МАТЕМАТИКА

УДК 512. 542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННОЙ СИСТЕМОЙ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП И ИХ ФАКТОРИЗАЦИИ

д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. ТЮТЯНОВ, Т.В. ТИХОНЕНКО
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

В работе рассматриваются только конечные группы. Вопросы, связанные с факторизацией, интересны и сами по себе, и по той причине, что многие классы конечных групп обладают естественной факторизацией. Изучение конечных групп, обладающих факторизацией, дает возможность глубже понять их структуру. Эти вопросы привлекали внимание многих математиков (С.А. Чунихин, Ф. Холл, И. Сеп, Н. Ито, Х. Виланд, О. Кегель, В.Д. Мазуров, Л.С. Казарин и др.). Интересными при изучении групп с факторизациями являются случаи, когда порядки групп A и B взаимно просты, а также когда в группе той или иной системы присутствуют бипримарные холловы подгруппы. Доказана π-отделимость конечной группы, представимой в виде произведения холловой π-подгруппы A и холловой σ-подгруппы B при условии существования холловых $\{\pi, p\}$ и $\{\sigma, q\}$-подгрупп для всех $p\in\pi(B)$ и $q\in\pi(A)$. Описано строение композиционных факторов конечной группы, допускающей холлову факторизацию с дополнительным условием существования бипримарных холловых подгрупп. Установлено строение конечных простых неабелевых групп с системой холловых бипримарных $\{3,r\}$-подгрупп, где $r\in\pi(G)\setminus\{3\}$ и перечислены их максимальные холловы факторизации.

1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Группа G называется факторизуемой, если она представима в виде произведения некоторых подгрупп, взятых в определенном порядке. Наиболее часто рассматриваются факторизации группы G двумя ее подгруппами A и B, что записывается в виде $G = AB$.

Строение конечной группы G, факторизуемой двумя своими собственными подгруппами A и B, существенно зависит от строения подгрупп A и B и способа их вложения в группу G. Подавляющее число работ о группах с факторизациями посвящено описанию строения группы G, когда подгруппы A и B содержатся в заданных классах групп (абелевы, нильпотентные, разрешимые). Отметим здесь, прежде всего, работы Н. Ито [1], Х. Виландта [2] и О. Кегеля [3], Л.С. Казарина [4].

Строение конечной группы в значительной мере зависит от наличия в ней той или иной системы бипримарных холловых подгрупп. В 1956 году Ф. Холл [5] высказал гипотезу, что конечная группа, имеющая бипримарные холловы $\{p,q\}$-подгруппы для всех простых делителей p и q ее порядка, является разрешимой. С использованием теоремы о классификации простых неабелевых групп справедливость этой гипотезы была доказана в 1982 году З. Арадом и М. Уордом [6]. Данный результат был значительно усилен В.Н. Тютяновым [7], где было показано, что конечная группа G, обладающая свойством $E_{\{2,p\}}$ для всех $p\in\pi(G)\setminus\{2\}$, является разрешимой. Естественно рассмотреть данный вопрос для конечных групп G со свойством $E_{\{r,p\}}$, где r – фиксированный простой делитель $|G|$, а $p\in\pi(G)\setminus\{r\}$. В настоящей работе рассмотрен случай $r = 3$.

Доказываются следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть G – конечная простая неабелева группа, обладающая свойством $E_{\{3,t\}}$ для всех $t\in\pi(G)\setminus\{3\}$. Тогда группа G принадлежит следующему списку: $PSL_2(7)$; $PSU_3(q)$, где q – нечетно, $q\equiv -1(mod 4)$, $q-1=3m$ и $(3,m)=1$; $PSU_3(q)$, где q – четно, $q-1=3m$ и $(3,m)=1$.*

Как следствие теоремы 1 получаем.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G – конечная группа, обладающая свойством $E_{\{3,t\}}$ для всех $t\in\pi(G)\setminus\{3\}$. Тогда любой неабелев композиционный фактор группы G принадлежит следующему списку: $PSL_2(7)$; $PSU_3(q)$, где q – нечетно, $q\equiv -1(mod 4)$, $q-1=3m$ и $(3,m)=1$; $PSU_3(q)$, где q – четно, $q-1=3m$ и $(3,m)=1$; $Sz(2^{2n+1})$.*

Из теорем 1 и 2 получаем следующие факторизационные результаты.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Пусть* $G = AB$ *– конечная простая группа, где* A *и* B *– холловы подгруппы в группе* G. *Если группа* G *обладает свойством* $E_{\{3,t\}}$ *для всех* $t \in \pi(G) \setminus \{3\}$, *то группа* G *изоморфна группе* $PSL_2(7)$ *и допускает следующие холловы факторизации:*

(a) $A \cong S_4$, $B \cong Z_7$;

(b) $A \cong S_4$, $B \cong [Z_7]Z_3$;

(c) $A \cong D_8$, $B \cong [Z_7]Z_3$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть* $G = AB$ *– конечная простая группа, где* A *и* B *– холловы подгруппы в группе* G. *Если группа* G *обладает свойством* $E_{\{3,t\}}$ *для всех* $t \in \pi(G) \setminus \{3\}$, *то любой неабелев композиционный фактор группы* G *принадлежит следующему списку:* $PSL_2(7)$, $Sz(2^{2n+1})$.

