

Nina Siemieniuk

FRAKTALNE WŁAŚCIWOŚCI POLSKIEGO RYNKU KAPITAŁOWEGO



Białystok 2001

Recenzenci:
prof. dr hab. Mirosława Lasek
prof. zw. dr hab. Jerzy Sikorski

Copyright © by Uniwersytet w Białymstoku
Białystok 2001

ISBN 83-87884-77-4

Skład:
Pracownia Poligraficznych Usług Komputerowych
Tomasz Poskrobko

Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku
15-301 Białystok, ul. Mazowiecka 33
tel. (085) 745 70 59, e-mail: ac-dw@uwb.noc.edu.pl

Druk i oprawa:
Podlaska Spółdzielnia Produkcyjno-Handlowo-Usługowa
Białystok, ul. 27 Lipca 40/3, tel./fax (085) 675-48-02

Spis treści

| | |
|---|-----------|
| WPROWADZENIE | 7 |
| Rozdział 1. | |
| INWESTOWANIE NA RYNKU KAPITAŁOWYM | 11 |
| 1.1. Krótka historia metod analizy rynku kapitałowego | 11 |
| 1.2. Metody wyceny papierów wartościowych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie | 16 |
| 1.2.1. Analiza techniczna | 16 |
| 1.2.1.1. Cel, metody i zakres przedmiotowy analizy technicznej | 16 |
| 1.2.1.2. Elementy klasycznej analizy technicznej | 22 |
| 1.2.1.3. Wskaźniki stosowane w nowoczesnej analizie technicznej | 38 |
| 1.2.2. Analiza fundamentalna | 48 |
| 1.2.2.1. Istota analizy fundamentalnej | 48 |
| 1.2.2.2. Analiza makroekonomiczna | 51 |
| 1.2.2.3. Wskaźnikowa analiza rynku | 54 |
| 1.2.3. Analiza portfelowa | 63 |
| 1.2.3.1. Pojęcie stopy zwrotu z inwestycji | 63 |
| 1.2.3.2. Ryzyko inwestycji w papiery wartościowe | 66 |
| 1.2.3.3. Korelacja papierów wartościowych | 68 |
| 1.2.3.4. Tworzenie portfela papierów wartościowych – model Markowitza | 70 |
| 1.2.3.5. Inne modele rynku papierów wartościowych | 84 |
| 1.2.3.6. Ocena efektywności inwestycji w papiery wartościowe | 90 |
| 1.2.4. Podsumowanie | 93 |
| Rozdział 2. | |
| WYBRANE ELEMENTY TEORII CHAOSU DETERMINISTYCZNEGO | 97 |
| 2.1. Zjawisko chaosu deterministycznego | 98 |
| 2.1.1. Wybrane przykłady prostych zjawisk chaosu deterministycznego | 100 |
| 2.1.1.1. Równanie (odwzorowanie) logistyczne | 101 |
| 2.1.1.2. Atraktor Henona | 106 |
| 2.1.1.3. Model Lorenza | 109 |
| 2.1.2. Wybrane przykłady występowania chaosu | 112 |
| 2.1.2.1. Bifurkacje | 112 |
| 2.1.2.2. Zjawisko intermitencji i turbulencji w układach dynamicznych ... | 117 |
| 2.1.2.3. Kryzysy | 123 |
| 2.1.2.4. Dziwne atraktory, fraktale, odwzorowanie zwięzające | 123 |
| 2.2. Analiza fraktalna | 132 |
| 2.2.1. Analiza fraktalna układów dynamicznych | 132 |
| 2.2.1.1. Przestrzeń fazowa | 132 |
| 2.2.1.2. Atraktory | 132 |
| 2.2.1.3. Przekrój Poincaré | 136 |

| | |
|---|------------|
| 2.2.2. Analiza fraktalna danych eksperymentalnych | 139 |
| 2.2.2.1. Rekonstrukcja atraktora | 140 |
| 2.2.2.2. Analiza Fouriera | 141 |
| 2.2.2.3. Funkcja autokorelacji i współczynnik autokorelacji nieliniowej ... | 142 |
| 2.2.2.4. Analiza przeskalowanego zakresu R/S | 143 |
| 2.2.2.5. Entropia korelacyjna Kołmogorowa | 146 |
| 2.2.2.6. Wymiar fraktalny i korelacyjny | 147 |
| 2.2.2.7. Wykładniki Lapunowa | 150 |
| 2.2.3. Podsumowanie | 153 |
| Rozdział 3. | |
| ANALIZA FRAKTALNYCH WŁAŚCIWOŚCI POLSKIEGO RYNKU KAPITAŁOWEGO | 155 |
| 3.1. Właściwości fraktalne polskiego rynku kapitałowego z wykorzystaniem analizy indeksu WIG | 156 |
| 3.2. Identyfikacja chaosu deterministycznego w funkcjonowaniu wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie | 164 |
| 3.2.1. Makrosektor PRZEMYSŁ | 166 |
| 3.2.1.1. Podsektor PRZEMYSŁ SPOŻYWCZY | 166 |
| 3.2.1.2. Podsektor PRZEMYSŁ LEKKI | 179 |
| 3.2.1.3. Podsektor PRZEMYSŁ DRZEWNY | 187 |
| 3.2.1.4. Podsektor PRZEMYSŁ CHEMICZNY | 191 |
| 3.2.1.5. Podsektor PRZEMYSŁ MATERIAŁÓW BUDOWLANYCH | 198 |
| 3.2.1.6. Podsektor BUDOWNICTWO | 201 |
| 3.2.1.7. Podsektor PRZEMYSŁ ELEKROMASZYNOWY | 211 |
| 3.2.2. Makrosektor FINANSE | 220 |
| 3.2.2.1. Podsektor BANKI | 220 |
| 3.2.2.2. Podsektor UBEZPIECZENIA | 240 |
| 3.2.3. Makrosektor USŁUGI | 243 |
| 3.2.3.1. Podsektor TELEKOMUNIKACJA | 244 |
| 3.2.3.2. Podsektor INFORMATYKA | 247 |
| 3.3. Podsumowanie | 254 |
| LITERATURA | 261 |
| SPIS RYSUNKÓW | 265 |
| SPIS TABEL | 267 |

Wprowadzenie

Rynki kapitałowe są na całym świecie przedmiotem licznych badań i analiz. Wykorzystuje się w nich różne metody i narzędzia badawcze. Próby opisu rynku kapitałowego podejmowane są w ramach wielu dyscyplin naukowych, np. ekonomii, matematyki, psychologii. Rozmaitość stosowanych teorii i metod znajduje swój wyraz w różnorodności uzyskiwanych wyników i prognoz. Osiągnięcie sukcesu przy inwestowaniu w papiery wartościowe jest bardzo trudne, ponieważ rynek ten jest bardzo dynamiczny i prawie nigdy nie znajduje się w równowadze. Strategie działania na tym rynku są, z metodologicznego punktu widzenia, najtrudniejsze ze zbioru wszystkich strategii stosowanych w gospodarce. Również istniejący od początku lat dziewięćdziesiątych polski rynek kapitałowy nie jest tu wyjątkiem. Inwestorzy poszukują uzasadnienia dla swoich decyzji inwestycyjnych stosując między innymi analizę fundamentalną, techniczną czy portfelową (Jajuga K., Jajuga T., 1996)¹. W celu przewidywania przyszłego zachowania się rynku konstruowane są rozmaite modele – formalne, heurystyczne, irracjonalne, które nigdy nie dają pełnej pewności sukcesu i są obciążone, zwykle ryzykiem inwestycyjnym. Szerzej na ten temat traktują następujące prace (Jajuga K., Jajuga T., 1996²; Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., 1998³; Haugen R. A., 1996⁴; Pring M. J., 1998⁵; Lechowicz A., Mączka W.⁶, 1994; Ritchie J. C., 1997⁷; Socha J., 1998⁸; Plummer T., 1995⁹; Tarczyński W., 1997¹⁰; Murphy J. J., 1995¹¹; i inni).

¹ Jajuga K., Jajuga T.: *Inwestycje*, PWN, Warszawa 1996

² Jajuga K., Jajuga T.: op.cit.

³ Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: *Inwestycje finansowe*. Wydawnictwo AE we Wrocławiu, Wrocław 1998

⁴ Hangen R.A.: *Teoria nowoczesnego inwestowania. Obszerny podręcznik analizy portfelowej*. Wig Press, Warszawa 1996

⁵ Pring M.J.: *Podstawy analizy technicznej*. Wig Press, Warszawa 1998

⁶ Lechowicz A., Mączka W.: *Rynek kapitałowy. Poradnik inwestora giełdowego*. Best, Kraków 1994

⁷ Ritchie J.C.: *Analiza fundamentalna*. Wig Press, Warszawa 1997

⁸ Socha J.: *Rynek, giełda, inwestycje*. Olympus, Warszawa 1998

⁹ Plummer T.: *Psychologia rynków finansowych u źródeł analizy technicznej*. Wig Press, Warszawa 1995

¹⁰ Tarczyński W.: *Rynki kapitałowe*. Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa 1997

¹¹ Murphy J.J.: *Analiza techniczna. Obszerny podręcznik metod i strategii inwestycyjnych stosowanych na rynku kapitałowym*. Wig Press, Warszawa 1995

Z punktu widzenia E.E. Petersa (Peters E.E., 1997)¹², *współczesna teoria rynku kapitałowego opiera się na kilku kluczowych pojęciach:*

- **Racjonalny inwestor.** *Inwestorzy postępują efektywnie w sensie średniej i wariancji. Obliczają oni oczekiwaną stopę zwrotu jako średnią ważoną wszystkich możliwych stóp zwrotu, przy czym wagami są prawdopodobieństwa ich wystąpienia. Miarą ryzyka jest odchylenie standardowe stóp zwrotu. Inwestorzy pragną posiadać aktywa o najwyższej oczekiwanej stopie zwrotu dla danego poziomu ryzyka. Motywem ich działania jest niechęć do podejmowania ryzyka.*
- **Efektywne rynki.** *Ceny odzwierciedlają wszelkie publicznie dostępne informacje. Zmiany cenowe są zdarzeniami niezależnymi. Wprawdzie możliwe są krótkookresowe zależności, ale te bardzo szybko zanikają. Wartość jest wypadkową opinii wielu analityków fundamentalnych.*
- **Błądzenie przypadkowe.** *Przyjęcie dwóch powyższych pojęć prowadzi do wniosku, że stopy zwrotu podlegają błędzeniu przypadkowemu. Rozkład prawdopodobieństw jest więc w przybliżeniu rozkładem normalnym lub logarytmiczno – normalnym. „W przybliżeniu” znaczy, że rozkład stóp zwrotu ma co najmniej skończoną średnią i wariancję.*

Jak z powyższego wynika, współczesna teoria rynku kapitałowego oparta jest na założeniu o normalnym rozkładzie stóp zwrotu. W rzeczywistości dane finansowe nie spełniają tych założeń. Występują znaczne rozbieżności między przewidywaniami współczesnej teorii rynku kapitałowego a rzeczywistymi ruchami cen. Szczególnie częstość występowania nieregularnych wahań cen o znacznej amplitudzie nie daje się wytłumaczyć na gruncie tej teorii.

Główną tezą niniejszej pracy jest wykazanie, że dynamikę polskiego rynku kapitałowego można opisać z zastosowaniem teorii chaosu deterministycznego.

Teoria powyższa stanowi próbę odejścia od idei efektywności rynków kapitałowych oraz ze zbudowanymi na jej gruncie modelami ilościowymi (model wyceny dóbr kapitałowych CAPM, teoria arbitrażu cenowego APT, itd. – modele zakładały rozkład normalny i przypadkowość zjawisk) w stronę bardziej uniwersalnego widzenia mechanizmów rządzących giełdą. Cechy charakterystyczne rynków kapitałowych – stany nierównowagi oraz mechanizm sprzężenia zwrotnego w wymiarze czasowym – znajdują swój wyraz w opisie za pomocą dynamicznych systemów nieliniowych. Rozwiązania proponowane w ramach analizy technicznej wywodzące się z teorii chaosu dopiero powstają. W literaturze istnieje niewiele pozycji traktujących o tej problematyce (Peters E. E., 1997¹³; Jajuga K., Papla D., 1997¹⁴; Trippi R. R., 1995¹⁵; Zawadzki H., 1996¹⁶).

Niniejsza rozprawa stanowi próbę analizy fraktalnej polskiego rynku kapitałowego na przykładzie wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych

¹² Peters E.E.: *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*. Wig Press, Warszawa 1997, s. 25-26

¹³ Peters E.E., op.cit.

¹⁴ Jajuga K., Papla D.: *Teoria chaosu w analizie finansowych szeregów czasowych – aspekty teoretyczne i badania empiryczne*. V Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, nt. „Dynamiczne modele ekonometryczne” 9-11 września 1997 Toruń, pp. 5-16

¹⁵ Trippi R.R.: *Chaos and Nonlinear Dynamics in the Markets*. Irvin, Chicago 1995

¹⁶ Zawadzki H.: *Chaotyczne systemy dynamiczne*. AE, Katowice 1996

w Warszawie. Według (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P, 1998)¹⁷ rynek kapitałowy dzieli się na rynek akcji i rynek obligacji. W pracy świadomie ograniczono badania do rynku akcji, gdyż analiza również rynku obligacji doprowadziłoby do zwiększenia objętości prezentowanego materiału.

Praca składa się z wprowadzenia, trzech rozdziałów, podsumowań na koniec każdego rozdziału i spisu literatury. Rozdział pierwszy dotyczy problematyki inwestowania na rynku kapitałowym. Zawiera on krótką historię metod analizy rynku kapitałowego, jak również omawia wybrane elementy analizy technicznej, fundamentalnej i portfelowej.

Drugi rozdział pracy dotyczy wybranych elementów teorii chaosu deterministycznego. Zawiera on wybrane zagadnienia teoretyczne związane z nieliniowymi i niestacjonarnymi układami dynamicznymi, między innymi przestrzeń fazową, odwzorowanie zwężające, atraktory i ich podstawowe własności, a także narzędzie teoretyczne, znane jako przekrój Poincaré. W rozdziale tym przytoczono również przykłady prostych zjawisk chaosu deterministycznego. Omówiono między innymi: odwzorowanie logistyczne, atraktor Henona i model Lorenza w celu lepszego przybliżenia czytelnika do zagadnień związanych z dynamiką nieliniową układów. Opiszano również diagram bifurkacyjny, zjawisko intermitencji i turbulencji w układach dynamicznych, kryzysy, jak również dziwne atraktory i fraktale. W dalszej części rozdziału skoncentrowano się na wybranych metodach dotyczących analizy danych eksperymentalnych, takich jak, analiza Fouriera, funkcja autokorelacji i współczynnik autokorelacji nieliniowej, wykładnik Hursta, wykładniki Lapunowa, jeden ze sposobów obliczania wymiaru fraktalnego (wymiar korelacyjny) i entropię Kołmogorowa, jak również rekonstrukcję atraktora.

W trzecim rozdziale przedstawiono wyniki obliczeń podstawowych charakterystyk dynamicznych oraz analizę R/S indeksu WIG i wybranych firm funkcjonujących na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Do analizy fraktalnej polskiego rynku kapitałowego zastosowano następujące metody: analizę przeskalowanego zakresu R/S, wymiar fraktalny i korelacyjny, rekonstrukcję atraktora, jak również wykładnik Lapunowa dla indeksu WIG. Wybór metod podyktowany został tym, iż przy analizie fraktalnej muszą być spełnione założenia ilości danych. Polska giełda jest giełdą młodą, charakteryzującą się krótkimi szeregami czasowymi spółek, a powyższe wskaźniki są możliwe do wyliczenia przy ograniczonej liczbie danych i pozwalają na otrzymanie wiarygodnych wyników badań. Uzyskane rezultaty porównano z obliczeniami dokonanymi dla wybranych giełd (dłużej funkcjonujących).

¹⁷ Por. Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 72

1. INWESTOWANIE NA RYNKU KAPITAŁOWYM

1.1 Krótka historia metod analizy rynku kapitałowego

Pierwszym badaczem, który podjął próbę naukowego podejścia do prognozowania rynku akcji, był Louis Bachelier. W roku 1900 powstała jego rozprawa doktorska pt. *Teoria spekulacji*, w której podjął próbę naukowej odpowiedzi na pytanie, czy prognozowanie cen akcji jest możliwe. W pracy tej, jako pierwszy do wyceny rynku akcji, wykorzystał proces stochastyczny, w fizyce nazywany ruchem Browna. Podjął on ponadto próbę teoretycznej wyceny opcji i kontraktów terminowych, które znajdowały się w obrocie już w roku 1900.

Według Bacheliera (Bernstein Peter L., 1998)¹ prognozowanie cen akcji na rynkach kapitałowych jest niemożliwe. *W cenie zdyskontowane są zdarzenia przeszłe, teraźniejsze, a nawet przyszłe, ale często bywa tak, że nie widać żadnego związku tych zdarzeń z ceną, oddziałują również przyczyny sztuczne: giełda reaguje na samą siebie, a bieżące fluktuacje są funkcją nie tylko fluktuacji wcześniejszych, ale także stanu obecnego. Zależą one od nieskończonej liczby czynników, co oznacza, że ich matematyczne przewidywanie jest niemożliwością... dynamika giełdy nigdy nie będzie nauką ścisłą.*

Teza powyższa miała charakter rewolucyjny. Została ona jednak powszechnie zignorowana, a nawet zapomniana. Zastosowanie analizy statycznej zarzucono (wyjątek stanowiły badania Holbrooka Workinga i Alfreda Cowlesa z lat trzydziestych), powrócono do nich dopiero pod koniec lat czterdziestych – wtedy nastąpił ich gwałtowny rozwój. Wyniki tych badań, stanowiące później podstawę hipotezy efektywności rynku zebrane zostały przez Cootnera w jego pracy pt. *The Random Characters of Stocs Market Prices*, która została opublikowana po raz pierwszy w roku 1964 (Peters E.E., 1997).²

Kolejne lata w teorii finansów stanowiły próbę poszukiwania skutecznych metod prognozowania. Doprowadziło to do powstania analizy technicznej, której twórcą był Charles Dow³. Powstanie tej teorii datuje się na 1884 rok.

¹ Por.: Bernstein P.L.: *Intelektualna historia Wall Street*. Wig Press, Warszawa 1998, s. 16-17

² Por.: Peters E.E., op.cit.

³ Pisz o tym Tarczyński W.: op.cit., s. 35

U podstaw teorii Dowy leży założenie, że ceny akcji poruszają się w trendach, które raz zapoczątkowane trwają dopóty, dopóki sam rynek nie zasygnalizuje wytracania przez nie impetu i zmiany swojego kierunku. Najbardziej znaną kwestią poświęconą temu zagadnieniu opublikowano w *The Wall Street Journal* w 1901 roku (Bernstein Peter L, 1998).⁴

Teoria Dowy opierała się na siedmiu zasadach (Karpio A., 1999)⁵:

1. *Zachowanie się indeksu dyskontuje wszystkie informacje mające wpływ na rynek giełdowy.*
2. *Rynek rządzony jest trzema trendami: długoterminowym zachowaniem się cen akcji, trendem korekcyjnym w stosunku do poprzedniego oraz drugorzędny, z punktu widzenia teorii Dowy, zachowaniami się cen z dnia na dzień.*
3. *Rynek wzrostowy (byka) charakteryzuje się trzema okresami, w pierwszym - następuje akumulacja akcji w rękach inwestorów długoterminowych, w drugim - akcje skupują inwestorzy przyciągnięci poprawiającymi się wynikami finansowymi firm notowanych na giełdzie i wreszcie trzeci etap, w którym do głosu dochodzą całe rzesze inwestorów chcących załapać się na hossę.*
4. *Rynek zniżujący również można scharakteryzować trzema etapami. Podczas pierwszego z nich, akcje sprzedawać zaczynają inwestorzy długoterminowi, dochodząc do wniosku, że ceny są zbyt wysokie. W drugim okresie, następuje paniczna wyprzedaż dokonywana przez całe rzesze inwestorów i wreszcie trzeci okres wywołany przez uczestników rynku, gwałtownie potrzebujących gotówki.*
5. *Dwa różne wskaźniki muszą potwierdzać kształtujący się trend.*
6. *Do obliczania wartości wskaźników bierze się pod uwagę jedynie ceny zamknięcia.*
7. *Trend trwa dopóty, dopóki nie nastąpi jego odwrócenie poparte zachowaniem się dwóch indeksów.*

Idea wprowadzona przez Dowy była kontynuowana po jego śmierci (1902) przez Samuela Nelsona, Williama Petera Hamiltona i Roberta Rhea.

Samuel Nelson opublikował po śmierci Dowy zbiór jego artykułów w książce pt. *ABC of Speculation*. Nelson jest autorem nazwy „teoria Dowy”.

Jak podaje P.L.Bernstein (Bernstein P.L., 1998)⁶, *Hamilton podkreślał wielokrotnie główną ideę Dowy, a mianowicie, że ceny na giełdzie nowojorskiej „same w sobie wystarczają” do tego, by dowiedzieć się wszystkiego, co warto wiedzieć na temat stanu gospodarki. Hamilton antycypował tym samym radykalną koncepcję, która miała powstać na długo po jego śmierci. W roku 1960 grupa zaprzyjaźnionych profesorów opracowała tak zwaną hipotezę efektywności rynku, opartą na twierdzeniu, że ceny akcji odzwierciedlają wszystkie dostępne informacje na temat poszczególnych spółek oraz całej gospodarki. Hipoteza efektywności rynku nawiązuje jednak również do Bachliera, ponieważ zakłada się w niej, że nowe wiadomości są dyskontowane w cenach akcji tak szybko, iż żaden pojedynczy inwestor nie może utrzymywać przez dłuższy czas przewagi nad rynkiem pod względem posiadanych informacji. Tymczasem Hamilton uważał, że sam rynek ujawnia nam, co będzie się działo z cenami w przyszłości.*

⁴ Por.: Bernstein P.L.: op.cit.

⁵ Karpio A.: *W stronę matematyki finansowej*. Wydawnictwo UwB, Białystok 1999, Optimum, Studia Ekonomiczne nr 3, s. 155-156

⁶ Podano za Bernstein P.L., op.cit., s. 25

Robert Rhea w 1932 roku rozpoczął wydawanie biuletynu analitycznego *Dow Theory Commet*. Rhea wniósł znaczący wkład w rozwój teorii Dowa, ale za jego główną zasługę uważa się stworzenie spójnego systemu poglądów Hamiltona.

Kolejną postacią w teorii finansów był Alfred Cowles, który w 1931 roku rozpoczął badania nad możliwością przewidywania cen akcji. Był on współtwórcą indeksu S&P 500.

Teoria Dowa dała początek analizie technicznej, będącej jedną z podstawowych metod wyceny walorów na giełdzie papierów wartościowych. W zakresie tego nurtu mieści się teoria fal Eliota, stworzona przez księgowego i opublikowana w pracy Charlesa J. Collinsa *The Wave Principle* w 1938 roku. Idea powyższej teorii opiera się na ciągu zdefiniowanym przez Leonarda Pisano, zwanego Fibonaccim, opublikowanym w 1202 roku w pracy o nazwie *Liber Abaci*.

Jak podaje E.E. Peters (Peters E. E., 1997)⁷, lata dwudzieste, trzydzieste i czterdzieste w zakresie analizy rynków charakteryzowały się głównie podejściem fundamentalnym (następcy Grahama i Dodd) i technicznym (analitycy techniczni kontynuujący prace Magee'a). W kolejnych latach pojawiła się trzecia grupa, tak zwanych Quants, którą stanowili zwolennicy analizy ilościowej, kontynuatorzy badań Bacheliera.

Kolejny nurt badań w zakresie finansów związany jest z nazwiskami Workinga, Kendalla i Robertsa. Prace ich poświęcone badaniu rozkładów stóp zwrotu, demaskowały podstawowe osiągnięcia analizy technicznej.

Working wykorzystując teorię zmian cen między jedną transakcją a kolejną stwierdził, że poziomy cen nie podlegają schematowi losowemu, ale zmiany cen są na ogół losowe, a te są nieprzewidywalne. Porównał on szereg liczb losowych i zmiany cen towarów. Nie zauważył żadnych różnic, czyli zmiany cen przypominają wahania przypadkowe. Jako statystyk, zaproponował wykorzystanie powyższych wyników w analizie szeregów czasowych.

Kolejną publikacją dotyczącą analizy szeregów czasowych był artykuł Maarice'a Kendalla⁸ *Analiza gospodarczych szeregów cenowych*, opublikowany w 1953 roku. Kendall analizując dane tygodniowe dla grup akcji z okresu 1928-1938 potwierdził wyniki badań Workinga stwierdzając, że ruch cen akcji jest „błędzeniem”, a trendy które można wykryć są bardzo słabe i nie nadają się do sporządzania jakichkolwiek prognoz.

Jak podaje E.E. Peters (Peters E. E., 1997)⁹ *Głosem przeciwko analizie technicznej był zamieszczony w antologii Cootnera artykuł Robertsa (1964). Roberts odwołuje się w nim do powszechnego stosowania analizy statystycznej odwołując się do pracy Kendalla z 1953 roku.*

Sfomalizowania twierdzenia, że ceny akcji podlegają błędzeniu przypadkowemu dokonał Osborne'a w artykule *Browian Motion in the Stock Market* opublikowanym w 1959 roku. Kolejny artykuł Osborne'a opublikował w 1962 roku zmieniając się z astrofizyka w badacza rynku akcji.

W późnych latach pięćdziesiątych Osborne był jedynym, który badał zachowania rynku akcji. W tym okresie większość ekonomistów nie wiedziała jeszcze nic o wyszukiwanych metodach statystycznych i stosowaniu komputerów do przetwarzania danych. Wyjątkiem był pod tym względem Cowles, który dzięki swemu bogactwu dysponował wszystki-

⁷ Por.: E.E. Peters, op.cit., s. 16

⁸ Por.: Bernstein P.L.: op.cit., s. 83

⁹ Por.: E.E. Peters, op.cit., s. 16

mi środkami. Working, Kendall i Osborne nie byli ekonomistami, ale matematykami i statystykami (Bernstein Peter L, 1998)¹⁰.

Koniec lat pięćdziesiątych przyniósł rozwój technologii komputerowych, a co za tym idzie skrócił czas obliczeń. Praca, która ukazała się w piśmie *Industrial Management Review* w 1961 roku dotyczyła analizy dużej ilości danych statystycznych. Autorem tego artykułu był Sidney Alexander. Był on ekonomistą i w przeciwieństwie do matematyków interesował się giełdą samą w sobie. Alexander w pracy *Ruchy cenowe na rynkach spekulacyjnych: trendy, czy błędzenie przypadkowe* zadaje sobie pytanie, czy ceny akcji są przewidywalne, czy rządzi nimi przypadek, gdyż od tego zależą strategie inwestorów. S.Alexander stwierdził, iż warunkiem korzystnych transakcji są niedoskonałości funkcjonowania rynku, do których dochodzi wtedy, gdy jedni inwestorzy otrzymują informacje później niż inni, wyciągają z nich błędne wnioski lub reagują na nie zbyt wolno.

W latach sześćdziesiątych pojawiła się nowa grupa uczonych, którzy zwracali się bardziej ku ekonomii, a nie statystyce. Do tej grupy zaliczyć można Paula Samuelsona. W pracach swoich łączył on teorię rynków kapitałowych oraz wpływu tych rynków na produkcję, zatrudnienie, ceny. Samuelson dostrzegł błąd w teorii Bacheliera, który dotyczył dolnej granicy ceny papieru wartościowego. Według teorii Bacheliera mogła ona być mniejsza od zera, według Samuelsona nie mogła spaść poniżej zera. W swoich wywodach Samuelson wprowadza tak zwane „ceny cienia”, jako odpowiednik „wartości przyszłych strumieni dochodu” nazwanych przez Keynesa, twierdząc, że są to ceny teoretyczne, ale należy uznać ich istnienie, przyjmując jako wartość wewnętrzną danego waloru.

Zgodnie z teorią Samuelsona, przypadkowość stóp zwrotu jest ściśle związana z efektywnością rynku. Lo i Mac Kinlay, opierając się na badaniach LeRoya, Lucasa i własnych, dowodzą, że nieprzewidywalność rynku nie musi być tożsama z przypadkowością następujących po sobie stóp zwrotu akcji (Zielonka P., Tyszka T., 1999)¹¹.

Kontynuatorem Samuelsona był Eugene Fama. Doprowadził on w 1965 roku do sformalizowania teorii Osborne'a jako hipotezy efektywności rynku twierdząc, że rynek efektywny nie musi być rynkiem racjonalnym, a informacja odzwierciedlona przez rynek nie musi być zawsze dokładna. W kolejnych pracach Fama proponuje alternatywną tezę, mówiąc, że rynek efektywny jest wtedy, gdy system dokonywania transakcji oparty na dostępnych informacjach nie daje zysków wyższych niż ogólna stopa zwrotu z całości rynku. Fama w swoich pracach nawiązywał również do teorii Benoid Mandelbrotta dotyczącej analiz rynku.

Mandelbrot twierdził, że ceny akcji podlegają tak nieregularnym wahaniom, by można było poddać je ścisłym analizom statystycznym zalecanym przez Bacheliera i Samuelsona. Mandelbrot uważał, że akcje są inwestycją bardziej ryzykowną, niż dotychczas zakładano, że dywersyfikacja nie może dawać tak dobrych wyników jak zakładał Markowitz, że miary takie, jak wariacja mogą być bardzo niestabilne i że duże wahania cen sąsiadują ze sobą częściej niż oczekiwano. Poglądy te dały początek teorii chaosu.

Kolejny nurt badań w zakresie rozwoju nowoczesnych finansów związany jest z artykułem Harry'ego Markowitza¹² *Portfolio selection (Dobór portfela)* opublikowanym w 1952 roku. Praca ta dotyczyła konstrukcji portfela papierów wartościowych, spełniającego

¹⁰ Por.: Bernstein P.L.: op.cit.

¹¹ Por.: Zielonka P., Tyszka T.: *Nowoczesne finanse: efektywność rynku czy finanse behawioralne?*, Bank i Kredyt 11/1999, s. 10

¹² Por.: Bernstein P.L.: op.cit.

go określone przez inwestorów kryteria – zapewniającego największą oczekiwaną stopę zwrotu dla danego poziomu ryzyka.

Podejście zaproponowane przez H. Markowitza stanowiło wówczas całkowicie odmienne od tradycyjnych ujęć stosowanych w analizie inwestycji finansowych. Na początku prace Markowitza były nie zauważane, a następnie wzbudziły kontrowersje. Słabym punktem tej teorii (najczęściej wskazywanym) była duża pracochłonność obliczeń związanych z jej stosowaniem (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.; 1998)¹³.

Koncepcja powyższa została rozwinięta przez Sharpe'a (1964), Litnera (1965) i Mossina (1966). Opracowali oni model nazywany przez Sharpe'a modelem wyceny dóbr kapitałowych i określany w skrócie jako CAPM (*Capital Asset Pricing Model*). Model ten był połączeniem hipotezy efektywności rynku z matematyczną teorią portfelową Markowitza. Opisując zachowania inwestorów w kategoriach ogólnej równowagi model CAPM zakładał, że są one oparte na racjonalnych oczekiwaniach. Przyjmowano w nim, że oczekiwania dotyczące stopy zwrotu są u różnych inwestorów takie same, czyli że interpretują oni informacje w ten sam sposób. Model wyceny dóbr kapitałowych, stanowił duży postęp w dziedzinie finansów. Został on zrealizowany niezależnie przez trzech badaczy (Peters E.E., 1997).

Kolejnym z kontynuatorów teorii Markowitza był James Tobin, który w 1958 roku w czasopiśmie *The Review of Economic Studies* opublikował artykuł dotyczący uproszczenia procedur obliczeniowych jego teorii.

Jak podają K. Jajuga, K. Kuziak i P. Markowski (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.; 1998)¹⁴, James Tobin interesował się rezultatami badań prowadzonych przez Markowitza. Doprowadził on do rozszerzenia wyników badań, rozpatrując portfel złożony z ryzykownych instrumentów (takich jak akcje) i instrumentów wolnych od ryzyka (takich jak bony skarbowe czy obligacje skarbowe). Badania Tobina przyczyniły się do powstania koncepcji Capital Market Line, szeroko dziś stosowanej.

Przełomem w tej dziedzinie okazała się teoria Rolla, w której dowodził on, że modele o postaci takiej jak CAPM nie nadają się do testowania. Z rozumowania Rolla wynika, że model CAPM jest zawsze spełniony w odniesieniu do danych ex post, o ile portfel reprezentujący portfel rynkowy jest ex post portfelem efektywnym. Roll argumentuje, że testy przeprowadzone z portfelem innym niż prawdziwy portfel rynkowy nie są testami modelu CAPM, a sprawdzają jedynie, czy portfel wybrany jako rynkowy jest efektywny. Wnioskiem płynącym z pracy Rolla, jest niemożliwość testowania teorii równowagi w rodzaju CAPM. Nie jest to zarzut obalający teorię CAPM, lecz stwierdzenie braku możliwości testowania tego typu modelu (Zielonka P., Tyszką T., 1999)¹⁵.

Kolejnym punktem przełomowym w historii finansów było opracowanie modelu wyceny opcji, którego autorami byli Fischer Black i Myron Scholes. Model ten opublikowany został w 1973 roku. Z jednej strony stanowił on model wyceny, a więc powstał i jest stosowany w nadziei uzyskania ponadprzeciętnych dochodów. Z drugiej strony za podstawę przy jego konstrukcji posłużył portfel instrumentów finansowych wolny od ryzyka (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.; 1998)¹⁶.

¹³ Por.: Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 415

¹⁴ Por.: Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 415

¹⁵ Por.: Zielonka P., Tyszką T.: op.cit., s. 14

¹⁶ Por.: Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 416

Kolejnym osiągnięciem w zakresie analizy rynku była teoria arbitrażu cenowego APT Rossa z 1976 roku. Teoria powyższa stanowiła bardziej ogólne podejście niż model CAPM. Głosiła, że zmiany cen wywoływane są nieoczekiwanymi zmianami określonych czynników. Stanowiła postawę opisu relacji nieliniowych. W praktyce zastosowano w niej standardową ekonometrię. Teoria APT stanowi alternatywny model wyceny walorów.

Lata osiemdziesiąte charakteryzowały się badaniami empirycznymi w zakresie analizy rynku oraz zastosowaniami modeli już istniejących.

Jedyną teoretyczną koncepcją, która zyskała w ostatnich latach sporą popularność, była koncepcja postulująca, że zmienność rynku podlega wahaniom w czasie, to znaczy bieżąca zmienność jest uwarunkowana jej wcześniejszymi poziomami. Genezą tej koncepcji był model autoregresywnej warunkowej heteroskedastyczności (ARCH) zaproponowany przez Engle (1982). Od tego czasu powstało wiele jego odmian. Żaden z nich nie wykracza jednak poza założenie o krótkiej pamięci procesu. Poza tym każdy z tych modeli da się pogodzić z którąś z form efektywności rynku (Peters E. E., 1997).

W ostatnich latach zauważa się duże zainteresowanie metodami analizy rynku wywodzącymi się z nauk matematycznych i fizycznych, związanych z rozwojem technik komputerowych. Możemy tu wymienić teorię chaosu, teorię gier, sieci neuronowe.

W Polsce najpowszechniejszymi metodami wyceny instrumentów finansowych jest analiza fundamentalna, techniczna i portfelowa. Zostaną one omówione w kolejnym punkcie tego rozdziału.

1.2

Metody wyceny papierów wartościowych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie

1.2.1

Analiza techniczna

1.2.1.1 Cel, metody i zakres przedmiotowy analizy technicznej

W literaturze polskiej, jak i zagranicznej spotkać można dużo definicji dotyczących analizy technicznej. Dla potrzeb niniejszej pracy podajemy za J. Murphy (Murphy J.J., 1995)¹⁷, który mówi, że *pod pojęciem analizy technicznej należy rozumieć badanie zachowań rynku, przede wszystkim przy użyciu wykresów, którego celem jest przewidywanie przyszłych trendów cenowych.*

¹⁷ Murphy J.J.: op.cit., s. 1

Istnieje wiele przesłanek dotyczących stosowania analizy technicznej do prognozowania rynku akcji.¹⁸

W pewnym uproszczeniu można powiedzieć, iż analiza techniczna opiera się na trzech przesłankach (Murphy J. J., 1995)¹⁹:

- 1) *Rynek dyskontuje wszystko* – oznacza to, że kurs spółki jest wynikiową popytu i podaży, a te z kolei, są bezpośrednio zależne od informacji posiadanych przez kupujących i sprzedających. Te zależności prowadzą do stwierdzenia, iż poprzez uczestników obrotu wszelkie czynniki mogące mieć wpływ na ocenę atrakcyjności akcji, zarówno fundamentalne, polityczne, jak i inne znajdują swoje odbicie w aktualnym ich kursie.
- 2) *Ceny podlegają trendom* – oznacza to, że procesy gospodarcze, jak i polityczne, kształtują się w czasie i podlegają pewnym okresowym wahaniom. Poszczególne branże oraz spółki poddają się okresowym tendencjom rozwojowym. Te zmienne kierunki rozwoju tworzą swego rodzaju trendy (wzrostowe, spadkowe lub boczne), a kursy akcji są wypadkową ich wszystkich.
- 3) *Historia się powtarza* – oznacza to, iż założenie, że kurs w przyszłości zachowuje się niemal identycznie niż wcześniej opiera się na stwierdzeniu, że zachowania osób biorących udział w obrocie w podobnych sytuacjach są podobne. Te zachowania oraz wywołujące je rzeczywiste procesy gospodarcze i ekonomiczne znajdują swoje jednoznaczne odbicie w przebiegu kursów akcji.

Uwzględnienie powyższych przesłanek skłania do pewnych konkluzji, o których należy pamiętać przy stosowaniu analizy technicznej. Dotyczą one między innymi wartości rynkowych akcji, ich cen, metod analizy technicznej, strategii inwestycyjnych.²⁰

Analitik techniczny koncentruje się przede wszystkim na badaniu zmian kursu akcji, w celu określenia dalszego ich kierunku. Zmiany te powodowane są przewagą popytu nad podażą lub odwrotnie. Analiza techniczna zakłada, że rynek akcji nigdy nie znajduje się w stanie stagnacji. Jeżeli inwestorzy uznają, że kurs akcji jest niski, to natychmiast przystępują do zakupu akcji. Właściciele akcji reagują podniesieniem ich ceny. Wyższa cena powoduje spadek popytu, a to z kolei wyhamowuje tempo wzrostu cen akcji. Wzrost cen akcji kończy się, gdy inwestorzy uznają, że osiągnęli zadowalający zysk i rozpoczynają sprzedaż nabytych akcji. Początek sprzedaży akcji powoduje odwrócenie się trendu, czyli spadek ich cen. Stosowanie analizy technicznej umożliwia koncentrację na silnych i wyróżniających się tendencjach trendowych przy jednoczesnym ignorowaniu tendencji słabszych i niestabilnych. Wychwycenie głównego trendu i pominięcie trendu bocznego pozwala na uzyskanie prawdziwego obrazu rynku.

Przedstawiciele analizy technicznej odrzucają takie czynniki, jak polityka monetarna i fiskalna, ogólny klimat ekonomiczny, zdarzenia polityczne, pozycja finansowa spółki, sytuacja w poszczególnych branżach. Dane finansowe są wykorzystywane w niewielkim stopniu. Wynika to w dużej mierze z twierdzeń analityków technicznych, iż stosowanie różnych metod w analizie finansowej (będącej podstawą analizy fundamentalnej) i różno-

¹⁸ Spośród publikacji należy przede wszystkim wymienić prace: Tarczyński W.: op.cit., Pring M.J.: op.cit., Achelis S.B.: op.cit., Murphy J.J.: op.cit., Socha J.: op.cit., Czekala M.: op.cit., Barytko B., Mikos J.: op.cit.

