскольку

$$0 \leq 1 - \prod_{i=1}^j \frac{\alpha + n - i + 1}{\gamma + n + m - i} \leq 1 - \left( \frac{\alpha + n - i + 1}{\gamma + n + m - i} \right)^j \leq j \left( 1 - \frac{\alpha + n - j + 1}{\gamma + n + m - j} \right) \leq c \frac{m^2}{n},$$

то, учитывая предыдущее равенство, будем иметь

$$\left| D_{n,m}(1-z)^m - q_m(z; f) \right| \leq c D_{n,m} \frac{m^2}{n} \sum_{j=0}^m C_j^m |z|^j.$$

Отсюда для любого  $z \in D$

$$q_m(z; f) = D_{n,m}(1-z)^m (1 + b_{n,m}(z)),$$

где

$$|b_{n,m}(z)| \leq c \frac{m^2}{n} \left( \frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^m.$$

Из последних двух соотношений и следует утверждение леммы 3.

Перейдем непосредственно к доказательству теорем 1 и 2. Заметим, что теорема 1 является очевидным следствием лемм 2, 3 и равенства 4. Для доказательства теоремы 2 рассмотрим функцию  $\varphi(z) = f(z) - \pi_{n,m}(z; f)$ . Из теоремы 1 следует, что при достаточно больших  $n$  функция  $\varphi(z)$  является аналитической внутри круга  $D_{q_1} = \{z : |z| < q_1\}$ ,  $0 < q < q_1 < 1$  и имеет в  $D_q$  нуль кратности  $n+m+1$ .

Учитывая неравенства (8), для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$\min_{|z|=q} |\varphi(z)| \leq R_{n,m}(f; \overline{D_q}) \leq \max_{|z|=q} |\varphi(z)|. \quad (11)$$

Поскольку правое неравенство в (11) вполне очевидно, остановимся на доказательстве левого неравенства. Для этого нам необходима следующая лемма Гончара – Дзядыка (см. [18, лемма 3.1]).

ЛЕММА 4. Если функция  $\varphi$  аналитическая в односвязной области  $G$  и непрерывная на  $\overline{G}$  имеет в  $G$  с учетом кратности, по крайней мере,  $n+1$  нуль, то при произвольном  $m \geq 0$  справедливо неравенство

$$R_{n,m}(\varphi; \overline{G}) \geq \min_{|z| \in \partial G} |\varphi(z)|.$$

Пусть  $r_{n,m}^* \in \mathfrak{R}_{n,m}$  и является рациональной функцией наилучшего равномерного приближения  $f$  в круге  $\overline{D_q}$ . Тогда

$$R_{n,m}(f; \overline{D_q}) = \|f - r_{n,m}^*\|_{\overline{D_q}} = \|f - \pi_{n,m} - (r_{n,m}^* - \pi_{n,m})\|_{\overline{D_q}} = \left\| \varphi - r_{n+m,2m}^* \right\|_{\overline{D_q}} \geq R_{n+m,2m}(\varphi; \overline{D_q}).$$

Отсюда с помощью леммы 4 получаем, что

$$R_{n+m,2m}(\varphi; \overline{D_q}) \geq \min_{|z|=q} |\varphi(z)|.$$

Тем самым левое неравенство в (11) доказано.

### § 3. Некоторые обобщения

По определению полагаем  $\mathfrak{F} = f(-z) : f \in \mathfrak{F}$ . Далее, если  $l_n = dn + l_0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – арифметическая прогрессия, где  $d \in \mathbb{N}$ ,  $l_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  – фиксированные числа, то будем говорить, что функция  $g$  принадлежит  $\mathfrak{Z}(d, l_0)$  тогда и только тогда, когда она представима в виде  $g(z) = z^{l_0} f(z^d)$ , где  $f \in \mathfrak{F}$ . Аналогично по определению полагаем

$$\mathfrak{F}(d, l_0) = g(z) : g(z) = z^{l_0} f(-z^d), f \in \mathfrak{F}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция  $f$  принадлежит  $\mathfrak{S}$ . Тогда для любого фиксированного  $m \in N \cup \{0\}$  локально равномерно по  $z \in D$  при  $n \rightarrow \infty$

$$f(z) - \pi_{n,m}(z; f) = L_{n,m} \frac{\Psi_{n,m}(-z)}{(1+z)^m} (-z)^{n+m+1} (1+o(1)),$$

$$R_{n,m}(f; \overline{D}_q) \underset{\cap n^{2m+\gamma-\alpha}}{\cup} \frac{q^{n+m+1}}{n^{2m+\gamma-\alpha}} \underset{\cap n^{2m}}{\cup} \frac{q^m}{n^{2m}} E_n(f; \overline{D}_q).$$

Теорема 3 является элементарным следствием теорем 1 и 2.