Важным при изучении групп с факторизациями является случай, когда порядки групп A и B взаимно просты, т.е. A и B – холловы подгруппы в группе G. Полное описание простых неабелевых групп, представимых в виде произведения двух подгрупп взаимно простых порядков, было установлено З. Арадом и Е. Фисман [8]. В работе З. Ду [9] получены критерии π-отделимости конечной группы с дополнительными условиями существования бипримарных холловых подгрупп. Эти критерии следуют из полученных нами результатов.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть конечная группа* $G = AB$, *где* A *и* B *– холловы подгруппы группы* G, $\pi_1 = \pi(A)$, $\pi_2 = \pi(B)$. *Если группа* G *обладает свойством* $E_{\{p,q\}}$ *для всех* $p \in \pi_1$, $q \in \pi_2$ *и* $p \neq q$, *то* G *–* π_1*-отделимая группа.*

Из теоремы 3 получаем:

СЛЕДСТВИЕ 3.1 [9, теорема 3]. *Группа* G *является* π*-отделимой тогда и только тогда, когда*

(1) *группа* G *обладает свойством* E_π *и* $E_{\pi'}$;

(2) *группа* G *обладает свойством* $E_{\{p,q\}}$ *для любого* $p \in \pi$ *и* $q \in \pi'$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть конечная группа* $G = AB$, *где* A *и* B *– холловы подгруппы группы* G, $\pi_1 = \pi(A)$, $\pi_2 = \pi(B)$. *Если группа* G *обладает свойством* $E_{\{\pi_1 \cup p\}}$ *и* $E_{\{\pi_2 \cup q\}}$ *для всех* $p \in \pi_2$, $q \in \pi_1$, *то любой неабелев композиционный фактор группы* G, *имеющий простые делители из* π_1 *и* π_2, *изоморфен группе* $PSL_2(7)$.

Замечание. Пусть $G \cong PSL_2(7)$, $\pi_1 = \{2,3\}$, $\pi_2 = \{3,7\}$. Тогда G допускает холлову факторизацию $G = AB$, где $A \cong S_4$, $B \cong [Z_7]Z_3$ и $3 \in \pi_1 \bigcap \pi_2$.

Из теоремы 4 получаем следующий результат:

СЛЕДСТВИЕ 4.1 [9, теорема 1]. *Группа* G *является* π*-отделимой тогда и только тогда, когда*

(1) *группа* G *обладает свойством* E_π *и* $E_{\pi'}$;

(2) *группа* G *обладает свойством* $E_{\pi \cup \{q\}}$ *и* $E_{\pi' \cup \{p\}}$ *для любого* $p \in \pi$ *и* $q \in \pi'$.

2. Предварительные результаты

Определения и обозначения в основном стандартны. Их можно найти в [10 – 13]. Приведем некоторые из них для удобства читателя.

$[A]B$ – полупрямое произведение групп A и B, где A – нормальная подгруппа в $[A]B$;

$Syl_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп группы G;

(a,b) – наибольший общий делитель натуральных чисел a и b.

Пусть $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Если $\pi \subseteq \pi(G)$, то будем говорить, что группа G *обладает свойством* E_π, если в ней имеется холлова π-подгруппа.

Группа G называется π*-отделимой* (соответственно, π*-разрешимой*), если она имеет нормальный ряд, каждый фактор которого есть либо π-группа (соответственно, разрешимая π-группа), либо π'-группа.

Пусть X_l – простая алгебра Ли над полем комплексных чисел, l – ранг алгебры и $X = A$, B, C, D, E, F, G – ее тип. Если $K = GF(q)$ – конечное поле характеристики p, то через $X_l(q)$ обозначается соответствующая группа Шевалле нормального типа; через ${}^rX_l(q)$ обозначается соответствующая группа Шевалле скрученного типа $r \in \{2,3\}$. Φ – система корней евклидова пространства соответствующей размерности и типа; Φ^+ – система положительных корней; Σ – система простых корней. Для корня $\alpha \in \Phi$ X_α – соответствующая корневая подгруппа. Отметим следующие подгруппы: $U = \langle X_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \rangle \in Syl_p(G)$, $N_G(U) \geq H$ – подгруппа Картана, $B = UH$ – подгруппа Бореля и $N/H = W$ – группа Вейля, где $N \leq N_G(H)$. Любая подгруппа в G, содержащая B, называется *параболической*.

2.1. ЛЕММА [14, лемма 1.4.3]. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Пусть G – группа лиева типа над полем $GF(q)$ характеристики $p\in\pi$ и группа G обладает свойством E_π. Тогда, если H – холлова π-подгруппа G, то верно одно из следующих утверждений:

(1) $H=G$;

(2) $\pi\cap\pi(G)\subseteq\pi(q-1)\cup\{p\}$, H содержится в некоторой подгруппе Бореля группы G и любое простое число из $\pi\setminus\{p\}$ не делит порядок группы Вейля группы G;

(3) $p=2$, $G=D_l(q)$, где число l является простым числом Ферма, $(l,q-1)=1$, подгруппа H сопряжена с параболической подгруппой G_J, отвечающей множеству простых корней $J=\{r_2,r_3,\ldots,r_l\}$;