¹⁹ Por.: Murphy J.J.: op.cit., s. 2-4

²⁰ Szerzej o tym pisze Tarczyński W.: op.cit., s. 36

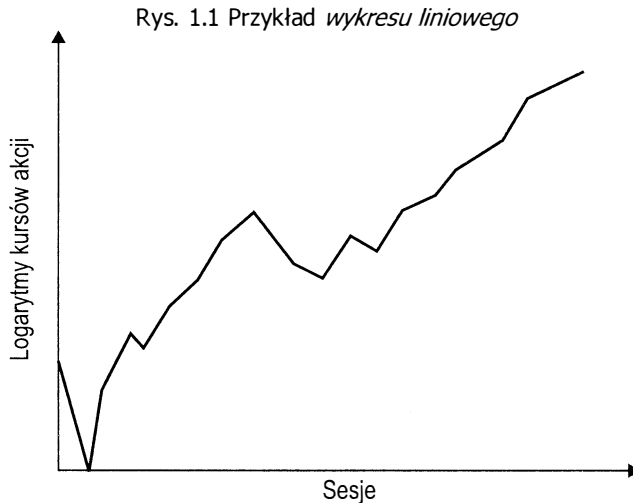
rodność badanych firm powoduje małą porównywalność uzyskiwanych wyników. W analizie technicznej wykorzystuje się głównie wykresy zmiany kursów akcji, wolumenu obrotów oraz różnorodne wskaźniki techniczne.

Wykresy są podstawowymi narzędziami pracy, za pomocą których analitycy techniczni przedstawiają dane liczbowe. Do tego celu używana jest skala arytmetyczna i logarytmiczna. W pierwszej z nich ruchy ceny przedstawiane są w równych odległościach, w drugiej ruch ceny oznaczony jest w równych odległościach dla takich samych zmian procentowych.

Najbardziej popularne i najczęściej używane są następujące wykresy (Baryłko B., Mikos J, 1994)²¹:

- liniowe,
- słupkowe,
- punktowo-symboliczne.

Najpopularniejszym w Polsce typem wykresu dla zmian kursów akcji jest wykres liniowy. Przykład takiego wykresu przedstawiono na rysunku 1.1 i 1.2.



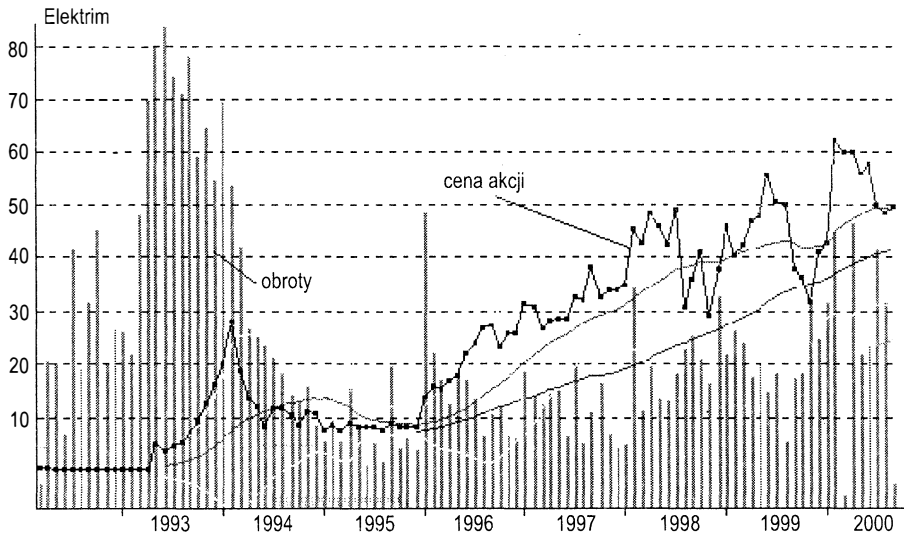
Źródło: na podstawie (Wojewódka M., 1994).

Analizując powyższe wykresy można stwierdzić, że na osi poziomej zaznaczane są kolejne sesje, na pionowej natomiast – wartość kursu w złotych. Po każdej sesji na wykresie zaznacza się punkt na wysokości kursu i łączy się go z punktem poprzednim. W rezultacie powstaje linia łamana, której wierzchołki stanowią wartości kursu akcji na poszczególnych sesjach. W wyniku czego powstaje tzw. *akcjogram*, będący wykresem zmian kursów akcji pokazującym historię notowań konkretnego waloru. Wykresy liniowe są stosowane w przypadku jednolitego kursu dnia, co oznacza, że na pojedynczej sesji giełdowej nie występuje cena otwarcia, jej zmiana w trakcie sesji oraz cena zamknięcia. Wykresy liniowe nie

²¹ Por.: Baryłko B., Mikos J.: op.cit., s. 82

uwzględniają również wahań dziennych. Mają swoich zwolenników wśród osób, które twierdzą, że najważniejsze znaczenie w trakcie dnia sesyjnego ma cena zamknięcia.

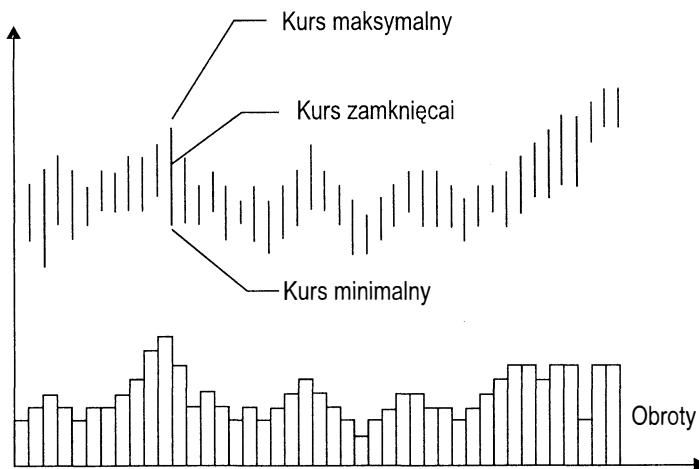
Rys. 1.2 Wykres liniowy cen giełdowych akcji spółki Elektrim



Źródło: opracowanie własne przy pomocy programu AmiBroker.

Na rynkach, gdzie akcje są notowane w systemie ciągłym najwygodniej zilustrować zmiany cen na wykresie słupkowym. Przykład takiego wykresu dla 19 sesji przedstawiono na rysunku 1.3.

Rys. 1.3 Wykres słupkowy

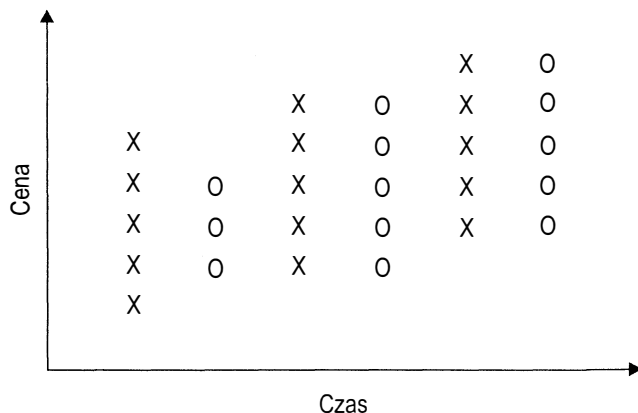


Źródło: na podstawie (Baryłko B., Mikos J., 1994).

Wykresy słupkowe przedstawiają więcej informacji niż wykresy liniowe. Oprócz kursu zamknięcia prezentowane są na nich zmiany kursu w trakcie sesji, tj. kurs maksymalny i minimalny. Dodatkowo mogą pokazywać wolumen przeprowadzonych transakcji. Wykres słupkowy powstaje przez połączenie odcinkiem kursu najniższego oraz najwyższego w danym dniu (tygodniu, miesiącu) i zaznaczenie przy pomocy poziomej kreski kursu zamknięcia. Przedstawiają one zmienność kursów akcji w pewnym okresie czasu.

Wykresy punktowo-symboliczne w analizie technicznej spełniają rolę uzupełniającą w stosunku do wykresów słupkowych czy liniowych. Wykresy te nie przedstawiają wolumenu obrotu, a także nie uwzględniają czynnika czasu. Stanowią one jedynie odzwierciedlenie, odpowiedniego do analizy ruchu cen akcji. Zaletami wykresów punktowo-symbolicznych jest stosunkowo dobre przedstawianie kształtowania się cen w przeszłości, a przede wszystkim możliwość samodzielnego określania parametrów wykresu w zależności od stosowanej strategii inwestowania (Socha J., 1998)²². Wykres punktowo-symboliczny przedstawiono na rysunku 1.4.

Rys. 1.4 Wykres *punktowo-symboliczny*

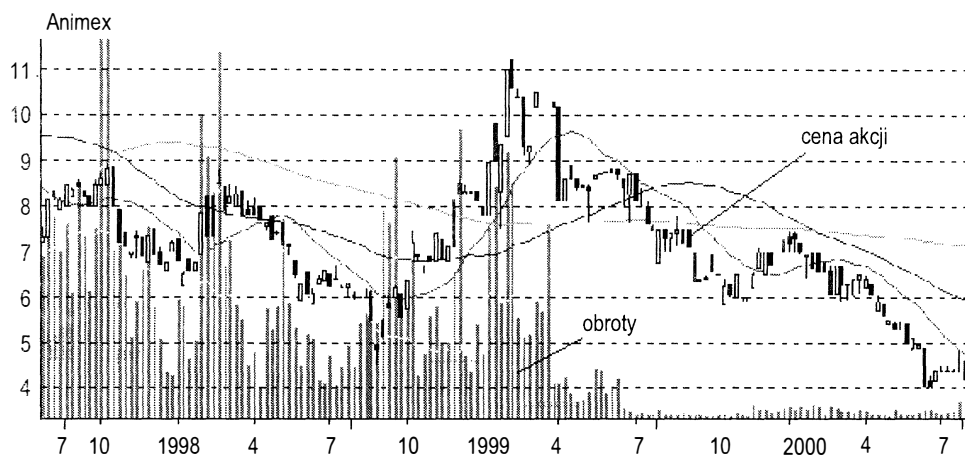


Źródło: na podstawie (Socha J., 1998).

Za najbardziej przydatne w analizach na rynkach notowań ciągłych przyjmuje się wykresy „świecznikowe” (*candlestick*), które pierwszy raz zastosowano w Japonii. Wykres *candlestick* pokazuje ceny: otwarcia, maksymalną, minimalną i zamknięcia w postaci słupka w taki sposób, aby jak najbardziej uwypuklić relacje między ceną otwarcia i ceną zamknięcia. Wykres *candlestick* dla spółki Animex zawiera rysunek 1.5. Na rysunku 1.6 pokazano podstawowy element schematu powyższego wykresu.

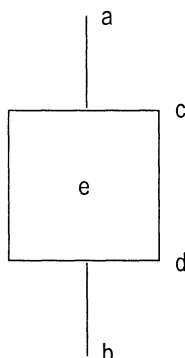
²² Por.: Socha J.: op.cit., s. 288

Rys. 1.5 Przykład wykresu *candlestick* dla spółki Animex od sierpnia 1997 do lipca 2000 dla okresów tygodniowych



Źródło: opracowanie własne przy pomocy programu AmiBroker.

Rys. 1.6 Podstawowy element schematu wykresu *candlestick*



Źródło: na podstawie (Tarczyński W., 1997).

Gdzie poszczególnym literom nadano odpowiednią interpretację (Tarczyński W., 1997)²³:

- a) oznacza maksymalną cenę akcji w rozpatrywanym okresie,
- b) oznacza minimalną cenę akcji w rozpatrywanym okresie,
- c) oznacza cenę otwarcia albo zamknięcia (większą),
- d) oznacza cenę otwarcia albo zamknięcia (mniejszą),
- e) oznacza różnicę między ceną otwarcia a ceną zamknięcia (w zależności od sytuacji wewnątrz figury jest białe albo czarne).

²³ Opisał to w sposób wyczerpujący Tarczyński W.: op.cit., s. 45-49

Z punktu widzenia M.Głowackiego (Głowacki M., 1995)²⁴, *elastyczność analizy technicznej sprawia, że przy konstrukcji wykresów można stosować różne horyzonty czasowe. W zależności od potrzeb tworzy się więc wykresy jednodniowe, tygodniowe i miesięczne. Różny horyzont czasowy wykresów pozwala na bardzo dynamiczne i długofalowe spojrzenie na analizowane trendy. Manipulowanie czasem umożliwia analitykom obserwację tendencji rynkowych nawet z perspektywy kilkudziesięciu lat.*

1.2.1.2 Elementy klasycznej analizy technicznej

W literaturze przedmiotu dokonuje się podziału na klasyczną oraz nowoczesną analizę techniczną (Głowacki M., 1995)²⁵. Klasyczna analiza techniczna ma swoje korzenie w teorii Charlesa Dowa sformułowanej około 1900 roku. Podstawą jej są badania historycznego kształtowania się cen akcji i wolumenu obrotów.

Klasyczna analiza techniczna obejmuje (Głowacki M., 1995)²⁶:

- analizę trendu,
- analizę formacji,
- analizę wartości obrotów,
- teorię fal i cykli.

Trendem, określamy tendencję ruchu cen papieru wartościowego w określonym kierunku w stosunkowo długim okresie czasu (Lechowicz A., Mączka W., 1994)²⁷. Wyróżnić można trzy trendy: malejący, rosnący, horyzontalny. Każdy z nich składa się z trendów krótszych. Złożoność ta powoduje, że wyodrębnia się trzy różne stopnie trendu. Najważniejszy, to trend główny, który określa kierunek. Składową tego trendu są trendy wtórne, które z kolei składają się z trendów mniejszych.

To zjawisko stanowi podstawę analizy technicznej. Każdy z trendów może być wykorzystany do przewidywania zachowania się kursów w przyszłości. Praktyczne wykorzystanie poszczególnych stopni trendu i podejmowanie na tej podstawie decyzji inwestycyjnych jest uzależnione od indywidualnej strategii inwestora. Trend może być rosnący, spadkowy lub stagnacyjny. *Trend rosnący*, to taki, w którym dolne granice spadków cen da się połączyć linią prostą która kieruje się do góry. *Trend spadkowy (malejący)* ma miejsce wtedy, gdy górne granice wzrostów cen da się połączyć linią prostą, która skierowana jest w dół. Linie określające trend nazywa się liniami trendu.²⁸

Równoległe ukształtowanie się linii trendu nosi nazwę *kanalu trendowego*. Linia górnego ograniczenia kanału trendowego nazywa się *linią oporu*, a dolna *linią wsparcia*. Przykłady poszczególnych rodzajów trendów przedstawiają rysunki 1.7, 1.8 i 1.9.

²⁴ Podano za Głowacki M.: *Metody inwestycyjne na rynku papierów wartościowych. Bank i Kredyt* 7-8/1995, dodatek ABC 14/1995, s. 10

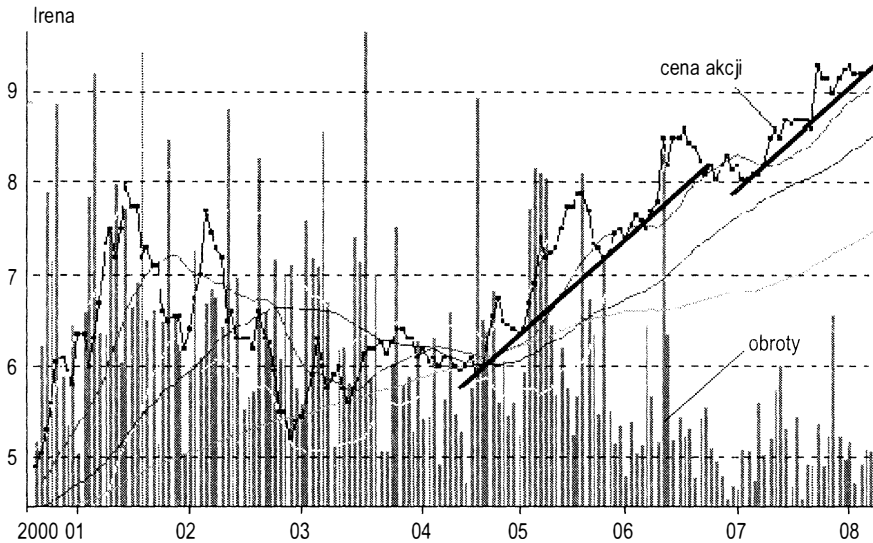
²⁵ Por.: Głowacki M.: op.cit.

²⁶ Por.: Głowacki M.: op.cit., s. 14

²⁷ Podano za Lechowicz A., Mączka W.: op.cit., s. 117

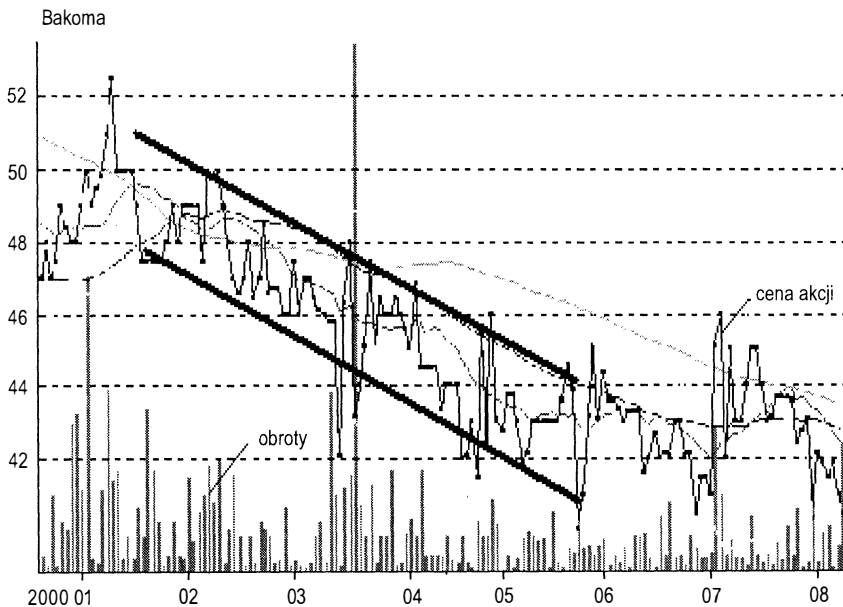
²⁸ Szerzej na temat trendów można znaleźć w pracach m.in.: Tarczyński W.: op.cit., s. 50-54, Murphy J.J.: op.cit., s. 26-31, Pring M.J.: op.cit., s. 11-13

Rys. 1.7 Ceny akcji spółki Irena w okresie od stycznia 2000 do sierpnia 2000 z zaznaczonymi okresami trendu wzrostowego



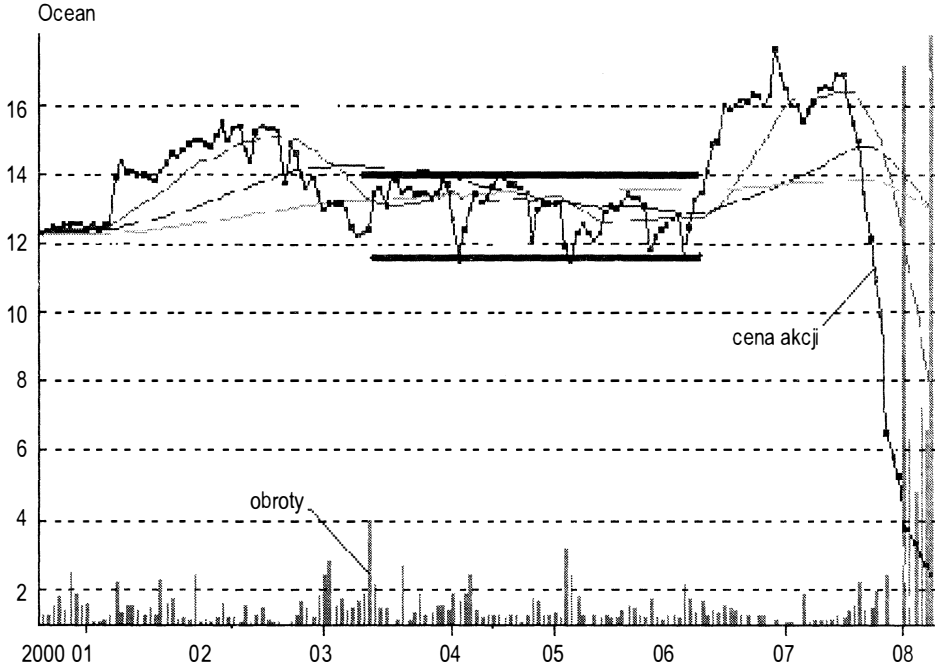
Źródło: opracowanie własne przy pomocy programu AmiBroker

Rys. 1.8 Ceny akcji spółki Bakoma w okresie od stycznia 2000 do sierpnia 2000 z zaznaczonym kanałem trendu spadkowego



Źródło: opracowanie własne przy pomocy programu AmiBroker.

Rys. 1.9 Ceny akcji spółki Ocean w okresie od stycznia 2000 do sierpnia 2000 z zaznaczonym okresem trendu stagnacyjnego



Źródło: opracowanie własne przy pomocy programu AmiBroker.

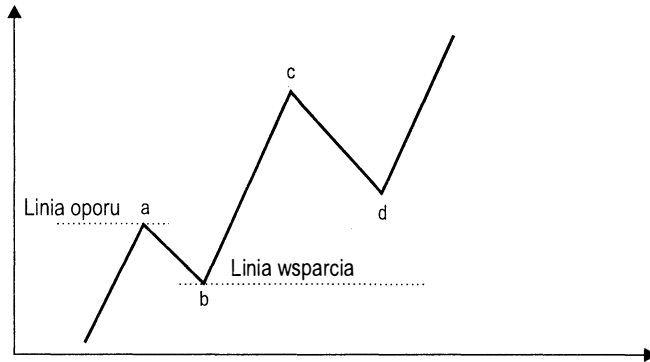
Kolejnym, ważnym narzędziem w analizie technicznej jest *wsparcie i opór*.²⁹ Pojęciom tym analitycy techniczni przypisują często ważne znaczenie. Wynika to z faktu, że opór i wsparcie są niezbędnymi narzędziami wykorzystywanymi przez inwestorów. Dzięki ich prostej zasadzie konstrukcji są bardzo często spotykane w analizie wykresów. Linie oporu i wsparcia w trendzie wzrostowym przedstawiono na rysunku 1.10.

Punkty b i d wyznaczają poziomy wsparcia, którymi są zazwyczaj dna poprzednich spadków. Punkty a i c wyznaczają poziomy oporu, którymi są na ogół szczyty poprzednich zwyżek.

Linia oporu powstaje wtedy, gdy występuje przewaga podaży nad popytem zapobiegająca dalszemu wzrostowi kursu. W efekcie takiej sytuacji występuje początkowo zatrzymanie się kursu a następnie jego niżkowanie. Natomiast przewaga popytu nad podażą jest powodem ukształtowania się linii wsparcia, która zatrzymuje spadek kursu. Linie wsparcia i oporu udzielają wiele ważnych wskazówek oraz informacji dla tych inwestorów, którzy dokonują prób ciągłego ich wykreślenia. Można powiedzieć, że linie te są specyficznym testem wskazującym na zmiany w kierunku trendu.

²⁹ Zagadnienie linii wsparcia i oporu z teoretycznego punktu widzenia w sposób szczegółowy omawia Murphy J.J.: op.cit., s. 58-68, natomiast praca W. Tarczyńskiego: op.cit., s. 54-59 omawia problematykę wsparcia i oporu na przykładzie Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie.

Rys. 1.10 Linie oporu i wsparcia w trendzie wzrostowym



Źródło: na podstawie (Murphy J. J., 1995).

Zasada interpretacji sygnałów zapowiadających zmianę kierunku trendu przedstawia się w następujący sposób (Głowacki M., 1995)³⁰:

- *gdy w trendzie rosnącym nie została przekroczona wcześniejsza linia oporu i nastąpił spadek kursu poniżej linii wsparcia jest to sygnałem rynku niedźwiedzia,*
- *gdy w trendzie malejącym nie została przekroczona wcześniejsza linia i nastąpił wzrost kursu ponad linię oporu jest to sygnałem rynku byka.*

Tendencje na rynku akcji danej spółki mogą być zatrzymane lub odwrócone na poziomie linii wsparcia. Jeżeli kurs akcji zatrzymuje się na poziomie wsparcia jest to sygnał dla inwestora do zakupu akcji. W przypadku znacznego przebiccia linii wsparcia w dół należy spodziewać się silnego spadku kursu. Na linii wsparcia popyt na akcje jest na tyle silny, że przeciwdziała dalszemu spadkowi cen. Podobnie, jak linia wsparcia jest barierą dla spadku cen akcji linia oporu stanowi barierę dla dalszego wzrostu cen. Linia oporu stanowi wyznacznik, przy którym podaż akcji jest na tyle wysoka, że przeciwdziała dalszemu wzrostowi cen.

Linie wsparcia i oporu często zamieniają się miejscami. Linia wsparcia przechodzi w linię oporu i na odwrót. Przekroczenie linii o więcej niż 3% stanowiący próg bezpieczeństwa jest odbierane jako sygnał zakupu lub sprzedaży. Gdy ceny akcji rosną zbyt gwałtownie, inwestorzy oczekują na korektę techniczną lub odwrócenie się trendu.

Kolejnym, popularnym pojęciem w używanym w analizie technicznej jest linia trendu. Jest to prosta kreślona na wykresie pomiędzy przynajmniej dwoma punktami zwrotnymi kursu. Trend jest tym silniejszy im więcej obejmuje punktów zwrotnych kursu w jak najdłuższym przedziale czasowym.

M. Głowacki (Głowacki M., 1995)³¹ zauważa, że w przypadku linii trendu, ogólna zasada generowania sygnałów transakcyjnych jest następująca:

- *spadek poniżej rosnącej linii trendu jest sygnałem sprzedaży,*
- *wzrost powyżej malejącej linii trendu jest sygnałem kupna.*

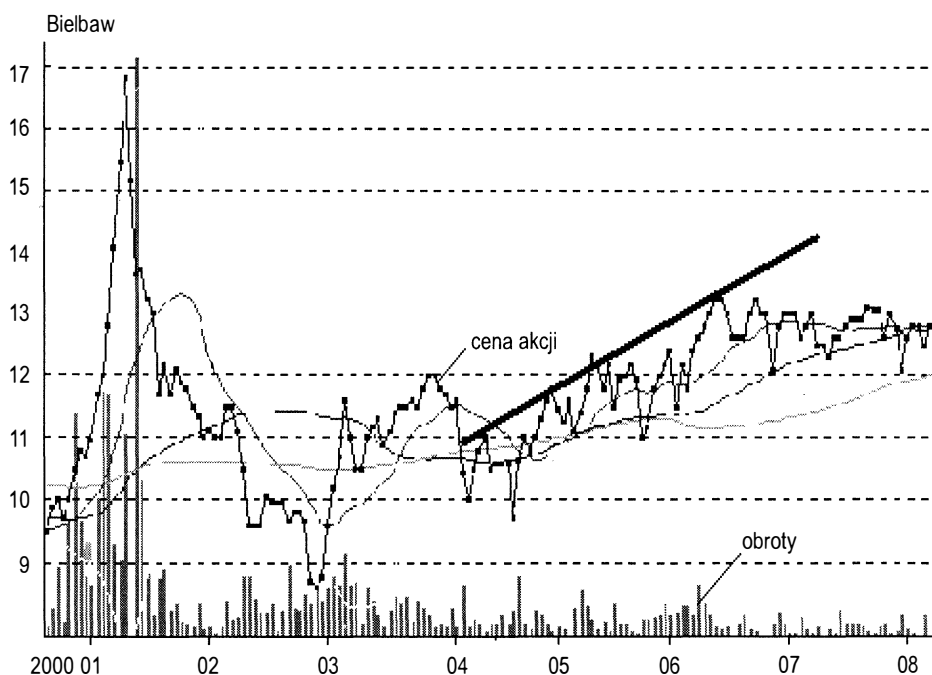
³⁰ Podano za Głowacki M.: op.cit., s. 11

³¹ Por.: Głowacki M.: op.cit., s. 12

W celu prawidłowej identyfikacji sygnałów kupna lub sprzedaży określonych walorów mogą być stosowane dodatkowo inne narzędzia, tj. filtry czasowe i cenowe. Dla filtru czasowego wyznacza się procentową zmianę kursu od punktu, w którym nastąpiło przekroczenie linii trendu. Dla cenowego zaś określa się liczbę sesji, podczas których kurs przekroczył linię trendu i przebywał poza nią. W praktyce dla zabezpieczenia się przed podjęciem niewłaściwej decyzji wystarczający jest filtr czasowy z dwóch kolejnych sesji.

O możliwości zmiany trendu może świadczyć zwolniona linia trendu lub *wachlarz* (rysunek 1.11, 1.12).

Rys.1.11 Ceny akcji spółki Bielbaw w okresie od stycznia 2000 do sierpnia 2000 z zaznaczoną zwolnioną linią trendu



Źródło: opracowanie własne przy pomocy programu AmiBroker.

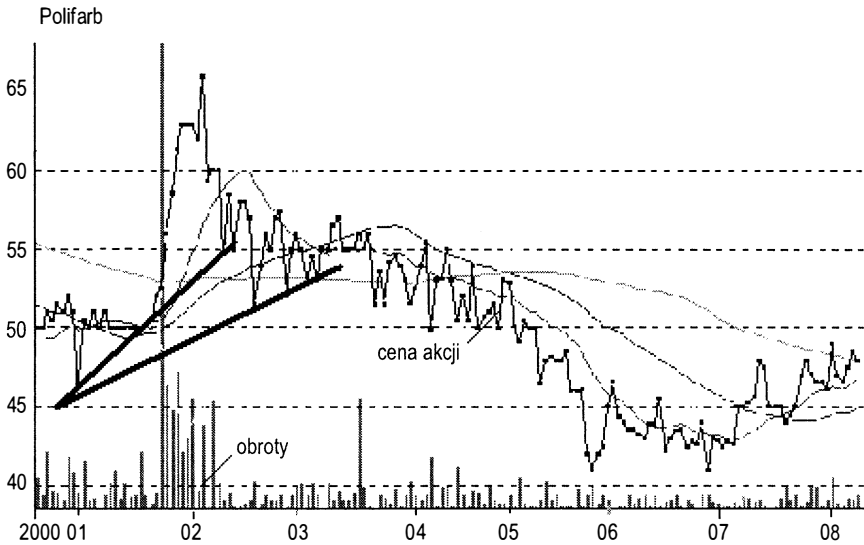
Zwolniona linia trendu i wachlarz stanowią kontynuację linii trendu głównego. Kontynuacja przebiega jednak w zwolnionym tempie.

W rzeczywistości zdarza się często, że linie trendu przyspieszają lub zwalniają i przybierają kształt hiperboli. Często na rynku mają miejsce tzw. pułapki, czyli kresy, w których następuje wybiecie się cen akcji ponad linie trendu, a następnie powrót do poprzedniej tendencji.

Kolejnym narzędziem wykorzystywanym w analizie technicznej jest *kanal trendu*. Szczególna przydatność kanałów trendu polega na ich wczesnym wykryciu. Dyspozycje kupna lub sprzedaży należy wydawać w tym czasie, gdy kurs akcji znajduje się w kanale trendu. Powstaje on w ten sposób, że do linii trendu prowadzi się równoległą do niej linię

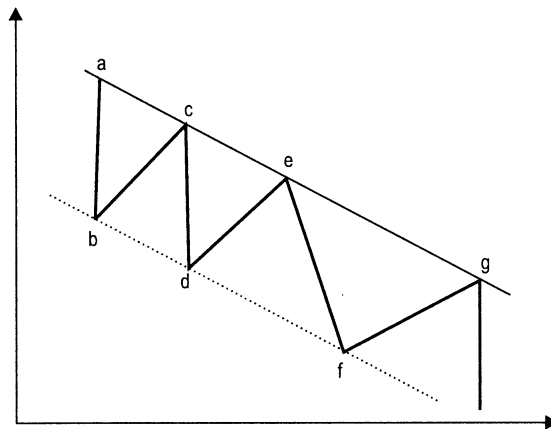
zamykającą wszystkie ruchy kursu giełdowego. Przekroczenie wyznaczonego w ten sposób pola jest sygnałem transakcyjnym. Dla trendu rosnącego przekroczenie danej linii kanału jest sygnałem zmiany kierunku trendu na malejący i konieczności dokonania sprzedaży. W przypadku natomiast trendu malejącego przekroczenie górnej linii kanału jest zapowiedzią rynku wzrostowego i jednocześnie sygnałem kupna. Przykład kanału trendu przedstawia rysunek 1.13.

Rys.1.12 Ceny akcji spółki Polifarb w okresie od stycznia 2000 do sierpnia 2000 z zaznaczonym wachlarzem linii trendu



Źródło: opracowanie własne przy pomocy programu AmiBroker.

Rys. 1.13 Przykład kanału trendu spadkowego



Źródło: na podstawie (Murphy J. J., 1995).

Użytecznym narzędziem w analizie technicznej jest analiza formacji. Formacje stanowią pewne powtarzające się układy geometryczne ukształtowane przez linię kursu. Wieloletnie obserwacje i doświadczenie analityków pozwoliły na wyodrębnienie i opisanie układów charakteryzujących się stosunkowo dużą regularnością. Identyfikacja i wyodrębnienie tych form pozwala na przewidywanie z dużym prawdopodobieństwem biegu wydarzeń w przyszłości (Lechowicz A., Mączka W., 1994)³².

Formacje są powszechnie stosowanymi narzędziami służącymi do prognozowania kierunków trendu. Wszystkie formacje zostały podzielone na te, które zapowiadają zmianę kierunku trendu oraz te, które zapowiadają kontynuację kierunku trendu.

Formacje zapowiadające zmianę kierunku trendu charakteryzuje stosunkowo długi okres trwania. Czas kształtowania się tych formacji rozciąga się od trzech miesięcy do roku. Tak kształtowane formacje zapowiadają z dużym prawdopodobieństwem poprawności kierunek zmiany trendu.

Do formacji sygnalizujących możliwość zmiany kierunku trendu należą (Głowacki M., 1995)³³:

- *głowa i ramiona oraz odwrócona głowa i ramiona,*
- *liter V i odwróconej liter V,*
- *potrójne dno i trzy szczyty,*
- *podwójne dno i dwa szczyty,*
- *spodek i odwrócony spodek,*
- *szpilka i odwrócona szpilka.*

Formacje zapowiadające kontynuację kierunku trendu są to formacje o dość krótkim okresie trwania, tj. od trzech tygodni do trzech miesięcy. Spełniają one rolę korekty technicznej przed kontynuacją kierunku trendu.

Należą do nich następujące formacje (Głowacki M., 1995)³⁴:

- *trójkątne (symetrycznego trójkąta, wznoszącego się trójkąta, opadającego trójkąta, rozszerzającego się szczytu),*
- *diamentu,*
- *prostokąta,*
- *flagi,*
- *proporca,*
- *klina.*

Przykłady wybranych formacji przedstawiają rysunki na następnej stronie.

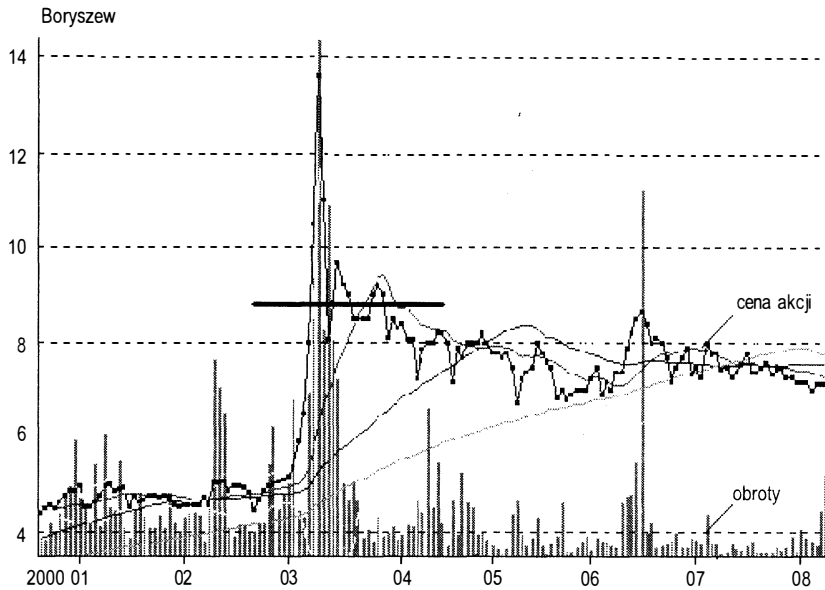
Formacje V i odwróconego V są najprostszymi formacjami występującymi na rynku. Zarówno występujący w nich spadek, jak i wzrost następuje pod tym samym kątem. Formacje tego typu zaliczane są najbardziej ryzykownych wskaźników giełdowych. Formacja V może sygnalizować wzrost cen akcji zwłaszcza, gdy prawe ramię przebije linię oporu lub zapowiada zmianę trendu. Formacja odwróconego V może zarówno oznaczać spadek cen, zwłaszcza, gdy jej prawe ramię przebija linię wsparcia lub jest wyznacznikiem zmiany trendu.