Пусть  $g \in \mathfrak{S}(d, l_0)$  и  $g(z) = z^{l_0} f(z^d)$ , где  $f \in \mathfrak{S}$ . Обозначим через  $\pi_{n,m}(\xi; f)$  аппроксимацию Паде функции  $f(\xi)$ . Тогда

$$f(\xi) - \pi_{n,m}(\xi; f) = O(\xi^{n+m+1}), \quad \xi \rightarrow 0.$$

Полагая в последнем равенстве,  $\xi = z^d$ , а затем, умножая его на  $z^{l_0}$ , получим

$$z^{l_0} f(z^d) - z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; f) = O(z^{d(n+m+1)+l_0}), \quad z \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что при  $0 \leq i + j \leq d - 1$

$$\pi_{l_{i+j}, d_{m+j}}(z; g) = z^{l_0} \pi_{n,m}(z^d; f)$$

и

$$g(z) - \pi_{l_{i+j}, d_{m+j}}(z; g) = z^{l_0} \{f(z^d) - \pi_{n,m}(z^d; f)\}. \tag{12}$$

Используя равенство (12), легко получить аналоги теорем 1, 2 для классов  $\mathfrak{S}^\pm(d; l_0)$ . В частности, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция  $g$  принадлежит  $\mathfrak{S}(d; l_0)$ . Тогда для любого фиксированного  $m \in N \cup \{0\}$  локально равномерно по  $z \in D$  при  $n \rightarrow \infty$

$$g(z) - \pi_{l_{i+j}, d_{m+j}}(z; g) = L_{n,m} \frac{\Psi_{n,m}(z^d)}{(1-z^d)^m} z^{l_0+d_m+d} (1+o(1)),$$

$$\frac{1-|o(1)|}{(1+q^d)^{2m+1}} \leq \frac{R_{l_{i+j}, d_{m+j}}(g; \overline{D}_q)}{q^{l_0+d_m+d} L_{n,m}} \leq \frac{1+|o(1)|}{(1-q^d)^{2m+1}},$$

где

$$0 \leq i + j \leq d - 1.$$

Заметим, что при  $\alpha = 1$  и  $\gamma = 2$  теоремы 3 и 4 ранее доказаны в [16].

Авторы благодарят научного руководителя профессора А.П. Старовойтова за постановку задачи и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, Дж. П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи мат. наук. – 2002. – Т. 57, вып. 1. – С. 45 – 142.
3. Гончар, А.А. Об аппроксимации Паде мероморфных функций / А.А. Гончар, С.П. Суетин // Современные проблемы математики. – 2004. – С. 68.
4. Braess, B. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of  $e^z$ / B. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – V. 40, № 4. – P. 375 – 379.

5. Lubinsky, D.S. Pade tables of entire functions of very slow and smooth growth / D.S. Lubinsky // *Constr. Approx.* – 1985. – V. 1. – P. 349 – 358.
6. Lubinsky, D.S. Uniform convergence of rows of the pade table for functions with smooth Maclaurin series coefficients / D.S. Lubinsky // *Constr. Approx.* – 1987. – V. 3. – P. 307 – 330.
7. Lubinsky, D.S. Pade tables of entire functions of very slow and smooth growth, II / D.S. Lubinsky // *Constr. Approx.* – 1988. – V. 4. – P. 321 – 339.
8. Levin, A.L. Best rational approximation of entire functions whose Maclaurin series coefficients decrease rapidly and smoothly / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1986. – V. 293. – P. 533 – 545.
9. Levin, A.L. Rows and diagonals of the Walsh array for entire functions with smooth Maclaurin series coefficients / A.L. Levin, D.S. Lubinsky // *Constr. Approx.* – 1990. – V. 6. – P. 257 – 286.
10. Березкина, Л.Л. О наилучших рациональных аппроксимациях некоторых целых функций / Л.Л. Березкина, В.Н. Русак // *Весті АН БССР. Сер. Фіз.-мат. навук.* – 1990. – № 4. – С. 27 – 32.
11. Русак, В.Н. Асимптотика параболических звеньев рациональной таблицы Чебышева для аналитических функций / В.Н. Русак, Та Хонг Куанг // *ДАН БССР.* – 1990. – Т. 34, № 10. – С. 868 – 871.
12. Старовойтов, А.П. Асимптотика определителей Адамара и поведение строк таблиц Паде и Чебышева для суммы экспонент / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // *Математический сб.* – 1996. – Т. 187, № 2. – С. 141 – 157.
13. Русак, В.Н. Аппроксимации Паде для целых функций с регулярно убывающими коэффициентами Тейлора / В.Н. Русак, А.П. Старовойтов // *Математический сб.* – 2002. – Т. 193, № 9. – С. 63 – 92.
14. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Паде одного класса целых функций / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // *Докл. НАН Беларуси.* – 2006. – Т. 50, № 6. – С. 28 – 30.
15. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // *Матем. сб.* – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109 – 122.
16. Старовойтов А.П. Об асимптотике строк таблицы Паде аналитических функций с логарифмическими точками ветвления / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // *Математические заметки.* – 2008. – Т. 4, № 3. – С. 409 – 419.
17. Брычков, Ю.А. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1981.
18. Дзядык, В.К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sh} z$ ,  $\operatorname{ch} z$  / В.К. Дзядык // *Математический сб.* – 1979. – Т. 108(150), № 2. – С. 247 – 267.

Поступила 23.05.2009