(4) $p=2$, $G={}^2D_l(q)$, где число $l-1$ является простым числом Мерсенна, $(l-1,q-1)=1$, подгруппа H сопряжена с параболической подгруппой G_J, отвечающей множеству простых корней $J=\{r_2^1,r_3^1,\ldots,r_{l-1}^1\}$;

(5) G изоморфна факторгруппе по некоторой центральной подгруппе группы $SL(V)$, где V – векторное пространство размерности n над полем $GF(q)$ характеристики p, H является образом в G относительно естественного гомоморфизма стабилизатора в $SL(V)$ ряда подпространств $0=V_0<V_1<\ldots<V_s=V$, таких, что $dim V_i/V_{i-1}=n_i$, $i=1,2,\ldots,s$, и выполнено одно из следующих условий:

(*а*) n – нечетное простое число, $(n,q-1)=1$, $s=2$, $n_1,n_2\in\{1,n-1\}$;

(*б*) $n=4$, $(2\cdot 3,q-1)=1$, $s=2$, $n_1=n_2=2$;

(*в*) $n=5$, $(2\cdot 5,q-1)=1$, $s=2$, $n_1,n_2\in\{2,3\}$;

(*г*) $n=5$, $(2\cdot 3\cdot 5,q-1)=1$, $s=3$, $n_1,n_2,n_3\in\{1,2,2\}$;

(*д*) $n=7$, $(5\cdot 7,q-1)=1$, $(3,q+1)=1$, $s=2$, $n_1,n_2\in\{3,4\}$;

(*е*) $n=8$, $(2\cdot 5\cdot 7,q-1)=1$, $(3,q+1)=1$, $s=2$, $n_1=n_2=4$;

(*ж*) $n=11$, $(2\cdot 3\cdot 7\cdot 11,q-1)=1$, $(5,q+1)=1$, $s=2$, $n_1,n_2\in\{5,6\}$.

2.2. ЛЕММА [14, следствие 2.2.4]. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Подгруппа M знакопеременной группы A_n является холловой π-подгруппой тогда и только тогда, когда $M=M_0\cap A_n$ для некоторой холловой π-подгруппы M_0 симметрической группы S_n.

2.3. ЛЕММА [5, теорема A4]. Пусть S_n – симметрическая группа степени n и $r<s\le n$, где r и s – простые числа. Тогда S_n обладает свойством $E_{\{r,s\}}$ в том и только в том случае, если $r=2$, $s=3$, а $n=3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8$.

2.4. ЛЕММА [15]. Если M – максимальная подгруппа группы $PSp_4(q)$, где $q>2$ и четно, такая, что q^2+1 делит $|M|$, тогда выполняется одно из следующих условий:

(*i*) M стабилизирует продолжение линий в $PGL_3(q)$;

(*ii*) M стабилизирует овал в $PGL_3(q)$;

(*iii*) $M_0\le M\le Aut(M_0)$ для $M_0\cong PSL_2(q^2)$ или ${}^2B_2(q)$.

В оставшихся вспомогательных результатах будем считать, что p – простое число.

Пусть r – простое число, $2\le n$ – натуральное число. Число r назовем *примитивным по отношению к паре* $\{p,n\}$, если r делит p^n-1 и не делит p^i-1 для любого $1\le i<n$.

2.5. ЛЕММА [16]. Если $\{p,n\}\ne\{2,6\}$ и $n>2$, то существует простое число r, примитивное по отношению к паре $\{p,n\}$.

2.6. ЛЕММА. Если r – простое число, примитивное по отношению к паре $\{p,n\}$, то $r\ge n+1$.

Доказательство. Следует из малой теоремы Ферма.

3. Обоснование основных результатов

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 необходимо рассмотреть следующие случаи:

1. G – знакопеременная группа. Из леммы 2.2 и леммы 2.3 заключаем, что группа $G\cong A_n$ $(n\ge 5)$ не удовлетворяет условиям теоремы 1.

2. G – простая спорадическая группа или группа Титса. Из [14, лемма 1.4.6] следует, что в этом случае найдется простой делитель r порядка группы G, что G не обладает свойством $E_{\{3,r\}}$.

3. G – простая группа лиевского типа над полем $GF(q)$ характеристики p.

Пусть сначала $p=3$. По условию теоремы 1 группа G имеет бипримарные холловы $\{3,t\}$-подгруппы для всех $t\in\pi(G)\setminus\{3\}$. Поскольку бипримарные группы разрешимы, то в лемме 2.1 возможны случаи (2) или (5a) для группы $PSL_3(3)$. Пусть выполняется пункт (2). Группа G обладает свойством $E_{\{3,2\}}$ и, следовательно, $(2,|W|)=1$. Последнее невозможно, так как $|W|$ – четное число. Таким образом, $G\cong PSL_3(3)$. Однако группа $PSL_3(3)$ не имеет холловой $\{3,13\}$-подгруппы. Случай $p=3$ рассмотрен.

Всюду далее будем считать, что $p\neq 3$. Группа G обладает разрешимой холловой $\{p,3\}$-подгруппой. Согласно лемме 2.1 либо $G\cong PSL_3(2)$, либо выполняется пункт (2) леммы 2.1. Так как $PSL_3(2)\cong PSL_2(7)$ содержится в списке групп из заключения теоремы 1, то выполняется пункт (2). При этом 3 не делит $|W|$. Поскольку группы ${}^2B_2(q)$ являются $3'$-группами, а ${}^2G_2(q)$ определены над полем характеристики 3, то $G\in\{PSL_2(q),{}^2F_4(q),PSp_4(q),PSU_3(q),PSU_4(q),\ PSU_5(q)\}$.