³² Por.: Lechowicz A., Mączka W.: op.cit., s. 118

³³ Podano za Głowacki M.: op.cit., s. 13

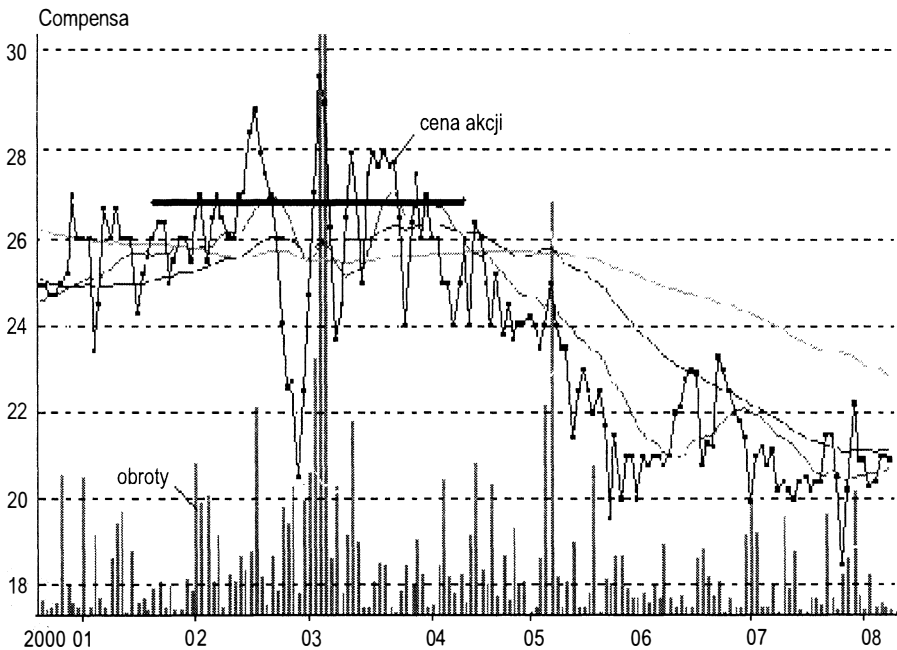
³⁴ Podano za Głowacki M.: op.cit., s. 13

Rys. 1.14 Przykład *formacji odwróconej litery V* dla spółki Boryszew

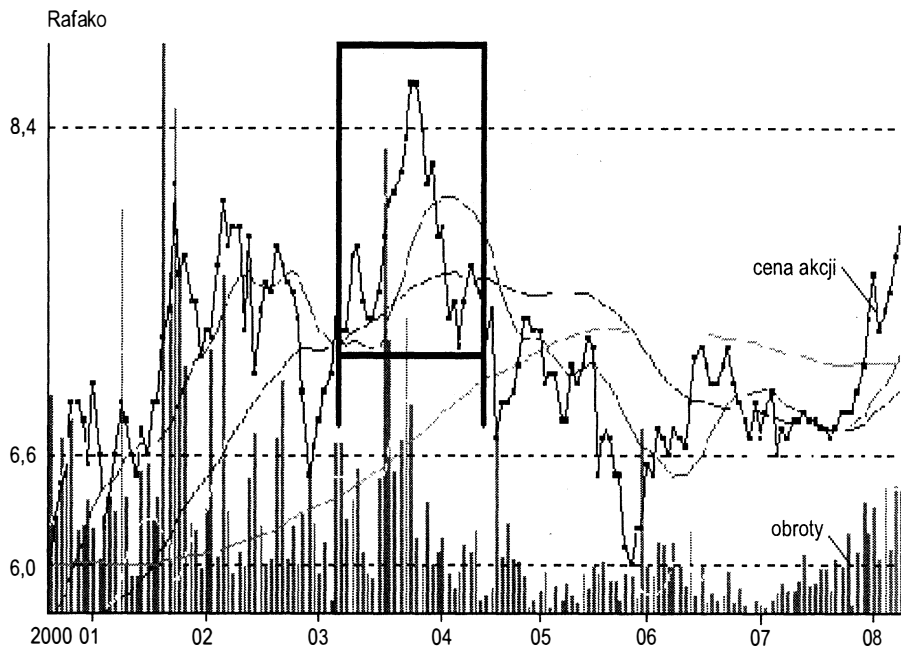


Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Rys.1.15 Przykład *formacji litery V* dla spółki Compensa



Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Rys. 1.16 Przykład *formacji głowy i ramion* dla spółki Rafako

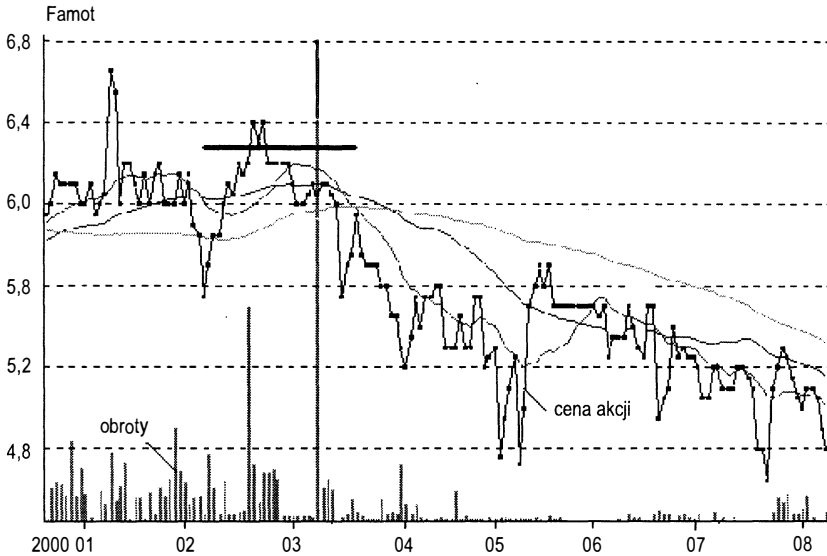
Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Jest to formacja odwrócenia trendu, którą tworzą trzy lokalne szczyty, czyli lewe ramię, głowa i prawe ramię. Szczyt głowy powinien być jednocześnie najwyższym punktem całej formacji. Najwyższe obroty utrzymują się w trakcie tworzenia lewego ramienia. Ponowny wzrost aktywności obserwowany jest przy szczycie głowy, przy czym obroty powinny być niższe od towarzyszących lewemu ramieniu. Przy tworzeniu prawego ramienia wolumen obrotów powinien być najniższy. Ponowny wzrost aktywności obserwowany jest przy dojściu i przebiciu linii szyi. Potencjalny zasięg spadku wyznacza wysokość głowy odmierzona w dół od punktu przebicia linii szyi. Formacja głowy i ramion należy do jednej z bardziej wiarygodnych formacji. *Formacja odwróconej głowy* jest *formacją odwrócenia trendu*, którą tworzą trzy lokalne dna, czyli lewe ramię, głowa i prawe ramię. Dno głowy powinno być jednocześnie najniższym punktem całej formacji. Najwyższe obroty utrzymują się przy formowaniu dna lewego ramienia oraz głowy. Nieznaczny wzrost obrotów ma miejsce przy punktach stycznych z linią szyi. Najniższa aktywność notowana jest przy dniu prawego ramienia i gwałtownie wzrasta przy dojściu i przebiciu linii szyi. Minimalny zasięg wzrostu wyznacza wysokość głowy odmierzona od punktu przebicia linii szyi.

Formację podwójnego szczytu (rysunek 1.17) charakteryzuje kształt litery „M”. Jak sama nazwa wskazuje tworzy ją układ dwóch szczytów, gdzie oddzielające je minimum jest jednocześnie punktem wybicia z formacji. Na wykresie, dwóm najwyższym szczytom towarzyszy wzrost obrotów, przy czym obroty na drugim szczycie są zazwyczaj niższe. Minimum cenowe podkreśla natomiast bardzo wyraźny spadek aktywności. Kolejny przyrost

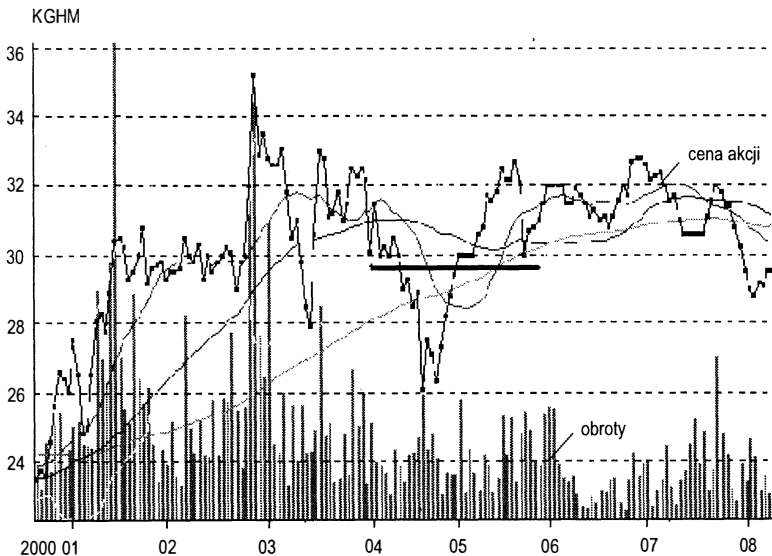
obrotów może mieć miejsce przy wybiciu z samej formacji. Zasięg spadku wyznacza odległość pomiędzy linią dwóch szczytów a najniższym punktem formacji odmierzona od wspomnianego minimum.

Rys. 1.17 Przykład *formacji podwójnego szczytu* dla spółki Famot



Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Rys. 1.18 Przykład *formacji podwójnego dna* dla spółki KGHM

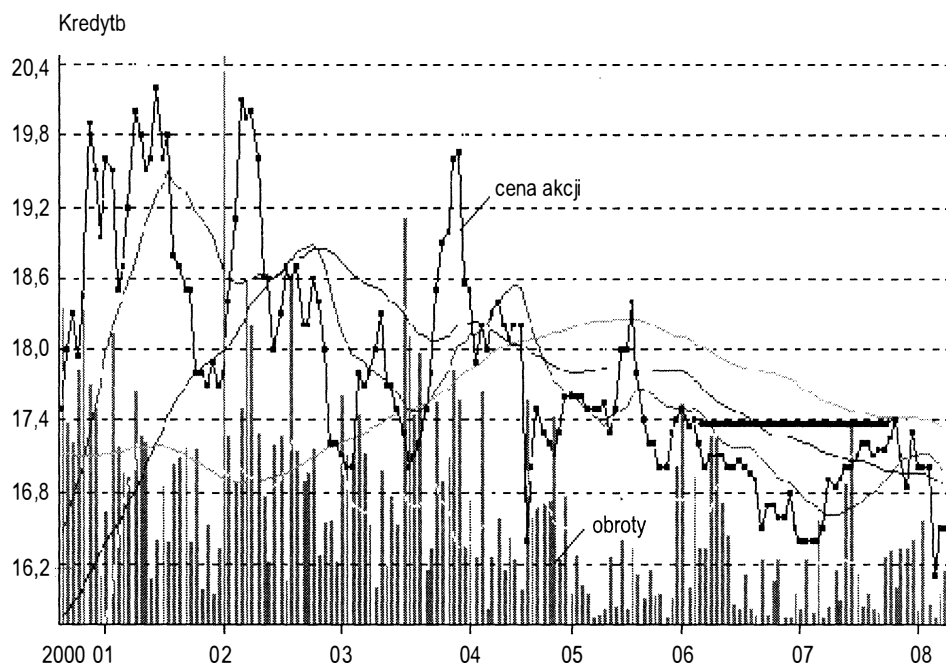


Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Formację podwójnego dna (rysunek 1.18) charakteryzuje kształt litery „W”. Wyznaczają ją dwa istotne minima, oddzielone lokalnym szczytem, który wyznacza jednocześnie poziom wybicia z formacji. Oprócz kształtu, charakterystyczne dla tej formacji jest również zachowanie wolumenu, który zazwyczaj jest najwyższy przy tworzeniu pierwszego dna oraz przy podejściu do szczytu. Na drugim dnie obroty są natomiast wyraźnie niższe, a ich ponowny wzrost obserwowany jest przy ostatecznym wybiciu z formacji. Zasięg wzrostu wyznacza odległość pomiędzy linią dwóch minimów a najwyższym punktem formacji odmierzona od wspomnianego szczytu.

Kolejną formację stanowi *formacja spodka* (rysunek 1.19).

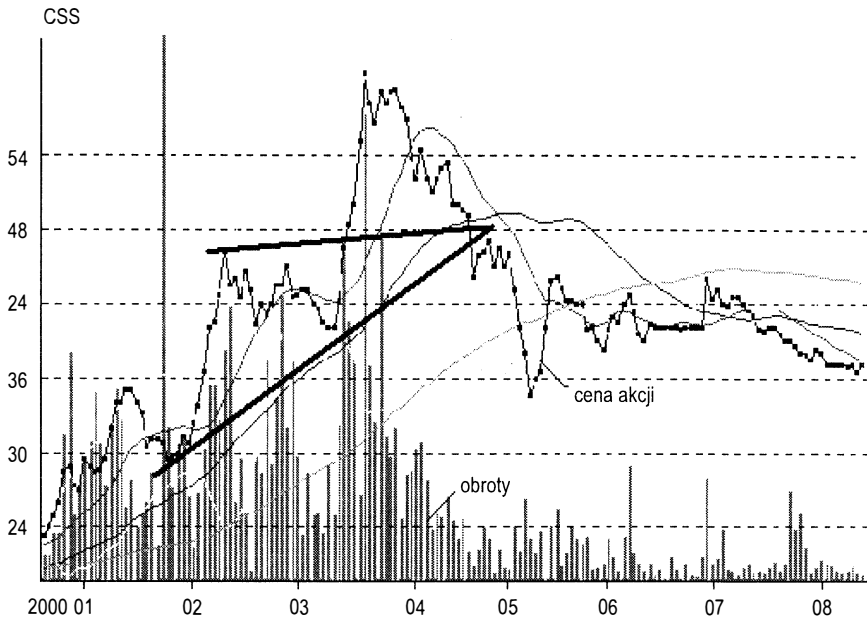
Rys. 1.19 Przykład *formacji spodka* dla spółki Kredyt Bank



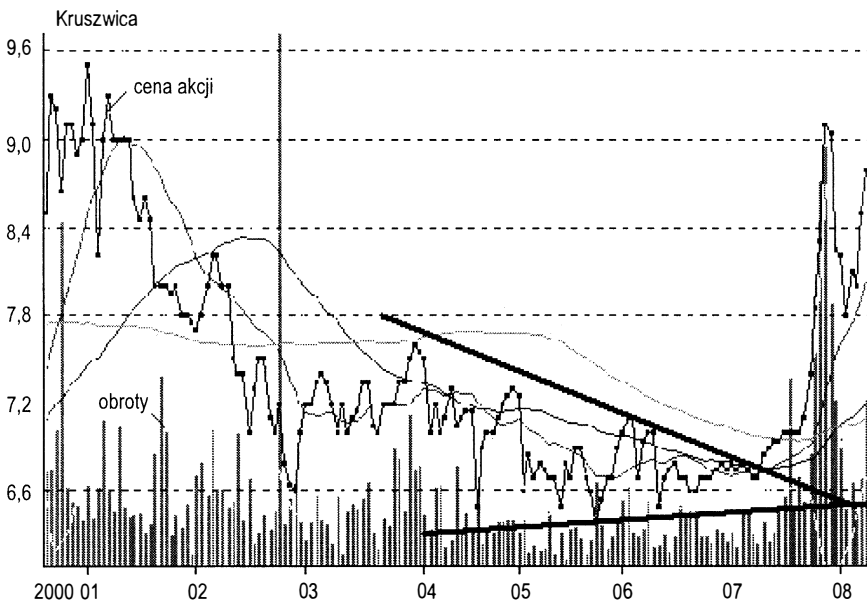
Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Jest to formacja odwrócenia trendu, którą stanowi często wielomiesięczna konsolidacja poprzedzona silnym trendem spadkowym. Zamiast trendu bocznego przybiera ona jednak bardziej zaokrąglony kształt. Jest to wynik łagodnego wytracania impetu spadkowego, po czym po osiągnięciu nowego minimum w obszarze połowy formacji, następuje wzrost z sukcesywnie rosnącą dynamiką. Trudnością, jaka pojawia się w przypadku formacji spodka jest określenie poziomu wybicia z samej formacji. Bardzo charakterystyczne są tutaj również zmiany obrotów, które przybierają identyczny kształt z wyglądem samej formacji.

Inny rodzaj formacji stanowią *formacje trójkątów* (rysunek 1.20, 1.21).

Rys. 1.20 Przykład *formacji trójkąta* zwyżującego dla spółki CCS

Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

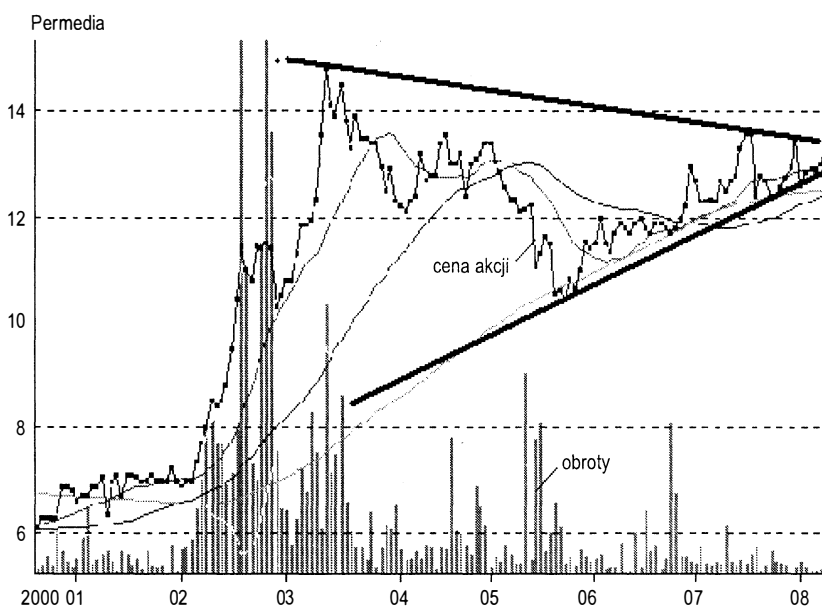
Rys. 1.21 Przykład *formacji trójkąta* zniżującego dla spółki Kruszwica

Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Formacje trójkątów występują zarówno jako formacje odwrócenia i kontynuacji trendu. Są to formacje najczęściej spotykane, jednocześnie najmniej pewne. Czynnikiem decydującym jest kierunek wybicia względem poprzedzającego ruchu. Cechą charakterystyczną dla trójkątów prostokątnych jest horyzontalny przebieg jednej z linii (szczytów lub dołków), druga linia przebiega wzdłuż malejących szczytów lub rosnących minimów. Wolumen obrotów w trakcie tworzenia samej formacji powinien maleć. Silny przyrost wolumenu powinien natomiast towarzyszyć wybiciu z formacji niezależnie od jego kierunku. Wybicie z trójkąta powinno nastąpić w odległości od połowy do 2/3 odległości od momentu utworzenia trójkąta do jego wierzchołka. Zasięg ruchu wyznacza wysokość trójkąta mierzona od punktu wybicia.

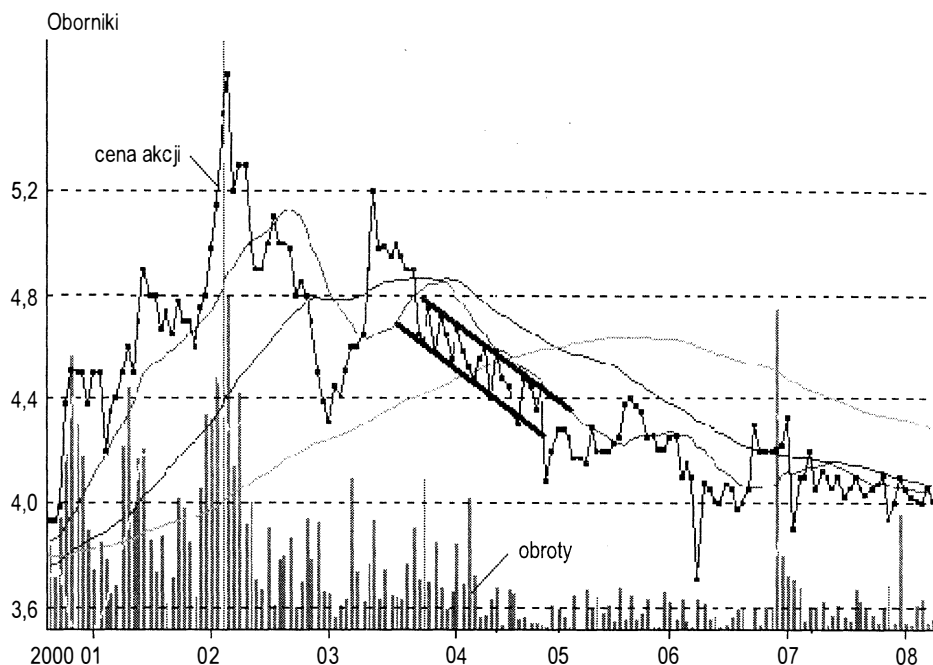
Kolejną grupę formacji stanowią formacje zapowiadające kontynuację trendu. Do grupy powyższej zalicza się następujące rodzaje formacji: *klina*, *flagi*, *chorągiewki*, *kwadratu*, *prostokąta* oraz *diamentu*.

Rys. 1.22 Przykład formacji *klina* rosnącego dla spółki Permedia



Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Kliny (rysunek 1.22) należą do grupy formacji kontynuacji trendu. Okres ich kształtowania jest różny od dwóch, trzech tygodni do np. dwóch miesięcy. Kształt formacji wyznaczają dwie zbieżne linie przypominające kształtem formacje trójkątów, z tą różnicą, że obie linie są nachylone w tym samym kierunku, jednak przeciwnie do poprzedzającego trendu. Utrzymujący się pierwotnie na wysokim poziomie wolumen obrotów, zazwyczaj maleje od momentu wejścia w formację. Ponownie silny wzrost aktywności powinien towarzyszyć wybiciu. Klina zazwyczaj pojawiają się w połowie silnych ruchów cenowych, stąd zasięg wzrostu wyznacza wysokość poprzedzającej fali mierzona od punktu wybicia z formacji.

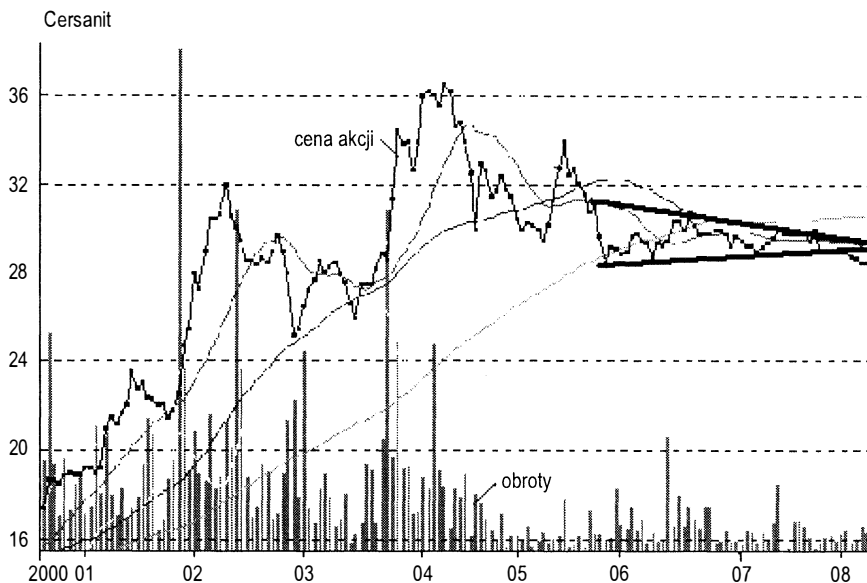
Rys. 1.23 Przykład *formacji flagi opadającej* dla spółki Oborniki

Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

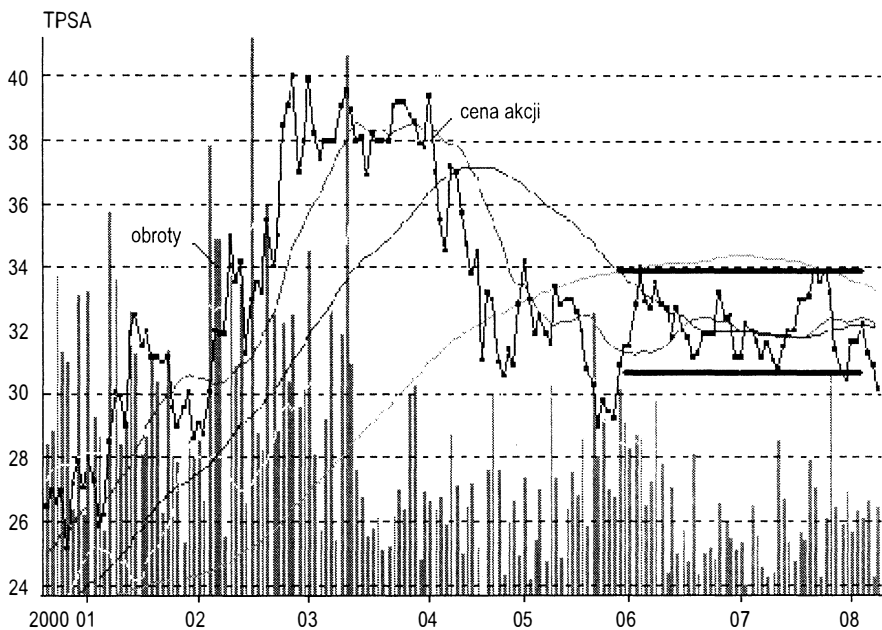
Flagi (rysunek 1.23) są kolejnym przykładem formacji z grupy kontynuacji trendu. Okres ich kształtowania jest stosunkowo krótki, od kilku sesji do trzech, czterech tygodni. Kształt formacji wyznaczają dwie równoległe linie przyjmujące nachylenie przeciwne do poprzedzającego trendu. Utrzymujący się pierwotnie na wysokim poziomie wolumen obrotów, zazwyczaj maleje od momentu wejścia w formację. Ponownie silny wzrost aktywności powinien towarzyszyć wybiciu. Flagi zazwyczaj pojawiają się w połowie silnych ruchów cenowych, stąd zasięg wzrostu wyznacza wysokość poprzedzającej fali (masztu) mierzona od punktu wybicia z formacji.

Chorągiewki (rysunek 1.24) należą do grupy formacji kontynuacji trendu. Okres ich kształtowania jest stosunkowo krótki, od kilku sesji do trzech, czterech tygodni. Kształt formacji wyznaczają dwie zbieżne linie przypominające kształtem formacje trójkątów równoramiennych. Utrzymujący się pierwotnie na wysokim poziomie wolumen obrotów, zazwyczaj maleje od momentu wejścia w formację. Ponownie, silny wzrost aktywności powinien towarzyszyć wybiciu. Chorągiewki zazwyczaj pojawiają się w połowie silnych ruchów cenowych, stąd zasięg wzrostu wyznacza wysokość poprzedzającej fali (masztu) mierzona od punktu wybicia z formacji.

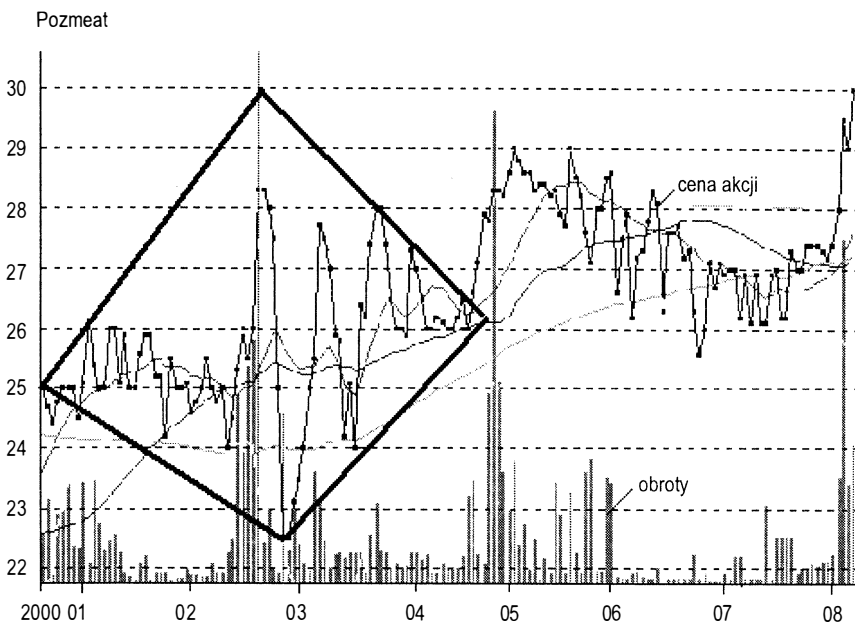
Formacje kwadratów lub *prostokątów* (rysunek 1.25) powstają, gdy ceny akcji mieszczą się w ułożonym poziomo kanale trendowym. Ich siłę potwierdza również zgodność lub niezgodność kursów i obrotów.

Rys. 1.24 Przykład *formacji chorągiewki opadającej* dla spółki Cersanit

Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Rys. 1.25 Przykład *formacji prostokąta* dla spółki TPSA

Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Rys. 1.26 Przykład *formacji diamentu* dla spółki Prozmeat

Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Formacje diamentów (rysunek 1.26) mogą występować jako formacje odwrócenia lub kontynuacji dotychczasowego trendu. Ostatecznie decyduje o tym kierunek wybicia z formacji względem poprzedzającego trendu. Punkty zwrotne w samej formacji wyznaczają linie rombu (diament). Początek formacji jest niekiedy mylony z początkiem kształtowania głowy i ramion. Do połowy diamentu wolumen obrotów zazwyczaj maleje, przy czym aktywność nieznacznie wzrasta w trakcie lokalnych szczytów i maleje dla lokalnych minimów. W drugiej połowie, aktywność nieznacznie wzrasta, przy czym wyraźny wzrost obrotów ma miejsce przy ostatecznym wybiciu z formacji. Zasięg ruchu wyznacza szerokość diamentu mierzona od punktu wybicia.

W celu dokonania poprawnej analizy i prognozy kursów akcji konieczne jest posługiwanie się ceną połączoną z wartościami obrotów. Łączenie wartości obrotów z siłą trendu pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków (Głowacki M., 1995)³⁵:

- rynek giełdowy ma duży potencjał gdy występują wysokie wartości obrotów,
- rynek giełdowy ma mały potencjał gdy występują małe wartości obrotów.

Wartości obrotów dla różnych kierunków trendu mają cechy:

- w trendzie rosnącym gdy kurs rośnie i obroty rosną, a gdy kurs maleje i obroty maleją,
- w trendzie malejącym gdy kurs maleje obroty rosną, a gdy kurs rośnie obroty maleją.

Kolejną rzeczą, którą należy uwzględnić przy analizie inwestycji w akcje jest analiza fal i cykli. Cykliczność na rynku papierów wartościowych jest przedmiotem badań

³⁵ Głowacki M.: op.cit., s. 14

wielu ekonomistów. Najważniejsze dla tego zjawiska wnioski sformułowali Charles H. Dow, który jest twórcą teorii cykli kursów akcji oraz Ralph N. Elliott, który jest twórcą teorii fal. Dow uważał, że większość kursów akcji będzie wykazywała ruch w tym samym kierunku co cały rynek.

Dow wyodrębnił *trzy kategorie trendu: główny, wtórny, krótkookresowy*. Przedmiotem jego zainteresowania były przede wszystkim trendy główne, trwające zazwyczaj ponad rok, a nawet kilkanaście lat. Trend wtórny, czyli średniookresowy stanowi korektę trendu głównego i na ogół trwa od trzech tygodni do trzech miesięcy. Trendy mniejsze krótkookresowe trwają zwykle niespełna trzy tygodnie i stanowią krótkie korekty trendu wtórnego (Murphy J. J., 1995)³⁶. Dow wychodzi z założenia, że zmiany kursów większości akcji są zgodne z ogólnymi tendencjami występującymi na giełdzie. Gdy panuje hossa kursy większości akcji (ok. 75%) idą w górę, przy bessie natomiast kursy (ok. 90%) spadają.

Druga z teorii zachowania się rynku papierów wartościowych została stworzona przez Ralpha N. Elliotta, który znał, że pewne cykle występujące w przyrodzie mogą posłużyć do opisanie cykli na rynku giełdowym, a także do prognozowania. Elliott ustalił, że trend wzrostowy składa się z pięciu fal głównych, trend zniżkowy zaś składa się z trzech fal głównych. Na podstawie swoich obserwacji i przemyśleń stworzył bardzo rozbudowaną teorię fal połączoną z ciągiem liczbowym włoskiego matematyka – Fibonacciego. Ralph Elliott zauważył, że kursy giełdowe, a także inne ceny na rynku finansowym wznoszą się i spadają według powtarzającego się wzoru fal.

Szerzej na temat powyższych zagadnień traktują następujące pozycje (Tarczyński W., 1997³⁷; Achelis S. B., 1998³⁸; Czekala M., 1998³⁹; Murphy J. J., 1995⁴⁰; Gatety E., 1999⁴¹).

1.2.1.3 Wskaźniki stosowane w nowoczesnej analizie technicznej

Z punktu widzenia Głowackiego (Głowacki M., 1995), nowoczesna analiza techniczna jest to analiza, która wykorzystuje technikę komputerową oraz różnego rodzaju wskaźniki, które obrazują stan rynku giełdowego, generując sygnały kupna i sprzedaży. Biorąc pod uwagę konstrukcję powyższych wskaźników wyróżnić można następujące ich grupy (Głowacki M., 1995)⁴²:

- *oparte na cenie,*
- *oparte na wartości obrotów,*
- *łącznie elementy ceny i obrotów.*

Wskaźniki są szeregami czasowymi obliczanymi na podstawie wzorów matematycznych i podstawowych danych liczbowych gromadzonych dla papierów wartościowych. Powodem tworzenia wszystkich wskaźników jest m.in.: wspomaganie uczestników giełdy

³⁶ Zagadnienie to szczegółowo opisał Murphy J.J.: op.cit., s. 24-34

³⁷ Tarczyński W.: op.cit., s. 33-67 i 150-165

³⁸ Achelis S.B.: op.cit., s. 7-25

³⁹ Czekala M.: op.cit., s. 32-38 i 73-78

⁴⁰ Murphy J.J.: op.cit., s. 24-172

⁴¹ Gatety E.: *Cena i czas. Zarys metod analizy technicznej*, Wig Press, Warszawa 1999, s. 29-54 i 67-101

⁴² Por.: Głowacki M.: op.cit., s. 7

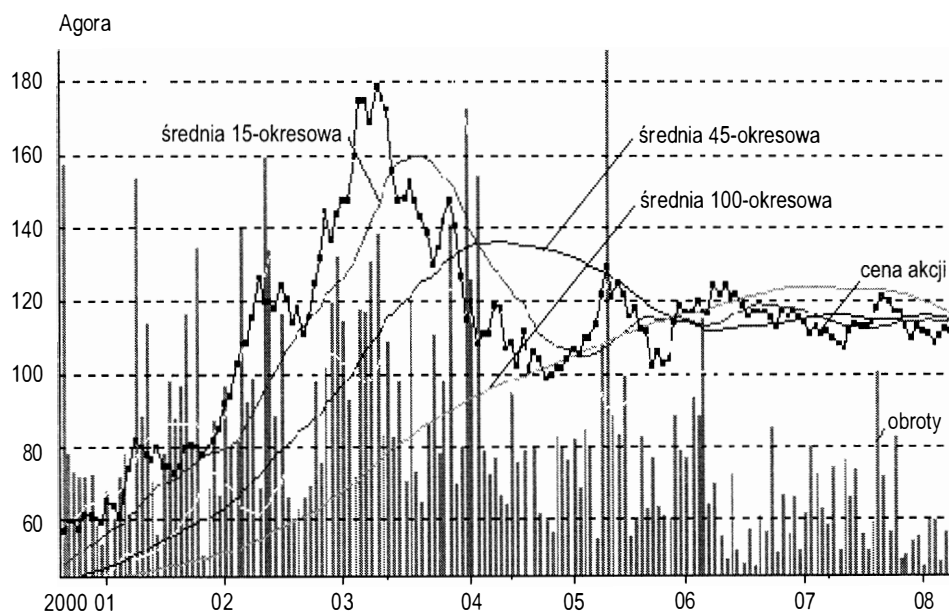
w podejmowaniu decyzji. Wskaźniki są konstruowane po to, by przetworzyć i uwypuklić informacje zawarte w kursie i przedstawić je w oknie wykresów w postaci graficznej. Nie zawierają one żadnych nowych informacji, są jedynie bardziej przejrzystą i łatwiejszą do zinterpretowania formą tego samego zagadnienia.

Ogólny podział wskaźników przedstawia się następująco (Głowacki M., 1995)⁴³:

- *średnie ruchome*,
- *momentum*,
- *oscylatory*,
- *mieszane (łącznie elementy ceny i obrotów)*.

W ramach wyżej wymienionych wskaźników do analizy decyzji inwestycyjnych wykorzystuje się najczęściej średnie ruchome, wstęgę Bollingera, MACD, ROC, Momentum, RSI oraz wskaźnik OBV.

Rys. 1.27 Przykład *średnich ruchomych* dla spółki Agora



Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Średnie ruchome są stosowane do wyliczenia przeciętnej wartości kursu lub wskaźnika w dowolnie wybranym przedziale czasowym. Ponieważ oryginalny diagram liniowy cechuje się z reguły dużą nieregularnością obliczenie średniej wartości kursu pozwala na sporządzenie wykresu w postaci wygładzonej, a tym samym bardziej czytelnej. Niwelacja mniejszych wahań kursu pozwala na wyeliminowanie fałszywych sygnałów oraz obserwację podstawowego trendu. Diagram średniej powinien być tak wykonany aby typować jedynie istotniejsze zmiany kursu, sygnalizujące kupno bądź sprzedaż danego papieru warto-

⁴³ Podano za Głowacki M.: op.cit., s. 8

ściowego. Jeżeli wykres kursu przebiega krzywą średniej z góry stanowi to sygnał do sprzedaży. Sytuacja odwrotna, gdy wykres kursu przecina krzywą średniej od dołu stanowi symptom podjęcia decyzji o zakupie papieru wartościowego.

Do podstawowych średnich wykorzystywanych najczęściej w analizie technicznej zalicza się⁴⁴:

- *średnią arytmetyczną,*
- *średnią ważoną,*
- *średnią wykładniczą.*

Przykłady powyższych średnich dla spółki Agora zawiera rysunek 1.27.

Wstęgi Bollingera służą do prognozowania terminu, w którym zakończy się wzrost lub spadek notowań giełdowych.

Przy konstruowaniu wstęgi Bollingera (rysunek 1.28) bierze się pod uwagę wartość przesunięcia czasowego dla danej średniej ruchomej. Wykres powinien zawierać obok linii kursu akcji, określoną średnią ruchomą. Kolejną czynnością jest obliczenie odchylenia standardowego z określonym przesunięciem. Można to zapisać następującym wzorem (Tarczyński W., 1997)⁴⁵:

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{t-1} \times \sum_{i=n-t+1}^n (x_i - \bar{x}_{tn})^2} \quad (1.1)$$

gdzie:

S_n – oznacza kolejną wartość odchylenia standardowego zmieniającą się od t do liczby notowań,

t – oznacza przesunięcie średniej ruchomej,

x_i – oznacza wartość ceny akcji z i -tej sesji,

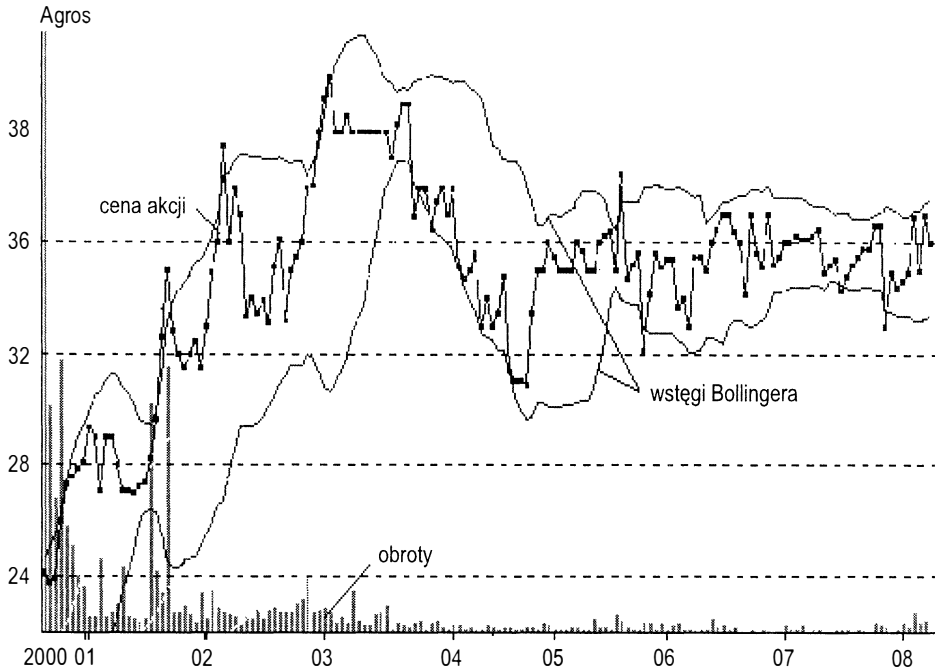
x_{kn} – oznacza odpowiednią kolejną wartość ($n-tq$) t okresowej średniej ruchomej.

Wartość odchylenia standardowego maleje w przypadku stabilizacji kursu akcji, a w okresach znacznych wahań rośnie. Obliczone według wzoru odchylenie standardowe umożliwia narysowanie dwóch linii wzdłuż średniej ruchomej. Górna powstaje przez dodanie do bieżącej wartości średniej ruchomej podwojonego odchylenia standardowego, dolna przez odjęcie. W ten sposób zostanie utworzony korytarz o zmiennej szerokości. Z reguły wykres kursu mieści się między wyznaczonymi liniami. Jedynie w momentach gwałtownych zmian zdarza się, iż kurs przecina ramiona wstęgi. Te wyjątki są niezwykle ważne. Gdy cena akcji przekracza wstęgę z dołu lub z góry teoria sugeruje szybki powrót ceny do wstęgi. Inwestor otrzymuje sygnał kupna w momencie przebiecia przez krzywą kursu dolnego ramienia wstęgi. Natomiast wyłamanie się kursu ponad górne ramię wstęgi implikuje sygnał sprzedaży akcji. Dodatkowo, za sygnały do kupna lub sprzedaży akcji można przyjąć momenty zbliżania się linii ceny akcji do wstęgi czy utrzymywanie się przez dłuższy okres ceny na tym samym poziomie oraz ruch ceny odwrotny do tego, który można było zaobserwować przed okresem stabilizacji ceny⁴⁶.

⁴⁴ Lechowicz A., Mączka W.: op.cit., s. 122

⁴⁵ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 118

⁴⁶ Dokładną analizę wstęgi Bollingera w oparciu o polską giełdę zawarł w swej pracy Tarczyński W.: op.cit., s. 118-122. Z teoretycznego punktu widzenia problematykę tą omówili m.in.: Pring M.J.: op.cit., s. 108-109, Achelis S.B.: op.cit., s. 283-285, Czekala M.: op.cit., s. 46-47

Rys. 1.28 Przykład *wstęg Bollingera* dla spółki Agros

Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

W praktyce wstęgi Bollingera są najczęściej wykorzystywane łącznie ze wskaźnikami: ROC, RSI i MACD.

Wskaźnik MACD (rysunek 1.29) można określić jako grupę wskaźników, przy wyliczeniu których bierze się pod uwagę stosunek średnich wielodniowych krótkoterminowych i długoterminowych. Formalnie MACD wyznacza się go według następującego wzoru (Tarczyński W., 1997)⁴⁷:

$$\text{MACD} = \bar{X}_{t_1} - \bar{X}_{t_2} \text{ lub } \text{MACD} = \frac{\bar{X}_{t_1}}{\bar{X}_{t_2}} \quad (1.2)$$

gdzie:

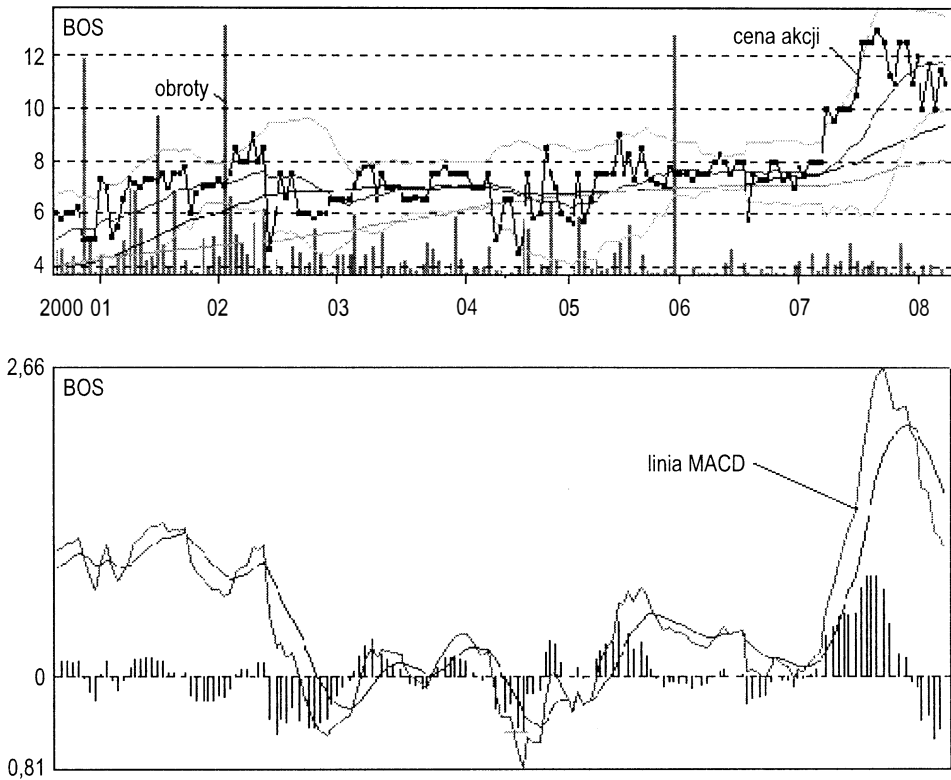
t_1 i t_2 – oznaczają krok uśredniania (przy czym zawsze $t_2 > t_1$),

\bar{X}_{t_1} , \bar{X}_{t_2} – oznaczają średnie wykładnicze t_1 i t_2 okresowe.

Pierwsza metoda zakłada, iż wartości odwzorowane na krzywej MACD obliczane są jako iloraz średniej krótkoterminowej do średniej długoterminowej.

⁴⁷ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 87

Rys. 1.29 Przykład linii MACD dla spółki BOŚ od grudnia 1999 roku do sierpnia 2000 roku przy $k_1 = 12$, $k_2 = 26$, $k = 9$ dla linii sygnału

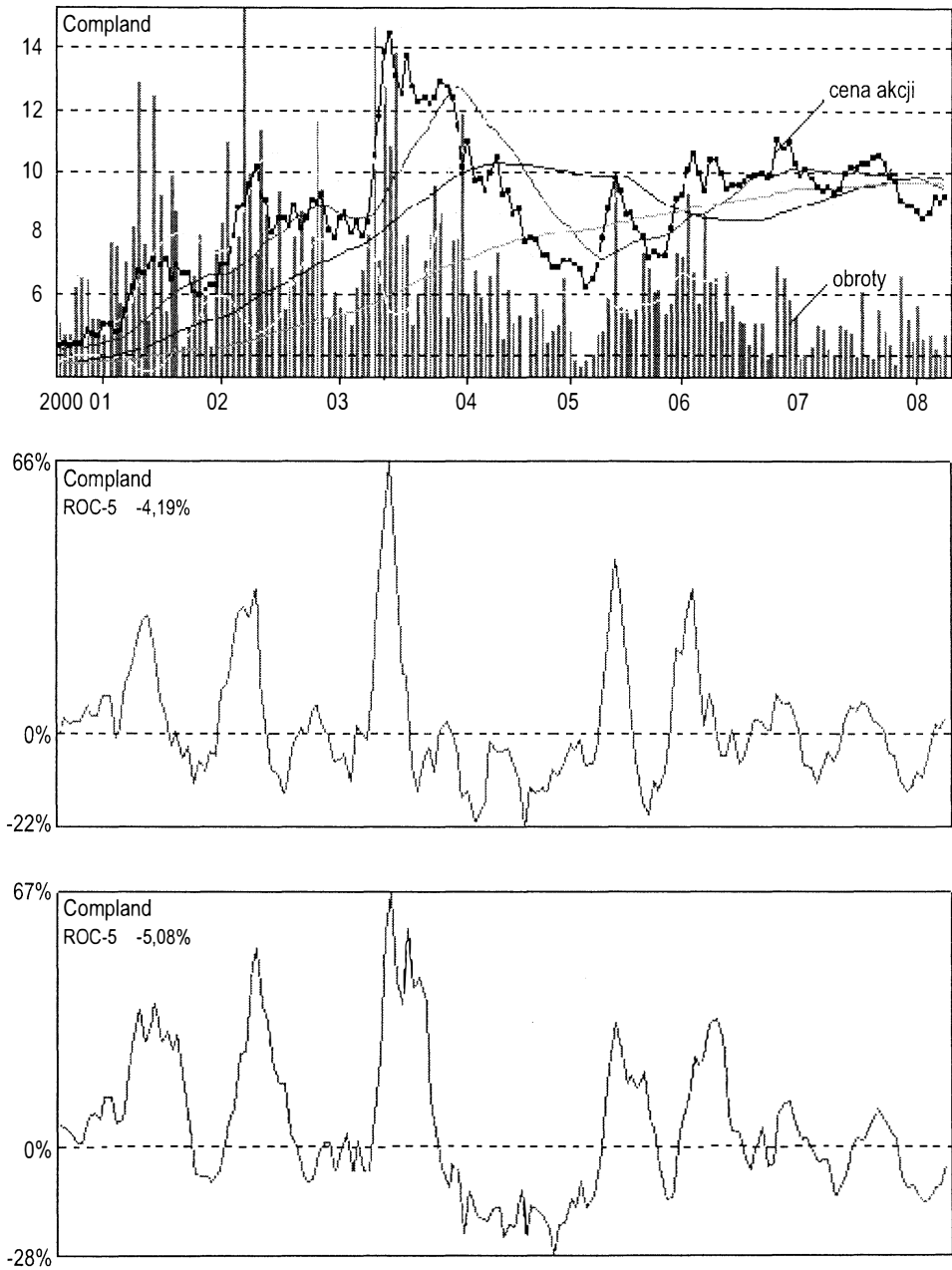


Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Krzywa MACD oscyluje wówczas wokół jakości, która wyznacza linię równowagi. Dużo popularniejszą oraz bardziej rozpowszechnioną jest wyznaczanie linii MACD, jako różnicy między średnią wykładniczą krótkoterminową i średnioterminową. Linia równowagi znajduje się wówczas na poziomie 0. Najczęściej przyjmuje się $k_1 = 8$, $k_2 = 17$. Dodatkowo w obu tych metodach wyznacza się linie sygnału będącą najczęściej średnią wykładniczą 9-cio sesyjną. W analizie decyzji inwestycyjnych ważne jest wzajemne położenie linii MACD i jej linii sygnałowej. Każdorazowe wyjście linii MACD ponad linię sygnału wskazuje na dogodny moment do zakupu akcji. Dodatkowym potwierdzeniem jest przebywanie lub wyjście tych linii ponad poziom równowagi. Z kolei przecięcie linii sygnału przez MACD od góry generuje sygnał sprzedaży akcji. Potwierdzeniem tendencji spadkowej kursów jest wejście tych linii do obszaru znajdującego się poniżej linii równowagi⁴⁸.

⁴⁸ Zwrócili uwagę na ten problem m.in.: Tarczyński W.: op.cit., s. 87-89, Gately E.: op.cit., s. 55-59, Czeakała M.: op.cit., s. 47-49, Murphy J.J.: op.cit., s. 312-313

Rys. 1.30 Przykład *wskaźnika szybkości zmian ROC* dla spółki giełdowej Computerland dla $k = 5$ i $k = 10$



Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Kolejnym wskaźnikiem stosowanym w analizie technicznej jest wskaźnik ROC. Informuje on o tempie zmian kursów akcji. Wyznacza się go za pomocą poniższego wzoru (Tarczyński W., 1997)⁴⁹:

$$ROC_t = \left(\frac{x_t}{x_{t-k}} - 1 \right) \times 100\% \quad (1.3)$$

gdzie:

ROC_t – oznacza wskaźnik szybkości zmiany w okresie t ,

x_t – oznacza cenę akcji na t -tej sesji,

x_{t-k} – oznacza cenę akcji na sesji o k wcześniejszej od t .

Używając wskaźnika ROC można określić poziom wykupienia/wysprzedania rynku zarówno dla konkretnego papieru wartościowego, jak i dla całego rynku. Jeżeli przez pewien czas cena akcji oraz ROC rosną to prędzej czy później dochodzi do sytuacji, gdy rynek ulegnie „wyczerpaniu”. Oznacza to, że potencjalni kupcy zaspokoili już swoje potrzeby i następuje osłabienie akcji na giełdzie. W konsekwencji trend wskaźnika ulega zmianie, w odwrotnym kierunku w stosunku do aktualnego. Jest to zjawisko związane z *wykupieniem rynku*.

Jeżeli przez jakiś okres następuje spadek wskaźnika ROC i ceny akcji to dochodzi do sytuacji odwrotnej – pojawienia się poziomu wyczerpania rynku. Na takim rynku maleje liczba inwestorów, pragnących sprzedać określone walory. Mamy wówczas do czynienia z tzw. *rynkiem wysprzedanym*.

Wyznaczając dwie poziome linie równoległe do linii zerowej będące granicami ustalonego przedziału można wyznaczyć poziom wykupienia i wysprzedania wybranego papieru wartościowego. Przecięcie linii wykupienia przez krzywą wskaźnika od góry jest sygnałem sprzedaży akcji, a przecięcie linii wysprzedania od dołu sygnałem kupna. Dla inwestora aktywnie działającego w rynku już zbliżanie się do którejkolwiek z linii staje się sygnałem do podjęcia decyzji o zakupie bądź sprzedaży⁵⁰.

Momentum, zwane inaczej *pędem*, służy do zdefiniowania stanu rynku (wykupiony/wysprzedany) na podstawie śledzenia zmian cen. Do jej wyznaczania służy wzór (Tarczyński W., 1997)⁵¹:

$$MOMENTUM = x_t - x_{t-k} \quad (1.4)$$

gdzie:

x_t – oznacza cenę akcji na t -tej sesji,

x_{t-k} – oznacza cenę akcji z notowania o k poprzedzającego t -tą sesję.

Jak wynika z powyższego wzoru, w celu wyliczenia powyższego wskaźnika należy od dzisiejszego kursu zamknięcia odjąć kurs zamknięcia sprzed k dni. Wynik jest obrazem oscylującym wokół linii średniej. Dodatkowo wartości oscylatora pokazują, że kursy są wyższe niż przed k dniami, natomiast wartości ujemne wskazują na niższe wartości kursu niż przed k dniami.

⁴⁹ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 79.

⁵⁰ Dokładne omówienie wskaźnika ROC zawierają prace: Tarczyński W.: op.cit., s. 78-85, Murphy J.J.: op.cit., s. 284-286, Czekala M.: op.cit., s. 51-53, Pring M.J.: op.cit., s. 239 i n.

⁵¹ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 91

Wskaźnik momentum mierzy prędkość lub siłę ruchu kursu. Interpretując wskaźnik należy pamiętać, iż najsilniejsze wzrosty kursów akcji zachodzą podczas zbliżania się do punktu zwrotu trendu. Znaczenie tego zjawiska polega na tym, że analityk wykresów może określić na bazie przyrostów kursów w jakim stanie znajduje się trend. W tej sytuacji istotne jest odpowiednie dobranie odstępu czasowego. Okresy od 5 do 20 dni wykorzystywane są do analiz krótkoterminowych. W przypadku linii trendu położonej powyżej linii 100 (na osi odciętych) kurs wzrósł w stosunku do okresu porównawczego, czyli mamy do czynienia z trendem wzrostowym. Wzrost kursu jest tym silniejszy, im dalej leży linia pędu od osi odciętych. Sygnały kupna i sprzedaży generowane są w przypadku, gdy linia pędu przecina średnią wokół której się waha. Ponieważ pęd określa prędkość wzrostu, możliwa jest sytuacja, że wskaźnik zacznie spadać w dodatnim zakresie, pomimo, że kurs będzie wyznaczał nowe maksima. Taka *formacja* zwana *dywergencyjną* świadczy o nadchodzącej zmianie trendu.

Wskaźnik momentum może być stosowany jako wskaźnik *overbought/oversold*. Im wyższa będzie wartość wskaźnika, tym bardziej wykupiony jest papier wartościowy, natomiast im głębiej znajduje się wartość pędu, tym bardziej rynek jest wysprzedany. W tej sytuacji przed podjęciem decyzji inwestycyjnej godne zalecenia jest poczekać na początek korekty.

Kolejną miarą umożliwiającą określenie dobrego momentu zakupu lub sprzedaży akcji jest *wskaźnik relatywnej siły RSI*. Porównuje on wewnętrzną wartość papieru wartościowego do poprzednich wartości tego samego waloru.

Wartość wskaźnika RSI można wyznaczyć za pomocą wzoru (Tarczyński W., 1997)⁵²:

$$RSI = 100 - \left(\frac{100}{1 + RS} \right), \text{ gdzie:} \quad (1.5)$$

$$RS = \frac{\text{średni wzrost kursu z } t \text{ dni}}{\text{średni spadek kursu z } t \text{ dni}} \quad (1.6)$$

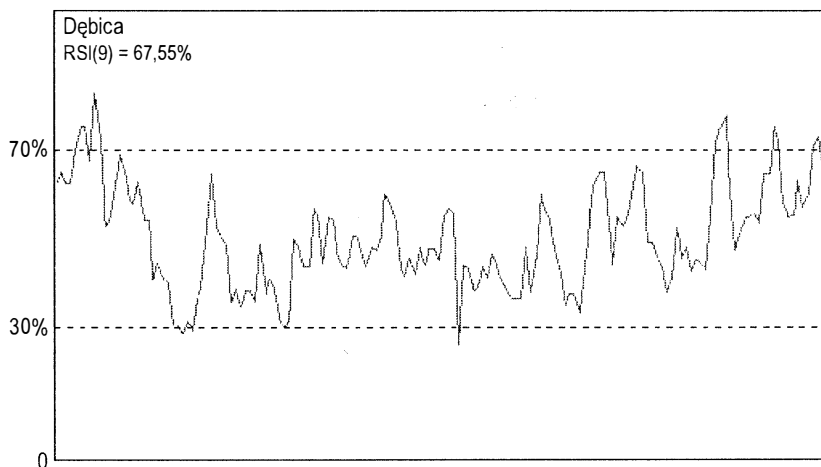
RSI pokazuje, jako oscylator, wewnętrzną siłę ruchu kursu akcji. Jeśli wartość RSI wynosi poniżej 20 (30), mówi się o rynku wysprzedanym. Przy wartości RSI powyżej 80 (70) można mówić o rynku wykupionym. Zaleca się dla liczenia RSI stosowanie okresu 14 dni. W praktyce spotyka się stosowanie okresów 9, 11 i 25 dniowych⁵³.

Często wskaźnik ten tworzy określone formacje na wykresach (rysunek 1.31), które nie występują na wykresie kursu danego waloru. RSI wskazuje często, dużo wyraźniej niż wykres bazowy, techniczne poziomy wsparcia i oporu.

⁵² Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 94

⁵³ Dokładne omówienie wskaźnika RSI można znaleźć w następujących pracach: Pring M.J.: op.cit., s. 168-175, Tarczyński W.: op.cit., s. 93-95, Czekala M.: op.cit., s. 57-60, Gately E.: op.cit., s. 59-61

Rys. 1.31 Przykład wskaźnika RSI dla spółki giełdowej Dębica od grudnia 1999 do sierpnia 2000 dla $k = 9$



Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Wartość RSI mówi o tym jak duża jest aktualnie siła trendu. Na wykresie RSI bardzo często zamieszcza się dodatkowo średnią ruchomą wyznaczoną dla wartości RSI. Jako sygnał do kupna akcji przyjmuje się między innymi przecięcie linii wysprzedania od dołu i dywergencję z kursem akcji w obszarze wysprzedania. Natomiast za sygnał do sprzedaży akcji przyjętą należy przecięcie przez wskaźnik linii wykupienia od góry i dywergencję z kursem akcji w obszarze wykupienia.

Kolejny wskaźnik OBV (on balance volume) opracowany został w 1963 roku przez J. Granville'a. Często nazywany jest wskaźnikiem bilansu, siłą bilansu lub równowagą wolumenu. OBV pokazuje napływ i odpływ gotówki z rynku giełdowego. Zakłada, że spadek ceny, który jest skutkiem wzmożonej podaży wywołuje odpływ pieniądza z giełdy, a wzrost notowań spowodowany większą siłą popytu przyczynia się do napływu pieniądza na rynek danej akcji. Wskaźnik OBV można wyrazić następującym wzorem (Tarczyński W., 1997):⁵⁴

$$OBV_t = \begin{cases} OBV_{t-1} + O_t & \text{dla } Z_t > 0 \text{ lub } Z_t = 0 \\ OBV_{t-1} - O_t & \text{dla } Z_t < 0 \text{ lub } Z_t = 0 \\ Z_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \times 100\%, t = 1, 2, \dots, t \end{cases} \quad (1.7)$$

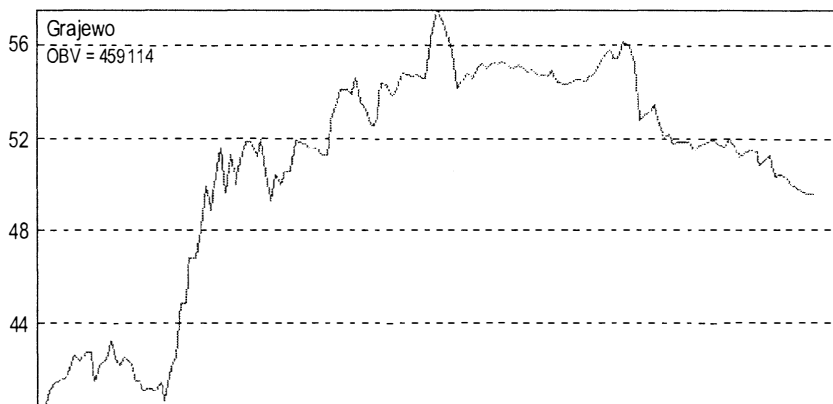
gdzie:

X_t – oznacza cenę akcji na t -tej sesji,

O_t – oznacza wartościowy wolumen obrotów na t -tej sesji.

⁵⁴ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 102

Rys. 1.32 Przykład wskaźnika OBV dla spółki Grajewo grudnia 1999 do sierpnia 2000



Źródło: opracowanie własne na podstawie programu AmiBroker.

Porównując wykres OBV (rysunek 1.32) danej spółki z wykresem kursów jej akcji można podjąć decyzję dotyczącą wejścia lub wyjścia z rynku. Jeżeli linia OBV ma ten sam trend, co linia kursu akcji to istnieje prawdopodobieństwo utrzymania się określonej tendencji na rynku. Czasami zmiany OBV wyprzedzają zmiany kursu akcji. Zmiana OBV ma dodatnią wartość, gdy cena zamknięcia jest większa od ceny zamknięcia na poprzedniej sesji. Ujemna wartość OBV występuje wówczas, gdy ceny akcji spadły w porównaniu cenami zamknięcia na poprzedniej sesji. W analizie nie jest istotne, czy OBV jest ujemne, czy dodatnie, ważne, by podążało za trendem. Jeżeli ceny zmieniają się w tym samym kierunku, a wskaźnik OBV przelamuje swój trend może oznaczać zbliżającą się zmianę tendencji w kursach. Dla przykładu, gdy kurs akcji rośnie, podczas gdy OBV spada, może to oznaczać koniec hossy i spadek kursów akcji w najbliższej przyszłości. Natomiast, gdy podczas bessy wskaźnik OBV zaczyna rosnąć, może to oznaczać koniec bessy i nadchodzącym wzrostem kursów akcji. Dla wskaźnika OBV nie jest ważna sama jego wartość, a kształt i kierunek trendu. Analizę inwestycji można rozpocząć w dowolnym momencie, przyjmując wartość początkową OBV równą zero.

W pracy omówiono w sposób skrócony podstawowe wskaźniki stosowane w analizie technicznej. Szerzej na ten temat traktują następujące pozycje (Tarczyński W., 1997⁵⁵; Achelis S.B., 1998⁵⁶; Pring M.J., 1998⁵⁷; Murphy J.J., 1995⁵⁸).

Dla analizy trendów akcji wykorzystuje się również indeksy giełdowe. W indeksach tych ceny akcji mogą być ważone wielkością obrotów przez nie realizowanych lub w podobny sposób eliminowane czy też „wzmocniane” poprzez wartość wskaźnika (Nowak K., 1998)⁵⁹.

⁵⁵ Tarczyński W.: op.cit., s. 78-120

⁵⁶ Achelis S.B.: op.cit.

⁵⁷ Pring M.J.: op.cit., s. 93-181 i 237-276

⁵⁸ Murphy J.J.: op.cit., s. 234-321

⁵⁹ Por.: Nowak K.: *Polski rynek kapitałowy*. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 1998, s. 175

Do najbardziej znanych indeksów na świecie należą: FTSE 100 (Londyn), DAX (Frankfurt), NIKKEI 225 (Tokio), HANG SENG (Hong Kong), RTS (Moskwa), PX50 (Praga), BUX (Budapeszt), DOW JONES i S & P 500 (Stany Zjednoczone). Rynek na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie odzwierciedlają między innymi: WIG, WIG-20, WIRR, NIF, MIDWIG, TECHWIG.⁶⁰

Warszawski Indeks Giełdowy (WIG) jest indeksem dochodowym, czyli na zmiany jego wartości mają wpływ oprócz zmian kursów akcji również dochody z dywidend i praw poboru. Obejmuje on akcje spółek, które były notowane na rynku podstawowym.

WIG 20 obejmuje akcje 20 spółek o największym udziale w obrocie i kapitalizacji giełdy, które były notowane na rynku podstawowym. Różni się od indeksu WIG tym, że jest on indeksem cenowym, a nie dochodowym.

MIDWIG obejmuje akcje 40 średnich spółek, które były notowane na rynku podstawowym. Jest on również indeksem cenowym, czyli nie uwzględniającym m.in. dochodów z dywidend.

WIRR jest indeksem dochodowym (podobnie, jak WIG). Obejmuje on akcje spółek, które były notowane na rynku równoległym.

TECHWIG jest indeksem cenowym. Obejmuje on akcje spółek z segmentu technologii innowacyjnych, tzw. SITECH.

NIF jest indeksem cenowym. Obejmuje on akcje narodowych funduszy inwestycyjnych.

1.2.2 Analiza fundamentalna

1.2.2.1 Istota analizy fundamentalnej

Rozwój rynku kapitałowego na świecie doprowadził do powstania dwóch szkół prognozowania rynku akcji. Podstawą jednej jest analiza techniczna, która została omówiona w punkcie 1.2.1 niniejszej pracy, drugiej zaś analiza fundamentalna. Obie szkoły znajdują zastosowanie przy ocenie opłacalności inwestycji w akcje spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie (Tarczyński W., 1997)⁶¹.

Jak podaje J.C. Ritchie (Ritchie J.C., 1997)⁶², *analiza fundamentalna zajmuje się badaniem danych historycznych dotyczących stanu gospodarki, branż i podmiotów gospodarczych oraz wykorzystaniem ich w celu określenia przyszłego funkcjonowania przedsiębiorstwa*. Analityk wykorzystuje oczekiwania dotyczące zarówno makro jak i mikroekonomii. W odniesieniu do oczekiwań makroekonomii uwzględnia się tu przyszły stan całej gospodarki oraz branży, do której należy dana firma. Natomiast oczekiwania mikroekono-

⁶⁰ Aktualnie na giełdzie warszawskiej poza wymienionymi indeksami funkcjonują tzw. indeksy branżowe odnoszące się do konkretnych branż, tj.: Banki, Handel, Budownictwo, Materiały budowlane, Szklarski, Przemysł lekki, Piwny, Spożywczy, Chemiczny, Elektromaszynowy, Telekomunikacja, Informatyka, Drzewny i papierniczy, Farmaceutyczny, Ubezpieczeniowy.

⁶¹ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 169

⁶² Por.: Ritchie J.C.: op.cit., s. 18

miczne to przede wszystkim prognozowanie dotyczące zysków, dywidend oraz wartości wewnętrznej spółki.

Do określenia atrakcyjności poszczególnych akcji służy przede wszystkim porównanie oczekiwanej stopy zwrotu ze względnym poziomem ryzyka inwestycyjnego. Aby wyznaczyć powyższe wielkości należy przeprowadzić analizę finansową konkretnej spółki.

Analiza finansowa wykorzystuje nie tylko zależności określające sytuację finansową firmy w danym momencie, ale również trendy rządzące tymi zależnościami na przestrzeni czasu. *Skład i płynność środków przedsiębiorstwa, jego struktura kapitałowa oraz sposób wykorzystania dźwigni finansowej, pozycja pod względem konkurencji, zyski przedsiębiorstwa, wszystkie te czynniki są badane w celu określenia wpływu na funkcjonowanie spółki w przyszłości* (Ritchie J. C., 1997)⁶³.

Analiza fundamentalna, w przeciwieństwie do *analizy technicznej*, opiera się przede wszystkim na ocenie firmy emitującej akcje, a nie na ocenie aktualnego kursu akcji. Fundamentalisci kierują się zasadą, która mówi, że pierwszym krokiem jest dokładne zbadanie rynku, a kolejnym jest inwestowanie na nim. W tym celu studiują wyniki finansowe spółek, prospekty emisyjne, nie zaniebują takich czynników, jak sytuacja polityczna i gospodarcza kraju czy koniunktura międzynarodowa. Pamiętają, że żadne przedsiębiorstwo nie jest samotną wyspą – nie działa w oderwaniu od konkurentów ani ogólnej sytuacji rynkowej. Każda spółka posiada własne otoczenie, które stanowi zbiór jej szans i zagrożeń. Celem jest oczywiście wyszukanie takiej spółki, która ma dobre podstawy (fundamenty – stąd nazwa metody) pomyślnego i trwałego rozwoju. Rozwój firmy powoduje, że jej wartość jeśli nie w krótkim, to przynajmniej w długim okresie wzrasta, a wraz ze zwiększeniem wartości firmy wzrasta też cena jej akcji. Analizę fundamentalną najczęściej stosuje się dla inwestycji długoterminowych (obejmujących okres dłuższy niż 3 miesiące). O opłacalności inwestycji decydują wyniki spółki, możliwości jej rozwoju, pozycja na rynku. Doskonałym wariantem byłoby wyszukanie firm lub branż rozwojowych, które przynoszą zyski, a co za tym idzie – odpowiednio duże dywidendy oraz wzrost cen akcji (Baryłko B., Mikos J., 1994)⁶⁴.

W *analizie fundamentalnej* należy opierać się na tzw. udokumentowanej przeszłości. Na podstawie opublikowanych sprawozdań finansowych firm, raportów itp. możliwe jest przewidzenie przyszłości. Dążeniem fundamentalisty jest inwestycja w takie akcje, które mają niższy kurs niż wynikałoby to z kondycji finansowej przedsiębiorstw, a więc których cena prawdopodobnie wzrośnie. W praktyce konieczne jest pewne ograniczenie do stałej liczby kryteriów, takich samych w przypadku wszystkich firm, bez względu na ich profil czy wielkość. Nie ma reguły na liczbę takich kryteriów oceny firmy. Z jednej strony zbyt mała ich liczba może spowodować, że w analizie zabraknie istotnego szczegółu. Z kolei przekroczenie krytycznej liczby kryteriów prowadzi do utraty czytelności. Na GPW w Warszawie inwestorzy szczególną uwagę przywiązują do zysku netto spółki. Jak wynika z obserwacji rynku, w przypadku, gdy firma osiągnęła w danym okresie (roku, kwartale, miesiącu) zysk netto znacznie wyższy niż w takim samym okresie w przeszłości, to bez względu na przyczynę tego wzrostu, prawie zawsze następował wzrost cen jej akcji. Inne wyniki nie miały tak wielkiego znaczenia. Żaden jednak z czynników oceny spółki nie może być analizowany bez uwzględnienia innych elementów, gdyż mimo swej wagi, rozpatrywane w oderwaniu nie dadzą pełnej informacji. Należałoby dane te porównać z analo-

⁶³ Por.: Ritchie J.C.: op.cit., s. 19

⁶⁴ Por.: Baryłko B., Mikos J.: op.cit., s. 55-56

gicznymi danymi innych spółek, a także powiązać z innymi danymi, takimi jak, na przykład kapitał własny spółki, przychody ze sprzedaży netto, zysk brutto, oraz np. z wysokością inflacji⁶⁵.

Jak z powyższego wynika, analiza fundamentalna stanowi jedną z podstawowych metod oceny opłacalności inwestycji w papiery wartościowe dla inwestorów, którzy lokują pieniądze w akcje na dłuższy okres czasu (dłuższy niż trzy miesiące). Taki rodzaj analiz sprowadza się do określenia rzeczywistej (wewnętrznej) wartości akcji. Wartość taka stanowi podstawę do porównania z kursem giełdowym, który z kolei wynika z relacji podaży i popytu na akcje w danym momencie. Podstawowe założenia analizy fundamentalnej, to przyjęcie, że głównym celem postępowania inwestorów jest maksymalizacja dochodów oraz, że odchylenia między wewnętrzną wartością akcji i kursem giełdowym są podstawą do podejmowania decyzji inwestycyjnych (Tarczyński W., 1997)⁶⁶.

Jak podaje J.J. Murphy (Murphy J. J., 1996)⁶⁷, *analiza fundamentalna zajmuje się gospodarczymi uwarunkowaniami popytu i podaży, które są przyczyną wzrostów, spadków lub stabilizacji cen. Przy podejściu fundamentalnym bada się wszystkie czynniki oddziałujące na cenę danego towaru w celu określenia jego rzeczywistej wartości. Wartość ta uzależniona jest od popytu i podaży.*

Inwestor przy podejmowaniu decyzji dotyczących zakupu lub sprzedaży akcji porównuje bieżącą cenę akcji na giełdzie z jej wewnętrzną wartością (rysunek 1.33). W przypadku, gdy wartość wewnętrzna akcji osiąga wyższy poziom niż jej cena rynkowa, należy podjąć decyzję dotyczącą zakupu danego waloru (mamy sytuację niedowartościowania akcji). W odwrotnym przypadku, czyli jeżeli wartość rynkowa jest wyższa niż wewnętrzna wartość akcji, należy podjąć decyzję dotyczącą sprzedaży danego waloru (mamy sytuację przewartościowania akcji).

Powyższą sytuację prezentuje rysunek 1.33, gdzie literami N i P oznaczono odchylenia między kursem giełdowym a wewnętrzną wartością akcji. Obszar oznaczony literą N informuje o niedowartościowaniu akcji na giełdzie, P o jej przewartościowaniu.

Analizując rysunek 1.33 można stwierdzić, iż w okresie od t2 do t3 wewnętrzna wartość akcji kształtuje się powyżej ceny rynkowej, która jest atrakcyjna dla inwestora (jest to sygnał kupna danej akcji). Okres obejmujący przedział od t1 do t2 charakteryzuje się niższą wartością wewnętrzną danej akcji od jej ceny rynkowej (jest to sygnał sprzedaży danej akcji). Odcinki od t1 do t2 i t2 do t3 dotyczą co najmniej okresów kwartalnych.⁶⁸

Jak podaje J. Socha (Socha J., 1998)⁶⁹, *źródłami informacyjnymi używanymi w analizie fundamentalnej są: prospekt emisyjny, roczny raport, analizy rynkowe, przygotowane przez analityków wskaźniki. W analizie należy wielkości absolutne zamienić na procentowe, udziałowe, a następnie sprawdzić odchylenia i trend.*

Oczywiście do przeprowadzenia analizy fundamentalnej lepsze będą bardziej szczegółowe informacje i tak raporty nie roczne a okresowe (miesięczne lub kwartalne), bilans, rachunek zysków i strat, rachunek przepływów finansowych.

Wykorzystując analizę fundamentalną, należy mieć na uwadze, że opierając się na wielkościach z przeszłości, prognozujemy zmiany w przyszłości. Podstawowa charaktery-

⁶⁵ Problematykę tą szczegółowo omówili Baryłko B., Mikos J.: op.cit.

⁶⁶ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 169-170

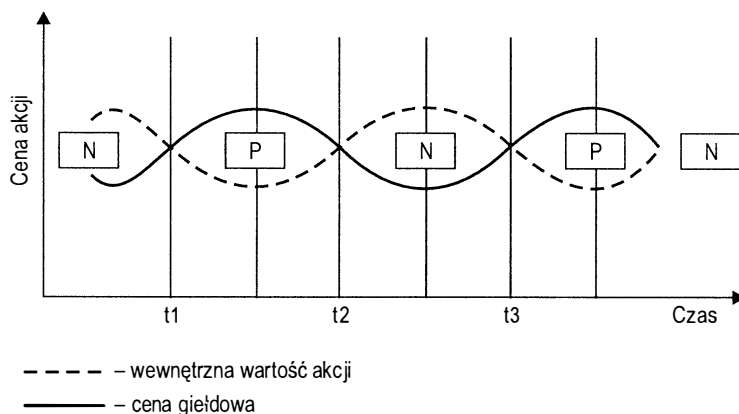
⁶⁷ Podano za J.J. Murphy.: op.cit., s. 5

⁶⁸ Zwrócił uwagę na ten problem Tarczyński W.: op.cit., s. 170-171

⁶⁹ Podano za J. Socha.: op.cit., s. 268

styka firmy zmienia się w czasie. Zmiany te dotyczą wytwarzanego zestawu produktów, ukształtowanej struktury kapitałowej oraz łączenie się spółek. Ważnym problemem jest oszacowanie wpływu tych zmian na przepływy gotówkowe spółki oraz wartości jej akcji. Jest to możliwe dzięki instrumentom analizy fundamentalnej.

Rys. 1.33 Kształtowanie się kursu giełdowego akcji i jej wewnętrznej wartości



Źródło: na podstawie (Tarczyński W., 1997).

Analiza fundamentalna polega na badaniu czynników ekonomicznych, które wpływają na zachowanie się kursów papierów wartościowych na poziomie: kraju i jego otoczenia, branży oraz przedsiębiorstwa.

Reasumując powyższe rozważania można powiedzieć, że celem analizy papierów jest selekcja i sklasyfikowanie aktywów finansowych pod względem jakości inwestycyjnej i oczekiwanej stopy zwrotu. Analityk papierów wartościowych analizuje stan gospodarki oraz poszczególnych branż do prognozowania zysków, dywidend i wartości wewnętrznej konkretnych spółek. Szacunki oczekiwanej stopy zwrotu oraz względnego poziomu ryzyka służą jemu jako punkty odniesienia dla określenia atrakcyjności konkretnego papieru wartościowego. Taki sposób analizy inwestycji nazywany jest analizą fundamentalną (Ritchie J.C., 1997)⁷⁰.

1.2.2.2

Analiza makroekonomiczna

Analiza makroekonomiczna stanowi główny element *analizy fundamentalnej*. Jak już w pracy pisano, wykorzystywana jest do badania opłacalności inwestycji na giełdzie. Zasadniczą jej wadą jest to, że jest ona prowadzona na podstawie danych historycznych a jej wyniki są podstawą do budowania przyszłościowych prognoz, stąd jej znaczenie jest bardzo ważne.

⁷⁰ Por.: Ritchie J.C.: op.cit., s. 19

Analiza makroekonomiczna składa się z trzech etapów (Gierszewska G., Romanowska M.; 1995)⁷¹:

- *analizy sytuacji polityczno – ekonomicznych w kraju,*
- *analizy sytuacji monetarnej w kraju,*
- *analizy branż.*

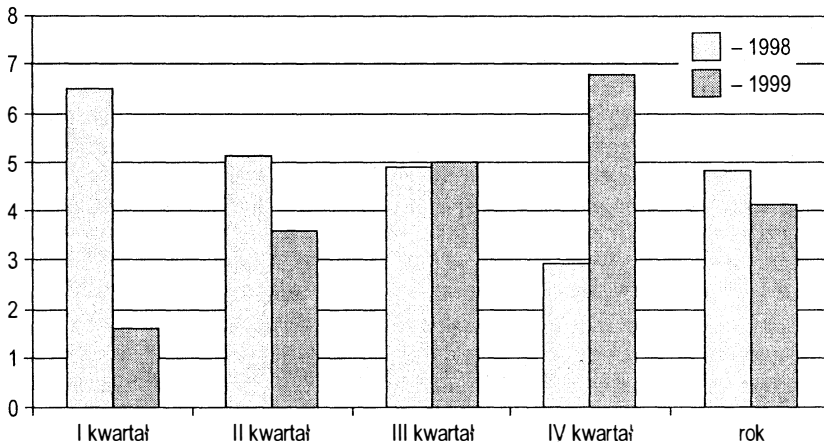
Istnieje bardzo dużo różnorodnych czynników, które wpływają na kształtowanie się kursów na giełdzie pozytywnie bądź negatywnie. Uważa się, że *analiza sytuacji polityczno – gospodarczej* prowadzi do oceny ryzyka systematycznego, uzależnionego od rozwoju rynku. Często można spotkać się z poglądem, iż giełda jest odbiciem zdarzeń gospodarczych w kraju.