Рассмотрим все случаи:

(a) $G\cong PSL_2(q)$, $q=p^n$

В группе G существует бипримарная холлова $\{p,3\}$-подгруппа, поэтому согласно лемме 2.1 $3\in\pi(q-1)$. Пусть $t\in\pi(q+1)$. Тогда существует бипримарная холлова $\{3,t\}$-подгруппа в группе G. По теореме Диксона [13, II, теорема 8.27] эта группа изоморфна либо A_4, либо S_4. Поэтому $t=2$. Если $p=2$, то $q+1$ – нечетное число, что невозможно. Следовательно, $p>2$. Поскольку t произвольный делитель числа $q+1$, то $q+1=2^{\alpha}$. Если холлова подгруппа изоморфна A_4, то $q+1=4$ и $q=3$. Однако группа $PSL_2(3)$ является разрешимой. Значит, холлова подгруппа изоморфна S_4 и $q+1=8$. Отсюда следует, что $q=7$ и $G\cong PSL_2(7)$. Данная группа содержится в списке групп из заключения теоремы 1.

(b) $G\cong {}^2F_4(q)$, $q=2^{2n+1}>2$

По условию теоремы 1 в группе G существует холлова π-подгруппа нечетного порядка и $3\in\pi$. Из [14, лемма 2.7.16] следует, что в этом случае $\pi\subseteq\pi(q^2-1)$. Очевидно, что существует нечетное $t\in\pi({}^2F_4(q))\setminus\pi(q^2-1)$. По условию теоремы 1 существует холлова $\{3,t\}$-подгруппа в группе G, что невозможно.

(c) $G\cong PSp_4(q)$

1) $G\cong PSp_4(q)$, $q=2^f>2$. В этом случае $|G|=q^4(q^2-1)^2(q^2+1)$. Группа G обладает холловой $\{2,3\}$-подгруппой, поэтому согласно лемме 2.1 $3\in\pi(q-1)$, а значит $(3,q^2+1)=1$. Пусть $r\in\pi(q^2+1)$. В группе G существует холлова $\{3,r\}$-подгруппа. Поскольку $2\notin\{3,r\}$, то по [14, теорема 2.7.1] данная подгруппа имеет вид RS, где $R\in Syl_r(G)$, $S\in Syl_3(G)$. Рассмотрим $N_G(R)$. Очевидно, что $N_G(R)$ содержит тор T порядка q^2+1, а также силовскую 3-подгруппу группы G. Обозначим через M максимальную подгруппу группы G, содержащую $N_G(R)$. Согласно лемме 2.4 возможен один из следующих случаев:

(1) $M\leq Aut(PSL_2(q^2))\cong PSL_2(q^2)Z_2$

В группе $PSL_2(q^2)$ тор порядка q^2+1 содержится в единственной максимальной подгруппе диэдра порядка $2(q^2+1)$. Противоречие с тем, что $T\leq N_G(R)\leq M$ и $S\leq N_G(R)$.

(2) $M\leq Aut({}^2B_2(q))$

Группа внешних автоморфизмов группы Судзуки – это в точности группа Галуа поля $GF(q)$ изоморфная Z_f. Так как ${}^2B_2(q)$ – $3'$-группа, а силовская 3-подгруппа группы G не циклическая, то получаем противоречие.

2) $G\cong PSp_4(q)$, q – нечетно и $q=p^f$.

Группа G обладает холловой $\{3,p\}$-подгруппой, поэтому $3\in\pi(q-1)$, а значит $(3,q^2+1)=1$. Так как $|G|=q^4(q-1)^2(q+1)^2(q^2+1)$, то 9 делит $|G|$.

Рассмотрим циклическую группу T порядка $\frac{1}{2}(q^2+1)$. Покажем, что существует нечетный простой делитель числа q^2+1. Предположим, что q^2+1 – степень числа 2. Ясно, что $q\equiv\pm1(mod 4)$. Если $q\equiv 1(mod 4)$, то $q=1+4t$. Отсюда следует, что $q^2+1=(4t+1)^2+1\equiv 2(mod 4)$, что невозможно. Если $q\equiv -1(mod 4)$, то снова $q^2+1\equiv 2(mod 4)$. Таким образом, q^2+1 не является степенью числа 2. Пусть

$r \in \pi(q^2+1)\setminus\{2\}$. В группе G существует холлова $\{3,r\}$-подгруппа вида RS, где $R \in Syl_r(G)$, $S \in Syl_3(G)$. Тогда $N_G(R)$ содержит T и силовскую 3-подгруппу группы G. Пусть M – максимальная подгруппа в группе G, которая содержит $N_G(R)$. Согласно работе [17] необходимо рассмотреть следующие случаи.

(1) $M \le Aut(PSL_2(q^2)) \cong PSL_2(q^2)Z_2$. Дословное повторение рассуждений случая (1) из пункта 1).

(2) $|M|=1920$ и M – группа симплектического типа. Так как 9 не делит $|M|$, то этот случай невозможен.

(3) $|M|=960$ и M – группа симплектического типа. Так как 9 не делит $|M|$, то этот случай невозможен.