Najbardziej ogólną miarą aktywności gospodarczej danego kraju jest Produkt Krajowy Brutto (PKB), który określa łączną wartość dóbr i usług wytworzonych w gospodarce tego kraju (Ritchie J. C., 1997)⁷².

Na rysunku 1.34 przedstawiono tempo wzrostu PKB w poszczególnych kwartałach 1998 i 1999 roku.

Z rysunku wynika, iż wartość PKB w 1999 roku wynosi 4,1% w porównaniu do roku 1998, gdzie wartość PKB kształtowała się na poziomie 4,8%. Osłabienie tempa wzrostu popytu krajowego wiązało się ze zmniejszeniem nakładu brutto na środki trwałe. Tempo inwestowania było wyższe od wzrostu PKB, ale znacznie niższe niż w 1998 roku. Jednak Polska w dalszym ciągu jest postrzegana jako atrakcyjny kraj dla inwestorów zagranicznych.

Rys. 1.34 Procentowe ujęcie Produktu Krajowego Brutto w poszczególnych kwartałach w Polsce



Źródło: na podstawie danych Głównego Urzędu Statystycznego 1999 r.

⁷¹ Gierszewska G., Romanowska M.: *Analiza strategiczna przedsiębiorstw*. PWE, Warszawa 1995, s. 38

⁷² Por.: Ritchie J.C.: op.cit., s. 62

Korzystne zdarzenia gospodarcze w kraju są przyczyną tendencji zwykłej na giełdzie i odwrotnie. Przeprowadzone badania prowadzą jednak do innych wniosków, okazuje się, że kształtowanie się kursów na giełdzie wyprzedza sytuację gospodarczą w kraju od sześciu do dwunastu miesięcy. Jest to z pewnością konsekwencją cyklicznego rozwoju każdej gospodarki. Owa cykliczność rozwoju polega na tym, iż po okresie wzrostu gospodarczego pojawia się okres stagnacji i spadku i odwrotnie, po okresie spadku pojawia się okres wzrostu gospodarczego. Sytuacja taka doprowadza do rozwoju gospodarczego kraju.

Oprócz faz cyklu gospodarczego czynnikami mającymi wpływ na cenę kształtowania się akcji na giełdzie są czynniki związane z sytuacją polityczno-gospodarczą danego kraju.⁷³

Wyróżnione powyżej czynniki mają istotne znaczenie dla trendów cen giełdowych.

Mankamentem analizy sytuacji polityczno-gospodarczej jest, pomimo równego dostępu do źródeł informacji, niejednoznaczność stawianych prognoz. Powstające różnice mają wielorakie przyczyny (Heese V., 1996)⁷⁴.

Przy różnorodnym wpływie wyżej wymienionych czynników dochodzi często do innego oszacowania ich natężenia; trudno przewidzieć, jaki czynnik będzie miał wpływ decydujący.

Kolejny etap analizy makroekonomicznej obejmuje sytuację monetarną w kraju. Sytuacja monetarna zależy od kilku czynników, takich jak: faza cyklu gospodarczego, w jakim znajduje się kraj, sytuacji gospodarczej, stopnia niezależności poziomu inflacji oraz działalności Banku Centralnego. Najważniejszym elementem analizy monetarnej jest przyrost pieniądza i zmniejszenie jego podaży. Kiedy na rynku jest dużo taniego pieniądza popyt na papiery wartościowe rośnie i ceny akcji wzrastają. Natomiast popyt na papiery wartościowe spada i maleją ceny akcji, gdy na rynku jest mało pieniądza i jest drogi. Wtedy zazwyczaj rosną ceny obligacji.

Duży wpływ na sytuację monetarną kraju ma wysokość stóp procentowych. Podwyższenie stóp procentowych świadczy o złej sytuacji w gospodarce a tym samym spadku zainteresowania inwestycjami w papiery wartościowe. Odwrotnie, obniżanie stóp procentowych zachęca do inwestycji w papiery wartościowe.

Ogromne znaczenie dla sytuacji monetarnej ma poziom inflacji. Stopa inflacji, jej tendencja rozwojowa i prognoza na przyszłość, jest podstawą do oceny sytuacji monetarnej kraju. Do jego prognozowania wykorzystuje się dane historyczne oraz zamierzenia strategiczne rządu. Analizując warunki monetarne bada się podaż pieniędzy, kształtowanie się stopy procentowej, poziom zadłużenia i rezerwę monetarną.⁷⁵

Kolejnym etapem analizy makroekonomicznej jest poszukiwanie wiodących branż. Branża obejmuje grupę przedsiębiorstw, wytwarzających produkty będące substytutami.

Celem analizy branżowej jest wybór branż o dużych szansach rozwoju, które pozwalają na uzyskanie wysokich dochodów z inwestycji. Przeprowadzenie takiego wyboru wymaga oceny między innymi następujących elementów (Głowacki M., 1995)⁷⁶:

- *wrażliwości branży na czynniki makroekonomiczne,*

⁷³ Szerzej o tym pisze Tarczyński W.: op.cit., s. 299

⁷⁴ Problem ten szczegółowo omawia Heese V.: *Analiza fundamentalna rynku akcji stosowana w bankach niemieckich*. Artex, Gdańsk 1996, s. 26

⁷⁵ Szerzej na temat rezerwy monetarnej pisze Tarczyński W.: op.cit., s. 300

⁷⁶ Podano za Głowacki M.: *Analiza fundamentalna. Bank i Kredyt* 7-8/1995, s. 2

- *fazy cyklu życia branży (wprowadzenie, wzrost, dojrzałość, nasycenie, spadek),*
- *stabilności zysków i rentowności branży, potencjału branży (perspektywy rozwoju, nowe rynki zbytu, nowe produkty, produkty substytucyjne),*
- *struktury popytu (rodzaj odbiorców i ryzyko ich utraty),*
- *stopnia konkurencyjności w branży (bariery wejścia i wyjścia),*
- *zaostrzenia w surowce dla branży (siła negocjacyjna dostawców),*
- *wpływu na środowisko naturalne.*

Jak z powyższego wynika analiza branżowa pozwala na rozpoznanie głównych szans i zagrożeń dla podmiotów w niej działających. Dzięki temu możliwe jest dokonanie prognozy ryzyka i oczekiwanego zysku z inwestycji w określoną branżę.

Ważnym czynnikiem, o którym nie wspomniano wcześniej jest rozwój technologiczny, który może spowodować trwałe trendy makroekonomiczne, które w wieloletnich okresach powodują, że niektóre branże są bardziej zyskowne niż inne, np. od połowy lat 70-tych do końca 80-tych, dzięki rozwojowi fizyki ciała stałego nastąpił gwałtowny rozwój elektroniki i inwestycje w tę branżę dawały dużo większe zyski niż inne.

Podobnie, obecnie rozwój sieci elektronicznych, a zwłaszcza Internetu, spowodował olbrzymi wzrost zainteresowania firmami komputerowymi, pomimo, że często są to firmy nowe, nie osiągające dużych zysków. Akcje takich firm są zazwyczaj przewartościowane a osiągnane wyniki często sprzeczne z realiami ekonomicznymi. Duże zainteresowanie spółkami internetowymi miało miejsce na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w lutym 2000 roku.

Istotną rolę w branży odgrywa konkurencja. Przedsiębiorstwo ustalając strategię maksymalizacji zysku musi brać pod uwagę warunki konkurencyjne, które mogą mu zagrażać. Rolę wzorca, wobec którego otoczenie, w jakim firma prowadzi swą działalność spełniają wg Michaela E. Portera następujące czynniki (Klein P. J., 1999)⁷⁷:

- *pozycja przetargowa klientów i dostawców,*
- *zagrożenie ze strony nowych firm,*
- *zagrożenie ze strony substytucyjnych produktów lub usług,*
- *rywalizacja pomiędzy firmami z branży.*

Powyższe czynniki oddziałują na siebie wzajemnie i wyznaczają warunki zyskowności danego sektora. Od analityka oczekuje się przeanalizowania sytuacji panującej w branży, w której działa dane przedsiębiorstwo, w celu zidentyfikowania tych sił, które oddziałują (lub mogą oddziaływać) na zdolność firmy do uzyskiwania wysokiej rentowności. Inaczej jest w przypadku spółek, będących monopolistą na rynku. Dla działalności rozwojowej takiej spółki konkurencja nie odgrywa istotnego znaczenia.

1.2.2.3 Wskaźnikowa analiza rynku

Analiza wskaźnikowa odgrywa istotne znaczenie w analizie fundamentalnej. W praktyce jest ona traktowana jako dział analizy ekonomicznej, zwany analizą finansową. Analiza finansowa zajmuje się metodami, procedurami i technikami postępowania badawczego oraz tworzeniem zasad posługiwania się nimi w badaniach zjawisk należących

⁷⁷ Klein P.J.: *Wstęp do analizy papierów wartościowych*. Liber, Warszawa 1999, s. 120

do gospodarki finansowej w przedsiębiorstwie. Rezultaty takiej analizy mają dużą wartość poznawczą i użytkową, zarówno dla kierownictwa firmy, jak i inwestorów giełdowych. Kierownictwo firmy wykorzystuje wyniki analizy do zarządzania gospodarką finansową, wyboru strategii działania (analiza wskaźnikowa pomaga określić możliwości firmy), prowadzenia bieżącej działalności. Z kolei inwestorzy mogą poznać kondycję finansową firmy i ocenić jej wiarygodność, co pozwala im trafnie podjąć decyzje inwestycyjne (Tarczyński W., 1997)⁷⁸.

Głównymi źródłami danych są: *bilans, rachunek zysków i strat, rachunki przepływów pieniężnych*. Zaś aktem prawnym, który reguluje zasady sporządzania powyższych sprawozdań jest *Ustawa o rachunkowości*.

Obliczone na podstawie danych wskaźniki porównuje się z takimi samymi wskaźnikami dla innych firm, branż, rynku i sprawdza jak kształtowały się one w czasie dla tej jednej firmy.

Z punktu widzenia W. Tarczyńskiego (Tarczyński W., 1997)⁷⁹, *porównania w czasie polegają na odniesieniu wartości wskaźnika do takiego samego wskaźnika wyznaczonego dla tej samej firmy we wcześniejszym lub późniejszym okresie (w przypadku prognozy)*. Porównania czasowe trudno jest zobiektywizować w polskiej rzeczywistości, gdyż Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie działa od 1991 roku i jest młodą giełdą. Jednak obserwacja tendencji wartości wskaźnika w kolejnych okresach dostarcza informacji o kierunkach zachodzących zmian.

W warunkach Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie łatwiejszy jest sposób porównania w przestrzeni, które polegają na porównywaniu wskaźników jednej spółki z takimi samymi wskaźnikami innej spółki z tej samej branży lub z wartościami tych wskaźników wyznaczonymi dla całej branży (Tarczyński W., 1997)⁸⁰.

Zbyt wysoki lub niski poziom wskaźnika zwraca uwagę na możliwości wystąpienia potencjalnych zagrożeń dla dalszego funkcjonowania firmy.

Do podstawowych wskaźników wykorzystywanych w analizie fundamentalnej zliczyć można: *grupę wskaźników rentowności, płynności, aktywności, wskaźniki określające sytuację spółki na rynku*. Zostaną one omówione w kolejnych punktach pracy.

1.2.2.3.1 Wskaźniki mierzące rentowność przedsiębiorstwa

Wskaźniki rentowności służą do badania szybkości zwrotu zaangażowanego w firmie kapitału, a co się z tym wiąże efektywności działania przedsiębiorstwa. W praktyce wyróżnia się następujące obszary badania rentowności (Tarczyński W., 1997)⁸¹:

- wskaźniki dotyczące rentowności sprzedaży,
- wskaźniki dotyczące rentowności aktywów (majątku),
- wskaźniki dotyczące rentowności finansowej.

Do badania rentowności stosuje się wskaźnik rentowności sprzedaży brutto (wrsb) i sprzedaży netto (wrsn) (Tarczyński W., 1997)⁸².

⁷⁸ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 205

⁷⁹ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 206

⁸⁰ Problematykę tą szerzej omawia Tarczyński W.: op.cit., s. 205-206

⁸¹ Tarczyński W.: op.cit., s. 230

⁸² Tarczyński W.: op.cit., s. 231, Czekala M.: op.cit., s. 114-115

$$\text{wrsb} = \frac{\text{zysk brutto}}{\text{sprzedaż netto}} \quad (1.8)$$

Wskaźnik powyższy mierzy i określa politykę cenową firmy w stosunku do kosztów produkcji. Służy on także do kontrolowania i absorbowania wzrostu cen. Im wyższe koszty produkcji tym niższy wskaźnik. Oczywiście im wyższy poziom wskaźnika tym lepsza ocena firmy.

$$\text{wrsn} = \frac{\text{zysk netto}}{\text{sprzedaż netto}} \quad (1.9)$$

Wskaźnik powyższy mierzy zyskowność spółki po uwzględnieniu wszystkich wydatków związanych z dostarczaniem towaru lub usług dla klientów. Ten wskaźnik informuje, jaka część utargu zamienia się w zysk. Niska wartość tego wskaźnika oznacza, że należy więcej sprzedać aby uzyskać określoną kwotę zysku. Wysoka wartość wskaźnika jest informacją o korzystnej kondycji finansowej przedsiębiorstwa. Jeśli zamiast zysku netto podstawimy do wzoru zysk operacyjny otrzymamy wskaźnik rentowności operacyjnej. Nie uwzględnia on kosztów operacji finansowych i podatków. Jeżeli jest niski, spółka może mieć kłopoty ze spłatą odsetek od kredytów. Wysoki wskaźnik oznacza że, spółka ma możliwości zachowania płynności⁸³.

W analizie rentowności aktywów badany jest wskaźnik rentowności aktywów netto (wra), nazwany inaczej wskaźnikiem zwrotu z majątku. Wyznacza się go według następującej formuły (Tarczyński W., 1997)⁸⁴:

$$\text{wra} = \frac{\text{zysk netto}}{\text{aktywa}} \quad (1.10)$$

Wskaźnik powyższy pokazuje całkowity zysk spółki w relacji do wielkości inwestycji w aktywa. Informuje on o wykorzystaniu majątku przez spółkę. Podobnie jak wiele innych wskaźników w analizie fundamentalnej, należy go oceniać zarówno w kontekście innych podmiotów w branży, jak i w stosunku do wyników wcześniejszych. Jeżeli jest zbyt niski, to znaczy, że wykorzystanie majątku spółki jest złe. Tak samo jak inne wskaźniki rentowności, im jest wyższy, tym lepiej, świadczy to o rozwoju firmy i efektywnym zarządzaniu swoimi aktywami. Najważniejszy dla inwestora jest *wskaźnik rentowności kapitału własnego*. Jest on relacją zysku netto do kapitałów własnych. Informuje on czy spółka w swojej działalności nastawiona jest na zysk w krótkim okresie, czy poprzez inwestycje, osiąganie zysku rozkłada w czasie. Jeśli plan działania zakłada szybkie generowanie zysku jest to polityka niekorzystna dla spółki, ponieważ oznacza ona zaniedbanie inwestycji i wątpliwy rozwój spółki. Analizując wskaźnik rentowności kapitału własnego, należy przede wszystkim ocenić jego zmiany w długim okresie. Wzrost wartości wskaźnika, oznacza, że spółka prowadzi właściwą politykę inwestycyjną (Socha J., 1998)⁸⁵.

⁸³ Problematyką wskaźników rentowności szczegółowo omówili: Tarczyński W.: op.cit., s. 230-239, Socha J.: op.cit., s. 270-272, Baryłko B., Mikos J.: op.cit., s. 66-67

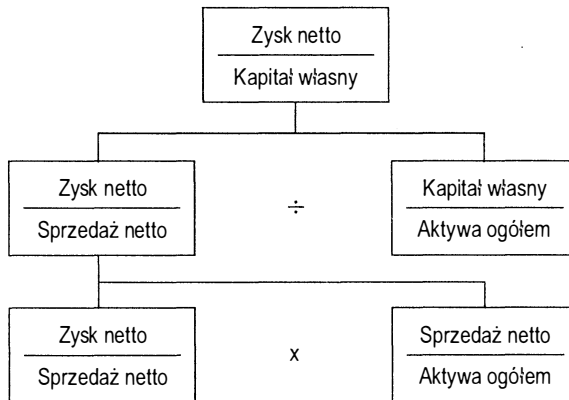
⁸⁴ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 231

⁸⁵ Por.: Socha J.: op.cit., s. 271-272

Działalność strategiczna spółki powinna polegać na maksymalizacji powyższego wskaźnika ponad przeciętną stopę procentową. Wskaźnik niższy niż stopa procentowa oznacza, że bardziej opłaca się inwestować kapitał w banku, niż inwestować w spółkę. W celu lepszego określenia pozycji spółki wskaźnik rentowności kapitału porównuje się z kosztem kapitału. Jeżeli wskaźnik jest niższy niż koszt kapitału, to spółkę więcej kosztuje utrzymanie kapitału, niż wynosi jego rentowność i jest to sytuacja niekorzystna. Aby podnieść rentowność kapitału spółka może obniżyć wielkość kapitału własnego przez umorzenie lub zwiększyć osiągane zyski. Sposobem na zwiększenie zysku dane spółki jest zastosowanie dźwigni finansowej.

Efekt dźwigni finansowej w firmie można ocenić za pomocą wzoru na przyrost rentowności kapitału. Ponieważ na poziom wskaźnika rentowności kapitału mają wpływ różne elementy, a jego wartość może zależeć zarówno od różnicy między wskaźnikiem rentowności kapitału całkowitego a stopą płaconych odsetek, jak i od struktury kapitału (udziału kapitału własnego w kapitale ogółem), analizie poddaje się również relację zwaną modelem analizy wskaźnikowej Du Ponta. Relację tę zaprezentowano na rysunku 1.35.

Rys. 1.35 Schemat analizy wskaźnikowej według Du Ponta



Źródło: na podstawie (Tarczyński W., 1997).

Z formuły Du Ponta wynika, że najważniejszymi czynnikami, które kształtują rentowność kapitału własnego są: *rentowność sprzedaży netto*, *rentowność aktywów ogółem* i *stopień wspomagania finansowego czyli struktura kapitału*. Znajomość powyższego schematu jest niezbędna w określaniu przyczyn zmian w rentowności kapitału własnego oraz w badaniu natężenia i siły działania określonych przyczyn.

1.2.2.3.2 Wskaźniki oceniające płynność i zadłużenie przedsiębiorstwa

Płynność finansowa obok zysku jest również ważną cechą charakteryzującą jednostkę gospodarczą i oznacza zdolność firmy do wywiązywania się z krótkoterminowych i długoterminowych zobowiązań. Utrata płynności wywołuje realną groźbę zachwiania ciągłości funkcjonowania przedsiębiorstwa. Płynność finansowa spółki oceniana jest na podstawie następujących miar: *wskaźnika bieżącej płynności*, *szybkiej płynności* i *wskaźnika podwyższonej płynności*.

Wskaźnik bieżącej płynności (wb) oblicza się za pomocą poniższego wzoru (Socha J., 1998)⁸⁶:

$$wb = \frac{\text{aktywa bieżące}}{\text{zobowiązania bieżące}} \quad (1.11)$$

Wskaźnik ten określa zdolność firmy do pokrywania zobowiązań w terminie. Informuje on, w jakim stopniu bieżące aktywa pokrywają zobowiązania tzn. ile złotych kwot przypadają na złotówkę zobowiązań bieżących. Wartość tego wskaźnika powinna być większa od 1 lub według niektórych specjalistów oscylować w okolicach 2.

Niższy poziom wskaźnika może świadczyć o trudnościach czasowego regulowania wymaganych zobowiązań. Natomiast zbyt wysoki poziom tego wskaźnika, wskazuje na nadmierne zamrożenie środków obrotowych (Lechowicz A., Mączka W., 1994)⁸⁷.

Inną miarą płynności jest *wskaźnik płynności szybki* (ws) (Socha J., 1998)⁸⁸:

$$ws = \frac{\text{aktywa bieżące} - \text{zapasy}}{\text{zobowiązania bieżące}} \quad (1.12)$$

Powyższy wskaźnik pokazuje stopień pokrycia zobowiązań krótkoterminowych aktywami o dużym stopniu płynności – gotówką, zbywalnymi papierami wartościowymi, należnościami. Od wysokości aktywów bieżących w liczniku odejmuje się zapasy, ponieważ są one mniej płynne. Wskaźnik ten jest znacznie dokładniejszy, niż poprzedni. W praktyce za zadowalający przyjmuje się poziom wskaźnika w przedziale 1,0 – 1,3. Oczywiście im wyższy poziom tego składnika tym lepiej. Jeżeli wskaźnik przybiera wartość poniżej 1, to oznacza, że podmiot może mieć trudności w szybkim zaspokojeniu roszczeń wierzycieli.

Wskaźnik podwyższonej płynności (wpp) określa niższa zależność (Tarczyński W., 1997)⁸⁹.

$$wpp = \frac{\text{aktywa bieżące} - \text{zapasy} - \text{należności}}{\text{zobowiązania bieżące}} \quad (1.13)$$

Określa on zdolność spółki do spłacenia bieżących zobowiązań z uwzględnieniem najbardziej płynnych aktywów, których zdolność do regulacji zobowiązań jest natychmiastowa lub prawie natychmiastowa. Dla tego wskaźnika nie określa się wartości granicznych, ponieważ z jednej strony zupełny brak środków pieniężnych w danym momencie nie musi oznaczać sytuacji alarmowej, ale z drugiej strony ich nadmiar nie jest racjonalny i nie świadczy dobrze o firmie.

Jednym z podstawowych sposobów wspomaganie finansowego firmy jest jej zadłużenie. Zadłużenie firmy w gospodarce rynkowej nie jest zjawiskiem negatywnym, lecz sposobem na uzupełnienie kapitału zaangażowanego w jej działalność.

⁸⁶ Socha J.: op.cit., s. 275, pisze o tym również Tarczyński W.: op.cit., s. 207

⁸⁷ Por.: Lechowicz A., Mączka W.: op.cit., s. 106

⁸⁸ Socha J.: op.cit., s. 275

⁸⁹ Pisze o tym m.in. Tarczyński W.: op.cit., s. 208-209

Wyróżnia się dwie grupy wskaźników wykorzystywanych do oceny zadłużenia firmy. Pierwsza, to wskaźniki opisujące poziom zadłużenia przedsiębiorstwa, natomiast druga to wskaźniki pokazujące zdolność przedsiębiorstwa do obsługi długu.

Ogólny wzór na zadłużenie ma postać (Socha J., 1998)⁹⁰:

$$wz = \frac{\text{zobowiązania}}{\text{aktywa}} \quad (1.14)$$

Wskaźnik pozwala ustalić stopień zabezpieczenia spłaty całego zadłużenia majątkiem przedsiębiorstwa. Informuje on o udziale kapitału obcego w finansowaniu majątku przedsiębiorstwa. Na jego podstawie można wyciągnąć różne wnioski. Niski wskaźnik zadłużenia jest pożądanym dla kredytodawców i inwestorów giełdowych, gdyż oznacza mniejsze ryzyko i lepsze zabezpieczenie powierzonych pieniędzy. Jednak właściciele firmy często dążą do wysokiego wskaźnika zadłużenia, gdyż zwiększenie dochodu kosztem kapitału obcego zwiększa ich zyski⁹¹.

Z punktu widzenia P.J. Kleina (Klein P.J., 1999)⁹², *optymalny poziom zadłużenia zależy od wielu różnych czynników: perspektywy branży, aktualnej sytuacji firmy, ograniczeń w zakresie strumieni pieniężnych*. Według standardów zachodnich firma jest stabilna, jeżeli wskaźnik zadłużenia mieści się w przedziale 0,57 – 0,67 (Tarczyński W., 1997)⁹³.

Następnym wskaźnikiem jest *wskaźnik pokrycia obsługi długu*. Informuje on, ile razy zysk danej spółki pokrywa roczne spłaty kredytu długoterminowego i odsetki od niego.

Wskaźnik pokrycia obsługi długu (wpd) można przedstawić za pomocą poniższej zależności (Tarczyński W., 1997)⁹⁴:

$$wpd = \frac{\text{zysk brutto} + \text{odsetki}}{\text{raty kapitałowe} + \text{odsetki}} \quad (1.15)$$

Na podstawie wyżej wymienionego wskaźnika można określić stopień obsługi kredytu przez wygospodarowany w przedsiębiorstwie zysk. Wadą omawianego wskaźnika jest to, że nie uwzględnia on spłaty samego długu, która jest ważniejsza dla wiarygodności finansowej firmy, niż spłata samych odsetek. Innym mankamentem tego wskaźnika jest fakt, że wiąże koszty odsetek z zyskiem, a jak pokazuje praktyka, zapłata odsetek następuje nie z zysku ewidencyjnego lecz z wpływu gotówki.

Jak pokazuje M. Czeakała (Czeakała M., 1998)⁹⁵, *wskaźnik obsługi długu jest wskaźnikiem o charakterze ostrzegawczym. W normalnie funkcjonującym przedsiębiorstwie jego wartość musi być większa od 1, w przeciwnym razie przedsiębiorstwo nie jest w stanie obsługiwać nawet odsetek od długu*.

⁹⁰ Socha J.: op.cit., s. 275

⁹¹ Problematykę tą w sposób szczegółowy omawiają m.in.: Tarczyński W.: op.cit., s. 212-213, Socha J.: op.cit., s. 275-276, Baryłko B., Mikos J.: op.cit., s. 68-69

⁹² Podano za Klein P.J.: op.cit., s. 116

⁹³ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 213

⁹⁴ W pracy omówiono jeden ze wskaźników analizujących zdolność przedsiębiorstwa do obsługi długu. Pozostałe wskaźniki dotyczące obsługi długu szczegółowo omawia m.in.: Tarczyński W.: op.cit., s. 215-218, Czeakała M.: op.cit., s. 118-119

⁹⁵ Podano za Czeakała M.: op.cit., s. 119

Reasumując powyższe rozważania można stwierdzić, że rosnąca wartość wskaźnika jest sytuacją korzystną dla spółki, natomiast malejąca w czasie wartość wskaźnika oznacza nieefektywne zarządzanie firmą i niewielką zyskowość zainwestowanych środków.

1.2.2.3.3 Wskaźniki opisujące aktywne działanie przedsiębiorstwa

O finansowym powodzeniu firmy decyduje rozmiar, struktura i wykorzystanie aktywów. W ramach analizy zarządzania aktywami należy ustalić, czy wielkość poszczególnych rodzajów aktywów odpowiada uzasadnionym potrzebom firmy. Jeżeli poziom aktywów przekracza uzasadnione potrzeby, ta sytuacja oznacza niepotrzebne zamrożenie kapitału i zmniejszenie ewentualnych zysków z działalności. Natomiast, jeżeli poziom aktywów jest zbyt niski w stosunku do potrzeb, wówczas nie pozwala na osiągnięcie odpowiedniego poziomu sprzedaży, a tym samym pogorszenie wyników firmy.

Do oceny sprawności działania przedsiębiorstwa służą następujące grupy wskaźników (Tarczyński W., 1997)⁹⁶:

- wskaźniki związane z kosztami wytwarzania,
- wskaźniki dotyczące rotacji,
- wskaźniki dotyczące gospodarowania zasobami.

Jednym ze wskaźników, których podstawą są koszty wytwarzania jest *wskaźnik operacyjności* (wo). Wskaźnik ten jest bardzo ogólną miarą aktywności przedsiębiorstwa, informuje o wykorzystaniu zasobów firmy i odpowiada na pytanie: jak efektywnie działa firma na rzecz obniżenia kosztów. Przedstawia się go następującym wzorem (Tarczyński W., 1997)⁹⁷:

$$wo = \frac{\text{koszt własny sprzedaży}}{\text{sprzedaż netto}} \quad (1.16)$$

Wyznaczony w ten sposób wskaźnik porównuje się z innymi firmami w branży. Poziom wskaźnika powinien zawierać się w przedziale 0,5 – 0,9. Wartość mniejsza niż 0,5 jest dla inwestora giełdowego bardzo korzystna. Świadczy o wysokiej zyskowości firmy. Jeżeli wartość wskaźnika jest większa od 0,9 jest to sygnał negatywny i informuje o tym, że przedsiębiorstwo ma poważne kłopoty z uzyskaniem zwrotu poniesionych nakładów.

Druga grupa wskaźników, to *wskaźniki rotacji*. Wskaźniki rotacji są zależne od branży w jakiej firma działa, ponieważ każdą branżę charakteryzuje inna specyfika działalności. W tej grupie najważniejsze wskaźniki, to *wskaźnik rotacji aktywami* i *wskaźnik rotacji majątku*. Poniższy wzór przedstawia obliczanie wskaźnika rotacji aktywów (wra) (Lechowicz A., Mączka W., 1994)⁹⁸.

$$wra = \frac{\text{sprzedaż netto}}{\text{aktywa ogółem}} \quad (1.17)$$

Ten wskaźnik charakteryzuje się niższymi wartościami dla branż o wysokiej kapitałochłonności, a wyższymi wartościami dla branż o niskiej kapitałochłonności. Poziom

⁹⁶ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 218

⁹⁷ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 219

⁹⁸ Por.: Lechowicz A., Mączka W.: op.cit., s. 108

tego wskaźnika informuje o liczbie obrotów ogółem lub wzroście o 1 zł, wartości sprzedaży, która została uzyskana dzięki zaangażowanych w aktywach trwałych i obrotowych środkach kapitałowych.

Innym rodzajem jest *wskaźnik rotacji majątku* (wrm) (Socha J., 1998).⁹⁹

$$\text{wrm} = \frac{\text{sprzedaż}}{\text{przeciętne aktywa ogółem}} \quad (1.18)$$

Wskaźnik powyższy informuje z jaką częstotliwością przedsiębiorstwo wykorzystuje posiadany majątek. Im wyższa wartość wskaźnika, tym firma z większą częstotliwością dokonuje obrotu swoim majątkiem. Sytuacja, gdy przedsiębiorstwo utrzymuje wysoki wskaźnik przez długi okres czasu, nie jest zbyt korzystna, gdyż oznacza zamrożenie kapitału obrotowego. Niski poziom tego składnika powinien skłonić do szczegółowego badania struktury majątku obrotowego. Można tu wykorzystać wskaźniki rotacji zapasów, należności i środków płynnych¹⁰⁰.

Kolejną grupę wskaźników służących do pomiaru sprawności działania przedsiębiorstwa stanowią *wskaźniki gospodarowania zasobami*. Są to wskaźniki gospodarowania potencjałem ludzkim i środkami trwałymi. W literaturze przedmiotu wyróżnia się następujące miary gospodarowania zasobami (Tarczyński W., 1997)¹⁰¹:

- miary dotyczące wydajności pracy na jednego zatrudnionego,
- miary dotyczące produktywności środków trwałych,
- miary dotyczące sfinansowania przyrostu środków trwałych z amortyzacji,
- miary dotyczące sfinansowania przyrostu środków trwałych strumieniem gotówki,
- miary dotyczące sfinansowania przyrostu aktywów strumieniem gotówki.

1.2.2.3.4 Wybrane wskaźniki rynkowe

Najbardziej powszechną grupą wskaźników charakteryzujących akcje są *wskaźniki rynkowe*. Jednym z elementów tych wskaźników jest aktualna cena rynkowa akcji. Wskaźniki rynkowe w pewnym stopniu są połączeniem analizy technicznej i fundamentalnej. Technicznej, ponieważ przez włączenie aktualnej ceny jednej akcji wskaźniki wraz z nią zmieniają swą wartość; fundamentalnej, gdyż wykorzystuje się w nich takie wielkości, jak *zysk, wartość księgową, czy dywidenda*.

Zaliczyć można do nich następujące wskaźniki (Czekała M., 1998)¹⁰²:

- p/e, oznaczające cenę do zysku,
- p/bv, oznaczające cenę do wartości księgowej,
- p/cf, oznaczające cenę do nadwyżki finansowej,
- wskaźniki dotyczące stopy dywidendy.

⁹⁹ Por. Socha J.: op.cit., s. 277

¹⁰⁰ W pracy jedynie zasygnalizowano problematykę związaną ze wskaźnikami rotacji. Dokładne ich omówienie zawierają następujące prace: Tarczyński W.: op.cit., s. 221-223, Lechowicz A., Mączka W.: op.cit., s. 108-109, Socha J.: op.cit., s. 277

¹⁰¹ Szerzej na ten temat traktuje m.in. praca Tarczyński W.: op.cit., s. 224-230

¹⁰² Pisze o tym Czekała M.: op.cit., s. 142

Wskaźnik *p/e*, inaczej *cena/zysk* jest miarą określającą wielkość zysku przypadającą na jedną akcję danej spółki. Wskaźnik ten wyznacza się za pomocą poniższego wzoru (Czekała M., 1998)¹⁰³:

$$p/e = \frac{\text{rynkowa cena jednej akcji}}{\text{zysk na jedną akcję}} \quad (1.19)$$

Obliczając *wskaźnik cena/zysk* używa się ceny rynkowej lub w przypadku sprzedaży w ofercie pierwotnej – ceny subskrypcyjnej. Zysk jest w rzeczywistości zyskiem rocznym netto lub zyskiem netto annualizowanym przypadającym na jedną akcję. Wskaźnik *cena do zysku* określa więc stosunek rynkowej ceny akcji do rocznego zysku netto spółki przypadającego na jedną akcję.

Wskaźnik ten można rozumieć, jako liczbę lat obrachunkowych, w przeciągu których zysk przypadający na jedną akcję pokryje cenę jej zakupu. Jeśli na przykład wskaźnik wynosi 10 – oznacza to, że zysk przypadający na jedną akcję w dniu jej nabycia po dziesięciu latach pokryje inwestycję. Wynika z tego, że im niższa wartość wskaźnika – tym lepiej. Niski wskaźnik stanowi zachętę do nabywania akcji spółki, jednak może to wynikać z przyczyn koniunkturalnych lub faktu obniżania się zysku netto spółki. W takich przypadkach nabywanie akcji danej spółki jest wysoce ryzykowne.

Kolejnym wskaźnikiem rynkowym jest *wskaźnik cena/wartość księgową*. Wskaźnik ten wyznaczyć można za pomocą następującego wzoru (Tarczyński W., 1997)¹⁰⁴:

$$p/bv = \frac{\text{rynkowa cena jednej akcji}}{\text{wartość księgową jednej akcji}}$$

Wskaźnik powyższy stanowi rynkowe oszacowanie majątku spółki. Jeżeli jego wartość jest wysoka, wówczas należy liczyć się z korektą rynku i w konsekwencji – spadkiem cen akcji. Z kolei niska wartość wskaźnika oznacza, że rynek nie ocenia wysoko możliwości takiego wykorzystania majątku, które przyniosłoby odpowiednio wysokie zyski. Jego niska wartość może świadczyć również o kłopotach spółki, np. złej strukturze majątku.

Innym ważnym wskaźnikiem jest wskaźnik *cena do nadwyżki finansowej p/cf*, gdzie *cf* określa nadwyżkę finansową danej spółki.

Inwestorzy kierujący się w swoich decyzjach inwestycyjnych wartością tego wskaźnika preferują strumienie finansowe zamiast zysku netto. W krótkim okresie może to mieć uzasadnienie. W okresie dłuższym należy pamiętać, że środki trwałe ulegają zużyciu i w przyszłości może zająć konieczność ich wymiany. Nie jest więc wykluczone, że spółka posiadająca środki trwałe o znacznej wartości w przyszłości będzie musiała ponieść znaczne wydatki na ich wymianę (Czekała M., 1998)¹⁰⁵.

Kolejnym wskaźnikiem rynkowym jest wskaźnik *stopy dywidendy (Dividend Yield)*. Oblicza się go dzieląc wartość dywidendy wypłaconej lub zadeklarowanej za ostatni rok przez aktualną wartość rynkową akcji. Zdaniem wielu inwestorów analityków, wskaźnik *stopy dywidendy* jest najbardziej obiektywnym wskaźnikiem rynkowym, ponieważ nigdy

¹⁰³ Por.: Czekała M.: op.cit., s. 142

¹⁰⁴ Pisze o tym m.in. Tarczyński W.: op.cit., s. 257, Czekała M.: op.cit., s. 143

¹⁰⁵ Por.: Czekała M.: op.cit., s. 157

nie wprowadza w błąd. Ogólnie wiadomo, iż spółka wypłacająca duże dywidendy jest na ogół w dobrej kondycji finansowej¹⁰⁶.

Reasumując, należy stwierdzić, iż przy podejmowaniu decyzji inwestycyjnych wybierać należy takie spółki, które finansują swój rozwój ze źródeł wewnętrznych, mają ustabilizowane zyski i odpowiednią kadre zarządzającą. Powinny też charakteryzować się takim bilansem, z którego wynika, że spółka jest w niewielkim stopniu zadłużona, a także posiada możliwości prowadzenia elastycznej polityki cenowej i dysponuje możliwościami wdrażania nowych produktów. W celu zmniejszenia ryzyka należy też wybierać spółki, które wykazywały wzrost w ostatnich pięciu latach.

1.2.3 Analiza portfelowa

Teoria portfela, której twórcą jest Harry Markowitz (nazywana również teorią Markowitza), będąca osiągnięciem nowoczesnych finansów dotyczy inwestycji w akcje więcej niż jednej spółki w taki sposób, aby osiągnąć korzyść jednoczesnego zwiększenia dochodu i zmniejszenia ryzyka (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., 1998)¹⁰⁷. Analiza portfelowa polega więc na wyznaczeniu optymalnych inwestycji w celu osiągnięcia maksymalnych korzyści z poniesionych nakładów. Odpowiedni dobór portfela akcji umożliwia osiągnięcie zysków przez niwelowanie spadków cen jednych akcji przez wzrost wartości innych akcji wchodzących w skład portfela.

Teoria Markowitza dzięki możliwości budowy portfela inwestycyjnego jest podsumowaniem analizy fundamentalnej i technicznej, przy której wykorzystuje się wyniki obydwu tych analiz.

1.2.3.1 Pojęcie stopy zwrotu z inwestycji

Podstawowym wskaźnikiem używanym w teorii portfela jest *stopa zwrotu*. Określa ona wielkość zysku w stosunku do zainwestowanego kapitału. Istnieje wiele miar stopy zwrotu. W praktyce najczęściej stosuje się stopę zwrotu z inwestycji (return of investment – roi). Wyznacza się ją według następującej formuły (Tarczyński W., 1997)¹⁰⁸:

$$\text{roi} = \frac{\text{zysk przed spłatą odsetek, ale po opodatkowaniu}}{\text{kapitał zaangażowany w przedsięwzięcie}} \quad (1.20)$$

Na podstawie powyższej formuły można zastosować następujący wzór, pozwalający wyznaczyć stopę zwrotu z papierów wartościowych (Tarczyński W., 1997)¹⁰⁹:

$$R_t = \frac{C_t - C_{t-1} + D_t}{C_{t-1}} \quad (1.21)$$

¹⁰⁶ Opisał to w sposób wyczerpujący Czekala M.: op.cit., 160-161, Tarczyński W.: op.cit., 258-259, Socha J.: op.cit., s. 283-284.

¹⁰⁷ Por.: Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 243

¹⁰⁸ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 11

¹⁰⁹ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 13

gdzie:

R_t – oznacza stopę zwrotu w okresie t .

C_t – oznacza cenę papieru wartościowego w okresie t .

C_{t-1} – oznacza cenę papieru wartościowego w okresie $t-1$.

D_t – oznacza dywidendę wypłaconą w t okresie.

Stopa zwrotu jest zatem funkcją czasu zależną zarówno od zmian wartości papierów wartościowych, jak również od rozpatrywanego okresu czasowego. W rzeczywistości stopa zwrotu jest funkcją losową, ponieważ zależy od wielkości, które są nieprzewidywalne. Często przy zmiennych losowych ma zastosowanie teoria prawdopodobieństwa. Tak dzieje się również w przypadku stóp zwrotu. Mają one określony rozkład prawdopodobieństwa, który stanowi zbiór par liczb (Tarczyński W., 1997):

$$(R_i, p_i), i = 1, \dots, n$$

gdzie:

R_i – oznacza i -tą możliwą stopę zwrotu,

p_i – oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia określonej stopy zwrotu R_i ,

n – oznacza ilość badanych przypadków

Nie jest możliwe określenie przyszłych stóp zwrotu, ponieważ zależą one od wielu czynników. Jeżeli nawet akcje danej spółki miały najwyższe stopy zwrotu w okresie przeszłym, to w momencie podejmowania decyzji nie ma możliwości określenia ich zachowań w przyszłości. Ze względu na oczekiwania inwestorów, dla których ważne są informacje, przy pomocy których można prognozować zachowanie w przyszłości podjęto próbę prognozowania zmiany stopy zwrotu i prawdopodobieństwa jej wystąpienia. Aby można było prognozować zachowanie się rynku wprowadzono pojęcie oczekiwanej stopy zwrotu, na którą składają się zmienne losowe występujące z określonym prawdopodobieństwem. Po wyznaczeniu zbioru możliwych stóp zwrotu danego papieru wartościowego określa się rozkład oczekiwanej stopy zwrotu na podstawie wzoru (Wierzbicki M., 1995)¹¹⁰:

$$E(R) = \sum_{i=1}^n p_i \times R_i \quad (1.22)$$

gdzie:

$E(R)$ – oznacza oczekiwaną stopę zwrotu z inwestycji,

p_i – oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia i -tej sytuacji,

R_i – oznacza stopę zwrotu występującą w i -tej sytuacji,

n – oznacza liczbę różnych możliwych scenariuszy rozwoju.

Z powyższego wyrażenia wynika, że oczekiwana stopa zwrotu stanowi średnią ważoną możliwych stóp zwrotu. Wagi stanowią prawdopodobieństwa ich wystąpienia. Prawdopodobieństwo p_i można wyznaczać zarówno subiektywnie, jak też na podstawie rachunku prawdopodobieństwa. H. Markowitz oparł swoją teorię na danych statystycznych i założył, że przyszłe wartości stóp zwrotu będą miały analogiczny rozkład, jak rozkład stóp zwrotu w przeszłości.

Oczekiwana stopa zwrotu posiada dwie właściwości:

¹¹⁰ Por.: Wierzbicki W.: op.cit., s. 11

- nie przekracza najwyższej możliwej do wystąpienia stopy zwrotu,
- nie jest niższa niż najniższa możliwa do wystąpienia stopa zwrotu.

Często zakłada się, że oczekiwana stopa zwrotu ma rozkład normalny. Takie założenie nie zawsze znajduje potwierdzenie w praktyce. Założenie rozkładu normalnego dla oczekiwanej stopy zwrotu z inwestycji niesie określone korzyści w dalszych analizach. Najwięcej informacji przy powyższej postaci rozkładu oczekiwanej stopy zwrotu inwestor otrzymuje na podstawie dwóch parametrów, do których zaliczamy oczekiwaną średnią arytmetyczną $E(R)$ i oczekiwane odchylenie standardowe S . Pierwsza zaleta takiego postępowania wynika z kształtu rozkładu normalnego, który jest rozkładem jednomodalnym (posiada tylko jeden szczyt), co upraszcza analizy i obliczenia.

Prawdopodobieństwo dla rozkładu normalnego osiąga zawsze takie same poziomy, bez względu na bieżące wartości oczekiwanej stopy zwrotu i odchylenia standardowego. Ta własność rozkładu normalnego pozwala na wyznaczenie atrakcyjnego dla inwestora poziomu stopy zwrotu. Do tego celu wykorzystuje się następująca zależność (Tarczyński W., 1997)¹¹¹:

$$Z = \frac{\text{abs}[R - E(R)]}{S} \quad (1.23)$$

gdzie:

Z – oznacza zmienną standaryzowaną dla danej stopy zwrotu,

R – oznacza stopę zwrotu z inwestycji,

$E(R)$ – oznacza oczekiwaną stopę zwrotu z inwestycji,

S – odchylenie standardowe stopy zwrotu.

Kolejna zaleta używania rozkładu normalnego wynika z założenia, że suma dwóch zmiennych o rozkładzie normalnym ma również rozkład normalny. Powyższe założenie dotyczy również wariancji sumy dwóch niezależnych zmiennych o rozkładzie normalnym. Zaleta ta wykorzystana została w teorii Markowitza, a potem kontynuowana przez Sharpe’a i Lintnera.

Głównym problemem, z którym inwestorzy spotykają się w praktyce jest oszacowanie oczekiwanej stopy zwrotu z akcji w przyszłości. Oczekiwaną stopę zwrotu oblicza się wychodząc z założenia, że jeżeli rozkład jest określony na podstawie danych statystycznych (próby), to wartością oczekiwaną jest średnia arytmetyczna ze wszystkich badanych stóp zwrotu. Oznacza to, że przyszłe zmiany stopy zwrotu będą zbliżone do poziomu stóp zwrotu z przeszłości.

Rozumowanie takie sprowadza się do używania następujących wzorów na stopę zwrotu (Wierzbicki M., 1995)¹¹²:

- przy zastosowaniu średniej arytmetycznej:

$$R = \frac{\sum_{k=1}^n R_k}{n} \quad (1.24)$$

¹¹¹ Tarczyński W.: op.cit., s. 16

¹¹² Por.: Wierzbicki M.: op.cit., s. 13-14, pisze o tym również Tarczyński W.: op.cit., s. 19

- przy zastosowaniu średniej geometrycznej:

$$R = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1 + R_k)} - 1 \quad (1.25)$$

gdzie:

R_k – oznacza kolejne stopy zwrotu osiągalne w każdym okresie przez badany walor,

n – oznacza liczbę analizowanych okresów.

Wykorzystanie średniej arytmetycznej jest bardziej charakterystyczne dla inwestycji krótkoterminowych, a średnia geometryczna lepiej sprawdza się w inwestycjach długookresowych.

Przedstawione powyżej równania umożliwiają jedynie szacowanie stóp zwrotu. Nie zawsze są to prognozy prawidłowe. O tym, jak może w przyszłości kształtować się stopa zwrotu spółki w większym stopniu decydują aktualne dane niż te z dalekiej przeszłości. Celowym zatem byłoby wprowadzenie systemu wag dla ciągu czasowego stóp zwrotu. Innym problemem jest wybór odpowiednich okresów do obliczeń i wypracowanie sposobu traktowania danych z okresów nietypowych (silne hossy i bessy).

1.2.3.2. Ryzyko inwestycji w papiery wartościowe

Drugim nierozzerwalnie związanym czynnikiem z procesem inwestycyjnym jest *ryzyko*. Przy inwestycji w dany walor najczęściej się zakłada określony potencjalny zysk, ale nie bez znaczenia jest również poziom ponoszonego ryzyka.

Najczęściej bywa tak, że akcje o przewidywanej najwyższej stopie zwrotu obciążone są największym ryzykiem.

Ryzyko może mieć dwa aspekty: dodatni, gdy faktyczna stopa zwrotu będzie wyższa od oczekiwanej stopy zwrotu i ujemny, gdy faktyczna stopa zwrotu będzie niższa od oczekiwanej stopy zwrotu. Im bardziej wrażliwa jest stopa zwrotu danego waloru na zmiany czynników zewnętrznych, tym większe ryzyko inwestycji w dany walor. Ryzyko jest odzwierciedleniem zmienności stopy zwrotu. Im większe zmiany tym większe ryzyko.

Klasykami wskaźnikami stosowanymi do opisu ryzyka są: *wariancja* i *odchylenie standardowe stopy zwrotu*. Są to zatem miary rozkładu stopy zwrotu.

Wariancja stopy zwrotu określona jest za pomocą następującego wzoru (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., 1998)¹¹³:

$$V = \sum_{i=1}^n p_i \times (r_i - r)^2 \quad (1.26)$$

gdzie:

V – wariancja stopy zwrotu,

p_i – prawdopodobieństwo zrealizowania i -tej możliwej stopy zwrotu,

r_i – i -ta możliwa do zrealizowania stopa zwrotu,

r – oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji,

n – liczba możliwych stóp zwrotu.

¹¹³ Por.: Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 228

Jak wynika ze wzoru wariancja stanowi średnią ważoną kwadratów odchyłeń możliwych stóp zwrotu od oczekiwanej stopy zwrotu, z wagami w postaci prawdopodobieństw wystąpienia możliwych stóp zwrotu.

Wariancja, jak widać przyjmuje wartości nieujemne. Gdy wszystkie możliwe stopy zwrotu w rozkładzie są równe, wówczas wariancja osiąga wartość „zero”, co oznacza brak ryzyka.

Maksymalna wartość wariancji jest mniejsza lub równa kwadratowi największego odchylenia pojedynczej stopy zwrotu od jej wartości oczekiwanej.

Biorąc pod uwagę fakt, że rząd wielkości wariancji jest inny niż rząd wielkości oczekiwanej stopy zwrotu, co może powodować kłopoty w interpretacji, zamiast wariancji stopy zwrotu częściej stosuje się odchylenie standardowe stopy zwrotu, określane wg wzoru (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., 1998)¹¹⁴:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i \times (r_i - r)^2} \quad 1.27$$

Jak wynika z powyższych zależności odchylenie standardowe stopy zwrotu jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji papieru wartościowego.

Odchylenie standardowe stopy zwrotu wskazuje na wahania na plus i minus względem przeciętnych możliwych stóp zwrotu od oczekiwanej stopy zwrotu. Im odchylenie standardowe jest wyższe tym, ryzyko inwestycji jest wyższe.

Jeżeli rozkład stopy zwrotu jest normalny lub zbliżony do normalnego, to odchylenie standardowe od stopy zwrotu jest równe długości promienia takiego przedziału o środku R (oczekiwana stopa zwrotu), że prawdopodobieństwo, iż stopa zwrotu należy do przedziału od R-S do R+S, jest równe 0,6827.

Z punktu widzenia K. Jajugi, K. Kuziak i P. Markowskiego (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., 1998)¹¹⁵, *odchylenie standardowe (i wariancja) stopy zwrotu wychodzi z neutralnego rozumienia ryzyka, gdyż przy jego obliczeniu uwzględnia się zarówno ujemne, jak i dodatnie odchylenia możliwych stóp zwrotu od oczekiwanej stopy zwrotu (po podniesieniu do kwadratu niczym się nie różnią). Czasem zachodzi jednak konieczność traktowania ryzyka jako zjawiska negatywnego, a w związku z tym brania pod uwagę jedynie ujemnych odchyłeń. Wtedy stosuje się inne miary ryzyka, będące odpowiednikami wariancji i odchylenia standardowego. Jedną z nich jest semiwariancja stopy zwrotu, określana według wzoru:*

$$SV = \sum_{i=1}^n p_i \times [(r_i - r)^-]^2 \quad (1.28)$$

gdzie:

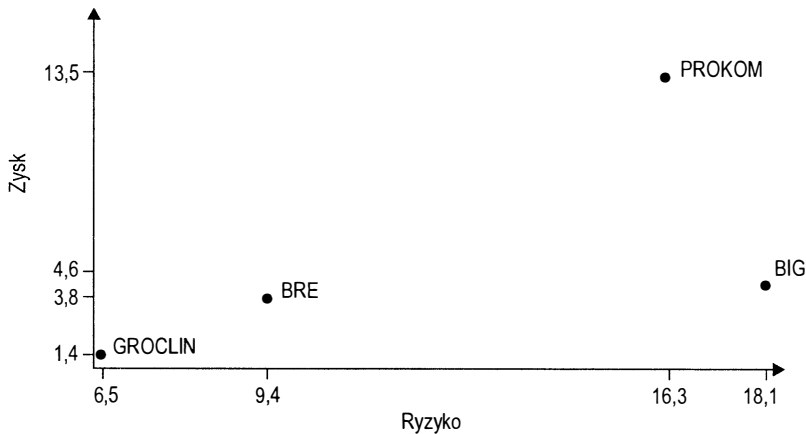
symbol „-” oznacza wzięcie funkcji, która przyporządkowuje danej wartości ujemnej tę samą wartość, a wartości nieujemnej – 0.

Relacje zysku i ryzyka wybranych spółek na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie przedstawia rysunek nr 1.36.

¹¹⁴ Por.: Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 228

¹¹⁵ Podano za Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 229

Rys. 1.36 Wykres zysk–ryzyko dla wybranych akcji



Źródło: opracowanie własne.

Z przedstawionego wykresu wyraźnie widać przewagę akcji BRE nad akcjami BIG. Akcje mają porównywalny zysk, ale ryzyko w przypadku akcji BIG-u jest prawie dwukrotnie wyższe. Akcje spółki PROKOM mają wysoki zysk, ale równocześnie wysokie ryzyko.

1.2.3.3 Korelacja papierów wartościowych

Badanie zachowania rynku opiera się na analizie stopy zwrotu i szacowaniu ryzyka. W przypadku, gdy inwestycja dotyczy więcej niż jednego waloru wprowadza się dodatkowo pojęcie korelacji stóp zwrotu. Jest to współczynnik, który określa czy i na ile zmiany stopy zwrotu jednej akcji są powiązane ze zmianami stopy zwrotu akcji innej spółki. Oblicza się go za pomocą następującego wzoru (Tarczyński W., 1997)¹¹⁶:

$$p_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \times (r_{1i} - r_1) \times (r_{2i} - r_2)}{S_1 \times S_2} \quad (1.29)$$

gdzie:

p_{12} – oznacza współczynnik korelacji dwóch papierów wartościowych oznaczonych numerami 1 i 2,

p_i – oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia określonej stopy zwrotu akcji,

r_{1i} – oznacza możliwe stopy zwrotu pierwszej akcji ($i = 1, 2, \dots, n$),

r_1 – oznacza oczekiwaną stopę zwrotu pierwszej akcji,

r_{2i} – oznacza możliwe stopy zwrotu drugiej akcji ($i = 1, 2, \dots, m$),

r_2 – oznacza oczekiwaną stopę zwrotu drugiej akcji,

S_1 – oznacza odchylenie standardowe pierwszej akcji,

S_2 – oznacza odchylenie standardowe drugiej akcji,

n – oznacza liczbę możliwych stóp zwrotu.

¹¹⁶ Pisze o tym m.in. Tarczyński W.: op.cit., s. 55, Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 243, Jajuga K., Jajuga T.: op.cit., s. 102-103

Ponieważ w praktyce rozkład prawdopodobieństwa dla stóp zwrotu jest nieokreślony, do wyznaczenia korelacji akcji wykorzystuje się poniższy wzór (Tarczyński W., 1997)¹¹⁷:

$$P_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \times (r_{1i} - r_1) \times (r_{2i} - r_2)}{(n-1) \times S_1 \times S_2} \quad (1.30)$$

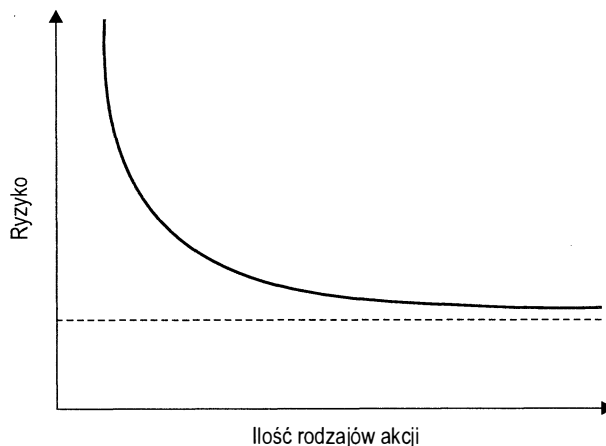
gdzie:

n – oznacza liczbę wszystkich badanych stóp zwrotu.

Współczynniki korelacji stóp zwrotu akcji zawierają się w przedziale $<-1;1>$. Wartość bezwzględna tego współczynnika wskazuje siłę powiązania między stopami zwrotu akcji spółek. Im wartość bezwzględna jest większa, tym powiązanie akcji spółek jest silniejsze. Wartość 0 oznacza brak zależności pomiędzy stopami zwrotu. Znak współczynnika wskazuje na kierunek powiązania pomiędzy stopami zwrotu akcji spółek. Jeśli jest dodatni, wówczas mamy do czynienia z korelacją dodatnią, co oznacza, że wzrostowi (spadkowi) stopy zwrotu akcji jednej spółki towarzyszy wzrost (spadek) stopy zwrotu akcji drugiej spółki, natomiast jeśli jest ujemny, wówczas mamy do czynienia z korelacją ujemną, co oznacza, że wzrostowi (spadkowi) stopy zwrotu akcji jednej spółki towarzyszy spadek (wzrost) stopy zwrotu akcji drugiej spółki.

Stopień ryzyka jest zależny od ilości rodzajów akcji w portfelu. Zależność tę przedstawia rysunek 1.37.

Rys.1.37 Zależność pomiędzy ilością akcji w portfelu i związanym z nim ryzykiem



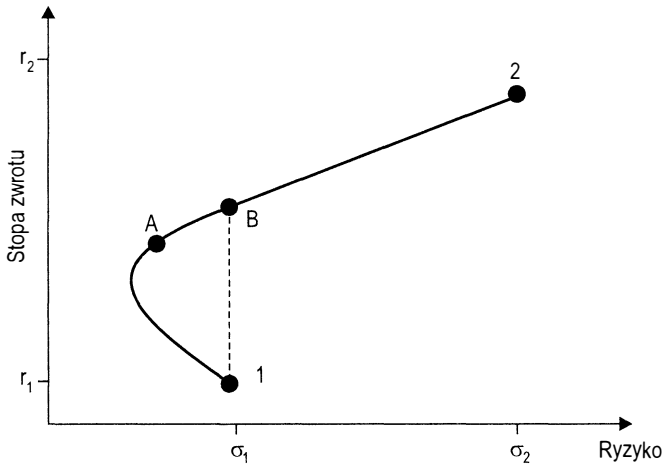
Źródło: na podstawie (Jajuga K., Jajuga T., 1994).

Rysunek 1.38 przedstawia przykładową zależność pomiędzy ryzykiem portfela dwóch akcji, jego stopą zwrotu, a ilością udziałów poszczególnych spółek w portfelu. Krzywa ograniczona punktami 1 i 2 przedstawia ilości poszczególnych udziałów w portfelu.

¹¹⁷ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 55

Punkt A leżący na krzywej oznacza ilość udziałów akcji spółki 1 i 2 w portfelu. Im bliżej leżałby punktu 1, oznaczałby coraz większy udział akcji spółki 1 i odwrotnie. Mógłby też pokrywać się z punktem 1 lub 2. Oznaczałoby to 100% udziału spółki 1 lub 2 w portfelu.

Rys. 1.38 Przykładowy rozkład udziałów w portfelu złożonym z akcji dwóch spółek



Źródło: opracowanie własne.

Na krzywej znajdują się punkty, których ryzyku odpowiadają dwie wielkości stopy zwrotu. Oczywiście należy kierować się zasadą, że przy danym ryzyku wybiera się skład portfela odpowiadający większej stopie zwrotu. Na rysunku 1.38 widać, że dużo korzystniej byłoby stworzyć portfel złożony z mniej więcej równej wartości akcji dwóch spółek (punkt B), niż poprzestać tylko na akcjach spółki 1 (punkt 1).

1.2.3.4 Tworzenie portfela papierów wartościowych – model Markowitza

Teoria portfela, której prekursorem był Harry Markowitz polega na takim inwestowaniu w kilka różnych walorów, aby zwiększyć dochód przy jednoczesnym zmniejszeniu ryzyka inwestycji. Portfel papierów wartościowych stanowią posiadane akcje, obligacje i inne papiery wartościowe. Przy tworzeniu portfela papierów wartościowych bierze się pod uwagę następujące czynniki (Tarczyński W., 1997)¹¹⁸:

- czasookres funkcjonowania portfela,
- wybór papierów wartościowych,
- określenie kryterium doboru papierów,
- wyznaczenie zakresu możliwego ryzyka i zysku,
- bieżąca weryfikacja składników portfela.

¹¹⁸ Pisze o tym Tarczyński W.: op.cit., s. 67-68

Tworzenie modelu Markowitza opiera się na metodach ilościowych przyjmując następujące założenia (Tarczyński W., 1997)¹¹⁹:

- stopa zwrotu stanowi miarodajny wskaźnik opłacalności inwestycji,
- znane są rozkłady prawdopodobieństwa możliwych stóp zwrotu,
- przewidywania inwestorów dotyczące ryzyka są proporcjonalne do rozkładu oczekiwanych stóp zwrotu,
- na działania inwestorów wpływają jedynie – stopa zwrotu i prawdopodobieństwo jej osiągnięcia,
- przez inwestorów wybierane są inwestycje posiadające minimalne ryzyko przy jednakowej stopie zwrotu lub inwestycje charakteryzujące się większym przewidywanym dochodem przy takim samym ryzyku.

1.2.3.4.1 Stopy zwrotu w przypadku portfela papierów wartościowych

Najprostszym przykładem portfela jest zbiór dwóch akcji. W przypadku dwóch akcji A i B na podstawie wzorów, stopy zwrotu dla każdej z akcji można wyrazić następująco (Tarczyński W., 1997)¹²⁰:

$$R_A = \frac{CA_t - CA_{t-1} + D_A}{CA_{t-1}} \quad R_B = \frac{CB_t - CB_{t-1} + D_B}{CB_{t-1}} \quad (1.31)$$

gdzie:

R_A – stopa zwrotu akcji A w okresie od t-1 do t,

CA_t – cena akcji A w okresie t,

CA_{t-1} – cena akcji A w okresie t-1,

D_A – dywidenda z akcji A w okresie od t-1 do t,

R_B – stopa zwrotu akcji B w okresie od t-1 do t,

CB_t – cena akcji B w okresie t,

CB_{t-1} – cena akcji B w okresie t-1,

D_B – dywidenda z akcji B w okresie od t-1 do t.

Cenę zakupu portfela powyższych akcji można określić w następujący sposób:

$$C_{t-1} = CA_{t-1} + CB_{t-1}$$

Cenę sprzedaży portfela powyższych akcji określa się za pomocą poniższego wzoru:

$$C_t = CA_t + CB_t$$

Łączna dywidenda określana jest następującym wzorem:

$$D_t = D_A + D_B$$

Wzór na stopę zwrotu portfela złożonego z akcji A i B można obliczyć ze wzoru (Tarczyński W., 1997)¹²¹:

¹¹⁹ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 75-76

¹²⁰ Zwrócili uwagę na ten problem: Tarczyński W.: op.cit., s. 68-71, Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 247-248, Haugen R.A.: op.cit., s. 95 in.

¹²¹ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 69

$$R_c = \frac{(C_t - C_{t-1}) + D_t}{C_{t-1}} = \frac{CA_{t-1}}{C_{t-1}} \times R_A + \frac{CB_{t-1}}{C_{t-1}} \times R_B \quad (1.32)$$

gdzie:

R_c – oznacza stopę zwrotu papierów wartościowych,

$\frac{CA_{t-1}}{C_{t-1}}$ – oznacza procentowy udział wartości akcji A w całym portfelu,

$\frac{CB_{t-1}}{C_{t-1}}$ – oznacza procentowy udział wartości akcji B w całym portfelu.

Udziały poszczególnych papierów w portfelu muszą spełniać poniższe założenia:

$$\text{dla } i \in \langle 1 \dots n \rangle \quad u_i \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^n u_i = 1,$$

wówczas stopa zwrotu wielu akcji określana jest za pomocą następującego wzoru (Wierzbicki M., 1995)¹²²:

$$R_c = \sum_{i=1}^n u_i \times R_i, \quad (1.33)$$

zaś odchylenie standardowe:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2 \times \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n u_i \times u_j \times \sigma_i \times \sigma_j \times \rho_{ij}} \quad (1.34)$$

gdzie:

n – liczba akcji w portfelu (ponumerowanych od 1 do n),

R_i – stopa zwrotu akcji i ,

δ_i – ryzyko (odchylenie standardowe) akcji i ,

u_i – udział akcji i w portfelu,

ρ_{ij} – korelacja między akcjami i oraz j .

Stopa zwrotu portfela złożonego z akcji jest nie niższa, niż najniższa stopa zwrotu i nie jest wyższa od najwyższej stopy zwrotu z akcji wchodzących w skład portfela.

1.2.3.4.2 Szacowanie ryzyka w przypadku portfela papierów wartościowych

Szacowanie ryzyka w przypadku portfela złożonego z kilku akcji jest procesem dość złożonym. W celu jego określenia należy posłużyć się wariancją portfela i zależnościami z dziedziny rachunku prawdopodobieństwa. Na ich podstawie ryzyko portfela dwu-elementowego oblicza się na podstawie zależności (Tarczyński W., 1997)¹²³:

¹²² Por.: Wierzbicki M.: op.cit., s. 51-53, Tarczyński W.: op.cit., s. 71-75

¹²³ Pisze o tym w sposób wyczerpujący m.in. Tarczyński W.: op.cit., s. 71 in., Wierzbicki M.: op.cit., s. 55 in., Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 247 in.

$$\delta_p^2 = u_A^2 \times \delta_A^2 + u_B^2 \times \delta_B^2 + 2 \times u_A \times \delta_A \times u_B \times \delta_B \times r_{AB} \quad (1.35)$$

gdzie:

- δ_p^2 – oznacza wariancję portfela papierów wartościowych,
- u_A – oznacza udział w portfelu akcji A,
- u_B – oznacza udział w portfelu akcji B,
- δ_A – oznacza odchylenie standardowe stopy zwrotu dla akcji A,
- δ_B – oznacza odchylenie standardowe stopy zwrotu dla akcji B,
- r_{AB} – oznacza współczynnik korelacji między stopą zwrotu akcji A i B.

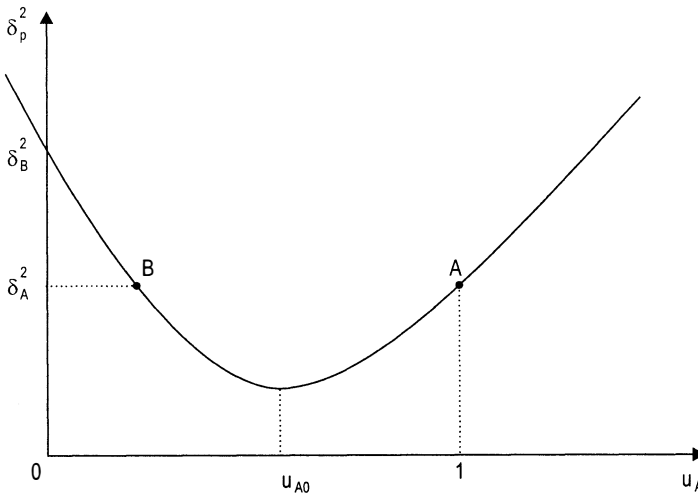
Prowadzenie portfela papierów wartościowych pozwala na osiągnięcie niższego ryzyka dla całego portfela, niż każdej akcji wchodzącej w jego skład. Możliwość osiągnięcia takiej własności nosi nazwę efektu ryzyka portfelowego i jest możliwe do osiągnięcia dzięki zmianie udziałów poszczególnych akcji w portfelu papierów wartościowych.

Jeżeli uwzględnimy że, $u_A + u_B = 1$ to:

$$\delta_p^2 = u_A^2 \times \delta_A^2 + (1 - u_A)^2 \times \delta_B^2 + 2 \times u_A \times \delta_A \times (1 - u_A) \times \delta_B \times r_{AB}$$

Na podstawie powyższego wzoru widać, że wariancja portfela papierów wartościowych jest funkcją kwadratową udziału akcji w portfelu. Graficznym przedstawieniem tej zależności jest parabola (rys. 1.39).

Rys. 1.39 Wariancja portfela papierów wartościowych w funkcji udziału akcji w portfelu



Źródło: na podstawie (Tarczyński W., 1997).

Analiza możliwości obniżenia ryzyka całego portfela polega na sprawdzeniu czy zachodzi następująca relacja:

$$r_{AB} < \min \left\{ \frac{\delta_A}{\delta_B}, \frac{\delta_B}{\delta_A} \right\}$$

Przy N akcjach wchodzących w skład portfela, wariancję portfela papierów wartościowych wyznacza się na podstawie następującego wzoru (Tarczyński W., 1997):

$$\delta_p^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2 \times \delta_i^2 + 2 \times \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N u_i \times u_j \times \delta_i \times \delta_j \times r_{ij} \quad (1.36)$$

gdzie:

u_i – udział w portfelu akcji A,

δ_i – odchylenie standardowe stopy zwrotu dla akcji A,

δ_j – odchylenie standardowe stopy zwrotu dla akcji B,

r_{ij} – współczynnik korelacji między stopą zwrotu akcji A i B,

N – liczba akcji w portfelu.

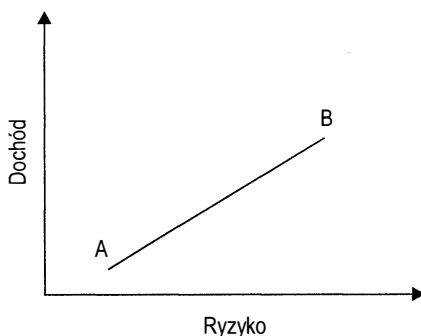
Ryzyko portfela papierów wartościowych złożonego z wielu elementów N wyznacza pierwiastek kwadratowy z wariancji portfela wyznaczonej na podstawie powyższego wzoru.

1.2.3.4.3 Zmienność zysku i ryzyka portfela

Stopy zwrotu portfela i ryzyko są wielkościami, których wartości zależą od udziału poszczególnych akcji w portfelu oraz wzajemnych korelacji między nimi. W najprostszym przypadku portfel składa się z dwóch akcji o udziałach u_A i u_B . Doskonała korelacja dodatnia (rys. 1.40), występuje dla $r_{ij} = 1$, a wzór na odchylenie standardowe przyjmuje postać (Wierzbicki M., 1995)¹²⁴:

$$\delta_p = u_A \times \delta_A + u_B \times \delta_B \quad (1.37)$$

Rys. 1.40 Przykładowy wykres ryzyko-dochód dwóch akcji w portfelu



Źródło: na podstawie (Wierzbicki M., 1995).

Odcinek AB przedstawia wszystkie portfele, jakie można zbudować na bazie dwóch akcji A i B. Można zauważyć, iż zmniejszenie udziału akcji A w portfelu i zwiększenie udziału akcji B powoduje wzrost oczekiwanego dochodu, przy jednoczesnym wzroście ryzyka. W zależności od kąta nachylenia prostej zmienia się proporcjonalność zmian ryzyka

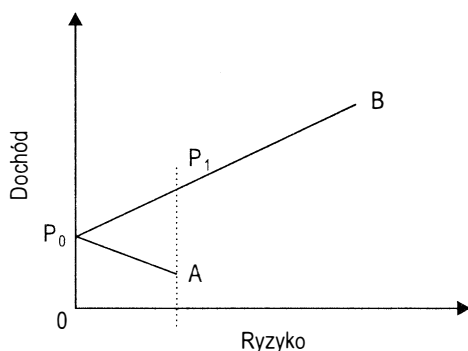
¹²⁴ Por.: Wierzbicki M.: op.cit., s. 55

i dochodu. Zatem ryzyko portfela jest średnim ryzykiem akcji wchodzących w jego skład ważonym udziałami poszczególnych akcji. W tym przypadku, jakiegokolwiek zmiany udziałów akcji nie stwarzają możliwości obniżenia ryzyka poniżej najniższego ryzyka jednego ze składników.

W przypadku doskonałej korelacji ujemnej (rys. 1.41), dla $r_{ij} = 1$, wzór na odchylenie standardowe przyjmuje postać (Wierzbicki M., 1995)¹²⁵:

$$\delta_p = |u_A \times \delta_A - u_B \times \delta_B| \quad (1.38)$$

Rys. 1.41 Przykładowy wykres ryzyko-dochód dwu akcji w portfelu w przypadku korelacji ujemnej



Źródło: na podstawie (Wierzbicki M., 1995).

W przypadku, gdy akcje jednej ze spółek zachowują się zupełnie odwrotnie do akcji drugiej spółki odchylenie standardowe nie stanowi średniej ważonej z poszczególnych odchyleń akcji wchodzących w skład portfela. Na podstawie wykresu (rys. 1.41) widać, że można zbudować portfel o ryzyku mniejszym od ryzyka każdej z akcji lub nawet portfel o ryzyku zerowym. Ryzyko takiego portfela równe jest zero w przypadku określonych wartości udziałów akcji A i B w portfelu. Po przekształceniu równania

$$0 = |u_A \times \delta_A - u_B \times \delta_B|$$

i zastosowaniu zależności:

$$1 = u_A + u_B$$

otrzymujemy zależności na udziały spółek A i B w portfelu w przypadku zerowego ryzyka:

$$u_A = \frac{\delta_B}{\delta_A + \delta_B} \quad (1.39)$$

¹²⁵ Opisał to m.in. Wierzbicki M.: op.cit., s. 56 in., Tarczyński W.: op.cit., s. 71 in., Elton E.J., Gruber M.J.: op.cit.

$$u_B = \frac{\delta_A}{\delta_A + \delta_B} \quad (1.40)$$

Zależności te zachodzą w punkcie oznaczonym na wykresie jako P_0 . Łamana łącząca punkty A i B na wykresie stanowi obraz graficzny możliwych do zrealizowania wielkości będących zbiorem przewidywanego dochodu i ryzyka. Jak widać z rysunku zmniejszanie udziałów spółki A i zwiększanie udziałów spółki B powoduje początkowo wzrost oczekiwanego dochodu przy jednoczesnym spadku ryzyka. W punkcie krytycznym (ryzyko = 0) następuje ponowny wzrost ryzyka przy jednoczesnym dalszym wzroście przewidywanego dochodu. W punkcie P_1 portfel ponownie osiąga wartość ryzyka równą ryzyku akcji A i o wiele większą oczekiwaną wartość zysku. Przy takim układzie ryzyka i oczekiwanego dochodu dla akcji A i B inwestycje powinny odbywać się na linii P_0 - P_1 .

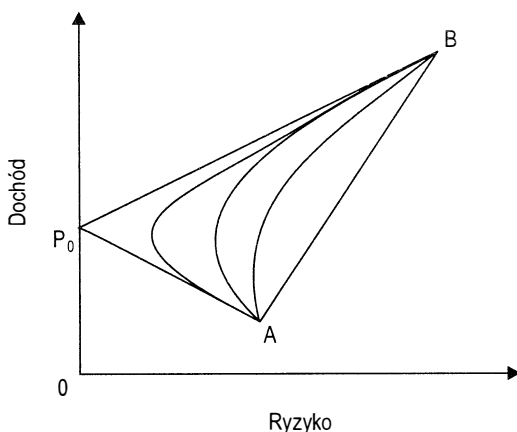
W rzeczywistości korelacje o wartościach -1 i 1 nie występują. Możliwy jest taki dobór udziałów akcji w portfelu, aby przyniosło to korzyści w postaci spadku ryzyka, przy jednoczesnym wzroście przewidywanego dochodu.

Istnieje pewne połączenie dwóch akcji, które stanowi graniczny punkt do którego ryzyko jest obniżane. Wyznaczenie takiego punktu odbywa się przez znalezienie w przypadku $S_B > S_A$ takiej korelacji, przy której udział firmy B będzie równy 0 lub w przypadku $S_A > S_B$, takiej korelacji, przy której udział firmy A będzie równy 0. Jako wynik otrzymuje się korelację krytyczną wyrażoną poniższym wzorem (Wierzbicki M., 1995)¹²⁶:

$$S_k = \min\left(\frac{\delta_A}{\delta_B}, \frac{\delta_B}{\delta_A}\right) \quad (1.41)$$

Jeżeli korelacja między dwoma firmami przekracza wielkość krytyczną, to nie można obniżyć ryzyka portfela poniżej najniższego ryzyka z pary akcji. Sytuacja powyższa pokazana została na rysunku 1.42.

Rys. 1.42 Zbiór możliwości portfeli akcji firm A i B

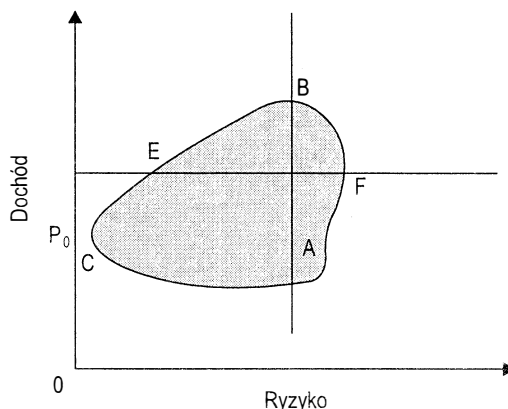


Źródło: na podstawie (Wierzbicki M., 1995).

¹²⁶ Por.: Wierzbicki M.: op.cit., s. 61 in.

Praktycznie nie jest możliwe wyznaczenie każdego możliwego układu ryzyko-stopa zwrotu. Możliwe do utworzenia portfele akcji można w uproszczeniu przedstawić jako zbiór punktów tworzących figurę jaką zaprezentowaną na rysunku 1.43.

Rys. 1.43 Przybliżony zbiór możliwych portfeli



Źródło: na podstawie (Elton E.J., Gruber M. J., 1998).

Z diagramu (rysunek 1.43) wynika, że inwestorzy powinni wybierać portfele, w których osiąga się wyższą stopę zwrotu przy jednakowej wartości ryzyka (np. punkt B zamiast punktu A), lub akcje posiadające mniejsze ryzyko przy tej samej stopie zwrotu (np. punkt E zamiast punktu F). Zatem istnieje zbiór, który stanowi granicę efektywną możliwości inwestycyjnych. W skład tego zbioru wchodzi punkty leżące pomiędzy portfelem o najmniejszej możliwej wariancji a portfelem o maksymalnej stopie zwrotu tworzące tzw. granicę efektywną (Elton E.J., Gruber M. J., 1998)¹²⁷.

1.2.3.4.4 Rodzaje portfeli inwestycyjnych – portfele wielu akcji

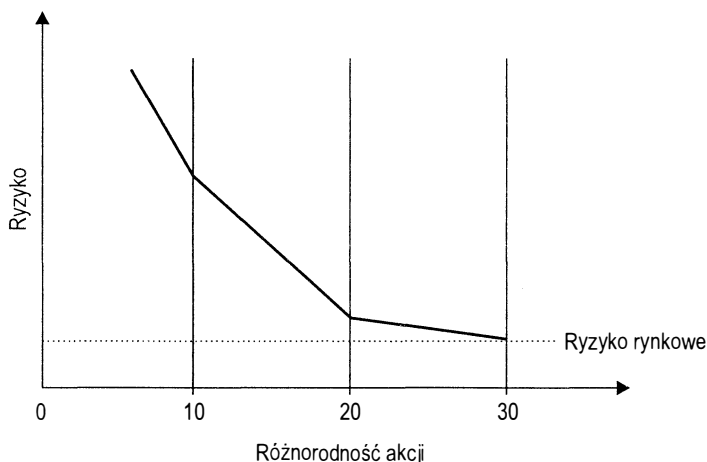
H. Markowitz¹²⁸ zaproponował metodę zmniejszania ryzyka portfela papierów wartościowych, polegającą na zwiększaniu liczby akcji w portfelu, charakteryzujących się różnymi stopami zwrotu i ryzykiem. Wzory na oczekiwaną stopę zwrotu i ryzyko takiego portfela podano w punkcie 1.2.3.4.2.