(4) $|M|=360$ и $M \cong A_6 \cong PSL_2(9)$. Очевидно, что в группе M силовская 3-подгруппа не нормализует нетривиальной силовской r-подгруппы, где $r \in \pi(M)\setminus\{2,3\}$. Поэтому данный случай невозможен.

(5) $|M|=720$, $M \cong A_6^{\cdot}2$; $|M|=2520$, $M \cong A_7$. Дословное повторение рассуждений пункта (4).

(d) $G \cong PSU_3(q)$

Пусть сначала q – нечетное число. Группа G обладает свойством $E_{\{p,3\}}$, поэтому $3 \in \pi(q-1)$. При этом силовская 3-подгруппа группы G содержится в подгруппе Картана, а значит нормализует унипотентную подгруппу. Так как $3 \notin \pi(q+1)$, то $d=(3,q+1)=1$ и $|G|=q^3(q+1)^2(q-1)(q^2-q+1)$. Группа G обладает свойством $E_{\{2,3\}}$. Из [14, лемма 2.4.3 (2)] следует, что это выполняется, если $q \equiv -1(mod 4)$. Кроме того, порядок силовской 3-подгруппы группы G равен 3, а значит $q-1=3m$, где $(3,m)=1$. Очевидно, что $(q-1,q+1)=2^{\alpha}$, $\alpha \ge 1$; $(q-1,q^2-q+1)=1$ и поскольку $3 \notin \pi(q+1)$, то $(q+1,q^2-q+1)=1$. Из работы [18] следует, что группа $PSU_3(q)$ имеет подгруппы, изоморфные $Z_{q^2-q+1}Z_3$ и $(Z_{q+1}\times Z_{q+1}).S_3$. Следовательно, группа G обладает свойством $E_{\{3,t\}}$ для всех $t \in \pi(G)\setminus\{3\}$. При этом $q \equiv -1(mod 4)$ и $q-1=3m$, где $(3,m)=1$.

Пусть теперь q – четное число. Группа G обладает свойством $E_{\{2,3\}}$, поэтому $3 \in \pi(q-1)$ и силовская 3-подгруппа нормализует силовскую 2-подгруппу группы G. Так как $3 \notin \pi(q+1)$ и q – четное число, то $(q-1,q+1)=(q-1,q^2-q+1)=(q+1,q^2-q+1)=1$. Из работы [19] следует, что в группе G существуют подгруппы $Z_{q^2-q+1}Z_3$ и $(Z_{q+1}\times Z_{q+1}).S_3$. Таким образом, силовская 3-подгруппа группы G имеет порядок 3 и она нормализует некоторую силовскую r-подгруппу группы G для всякого $r \in \pi(G)\setminus\{3\}$. При этом $q-1=3m$, где $(3,m)=1$.

(e) $G \cong PSU_4(q)$

Пусть сначала q – четное число. Группа G обладает свойством $E_{\{2,3\}}$, поэтому $3 \in \pi(q-1)$ и $3 \notin \pi(q+1)$. Группа G имеет порядок $q^6(q-1)^2(q+1)^3(q^2+1)(q^2-q+1)$. Поскольку q – четное число и $3 \notin \pi(q+1)$, то числа $q-1$, $q+1$, q^2+1, q^2-q+1 попарно взаимно простые. Из [14, теорема 2.7.1] следует, что силовская 3-подгруппа G нормализует некоторую силовскую r-подгруппу группы G для всех нечетных простых делителей r порядка группы G. Так как 3-ранг группы G не меньше 2, то силовская 3-подгруппа группы G содержит элементарную абелеву подгруппу, изоморфную $Z_3 \times Z_3$. Поэтому для всякого $r \in \pi(G)\setminus\{2,3\}$ найдется элемент $x \in G$ порядка 3, такой, что r делит $|C_G(x)|$. Централизаторы элементов порядка 3 в группах лиевского типа были описаны Бургонем. Поскольку $q \equiv 1(mod 3)$, из [20, § 34] следует, что если $r \in \pi(q^2-q+1)$, то r не делит $|C_G(x)|$ для любого элемента $x \in G$ порядка 3. Получили противоречие.

Пусть q – нечетное число. Группа G содержит холлову $\{2,3\}$-подгруппу. По [14, лемма 2.4.3 (4)], если 2, 3 $\in \pi$ и $r \notin \pi$, то группа $PSU_4(q)$ содержит холлову π-подгруппу $M \cong 4.2^4.A_6$ и $\pi=\{2,3,5\}$. Очевидно, что группа M не обладает свойством $E_{\{2,3\}}$. Получили противоречие.

(f) $G \cong PSU_5(q)$, $q=p^e$

В группе G существует минизотропный тор T порядка $\frac{1}{d}(q^5+1)$, где $d=(5,q+1)$ и $[N_G(T):T]=5$. Рассмотрим число $p^{10e}-1$. Согласно лемме 2.5 существует простое число r – примитивное по отношению к паре $\{p,10\}$. Из леммы 2.6 следует, что $r \ge 11$. При этом r делит $|T|$. Тор T принадлежит классу Ашбахера C_3, который содержит простые группы $PSL_2(11)$ и $PSp_4(3)$. Таким образом,

$N_G(R) \cong RZ_5$ для некоторой подгруппы $R \in Syl_r(G)$. В группе G существует холлова $\{3, r\}$-подгруппа. По [14, теорема 2.7.1] $N_G(R)$ содержит силовскую 3-подгруппу группы G.

Противоречие с тем, что $N_G(R) \cong RZ_5$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть G – минимальный контрпример к теореме 2. Очевидно, что G – неразрешимая группа. В силу теоремы 1 G не является простой неабелевой группой. Отметим, что простые неабелевы $3'$-группы – это в точности группы Судзуки. Пусть $1 \neq NG$. Если $(3, |N|) = 1$, то неабелевыми композиционными факторами в N будут группы Судзуки. Так как факторгруппа G/N удовлетворяет условию теоремы 2, то в силу минимальности контрпримера получим, что неабелевы композиционные факторы G/N принадлежат списку групп из заключения теоремы 2. Таким образом, неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат списку групп в теореме 2. Противоречие.

Точно также получим противоречие в случае, когда $(3, |G/N|) = 1$. Если $(3, |N|) = (3, |G/N|) = 3$, то N и G/N удовлетворяют условию теоремы 2 и, следовательно, неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат списку простых групп из заключения теоремы 2. Последнее противоречие. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Будем считать, что группа G – минимальный контрпример к теореме 3. Ясно, что если $G = AB$, то A – E_{π_1}-подгруппа группы G, B – E_{π_2}-подгруппа группы G. Очевидно, что теорема верна для разрешимых групп. Поэтому будем считать, что группа G неразрешима. Сначала покажем, что G не является простой неабелевой группой. Факторизации простых неабелевых групп холловыми подгруппами приведены в работе [21]. При доказательстве теоремы 3, будем использовать эти факторизации без дополнительных оговорок. Последовательно рассмотрим все случаи, указывая при этом пары чисел $r \in \pi_1$, $s \in \pi_2$, для которых группа G не обладает свойством $E_{\{r,s\}}$, что противоречит условию теоремы 3. Возможны следующие случаи.

1. $G \cong A_r$, где $5 \leq r$ – простое число, причем $A \cong A_{r-1}$, $B \cong Z_r$. Согласно результату Ф. Холла [5], группа A_n имеет бипримарную холлову $\{s, t\}$-подгруппу, если $s = 2$ и $t = 3$ для n = 3, 4, 5, 7, 8. Противоречие с условием теоремы 3.

2. $G \cong M_{11} = (3^2 : Q_8.2)(Z_{11}Z_5) = (A_6.2)Z_{11} = (A_6.2)(Z_{11}Z_5)$. Из [11] следует, что группа M_{11} не обладает свойством $E_{\{2,11\}}$.

3. $G \cong M_{23} = (2^4 : A_7)(Z_{23}Z_{11}) = (PSL_3(4) : 2_2)(Z_{23}Z_{11}) = M_{22}Z_{23} = M_{22}(Z_{23}Z_{11})$. Из [11] следует, что группа M_{23} не обладает свойством $E_{\{2,23\}}$.

4. $G \cong PSL_2(7) = S_4Z_7 = D_8(Z_7Z_3) = S_4(Z_7Z_3)$. Группа $PSL_2(7)$ не имеет холловой $\{2,7\}$-подгруппы.

5. $G \cong PSL_2(11) = A_4(Z_{11}Z_5) = A_5Z_{11} = D_{12}(Z_{11}Z_5) = A_5(Z_{11}Z_5)$. Группа $PSL_2(11)$ не обладает свойством $E_{\{2,11\}}$.

6. $G \cong PSL_2(29) = A_5(Z_{29}Z_7)$. Группа $PSL_2(29)$ не обладает свойством $E_{\{2,29\}}$.

7. $G \cong PSL_2(59) = A_5(Z_{59}Z_{29}) = D_{60}(Z_{59}Z_{29})$. Группа $PSL_2(59)$ не обладает свойством $E_{\{2,59\}}$.

8. $G \cong PSL_2(2^n)$, $n \geq 2$; $A \cong E_{2^n}Z_{2^n-1}$, $B \cong Z_{2^n+1}$, где E_{2^n} – элементарная абелева группа порядка 2^n. Пусть $r \in \pi(2^n + 1)$, тогда группа $PSL_2(2^n)$ не обладает свойством $E_{\{2,r\}}$.

9. $G \cong PSL_2(q)$, $q = p^n$, где p – нечетное простое число и $q \equiv -1 (mod 4)$. Тогда $A \cong [U]Z_{\frac{1}{2}(q-1)}$, $B \cong D_{q+1}$, где $|U| = q$. Группа G не обладает свойством $E_{\{2,p\}}$.

10. $G \cong PSL_5(2) = (2^4 : PSL_4(2))Z_{31} = (2^6 : (S_3 \times PSL_2(7)))(Z_{31}Z_5) = (2^4 : PSL_4(2))(Z_{31}Z_5)$. Из [11] следует, что группа $PSL_5(2)$ не обладает свойством $E_{\{2,31\}}$.