Stopa zwrotu portfela złożonego z wielu akcji jest zatem średnią ważoną wszystkich stóp akcji wchodzących w skład portfela, a ryzyko portfela zależy nie tylko od ryzyka poszczególnych składników portfela, ale również od korelacji między tymi składnikami. Im mniejsze korelacje między składnikami tym mniejsze ryzyko portfela. Zależność powyższą przedstawiono na rysunku 1.44.

¹²⁷ Dokładną metodę wyznaczania granicy efektywnej omówiono między innymi w pracy Elton E.J., Gruber M.J.: op.cit., s. 97 in.

¹²⁸ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 75

Rys. 1.44 Ryzyko portfela w funkcji różnorodności akcji w portfolio



Źródło: na podstawie (Tarczyński W., 1997).

Z przedstawionego rysunku wynika, że zwiększenie liczby różnych akcji w portfolio prowadzi do znacznego zmniejszenia ryzyka całego portfela. Jest to możliwe dzięki takiemu zachowaniu się rynku, który charakteryzuje się zmiennością koniunktur w różnych branżach. Wzrost koniunktury w jednej branży neutralizuje spadek koniunktury w innej. Istnieje jednak pewne ryzyko, tzw. ryzyko rynkowe, związane z funkcjonowaniem całej gospodarki zarówno wewnętrznej jak i światowej, którego jest niemożliwe do wyeliminowania.

Henry Markowitz określił na tej podstawie model, który dąży do uzyskania najniższych wartości ryzyka przy przyjętych ograniczeniach w postaci funkcji (Tarczyński W., 1997)¹²⁹:

$$F = -d \times E(R) + \delta(R), \text{ dla } 0 \leq d \leq \infty \quad (1.42)$$

gdzie:

d – oznacza wskaźnik skłonności do podejmowania ryzyka,

$E(R)$ – oznacza oczekiwaną stopę zwrotu portfela,

$\delta(R)$ – oznacza oczekiwane ryzyko portfela.

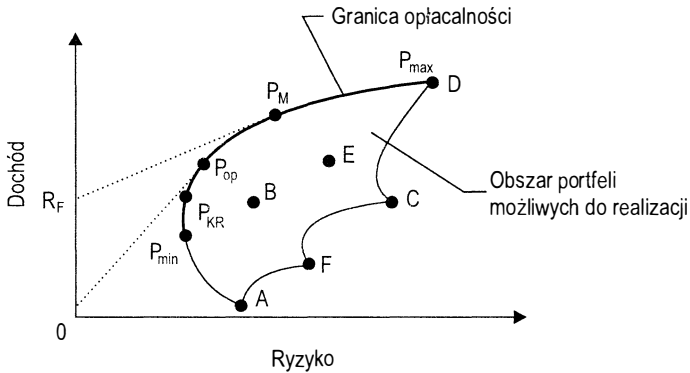
Na podstawie modelu istnieje możliwość wyznaczenie opłacalnego pod względem stopy zwrotu i ryzyka portfela, dającego maksymalne zyski przy danym poziomie ryzyka lub minimalne ryzyko dla zakładanego poziomu zysków (rysunek 1.45).

Na rysunku 1.45 przedstawiono przykład portfela złożonego z akcji firm A, B, C, D, E, F. Portfele jednoskładnikowe złożone w 100% z akcji jednej spółki przedstawione są przy pomocy zbioru punktów [A, B, C, D, E, F]. Wnętrze i obrzeże figury stanowią wszystkie możliwe do realizacji przez inwestora portfele. Granicę efektywną (zbiór efektywny) stanowi krzywa złożona z punktów położonych między P_{kr} i D. Portfele położone

¹²⁹ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 79

na tej krzywej mają najlepsze wskaźniki zysk/ryzyko, które oznaczają, że dla danego przewidywanego dochodu nie można znaleźć portfela o mniejszym ryzyku.

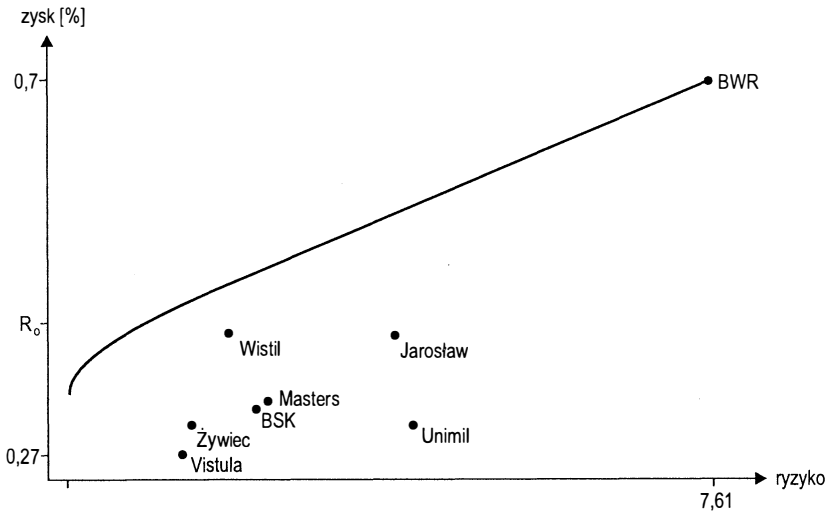
Rys. 1.45 Rozkład portfeli papierów wartościowych w układzie zysk-ryzyko



Źródło: na podstawie (Wierzbicki M., 1995).

Portfele efektywne tworzą krzywą portfeli niezdominowanych, które dla danej założonej stopy zwrotu minimalizują ryzyko lub maksymalizują oczekiwaną stopę zwrotu dla zakładanego ryzyka. Wybrane portfele efektywne mogą znacznie różnić się od siebie. Wszystko zależy od wyboru czynnika decydującego o zachowaniu się inwestora. W zależności od zakładanych wskaźników ryzyko/zysk krzywą portfeli efektywnych można podzielić na obszary portfeli zachowawczych i agresywnych.

Rys. 1.46 Mapa ryzyko-zysk przykładowego portfela papierów wartościowych z naniesioną krzywą portfeli efektywnych



Źródło: na podstawie programu Kapital.

Portfele zachowawcze są portfelami wybieranymi przez inwestorów, którzy nie chcą ponosić zbyt wysokiego ryzyka. Portfele te charakteryzuje możliwość akceptacji przez inwestora minimalnego, zakładanego zysku, przy mniejszym wzroście ryzyka. Portfele zachowawcze leżą zatem na najbardziej stromym odcinku krzywej portfeli efektywnych między punktami P_{\min} i P_{kr} . Wzrost zysku akcji danego portfela powoduje niewielki wzrost ryzyka.

Portfele minimalnego ryzyka charakteryzuje najmniejszy poziom całkowitego ryzyka (punkt P_{\min}). Jest to portfel, dla którego udział poszczególnych akcji jest tak dobrany, że osiągnięto najniższe możliwe ryzyko dla tego portfela. Pozostałe ryzyko stanowi ryzyko rynku, którego nie da się wyeliminować przez dywersyfikację portfela. Punkt minimalnego ryzyka stanowi początek obszaru portfeli zachowawczych. Przykładowy portfel minimalnego ryzyka przedstawia tabela 1.1.

Tabela 1.1 Przykładowy portfel minimalnego ryzyka

| Nazwa firmy | Ilość akcji | Udział w portfelu |
|-------------------|-------------|-------------------|
| BSK | 28 | 0.781 |
| BWR | 779 | 0.222 |
| POLAR | 28972 | 69.252 |
| VISTULA | 3486 | 4.044 |
| WISTIL | 1365 | 3.195 |
| BIUROSYST | 417 | 0.730 |
| FAMOT | 19743 | 10.268 |
| GANT | 10672 | 3.746 |
| JAROSLAW | 2155 | 1.681 |
| MASTERS | 15865 | 2.856 |
| TUP | 16878 | 3.224 |
| Zysk | | -0.066 |
| Ryzyko Sharpe'a | | 0.686 |
| Ryzyko rynk./WIG | | 0.021 |
| Ryzyko spec./WIG | | 0.685 |
| Ryzyko aktyw./WIG | | 2.344 |
| Alfa/WIG | | -0.067 |
| Beta/WIG | | 0.009 |
| Prawdop. straty | | 53.82 |
| Wartość portfela | | 999864.38 |

Źródło: opracowanie własne.

Portfel krytyczny jest punktem kończącym obszar portfeli zachowawczych (P_{kr}). Powyżej tego punktu tempo wzrostu ryzyka wraz z wzrostem dochodu występuje znacznie szybciej niż w obszarze portfeli zachowawczych. Przyjmuje się, że portfel krytyczny stanowi punkt w którym pochodna krzywej portfeli efektywnych osiąga wartość równą 1.

Portfel agresywny charakteryzuje się tym, iż wybierając go inwestor podejmuje ryzyko osiągnięcia wzrostu dochodu przez powiększenie ryzyka portfela ponad wzrost zysku. Jeżeli więc przy przejściu z jednego portfela do drugiego zysk rośnie o 1 punkt procentowy, a ryzyko o 2 punkty, to jest to portfel agresywny. Portfele agresywne położone są na krzywej opłacalności między punktami P_{kr} i P_{\max}

Portfel optymalny stanowi punkt na krzywej opłacalności, w którym linia poprowadzona z początku układu współrzędnych jest styczna do linii portfeli efektywnych (P_{op}). Jest to portfel o najwyższym dochodzie względnym w stosunku do ryzyka. Zaletą takiego portfela jest osiąganie optymalnego zysku minimalizując ryzyko poniesienia straty. Przykład portfela optymalnego przedstawia tabela 1.2.

Tabela 1.2 Przykładowy portfel optymalny

| Nazwa firmy | Ilość akcji | Udział w portfelu |
|-------------------|-------------|-------------------|
| BWR | 109076 | 31.086 |
| BIUROSYST | 28972 | 68.533 |
| JAROSLAW | 488 | 0.381 |
| Zysk | | 0.932 |
| Ryzyko Sharpe'a | | 5.021 |
| Ryzyko rynk./WIG | | 1.125 |
| Ryzyko spec./WIG | | 4.893 |
| Ryzyko aktyw./WIG | | 5.023 |
| Alfa/WIG | | 0.839 |
| Beta/WIG | | 0.497 |
| Prawdop. straty | | 42.64 |
| Wartość portfela | | 1000008.00 |

Źródło: opracowanie własne.

Portfel rynkowy podobny jest do portfela optymalnego z tym, że do wysokości ryzyka porównuje się przyrost zysku ponad stopę zwrotu wolną od ryzyka. Portfel otrzymuje się przez poprowadzenie stycznej do linii opłacalności przez punkt na osi dochodu odpowiadający stopie zwrotu wolnej od ryzyka. Punkt styczności odpowiada portfelowi rynkowemu. Przykład portfela rynkowego zawiera tabela 1.3.

Tabela 1.3 Przykładowy portfel rynkowy

| Nazwa firmy | Ilość akcji | Udział w portfelu |
|-------------------|-------------|-------------------|
| BWR | 106657 | 30.397 |
| BIUROSYST | 39773 | 69.603 |
| Zysk | | 0.938 |
| Ryzyko Sharpe'a | | 5.054 |
| Ryzyko rynk./WIG | | 1.122 |
| Ryzyko spec./WIG | | 4.928 |
| Ryzyko aktyw./WIG | | 5.059 |
| Alfa/WIG | | 0.845 |
| Beta/WIG | | 0.496 |
| Prawdop. straty | | 42.64 |
| Wartość portfela | | 999999.94 |

Źródło: opracowanie własne.

Kształt zbioru możliwych portfeli z wielu akcji wchodzących w skład portfela zależy od wzajemnych korelacji między poszczególnymi firmami i przy pewnych układach część zbioru może znajdować się w obszarze ujemnego zysku.

1.2.3.4.5 Portfel z elementami o zerowym ryzyku

Dotąd rozpatrywano portfele złożone jedynie z instrumentów obciążonych ryzykiem, jakimi są akcje. Na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie istnieją również instrumenty wolne od ryzyka, jakimi są obligacje. Są one często składnikiem portfeli inwestycyjnych. Portfel złożony zarówno z instrumentów wolnych od ryzyka, jak i obciążonych ryzykiem można potraktować jako portfel dwuskładnikowy, gdzie jednym składnikiem jest portfel akcji, a drugim – portfel obligacji.

Włączenie do portfela walorów pozbawionych ryzyka (obligacje, bony skarbowe itp.) umożliwia otrzymanie portfela charakteryzującego się większą stabilnością. Portfel taki staje się portfelem dwuskładnikowym, w którym jeden składnik stanowią akcje a drugi walory ze stopą zwrotu wolną od ryzyka. Oczekiwana stopa zwrotu i odchylenie standardowe (ryzyko) określone są za pomocą następujących wzorów (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., 1998)¹³⁰:

$$R_p = u_0 \times R_0 + (1 - u_0) \times R$$

$$\sigma_p = (1 - u_0) \times \sigma \quad (1.43)$$

gdzie:

R_p – oznacza oczekiwaną stopę zwrotu portfela złożonego z akcji i instrumentów wolnych od ryzyka,

R_0 – oznacza stopę zwrotu wolną od ryzyka,

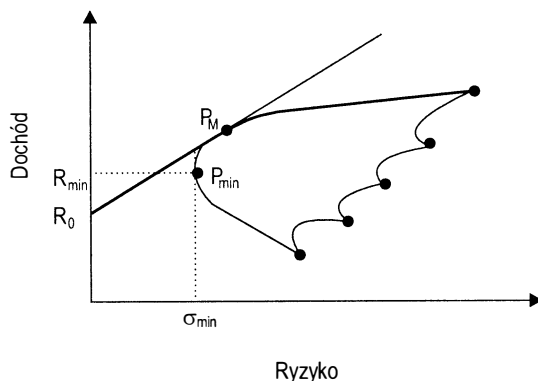
u_0 – oznacza udział w portfelu instrumentów wolnych od ryzyka,

R – oznacza stopę zwrotu portfela akcji,

σ_p – oznacza ryzyko portfela złożonego z akcji i instrumentów wolnych od ryzyka,

σ – oznacza ryzyko portfela akcji.

Rys. 1.47 Zbiór możliwych portfeli w przypadku walorów obciążonych ryzykiem i walorów bez ryzyka



Źródło: na podstawie (Wierzbicki M., 1995).

¹³⁰ Por.: Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 263

Można powiedzieć, że *dochód z portfela* jest sumą dwóch cen, którymi są cena czasu i cena ryzyka. Cena czasu to stopa wolna od ryzyka, która jest nagrodą dla inwestora odkładającego konsumpcję na przyszłość. Inwestor, który ryzykuje, otrzymuje dodatkową premię, która jest ceną ryzyka.

Zbiór możliwych portfeli złożonych z akcji i elementów wolnych od ryzyka przedstawiono na rysunku 1.47.

Pogrubiona linia stanowi granicę efektywności (zbiór portfeli efektywnych). Punkt R_0 odpowiada elementom wolnym od ryzyka. Portfele złożone z walorów wolnych od ryzyka i akcji leżą na odcinku łączącym punkt R_0 z dowolnym punktem odpowiadającym portfelowi złożonemu z samych akcji. Jak widać z rysunku najlepszym pod względem inwestycyjnym jest odcinek który jest styczny do granicy efektywności. (punkt P_M). Odpowiednikiem matematycznym tego punktu jest wyznaczenie wartości R i σ dla których wyrażenie:

$$\frac{R - R_0}{\sigma}$$

osiąga wartość maksymalną. Rozwiązaniem jest punkt styczności P_M , który odpowiada portfelowi rynkowemu. Półprosta między punktami R_0 i P_M stanowi zbiór portfeli efektywnych, które są bardziej atrakcyjne dla inwestora niż portfel złożony z samych akcji – krzywa P_{\min} P_M . Zbiór efektywny określa równanie (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., 1998)¹³¹:

$$R = R_0 + \frac{R_M - R_0}{\sigma_M} \times \sigma \quad (1.44)$$

gdzie:

R – oznacza oczekiwaną stopę zwrotu portfela efektywnego,

σ – oznacza odchylenie standardowe portfela efektywnego,

R_M – oznacza oczekiwaną stopę zwrotu portfela rynkowego,

σ_M – oznacza odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela rynkowego.

W punkcie P_M udział walorów wolnych od ryzyka w portfelu wynosi 0. Przy przemieszczaniu się w kierunku punktu R_0 po półprostej (linii rynku kapitałowego) rośnie udział elementów wolnych od ryzyka w portfelu.

Portfele efektywne znajdujące się na linii rynku kapitałowego złożone są z portfela rynkowego (akcji) i elementów wolnych od ryzyka (np. obligacji). Wzrost elementów wolnych od ryzyka prowadzi do spadku oczekiwanego dochodu przy jednoczesnym spadku ryzyka całego portfela. Zwiększanie natomiast portfela rynkowego (akcji) prowadzi do wzrostu oczekiwanego dochodu, ale jednocześnie rośnie ryzyko globalne portfela.

Punkty leżące po przeciwnej stronie punktu P_M odpowiadają stanowi, w którym inwestor posiada ujemny udział obligacji w portfelu. Portfele leżące w tym obszarze odpowiadają tzw. krótkiej sprzedaży, która polega na dokożyczeniu papierów wartościowych w celu ich sprzedaży, a następnie ich odkupieniu po niższej cenie i ich zwrocie. Jak wynika

¹³¹ Szerzej o tym pisze Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 265-269, Wierzbicki M.: op.cit., s. 73-79

z rysunku, takie transakcje mają lepszą stopę zwrotu, jednak obciążone są zwiększonym ryzykiem.

1.2.3.5 Inne modele rynku papierów wartościowych

Analityczny model rynku zaproponowany przez H. Markowitza jest skomplikowany i czasochłonny dla większej ilości akcji. Z tego względu poszukiwano innych, uproszczonych modeli portfeli, umożliwiających przewidywanie zachowań cen papierów wartościowych. Najprostszym i jednocześnie często używanym przez analityków rynku jest jednowskaźnikowy model rynku Sharpe'a.

1.2.3.5.1 Model jednowskaźnikowy Sharpe'a

Ideą modelu Sharpe'a było przekonanie, że wpływ na stopy zwrotu akcji na rynku ma pewien ogólny czynnik kształtujący całą sytuację rynkową. Sharpe zauważył, że ceny wybranych akcji, przy powtarzających się spadkach na giełdzie malały bardziej niż określone wskaźniki (np. indeks giełdowy WIG) i odwrotnie. Ceny innych akcji zmieniały się wolniej zarówno w przypadku hossy jak i bessy.

W analizie giełdowej takim ogólnym czynnikiem charakteryzującym zachowanie całej giełdy jest indeks giełdowy. Zależność stopy zwrotu akcji w portfelu przy modelu jednowskaźnikowym określona jest przez równanie regresji, w którym najważniejszym elementem jest współczynnik agresywności β . Model jednowskaźnikowy określony jest wzorem (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., 1998)¹³²:

$$R = \alpha + \beta \times R_M + \omega \quad (1.45)$$

gdzie:

R – oznacza stopę zwrotu akcji,

R_M – oznacza stopę zwrotu wskaźnika rynku,

α – oznacza współczynnik równania,

β – oznacza współczynnik agresywności

ω – oznacza składnik losowy związany ze stopą zwrotu.

Równanie określone powyższym wzorem może być wyznaczane zarówno dla pojedynczej akcji, jak i portfela. Równanie powyższe nosi nazwę „linii charakterystycznej akcji”. Występujące w zależności dwie stopy zwrotu są stopami zrealizowanymi lub możliwymi do zrealizowania, a nie oczekiwanymi. Stopa zwrotu akcji w modelu Sharpe'a zależy w sposób liniowy od stopy zwrotu wskaźnika rynkowego (np. WIG-u) i losowo od pozostałych czynników, których odzwierciedleniem jest współczynnik ω . Współczynnik ten zależy od wielu czynników losowych, dlatego jego oszacowanie nie jest możliwe. Jeżeli stopę zwrotu oblicza się w odpowiednio długim okresie czasu to przyjmuje się, że czynniki losowe mają niewielki wpływ na rozkład stopy zwrotu i w równaniu pomija się współczynnik ω otrzymując model Sharpe'a w postaci:

$$R = \alpha + \beta \times R_M \quad (1.46)$$

¹³² Opisał to Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 299 in., Tarczyński W.: op.cit., s. 105 in.

Przykładowe wartości ryzyka i współczynników beta i alfa w modelu Sharpe'a zawiera tabela 1.4.

Tabela 1.4 Przykładowe wartości ryzyka i współczynników beta i alfa w modelu Sharpe'a

| Firmy | | Alfa | Beta | Ryzyko | R. rynku | R. specyfi |
|-----------|---|--------|--------|--------|----------|------------|
| NL-SLOW | | 0.088 | 0.508 | 1.336 | 1.149 | 0.682 |
| PMI | | 0.092 | 0.647 | 1.693 | 1.463 | 0.852 |
| WIG | | 0.000 | 1.000 | 2.262 | 2.262 | 0.000 |
| WIG20 | | 0.109 | 1.195 | 2.755 | 2.703 | 0.529 |
| WI RR | | 0.363 | 1.079 | 2.692 | 2.442 | 1.134 |
| BSK | | -0.301 | 0.776 | 3.375 | 1.756 | 2.882 |
| BWR | | 0.574 | 0.683 | 7.611 | 1.544 | 7.452 |
| MPECWRO | ~ | 1.527 | 2.792 | 7.982 | | |
| POLAR | | -0.009 | -0.063 | 0.866 | 0.143 | 0.854 |
| VISTULA | | -0.357 | 0.481 | 2.703 | 1.088 | 2.474 |
| WISTIL | | -0.041 | 0.430 | 3.111 | 0.973 | 2.955 |
| BEEFSAN | ~ | 0.475 | -0.392 | 7.060 | | |
| BIUROSYST | | 0.963 | 0.414 | 6.358 | 0.938 | 6.288 |
| FAMOT | | -0.338 | 0.059 | 2.228 | 0.133 | 2.224 |
| GANT | | -0.084 | -0.027 | 3.751 | 0.062 | 3.751 |
| JAROSLAW | | -0.025 | 0.301 | 4.667 | 0.682 | 4.617 |
| MASTERS | | -0.195 | 0.343 | 3.501 | 0.775 | 3.414 |
| TUP | | -0.228 | -0.333 | 3.329 | 0.752 | 3.243 |

Źródło: opracowanie własne na podstawie programu Kapitał.

Zbyt długie wydłużanie okresu prognozy może spowodować zmianę wskaźników α i β , powodując zmianę wyniku rozwiązania uzyskanego z modelu Sharpe'a. Z tego powodu należy wybierać odpowiedni przedział czasowy, który minimalizuje udział współczynnika ω , ale jednocześnie nie powoduje zmian pozostałych współczynników. Współczynnik α nazywany jest współczynnikiem alfa linii charakterystycznej. Najważniejszym jest jednak współczynnik β , który określa o ile jednostek wzrośnie stopa zwrotu akcji, gdy stopa zwrotu wskaźnika rynku wzrośnie o jednostkę.

W zależności od wartości współczynnika β można ocenić akcję pod względem jej ryzyka¹³³. Jeżeli:

$\beta < 0$ to stopa zwrotu akcji zachowuje się przeciwnie niż stopa wskaźnika rynku, jeżeli stopa wskaźnika rynku spada to stopa zwrotu akcji rośnie i na odwrót;

$\beta = 0$ to stopa zwrotu akcji jest niezależna od zmian na rynku;

¹³³ Szerzej na temat interpretacji wartości współczynnika β traktują prace: Wierzbicki M.: op.cit., s. 83-84, Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 300-301

- $0 < \beta < 1$ to zmiany wartości akcji w małym stopniu zależą od zmiany wskaźnika rynkowego; taką akcję nazywa się akcją defensywną;
- $\beta = 1$ to stopa zwrotu akcji zmienia swoją wartość o tyle samo co stopa wskaźnika giełdowego, współczynnik β jest równy 1 w przypadku portfela rynkowego;
- $\beta > 1$ to stopa zwrotu akcji zmienia się znacznie szybciej niż stopa zwrotu wskaźnika giełdowego, jest to silna reakcja na zmiany zachodzące na giełdzie, portfel taki nosi nazwę agresywnego.

Model Sharpe'a może być budowany dla portfela wielu akcji. Współczynnik β i α w takim przypadku najczęściej wyznacza się ze wzoru (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., 1998)¹³⁴:

$$\beta_c = \sum_{i=1}^n u_i \times \beta_i$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^n u_i \times \alpha_i \quad (1.47)$$

gdzie:

- β_c – współczynnik β całego portfela,
 n – liczba różnych akcji w portfelu,
 u_i – udział akcji i -tej spółki w portfelu,
 β_i – współczynnik agresywności i -tej spółki w portfelu,
 α_c – współczynnik α całego portfela,
 α_i – współczynnik α i -tej akcji.

Współczynniki β określa się na podstawie zachowania akcji w przeszłości, analizy fundamentalnej lub prognoz. Na podstawie rozkładów statystycznych wyznacza się współczynniki β i α wg następujących wzorów (Wierzbicki M., 1995)¹³⁵:

$$\beta = \frac{\sum_{k=1}^m (R_k - \bar{R}) \times (R_{Mk} - \bar{R}_M)}{\sum_{k=1}^m (R_{Mk} - \bar{R}_M)^2} \quad (1.48)$$

$$\alpha = R - \beta \times R_M$$

gdzie:

- m – określa liczbę okresów z przeszłości, z których pochodzą informacje,
 R_k – określa stopę zwrotu akcji w k -tym okresie,
 R_{Mk} – określa stopę zwrotu wskaźnika rynku w k -tym okresie,
 R – określa średnią stopę zwrotu akcji,
 R_M – określa średnią stopę zwrotu wskaźnika rynku.

¹³⁴ Por.: Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 303

¹³⁵ Wierzbicki M.: op.cit., s. 84

Wskaźnik β umożliwia podział całkowitego ryzyka rozpatrywanej akcji lub portfela na część podlegającą redukcji w procesie optymalizacji portfela i część ryzyka związanego z samą grą na giełdzie. Podział ryzyka uzyskuje się na podstawie poniższego wzoru (Wierzbicki M., 1995),¹³⁶:

$$\sigma = \sqrt{\beta^2 \times \sigma_M^2 + \sigma_S^2} \quad (1.49)$$

gdzie:

σ – globalne ryzyko akcji lub portfela,

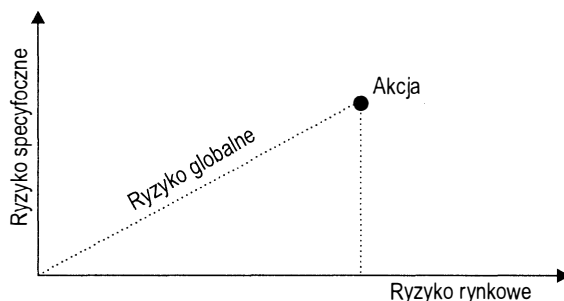
σ_M – ryzyko wskaźnika rynku (np. indeksu giełdowego),

σ_S – ryzyko składnika losowego.

β – współczynnik beta waloru lub portfela.

Graficzną prezentację zależności ryzyka globalnego akcji od poszczególnych składników ryzyka zawiera rysunek 1.48.

Rys. 1.48 Graficzna prezentacja zależności ryzyka globalnego akcji od poszczególnych składników ryzyka



Źródło: na podstawie (Wierzbicki M., 1995).

Pierwiastek składnika ($\beta\sigma_M$) jest to ryzyko rynku zależne od współczynnika β i stopy zwrotu wskaźnika rynkowego, nazywane również ryzykiem systematycznym. Drugi składnik to tak zwane ryzyko specyficzne. Jak sama nazwa wskazuje, ta część ryzyka jest specyficzna dla jednego waloru. Z matematycznego punktu widzenia ryzyko całkowite jest zatem przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego dwa pozostałe boki stanowią ryzyko rynkowe i ryzyko specyficzne.

1.2.3.5.2 Model równowagi rynku kapitałowego – CAPM

W teorii modelu CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) zakłada się, że każdy walor charakteryzuje się ryzykiem złożonym tylko z części rynkowej, związanej ze współczynnikiem β . Przy opracowywaniu modelu CAPM, jego twórcy: W. Sharpe, J. Lintner, J. Mossin i J. Treynor sformułowali następujące założenia, które powinny być spełnione do jego poprawnego funkcjonowania (Wierzbicki M., 1995)¹³⁷:

¹³⁶ Por.: Wierzbicki M. op.cit., s. 86

¹³⁷ Podano za Wierzbicki M.: op.cit., s. 90-91; pisze o tym również: Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 306-307, Tarczyński W.: op.cit., s. 124

- inwestorzy charakteryzują się awersją do ryzyka (godzą się na wzrost ryzyka pod warunkiem wzrostu stopy zwrotu) i maksymalizują swoje funkcje użyteczności długookresowej;
- inwestorzy mają jednakowy dostęp do wszystkich informacji, które są bezpłatne;
- oszacowanie przyszłej stopy zwrotu i ryzyka jest jednakowe na podstawie tych samych informacji;
- inwestorzy mogą zaciągać i udzielać pożyczek przy stopie wolnej od ryzyka,
- liczba i rodzaj aktywów na rynku jest stała;
- wszystkie walory mają idealną płynność;
- transakcje są nieopodatkowane i nie wiążą się z żadnymi dodatkowymi kosztami (np. prowizją lub podatkami);
- współczynniki β akcji są stabilne w czasie.

Podstawowym wyrażeniem w modelu CAPM jest równanie wyznaczające linię rynku papierów wartościowych, określające zależność między stopą zwrotu a współczynnikiem beta. Równanie przedstawia się następująco (Tarczyński W., 1997)¹³⁸:

$$R = R_0 + \beta \times (R_M - R_0) \quad (1.50)$$

gdzie:

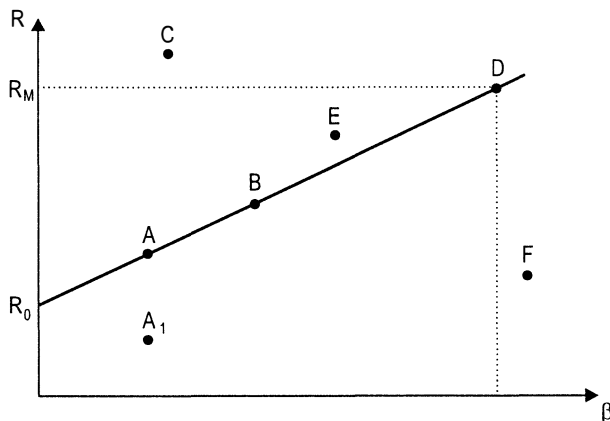
R – oznacza stopę zwrotu akcji lub portfela,

R_0 – oznacza stopę zwrotu wolną od ryzyka,

R_M – oznacza stopę zwrotu wskaźnika giełdowego,

β – oznacza współczynnik beta akcji lub portfela.

Rys. 1.49 Rozkład portfeli ze względu na stopę zwrotu i współczynnik β



Źródło: na podstawie (Wierzbicki M., 1995).

¹³⁸ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 122-123, Wierzbicki M.: op.cit., s. 91, Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit., s. 309

Na rysunku 1.49 przedstawiono rozkład przykładowych portfeli papierów wartościowych. Na linii prostej znajdują się portfele A, B, D, są to portfele rynkowe o jednakowym przewidywanym zysku i ryzyku mierzonym współczynnikiem beta. Portfel E leży powyżej linii, a więc charakteryzuje się wyższym przewidywanym dochodem i jest atrakcyjny dla inwestorów. Wzrost zapotrzebowania na określone akcje w portfelu spowoduje wzrost ich ceny, a tym samym spadek stopy zwrotu co spowoduje, że portfel taki znajdzie się na linii równowagi. Portfel A₁ leży poniżej linii równowagi i posiada niższą stopę zwrotu niż portfel A, pomimo, że oba mają ten sam współczynnik β. Inwestorzy pozbywając się tego portfela, zwiększają podaż na rynku, co spowoduje spadek ceny, akcja staje się bardziej atrakcyjna, a w długookresowej perspektywie następuje podniesienie oczekiwanej stopy zwrotu. W rezultacie tego portfel A₁ stanie się portfelem A i znajdzie się na linii równowagi.

Portfele, które leżą poza linią równowagi w krótszym lub dłuższym okresie czasowym pod wpływem mechanizmów giełdowych wracają do stanu równowagi. Równanie linii rynku papierów wartościowych jest zatem równaniem równowagi rynku, gdy wszyscy inwestorzy dążą do posiadania portfela rynkowego.

W praktyce istnieje wiele czynników zakłócających model CAPM. Są to między innymi: niejednakowy dostęp do informacji, zaburzenia w płynności firm, prowizje i podatki, emisje nowych papierów po zróżnicowanych cenach.

1.2.3.5.3 Model wielowskaźnikowy

Model wieloindeksowy jest rozszerzeniem modelu jednoindeksowego przy założeniu, że zachowanie akcji (jej stopa zwrotu) określona zostanie przez większą liczbę zmiennych (Wierzbicki M., 1995)¹³⁹. W praktyce najczęściej zmienne ogranicza się do: inflacji, zmian stóp procentowych, wzrostu lub spadku bezrobocia, sprzyjającej lub niesprzyjającej koniunktury światowej.

Przyjmuje się, że w modelu wieloczynnikowym, podobnie, jak jednoczynnikowym stopa zwrotu akcji (portfela) zależy w sposób liniowy od wpływających na nią czynników. Rozszerzając równanie modelu jednowskaźnikowego otrzymujemy następującą zależność (Tarczyński W., 1997)¹⁴⁰:

$$R = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_k \times W_k + L_j \quad (1.51)$$

gdzie:

R – oczekiwana stopa zwrotu,

α_0 , γ_k – parametry równania,

W_k – wskaźniki objaśniające,

k – ilość czynników objaśniających,

L_j – zmienna losowa.

Koncepcja powyższego modelu zakłada, że można wyróżnić szereg czynników, które mają wpływ na określoną stopę zwrotu z akcji¹⁴¹.

¹³⁹ Szerzej o tym pisze: Wierzbicki M.: op.cit., s. 93

¹⁴⁰ Por.: Tarczyński W.: op.cit., s. 111

¹⁴¹ Opisał to m.in. Tarczyński W.: op.cit., s. 111 in.

1.2.3.6 Ocena efektywności inwestycji w papiery wartościowe

Wskaźniki efektywności inwestycji pozwalają na badanie określonej inwestycji w stosunku do innych inwestycji i całego rynku. Szczególnie przydatne są do oceny i wyboru portfeli złożonych z wielu walorów, ale również można je stosować do oceny pojedynczych akcji. Wybrane wskaźniki do badania efektywności inwestycji zostaną omówione w niniejszym podrozdziale.

1.2.3.6.1 Wskaźnik efektywności Sharpe'a

Wskaźnik efektywności Sharpe'a jest miernikiem efektywności inwestycji bazującym na zysku względnym. W założeniu Sharpe dopuszczał zwiększenia ryzyka, jeżeli wiąże się to z dodatkowym zyskiem i przyjął, że zysk z ryzyka na jednostkę ryzyka w dobrze dobranym portfelu powinien być taki sam, jak zysk z ryzyka na jednostkę ryzyka w portfelu rynkowym.

Wskaźnik efektywności Sharpe'a definiuje się następująco (Wierzbicki M., 1995)¹⁴²:

$$W_s = \frac{R - R_0}{\sigma} \quad (1.52)$$

gdzie:

W_s – oznacza wskaźnik efektywności Sharpe'a,

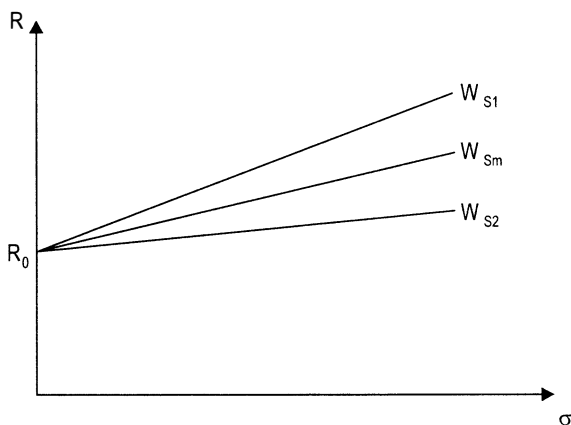
R – oznacza stopę zwrotu ocenianego waloru,

R_0 – oznacza stopę zwrotu walorów wolnych od ryzyka,

σ – oznacza odchylenie standardowe.

Na podstawie badań i zachowania rynku Sharpe wykazał, że inwestycje charakteryzujące się wyższym wskaźnikiem są bardziej opłacalne. Przykład kształtowania się współczynnika Sharpe'a dla przykładowych inwestycji zawiera rysunek 1.50.

Rys. 1.50 Zmiany wskaźnika efektywności Sharpe'a dla przykładowych inwestycji



Źródło: na podstawie (Tarczyński W., 1997).

¹⁴² Por.: Wierzbicki M.: op.cit., s. 39

Półprosta Wsr przedstawia wartość współczynnika Sharpe'a w przypadku portfela rynkowego, natomiast półproste Ws_1 i Ws_2 dotyczą dwóch innych portfeli. Jak widać z rysunku inwestycja w portfel 1 daje większy dochód za ryzyko, względem jednostki ryzyka, niż inwestycja w portfel rynkowy. Natomiast z portfelem nr 2 sytuacja wygląda odwrotnie.

1.2.3.6.2 Wskaźnik efektywności Treynora

Swoją koncepcję oceny efektywności inwestycji Treynor przedstawił w 1965 roku. Analogicznie jak w przypadku wskaźnika Sharpe'a, wskaźnik Treynora można stosować zarówno do portfeli złożonych z wielu walorów jak też pojedynczych akcji. Treynor swoją koncepcję oparł na modelu rynku kapitałowego CAPM, w którym podstawowym wskaźnikiem jest współczynnik β wiążący zachowanie pojedynczej akcji z zachowaniem giełdy. Współczynnik ten określa, jak powinna zmieniać się wartość akcji przy zmianach wszystkich akcji notowanych na giełdzie z uwzględnieniem wszystkich dodatkowych zysków (dokładniejsze omówienie wskaźnika β zawiera kolejny rozdział).

Wskaźnik Treynora wyznacza się na podstawie następującego równania (Wierzbicki M., 1995)¹⁴³:

$$W_T = \frac{R - R_0}{\beta} \quad (1.53)$$

gdzie:

W_T – oznacza wskaźnik efektywności Treynora,

R – oznacza stopę zwrotu inwestycji,

R_0 – oznacza stopę zwrotu walorów wolnych od ryzyka,

β – oznacza współczynnik agresywności inwestycji.

Wskaźnik Treynora porównuje dochód osiągnięty z inwestycji względem statystycznego zachowania się całej giełdy. Na podstawie wskaźnika Treynora za lepszy uznaje się portfel, który osiąga wyższą wartość wskaźnika tzn. lepszą inwestycją byłby ten portfel, którego zachowanie byłoby stabilniejsze (mniejsza wartość β).