11. $G \cong PSL_r(q)$, где $q = p^n$, $1 < r$ – нечетное простое число, $(r, q-1) = 1$. В этом случае $G = P_iZ_{\frac{q^r-1}{q-1}}$ или $G = P_i(Z_{\frac{q^r-1}{q-1}}Z_r)$, где P_i – максимальная параболическая подгруппа в группе $PSL_r(q)$ для $i = 1, r-1$. Пусть сначала p – нечетное простое число. Обозначим $T = Z_{\frac{q^r-1}{q-1}}$ – цикл Зингера, являющийся циклической сильно изолированной подгруппой группы G. Пусть $t \in \pi(T)$. Тогда в группе G существует холлова $\{t, p\}$-подгруппа. Из [22, теоремы 3.2 и 3.4] следует, что данная группа содержится в подгруппе Бореля. Из того факта, что T – нильпотентная холлова группа, можно считать, что T содержится в под-

группе Картана. Противоречие с тем, что минизотропный тор не содержится ни в какой собственной параболической подгруппе группы G.

Пусть теперь $p=2$ и S – силовская s-подгруппа в группе T. По условию теоремы 3 существует холлова $\{p,s\}$-подгруппа $L=US$ группы G, где $U\in Syl_p(G)$. Покажем, что S – TI-подгруппа в L. Пусть для некоторого $1\neq u\in U$ выполнено $S\cap S^u\neq 1$. Так как S – абелева группа, то $S\cap S^u\leq Z(<S,S^u>)$. Следовательно, $C_L(S\cap S^u)=S\tilde{U}$, где $\tilde{U}\leq U$ и $\tilde{U}\neq 1$. Противоречие с тем, что T – сильно изолированная подгруппа группы G.

Рассмотрим $N_L(S)$. Пусть $N_L(S)=S\tilde{U}$, где $1\neq\tilde{U}\leq U$. Так как $C_G(S)=TN_G(S)$, то $\tilde{U}$ нормализует T, что невозможно, поскольку $N_G(T)/T\cong Z_r$, где r – нечетное число. Таким образом, L – группа Фробениуса с ядром U. Отсюда следует, что S содержится в подгруппе Картана H группы G. Значит, порядок подгруппы Картана делится на $|T|$. Циклы Зингера сопряжены в группе G, поэтому можно считать, что $T\leq H<B$ – борелевская подгруппа. Противоречие с тем, что T не содержится ни в одной параболической подгруппе.

Следовательно, G не является простой неабелевой группой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в группе G. Если N – π_1-группа, то факторгруппа G/N – π_1-отделима в силу минимальности контрпримера. Поэтому G также π_1-отделима, что невозможно. Точно также показывается, что N не является π_2-группой.

Если $S(G)\neq 1$, то в силу минимальности конртпримера факторгруппа G/N удовлетворяет условиям теоремы 3 и G/N – π_1-отделимая подгруппа. А поскольку N разрешимая подгруппа группы G, то группа G – π_1-отделимая. Следовательно, $S(G)=1$. Пусть N – минимальная нормальная неразрешимая подгруппа в группе G. Тогда $N=N_1\times N_2\times\cdots\times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы для любого натурального i. Поскольку свойство E_π наследуется на нормальные подгруппы, то очевидно, что $N=(N\cap A)(N\cap B)$ и $N\cap A\neq 1$, $N\cap B\neq 1$. Значит, подгруппа N удовлетворяет условиям теоремы 3. В силу минимальности контрпримера N – π_1-отделимая группа. Отсюда следует, что группа G – π_1-отделима. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Предположим, что G – простая неабелева группа. Ясно, что если $G=AB$, то A – E_{π_1}-подгруппа группы G, B – E_{π_2}-подгруппа группы G. Так как существуют собственные подгруппы со свойством $E_{\pi_1\cup p}$, $E_{\pi_2\cup q}$ для всех $p\in\pi_2$ и $q\in\pi_1$, то группа G обладает холловой факторизацией с нетривиальным пересечением. Факторизации простых неабелевых групп холловыми подгруппами приведены в работе [21]. При доказательстве теоремы 4 будем использовать эти факторизации без дополнительных оговорок. Последовательно рассмотрим все случаи, указывая при этом пару $\{\pi_i,r\}$, для которой группа G не обладает свойством $E_{\{\pi_i,r\}}$, где $i\in\{1,2\}$. Если группа G удовлетворяет условиям теоремы, то укажем все такие пары. Возможны следующие случаи:

1. $G\cong M_{11}=(A_6.2)(Z_{11}Z_5)$. Пусть $\pi_2=\{5,11\}$, $r=2$. Из [11] следует, что группа M_{11} не обладает свойством $E_{\{\pi_2\cup 2\}}$.

2. $G\cong M_{23}=M_{22}(Z_{23}Z_{11})$. Пусть $\pi_2=\{11,23\}$, $r=2$. Из [11] следует, что группа M_{23} не обладает свойством $E_{\{\pi_2\cup 2\}}$.

3. $G\cong PSL_2(7)=S_4(Z_7Z_3)$. Пусть $\pi_1=\{2,3\}$ и $r=7$, $\pi_2=\{3,7\}$ и $s=2$. Данная группа обладает свойствами $E_{\{\pi_1\cup 7\}}$ и $E_{\{\pi_2\cup 2\}}$.

4. $G\cong PSL_2(11)=A_5(Z_{11}Z_5)$. Пусть $\pi_2=\{5,11\}$, $r=2$. Группа $PSL_2(11)$ не обладает свойством $E_{\{\pi_2\cup 2\}}$.

5. $G\cong PSL_5(2)=(2^4:PSL_4(2))(Z_{31}Z_5)$. Пусть $\pi_2=\{5,31\}$. Из [11] следует, что группа $PSL_5(2)$ не обладает свойством $E_{\{\pi_2\cup 2\}}$.

Следовательно, $G\cong PSL_2(7)$.

Пусть G не простая группа и N – минимальная нормальная подгруппа в группе G. Поскольку свойство E_π наследуется на факторгруппы, то легко видеть, что G/N удовлетворяет условиям теоремы 4, а поэтому неабелевы композиционные факторы G/N – это в точности группы, изоморфные $PSL_2(7)$.

Если N – элементарная абелева, то очевидно, что неабелевыми композиционными факторами группы G являются группы $PSL_2(7)$. Если N – прямое произведение простых неабелевых групп, то $N=(A\cap N)(B\cap N)$ и по индукции $N=PSL_2(7)\times\cdots\times PSL_2(7)$, а значит все неабелевы композиционные факторы группы изоморфны $PSL_2(7)$. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ito, N. Uber das Produkt von zwei abelschen Gruppen / N. Ito // Math. Z. – 1955. – B. 62. – S. 400 – 401.
2. Wielandt, H. Uber Produkte von nilpotenter Gruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1958. – Вып. 2. – S. 611 – 618.
3. Kegel, O.H. Produkte nilpotentner Gruppen / O.H. Kegel // J. Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 90 – 93.
4. Kazarin, L.S. Product of two solvable subgroups / L.S. Kazarin // Comm. Algebra. – 1986. – Vol. 14. – P. 1001 – 1066.
5. Hall, Ph. Theorems like Sylow's / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 6, № 3. – P. 286 – 304.
6. Arad, Z. New criteria for the solvability of finite groups / Z. Arad, M. Ward // J. Algebra. – 1982. – Vol. 77. – P. 234 – 246.
7. Тютянов, В.Н. О гипотезе Холла / В.Н. Тютянов // Укр. мат. журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 1181 – 1191.
8. Arad, Z. On finite factorizable groups / Z. Arad, E. Fisman // J. Algebra. – 1984. – Vol. 96. – P. 522 – 548.
9. Du, Z. Hall Subgroups and π-Separable Groups / Z. Du // J. Algebra. – 1997. – Vol. 195. – P. 501 – 509.
10. Carter, R.W. Simple groups of Lie type / R.W. Carter. – London: John Wiley and Sons, 1972.
11. Atlas of Finite groups / J.H. Conway [and others]. – Oxford, 1985.
12. Gorenstein, D. Finite groups 2nd edn. / D. Gorenstein. – New York: Chelsea, 1980.
13. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967.
14. Ревин, Д.О. Холловы подгруппы конечных групп: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06 / Д.О. Ревин. – Новосибирск, 2008.
15. Kantor, W.M. The rank 3 permutation representations of the finite classical groups / W.M. Kantor, R.A. Libler // Trans. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 271, № 1. – P. 1 – 71.
16. Zsigmondy, K. Zur Theorie der Potenzreste / K. Zsigmondy // Monath. Math. Phis. – 1892. – № 3. – P. 265 – 284.
17. Mitchell, H.H. The subgroups of the quaternary abelian linear group / H.H. Mitchell // Trans. Amer. Math. Soc. – 1914. – Vol. 15. – P. 379 – 396.
18. Mitchell, H.H. Determination of the ordinary and modular ternary linear groups / H.H. Mitchell // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – Vol. 12. – P. 207 – 242.
19. Hartley, R.W. Determination of the ternary collineation groups whose coefficient Lie in $GF(2^n)$ / R.W. Hartley // Ann. Math. – 1925. – Vol. 25, № 2. – P. 140 – 158.
20. Gorenstein, D. The lokal structure of finite groups of characteristic 2 type / D. Gorenstein, R. Lyons. – Mem. Amer. Math. Soc., 1983.
21. Тихоненко, Т.В. О факторизации конечных групп холловыми подгруппами / Т.В. Тихоненко, В.Н. Тютянов // Вести Гомел. гос. ун-та. – 2009. – № 1(52). – Р. 125 – 133.
22. Ревин, Д.О. Две D_π-теоремы для одного класса конечных групп / Д.О. Ревин // Препринт № 40. – Новосибирск, 1999. – С. 42.

FINITE GROUPS WITH GIVEN SYSTEM OF HALL SUBGROUPS AND THEIR FACTORIZATIONS

V. TYUTYANOV, T. TIHONENKO

All considered groups are finite. The questions connected with factorizations are very interesting, because many classes of the finite groups have the natural factorization. These questions attracted attention many mathematicians (S.A. Chunihin, P. Hall, J. Szep, N. Ito, H. Wielandt, O. Kegel, V.D. Mazurov, L.S. Kazarin and othes). The cases, when subgroups A and B have the coprime orders as well as the presence of one or another system of Hall biprimary subgroups of the group are very interesting. The criteria of finite group' π-separables, which are represented in the form of the product of Hall π-subgroup A and Hall σ-subgroup B with the existence of Hall {π, p} and {σ, q}-subgroups for all p ∈ π(B) and q ∈ π(A) are proved in the paper. The compositional factors of finite group with Hall factorization with given condition of the existence of Hall biprimary subgroups are described. The structure of finite simple non-abelian groups with given system of Hall biprimary {3, r}-subgroup, r ∈ π(G)\{3} are determined. Their Hall factorizations are also found out.