1.2.3.6.3 Wskaźnik efektywności Jensena

Wskaźniki omawiane wcześniej traktowały zmianę wartości inwestycji względem parametrów związanych z ich statystyczną zmiennością, dając uniwersalne narzędzia do porównywania dowolnych portfeli lub akcji. Jensen stworzył w 1968 roku, w oparciu o model CAPM, miarę absolutną oceny premii za ryzyko. Próbę szacowania rynku podjął na podstawie danych historycznych z wykorzystaniem przybliżeń matematycznych. Wskaźnik efektywności Jensena oblicza się na podstawie następującego wzoru (Wierzbicki M., 1995)¹⁴⁴:

$$W_J = R - R_0 - \beta \times (R_M - R_0) \quad (1.54)$$

gdzie:

W_J – oznacza wskaźnik efektywności Jensena inwestycji,

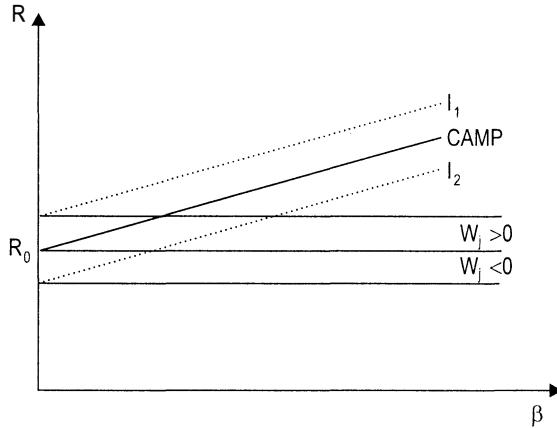
R – oznacza stopę zwrotu z inwestycji,

¹⁴³ Por.: Wierzbicki M.: op.cit., s. 40

¹⁴⁴ Por.: Wierzbicki M.: op.cit., s. 41, Tarczyński W.: op.cit., s. 157

R_0 – oznacza stopę zwrotu walorów wolnych od ryzyka,
 R_M – oznacza stopę zwrotu portfela rynkowego,
 β – oznacza wskaźnik agresywności mierzony względem R_M .

Rys. 1.51 Wskaźnik efektywności Jensena w ujęciu graficznym



Źródło: na podstawie (Tarczyński W., 1997).

Inwestycje godne zainteresowania charakteryzują się wskaźnikiem Jensena wyższym od zera (rysunek 1.51). W celu wyboru lepszej inwestycji najlepiej jest porównywać portfele o jednakowym wskaźniku β . Im wyższy wskaźnik Jensena, tym większa część zachodzących w portfelu zmian nie zależy od zmian na giełdzie. W przypadku porównywania portfeli o różnych współczynnikach β , wskaźnik Jensena nie jest miarą najwłaściwszą i może spełniać jedynie funkcję pomocniczą.

W pracy omówiono w wąskim zakresie zagadnienie analizy portfelowej. Szerzej na ten temat traktują następujące prace (Jajuga K., Kuziak K., Markowski P., 1998¹⁴⁵; Wierzbicki M., 1995¹⁴⁶; Haugen R. A., 1996¹⁴⁷; Tarczyński W., 1997¹⁴⁸; Elton E.J., Gruber M.J., 1998)¹⁴⁹.

¹⁴⁵ Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: op.cit.

¹⁴⁶ Wierzbicki M.: op.cit.

¹⁴⁷ Haugen R.A.: op.cit.

¹⁴⁸ Tarczyński W.: op.cit.

¹⁴⁹ Elton E.J., Gruber M.J.: op.cit.

1.2.4 Podsumowanie

W rozdziale tym przedstawiono trzy metody analizy rynku akcji, na których opierają się inwestorzy w swoich decyzjach. Należą do nich: analiza techniczna, fundamentalna i portfelowa. Dwie pierwsze metody zaliczamy do tradycyjnych podejść w analizie rynku akcji. Podstawową teorią funkcjonowania nowoczesnych finansów jest analiza portfelowa, zorientowana na maksymalizację zysku przy założonym poziomie ryzyka.

Analiza fundamentalna to inaczej analiza ekonomiczna spółki na tle branży bądź całego rynku. Oparta na niej strategia inwestowania jest najczęściej strategią długoterminową. Analiza fundamentalna to proces obejmujący kilka etapów, od analizy makroekonomicznej, poprzez analizę sektorową, analizę finansową spółki, aż do wyceny akcji. Aby analiza fundamentalna była obiektywną, wprowadzono tzw. analizę wskaźnikową, która na podstawie porównania ujednoliconych wskaźników mikroekonomicznych pozwala na określenie kondycji finansowej spółki (Zielonka P., Tyszka T., 1999 za Bernstein P.L., 1998)¹⁵⁰.

Analiza techniczna, z kolei, jest to strategia krótkoterminowa, inaczej zwana spekulacyjną. Polega ona na prognozowaniu kursu akcji na podstawie dotychczasowych zmian jej cen i obrotów, przy których zmiany te wystąpiły. Jest to metoda dość kontrowersyjna, gdyż różni analitycy techniczni na podstawie tych samych przesłanek mogą wyciągnąć różne wnioski co do kondycji rynku czy spółki. Analiza techniczna biorąc pod uwagę psychologiczne podłoże zmian cen, stanowi mieszanekę koncepcji racjonalnych i ezoterycznych; ignoruje informacje fundamentalne (wskaźniki gospodarcze, dane dotyczące sytuacji finansowej spółek, perspektywy ekonomiczne etc.). Analityk techniczny może więc prognozować kurs akcji i podejmować decyzje, nie wiedząc nawet, jaka jest nazwa firmy (nie mówiąc już o jej rzeczywistej kondycji finansowej). Uważa się powszechnie, że analiza techniczna była efektywna kilkadziesiąt lat temu, kiedy przepływ informacji był bardzo mały (Zielonka P., Tyszka T., 1999)¹⁵¹.

Nowoczesne finanse posługują się bardziej racjonalnymi metodami wyceny walorów. Bierze się pod uwagę takie parametry, jak: ryzyko, stopę zwrotu z inwestycji. Analiza inwestycji spełniająca powyższe wymagania nosi nazwę analizy portfelowej.

Analiza ta opiera się na trzech podstawowych założeniach (Knap Ł.: 1997)¹⁵²:

- *racjonalności postępowania inwestorów (rational investors) – inwestorzy poszukują walorów zapewniających jak najwyższą stopę zwrotu przy optymalnym ryzyku;*
- *efektywności rynków (efficient markets) – ceny papierów wartościowych odzwierciedlają wszelkie dostępne inwestorom informacje na temat danych walorów, przy czym zmiany cen nie są ze sobą powiązane w długim terminie, innymi słowy – rynek nie ma swojej pamięci;*

¹⁵⁰ Por.: Bernstein P.L.: op.cit., Zielonka P., Tyszka T.: *Nowoczesne finanse: efektywność rynku czy finanse behawioralne? Bank i Kredyt* 11/1999, s. 8

¹⁵¹ Por.: Zielonka P., Tyszka T.: op.cit., s. 8-9

¹⁵² Podano za Knap Ł.: *Teoria chaosu. Nowa koncepcja rynku kapitałowego ma coraz więcej zwolenników. Gazeta Bankowa* 13/03/1997, s. 4

- *przypadkowości (random walks) – w związku z prawdziwością dwóch poprzednich założeń stopa zwrotu z inwestycji jest wartością przypadkową.*

Jak z powyższego wynika hipoteza rynku efektywnego i związane z nią modele wyjaśniają potrzebę zastosowania rachunku prawdopodobieństwa i statystyki w analizie rynków kapitałowych. Według tej koncepcji rynek jest efektywny, gdy cała dostępna informacja o konkretnym walorze jest natychmiast odzwierciedlana w jego cenie (Zielonka P., Tyszka T., 1999)¹⁵³.

Z punktu widzenia R.A. Haugena (Haugen R.A., 1996)¹⁵⁴, *efektywność rynku ma kilka odmian, w zależności od typu informacji, które znajdują odzwierciedlenie w cenach papierów wartościowych. Jeśli rynek jest słabo efektywny, kursy uwzględniają informacje zawarte w dotychczasowym przebiegu notowań papierów, które mogą mieć związek z wysokością przyszłej stopy zwrotu. W warunkach rynku słabo efektywnego analiza techniczna staje się nieprzydatna. Jeśli rynek jest średnio efektywny, ceny papierów wartościowych odzwierciedlają wszystkie publicznie dostępne informacje. Chodzi tu między innymi o sprawozdania finansowe firm oraz dane statystyczne dotyczące całej gospodarki. W warunkach rynku średnio efektywnego zarówno analiza techniczna, jak i fundamentalna nie są przydatne. Aby prześcignąć innych uczestników rynku analityk musi wykorzystywać informacje publicznie niedostępne. W skrajnym przypadku rynek jest silnie efektywny. Ceny papierów wartościowych uwzględniają wtedy wszystkie osiągalne informacje. Silna efektywność rynku czyni niemożliwym rozróżnienie inwestycji korzystniejszych od mniej korzystnych.*

Jak z powyższego wynika, trzy wymienione wersje hipotezy o efektywności rynku stawiają pod znakiem zapytania celowość wysiłków analityków technicznych, którzy zakładają, że wszystkie informacje zawarte w przeszłych ruchach cen i indeksów giełdowych są całkowicie odzwierciedlone w bieżących cenach akcji, jak również analityków fundamentalistów, którzy dokonując analiz ekonomicznych prognozują ceny akcji. Prawda natomiast jest taka, że ceny akcji poruszają się ruchem przypadkowym.

W literaturze przedmiotu przypadkowy ruch cen opisywany jest tzw. ciągłym rozkładem prawdopodobieństwa, czyli rozkładem normalnym. Graficzną prezentacją jest tzw. krzywa Gaussa. Ryzyko inwestycyjne, jak już wcześniej pisano, można wyrazić odchyleniem standardowym od tej krzywej. W związku z powyższym do modelowania stosować metody statystyczne oparte na teorii wielkich liczb. W praktyce, przy tworzeniu portfela, określa się racjonalne (z punktu widzenia statystyki) strategie minimalizowania ryzyka czy maksymalizacji zysku. Dokonuje się tego według teorii zakładających idealny, symetryczny rozkład stóp zwrotu na giełdzie. Tymczasem, jak pokazuje praktyka, zachowanie rzeczywistych kursów znacznie odbiega od teorii, rozkład stóp zwrotu jest niesymetryczny, a wartości znacznie odbiegające od średniej są w rzeczywistości zdecydowanie bardziej prawdopodobne, niż wynika z rozkładu normalnego (Wolny K., 1997)¹⁵⁵.

Jak z powyższego wynika aktualne teorie wyceny rynku akcji są zbyt uproszczone. Podstawowe narzędzie matematyczne wykorzystywane w tym celu to równania liniowe, wykorzystywane również w naukach finansowych. To podejście opiera się na założeniu, że wszystkie rozpatrywane zjawiska mają charakter przyczynowo-skutkowy; wszystkie sys-

¹⁵³ Szerzej o tym piszą Zielonka P., Tyszka T.: op.cit., s. 9-10, Bernstein P.L., op.cit.

¹⁵⁴ Podano za Haugen R.A.: op.cit., s. 732

¹⁵⁵ Por.: Wolny K.: *Chaos rządzi giełdą. Gospodarka. Businessman* 64/7/1997

temy (w tym również rynki kapitałowe) zmierzają do równowagi, a natura jest przewidywalna i uporządkowana. Zasady te nie dają się zastosować do prognozowania rynku akcji. Na rynkach tych zależności nie są liniowe, daje się zauważyć dość często występowanie sprzężeń zwrotnych. Charakterystyczną cechą, którą daje się zauważyć, analizując rynki kapitałowe jest wrażliwość na zmianę warunków początkowych. Za przykład może posłużyć niepokój panujący na Bliskim Wschodzie, a później kryzys rosyjski miały poważny wpływ na funkcjonowanie rynków finansowych we wszystkich krajach. Nikomu do tej pory nie udało się stworzyć nieliniowego modelu funkcjonowania rynku kapitałowego.

Biorąc pod uwagę powyższe argumenty można uznać, że jedną z nowszych koncepcji opisu rynku kapitałowego jest teoria chaosu.

Wybrane elementy teorii chaosu omówione będą w rozdziale drugim niniejszej pracy.

2.

Wybrane elementy teorii chaosu deterministycznego

W obszarze światowych rynków kapitałowych występuje szereg złożonych zjawisk gospodarczych charakteryzujących się dużą dynamiką zmian, nie podlegających prostym prawom statystyki matematycznej oraz nie dających się wytłumaczyć prawami ekonomii. Dotyczy to również analizy cykli koniunkturalnych w gospodarce oraz cykli giełdowych na rynkach kapitałowych. Zmiany zachodzące podczas tych cykli są najczęściej nieperiodyczne. Opis tego typu badanych zjawisk zawiera dużą ilość specyficznych zmiennych, które mają strukturę nieliniową ze skomplikowanymi powiązaniem między tymi zmiennymi (wielowymiarowość i nieliniowość układów). O wielu lat podejmowano próby opracowania układów i odkrycia powiązań między poszczególnymi zmiennymi wpływającymi na zachowanie układu. Próby te kończyły się zwykle na powstaniu złożonych struktur lub układów równań często nierozwiązywalnych ze względu na skomplikowaną ich budowę.

Możliwość wykorzystania komputerów do wielokrotnych iteracji struktur opisanych układami różnicowymi oraz rozwój matematyki spowodował przeniesienie modeli statystycznych na płaszczyznę nowych dyscyplin naukowych – teorii chaosu i analizy fraktalnej.

W teorii chaosu przyjmuje się, że złożoność zjawisk może być przyczyną znacznie różniącego się w czasie zachowania układów (wykładniczym rozbieganiem się trajektorii w przestrzeni fazowej) o podobnych portretach fazowych w początkowych fazach cyklu. Zjawiska dynamiczne mogą zatem być opisane modelami dynamicznymi, których nieregularność zależy od stopnia ich nieliniowości.

2.1

Zjawisko chaosu deterministycznego

Jak pokazują przykłady w dalszej części opracowania, teoria chaosu może być z powodzeniem stosowana do badania nieliniowych, dynamicznych układów ekonomicznych, opisanych równaniami różniczkowymi lub różnicowymi, a grafika i iteracje komputerowe umożliwiają analizę tych równań.

Układ dynamiczny jest w ujęciu matematycznym zbiorem odwzorowań podzbioru W przestrzeni liczb rzeczywistych R na zbiór dowolnych obiektów matematycznych S (Zieliński J., S., 2000)¹. Odwzorowanie takie będące funkcją czasu i warunków początkowych jest odwzorowaniem deterministycznym w przestrzeni stanów układu dynamicznego i może być zapisane w różnej postaci. Odwzorowania nieliniowe opisywane są najczęściej równaniami różniczkowymi w postaci $dx/dt = f(x)$ lub różnicowymi postaci $x_{n+1} = f(x_n)$, dla $x \in X \subset R^n$.

Chaos deterministyczny wiąże się z nieregularnym ruchem w układzie nieliniowym, determinowanym prawami dynamiki, przy znanej wcześniejszej historii układu. Przewidywanie zachowania układów chaotycznych są praktycznie niemożliwe, ponieważ dla bardzo zbliżonych warunków początkowych ze względu na nieliniowość, mogą być diametralnie różne zachowania danego układu. Ze względu na taką właściwość systemów w przestrzeni fazowej możliwe jest rozsądne prognozowanie zachowania układu jedynie w krótkich odstępach czasowych. Układy chaotyczne są zjawiskiem pośrednim między układami rozwiązywalnymi a zjawiskami całkowicie stochastycznymi. Klasyfikacja określonego układu do jednej z tych grup zjawisk nie jest do końca wyraźna i często zmienia się wraz ze zmianą parametrów samego układu.

System uważa się za deterministyczny, jeżeli nie zawiera zmiennych losowych. Zachowanie systemu dynamicznego jest natomiast stochastyczne jeżeli przejście z jednego stanu do drugiego związane jest wyłącznie ze zjawiskiem losowym. Układy chaotyczne charakteryzują się obiema powyższymi cechami oraz:

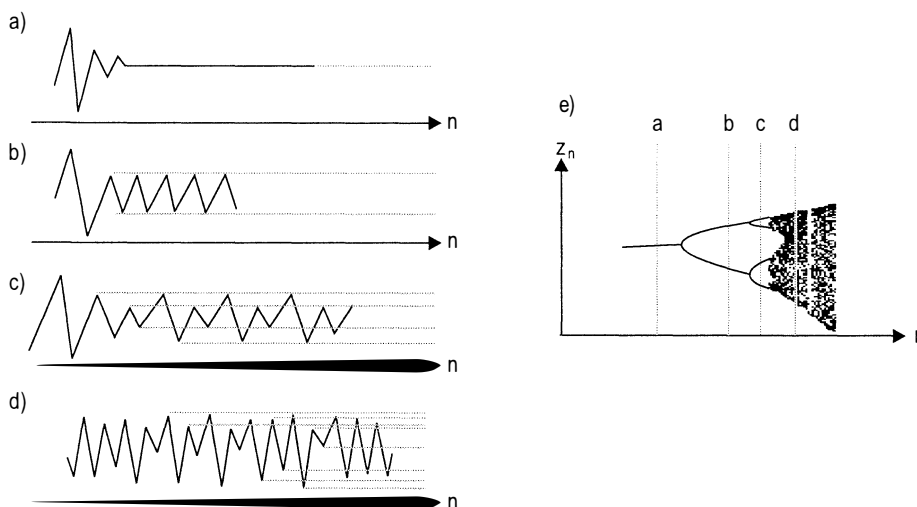
- nieliniowością,
- występowaniem zachowań nieregularnych,
- występowaniem dziwnego atraktora o wymiarze fraktalnym,
- występowaniem wrażliwości na stany początkowe.

Według H.G. Schustera (Schuster H. G., 1993)², można wyróżnić co najmniej trzy scenariusze dochodzenia do chaosu w układach dynamicznych.

Pierwszy scenariusz został odkryty w prostych równaniach różnicowych, w których kolejne iteracje oscylują pomiędzy wartościami stabilnymi. Liczba tych wartości wzrasta do nieskończoności przy zmianie parametrów równania, co oznacza przejście do chaosu. Rys.2.1 ilustruje zachowanie się układu dynamicznego opisanego równaniem logistycznym podanym pod rysunkiem 2.1.

¹ Por.: Zieliński J.S. (red.): *Inteligentne systemy w zarządzaniu. Teoria i praktyka*. PWN, Warszawa 2000, s. 249

² Schuster H.G.: *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*. PWN, Warszawa 1993, s. 17

Rys. 2.1 Scenariusz dojścia do chaosu w równaniu logistycznym $z_{n+1} = rz_n(1 - z_n)$ 

Źródło: (Nazarko J., Siemieniuk N., Mosdorf R., 1999, s. 156).

Analizując rysunek 2.1 można stwierdzić, że wraz ze zmianą parametru r kolejne iteracje równania skupiają się w pobliżu jednego (rys. 2.1.a), dwu (rys. 2.1.b) lub czterech (rys. 2.1.c) punktów zbieżności. W przypadku, gdy parametr r przekroczy wartość krytyczną, kolejne iteracje równania stają się chaotyczne (rys. 2.1.d). Rys. 2.1.e prezentuje diagram punktów stałych równania logistycznego w funkcji parametru r .

Drugi scenariusz nosi nazwę *scenariusza intermitencji*, występuje w przypadku, gdy regularne rozwiązanie równania przerywane jest przypadkowo rozłożonym sygnałem chaotycznym. Średnia liczba tych przerw wzrasta wraz ze zmianą parametrów równania, aż do osiągnięcia stanu chaotycznego.

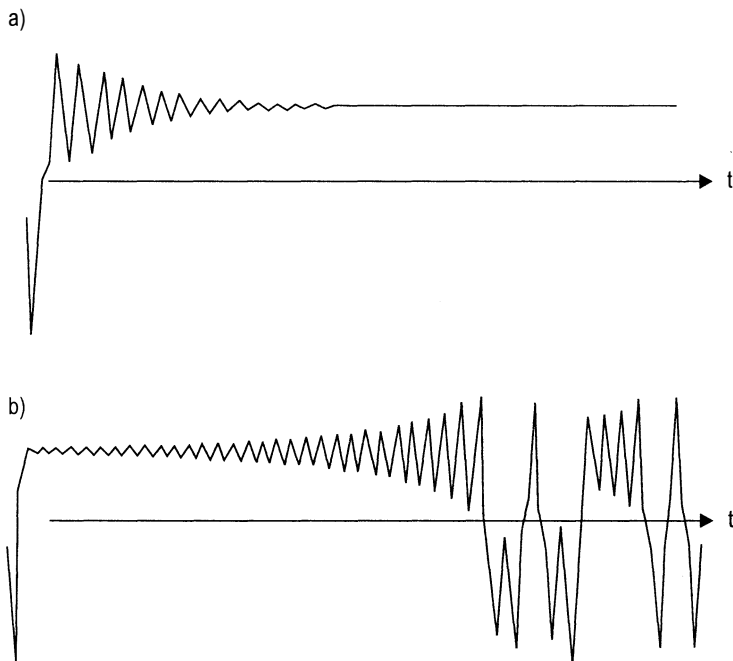
Trzeci scenariusz dochodzenia do chaosu związany jest z występowaniem tzw. *dziwnych atraktorów*, tzn. specjalnych obszarów w przestrzeni fazowej, wokół których skupiają się kolejne iteracje równań opisujących dane zjawisko. Takimi zbiorami są np. zbiór Julii lub Mandelbrota (Schuster H.G., 1993)³.

Zjawisko chaosu występuje nie tylko w układach opisanych równaniami różnicowymi, ale również w układach opisanych równaniami różniczkowymi. Przykładem takiego zachowania się jest ruch wahadła z napędem lub cyrkulacja cieczy w doświadczeniu Benarda, opisanym modelem Lorenza (Schuster H.G., 1993)⁴. Rys. 2.2 ilustruje wahania szybkości cyrkulacji cieczy w zachodzącym pomiędzy dwiema płytami o różnej temperaturze zjawisku Benarda. Na rys. 2.2, a również pokazano proces osiągnięcia przez układ stanu stacjonarnego. Analizując rys. 2.2 można stwierdzić, że wzrost różnicy temperatury pomiędzy płytami prowadzi do nieregularnego (chaotycznego) zachowania się układu (rys. 2.2 b).

³ Por.: Schuster H.G.: op.cit., s. 145-149

⁴ Szerzej tę problematykę rozwinął Schuster H.G.: op.cit., s. 226-228

Rys. 2.2 Wahania szybkości cyrkulacji cieczy w zjawisku Benarda opisanym modelem Lorenza: a) $r = 15$, b) $r = 30$



Źródło: (Mosdorf R., 1997, s. 116).

Stosowane w ramach teorii chaosu deterministycznego metody pozwalają na jakościowy opis zachowań układów dynamicznych. W takich przypadkach możliwe jest modelowanie określonych zachowań układów dynamicznych na podstawie uproszczonego modelu danego zjawiska (np. ekonomicznego), dla którego formułuje się równania różnicowe.

2.1.1 Wybrane przykłady prostych zjawisk chaosu deterministycznego

Krach na rynkach finansowych pod koniec 1987 roku zapoczątkował rewolucję w zastosowaniu teorii chaosu w dziedzinie finansów. W wielu ekonomistów zaczęło myśleć poważnie o wykorzystaniu teorii dynamiki nieliniowej i teorii chaosu do przewidywania zachowań rynków kapitałowych.

W paragrafie tym podjęto próbę przytoczenia wybranych przykładów prostych zjawisk chaosu deterministycznego (wykorzystywanego do modelowania zjawisk ekonomicznych).

2.1.1.1 Równanie (odwzorowanie) logistyczne

Równanie różnicowe o postaci:

$$c_{n+1} = P c_n (1 - c_n) \quad c_n \in [0, 1] \quad (2.1)$$

jest równaniem nieliniowym jednowymiarowym i może zostać zobrazowane w sposób pokazany na rysunku 2.3.

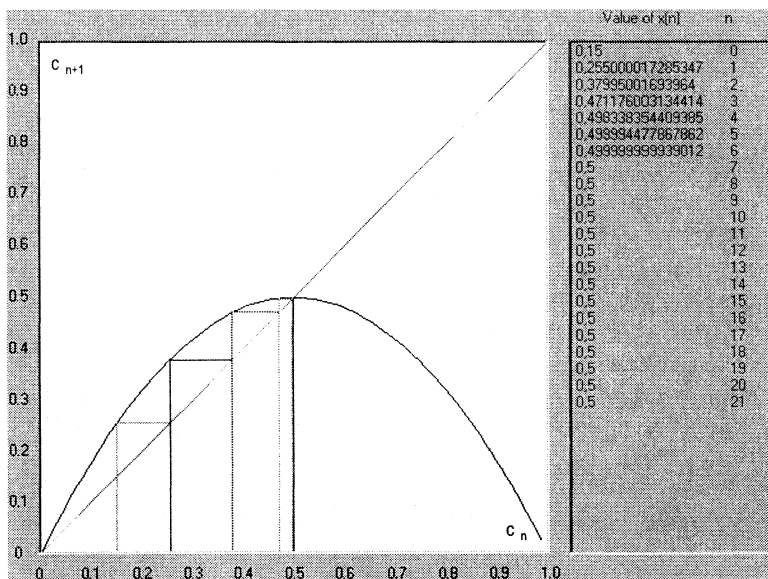
Równanie logistyczne może zostać wykorzystane do modelowania zjawisk ekonomicznych. Załóżmy że c_n jest ceną akcji z przedziału 0-1 USD. Odpowiednia koniunktura na rynku powoduje zwiększenie popytu na akcje danej spółki, co spowoduje w konsekwencji wzrost jej ceny. Szybkość wzrostu kursu akcji definiuje współczynnik p . Wartość akcji po czasie $t+1$ będzie więc rosła zgodnie z równaniem:

$$c_{n+1} = p c_n (1 - c_n)$$

Wraz ze wzrostem popytu działa mechanizm podaży powodujący spadek cen w tempie $c_{n+1} = p c_n^2$.

Na tej podstawie można zbudować przybliżony model zmiany kursu ceny akcji w funkcji popytu i podaży w postaci równania logistycznego $c_{n+1} = p c_n (1 - c_n)$, który oddaje zarówno skutki zmiany ceny spowodowane aktywnością kupujących, jak i sprzedających. Gdy popyt jest zbyt mały wartość akcji zmierza do zera. Przy wyższym popycie dającym, np. wzrost na poziomie współczynnika $p = 2$ następuje równowaga między popytem i podażą a cena dąży do stałej wartości i ustala się na poziomie 0.5 USD (rys. 2.3).

Rys. 2.3 Przykład graficznej prezentacji zmiany ceny akcji opisanej równaniem logistycznym przy współczynniku wzrostu cen $p = 2$ i wartości początkowej akcji $c_0 = 0.15$



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Chaos.

Odwzorowanie przedstawione jest w formie trzech elementów: paraboli $y = p c (1 - c)$, prostej spełniającej równanie $c_{n+1} = c_n$ oraz krzywej złożonej z odcinków łączących kolejne wartości punktów odwzorowania. Kolejne wartości c_{n+1} odwzorowania otrzymuje się przez przecięcie prostej $c_{n+1} = c_n$ linią poziomą przechodzącą przez punkt położony na paraboli $y = p c (1 - c)$ odpowiadający wartości c_n . Odwzorowanie (2.1) przy $p = 2$ i wartości początkowej $c_0 = 0.15$ osiągnęło stan ustalony (równowagi) przy wartości $c = 0.5$.

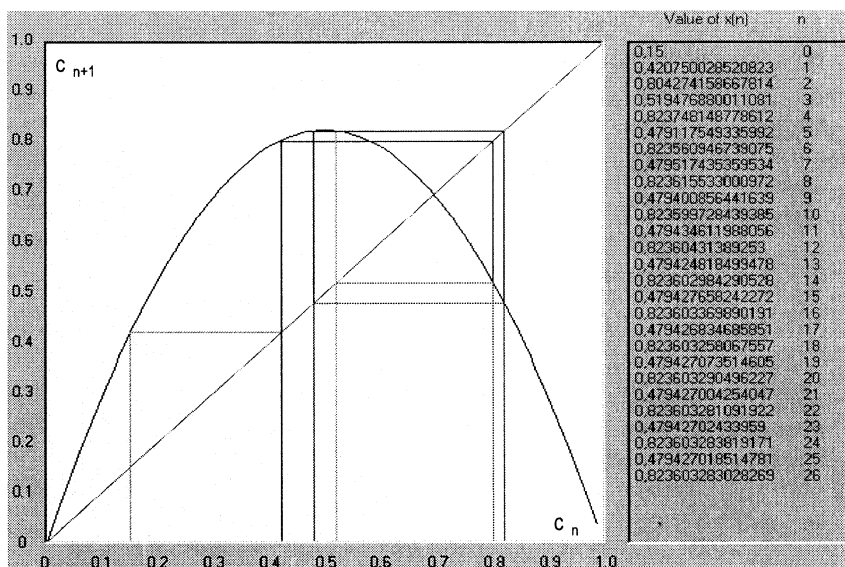
Odwzorowanie logistyczne może osiągnąć punkt stały tylko, gdy wartość bezwzględna pochodnej odwzorowania w punkcie przecięcia prostej $c_{n+1} = c_n$ z parabolą $y = p c (1 - c)$ jest mniejsza od jedności. W przypadku przedstawionym na rysunku 2.3 wartość bezwzględna $|f'(c = 0.5)|$ jest zawsze mniejsza od 1 niezależnie od wyboru punktu początkowego, a ciąg jest zbieżny do punktu stałego $c = 0.5$.

$$f'(x) = -4c + 2 \text{ więc } f'(0) = 2 \text{ oraz } f'(0.5) = 0$$

Należy porównać $|f(c) - 0.5|$ i $|c - 0.5|$, $|f(c) - 0.5| = |2c(1-c) - 0.5| = 2|c - 0.5| |c - 0.5|$ jeżeli więc $c \in (0, 1)$ to $2|c - 0.5|$ będzie zawsze mniejsze od 1 niezależnie od wartości c .

Przy umiarkowanych wartościach p kolejne ceny dążą do stabilnych wartości. Jeżeli natomiast występuje większy popyt na poziomie np. $p = 3.3$ wówczas system obrotu akcjami zaczyna wykazywać oscylacje między dwiema cenami. Rynek zachowuje się nieregularnie. Kiedy podaż wykazuje się wyższym współczynnikiem wzrostu następuje opóźnione zachowanie rynku. Gdy cena akcji dochodzi do najniższej możliwej wartości, zaczyna wzrastać popyt, który powoduje ponowny wzrost cen.

Rys 2.4 Oscylacja cen przy współczynniku popytu $p = 3.3$.
między $c = 0.82$ (sprzedaż) a $c = 0.48$ (zakup)

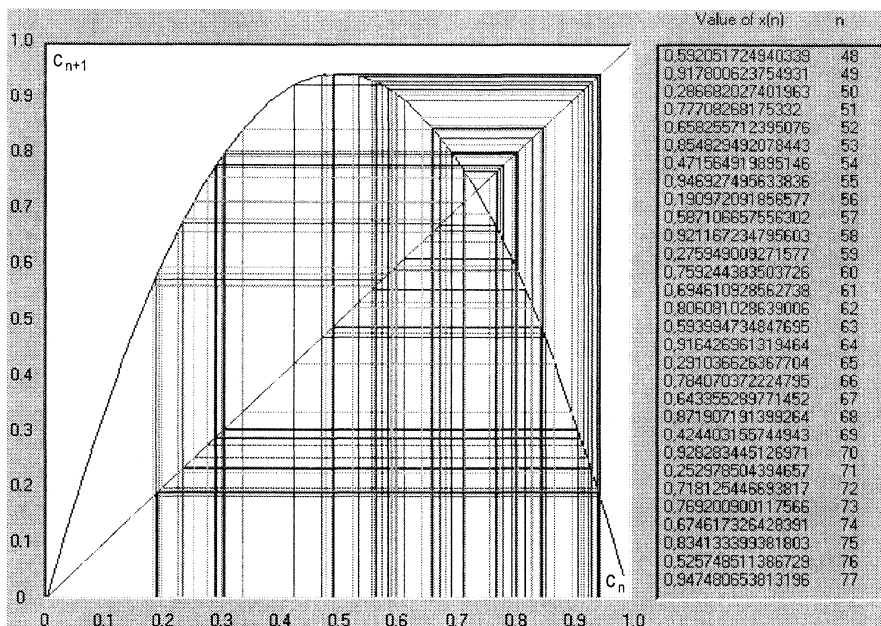


Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Chaos.

Dla wartości parametru $p = 3.3$ zachowanie układu się zmienia. Pochodna odwzorowania w punkcie przecięcia się prostej z parabolą wynosi $|f'(0.6969)| > 1$. Ruch po kilku odwzorowaniach przejściowych staje się niestabilny i oscyluje między dwiema wartościami tak, że $c_{n+2} = c_n$.

Dalsze powiększanie współczynnika wzrostu p prowadzi do pojawienia się oscylacji między 4, 16 a następnie 32 cenami (wartościami) konkretnej akcji, przy których następują zmiany zachowań na rynku. Gdy wielkość współczynnika p osiąga wartość 3,75 system nie jest w stanie ustalić i utrzymać właściwej ceny i zaczyna fluktuować w pozornie przypadkowy, chaotyczny sposób.

Rys. 2.5 Iteracja odwzorowania logistycznego dla ruchu chaotycznego przy $p = 3.8$



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Chaos

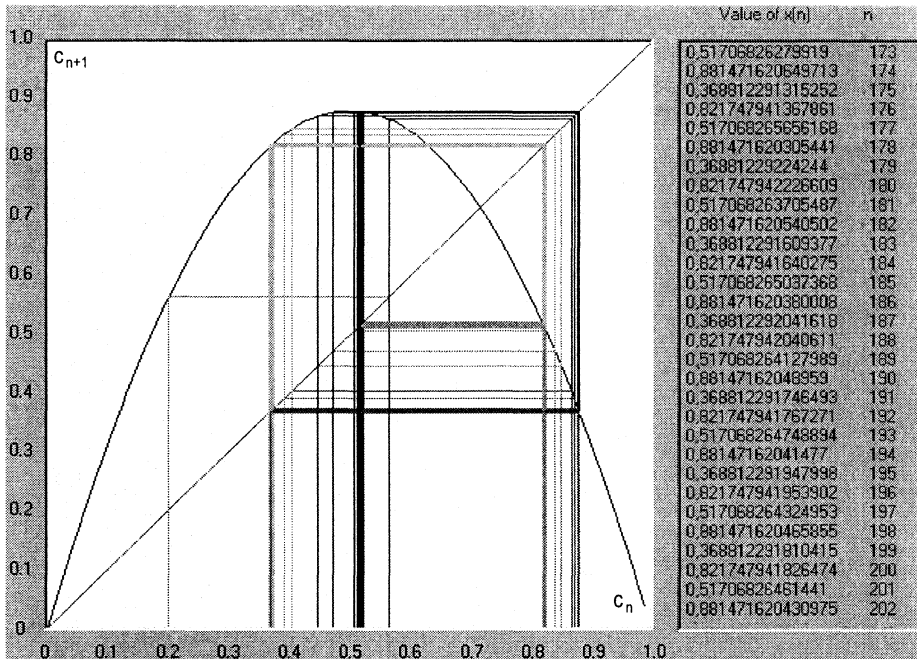
Dalsze zwiększanie parametru p powoduje powstanie następných bifurkacji i prowadzi do ruchu chaotycznego (rys.2.5). Zachowanie się odwzorowania logistycznego dla różnych wartości parametru p przedstawiono na diagramie bifurkacyjnym rys. 2.8. Zachowanie układu staje się chaotyczne przechodząc poprzez szereg punktów w których następuje podwojenie okresu (bifurkacja rozwidleniowa). Przebieg podwajania okresu charakteryzuje się poprzez wskaźniki, które przy pewnych ograniczeniach nie są zależne od rodzaju odwzorowania.

Jednym z takich wskaźników jest nazwana od nazwiska odkrywcy, liczba Feigenbauma, która oznacza iloraz różnicy między kolejnymi wartościami odwzorowania w punktach bifurkacji (Baker G., Gollub J., 1998)⁵:

⁵ Por.: Baker G., Gollub J.: *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*, PWN, Warszawa 1998, s. 88

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n+1} - p_n} \approx 4,669201 \quad (2.2)$$

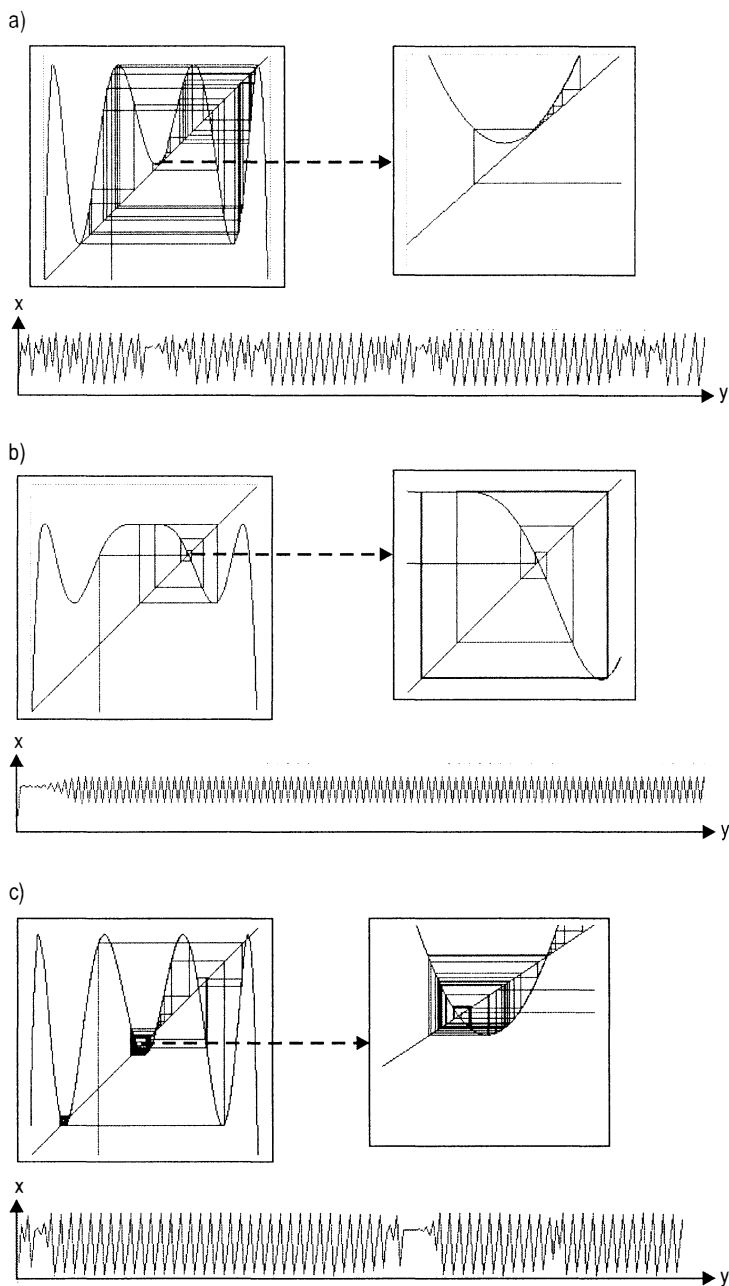
Rys. 2.6 Cykliczne przebiegi oscylacyjne odwzorowania logistycznego. Okres oscylacji wynosi 4 i występuje między wartościami $c = 0.3688$, $c = 0.8212$, $c = 0.5170$, $c = 0.8814$



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Chaos.

Diagram bifurkacji przedzielony jest nieskończoną ilością (rys. 2.8) okien, w których występują zachowania okresowe. Kształt kolejnych iteracji odwzorowania logistycznego determinuje rodzaje zachowań. Wykres zachowań przy trzech różnych parametrach p został przedstawiony na rysunku (2.7). W punktach oznaczonych zielonymi strzałkami (rys. 2.7b) wykres trzeciej iteracji jest styczny do przekątnej $c_{n+3} = c_n$. Są to punkty, które są punktami stałymi na początku okna, do których przyciągane są inne początkowe wartości c . Dla wartości parametru $p = 3.3$ odwzorowanie logistyczne demonstruje oscylacje między $c = 0.48$ i $c = 0.82$. Przy większych wartościach parametru odwzorowania prosta przecina krzywą w trzech parach punktów. Wartość pochodnej (nachylenie krzywej) w jednym punkcie z każdej pary jest na tyle duża, że punkty trajektorii w kolejnych iteracjach oddalają się od siebie.

Rys. 2.7 Wykresy trzeciej iteracji równania logistycznego z naniesioną trajektorią oraz obraz zmian wartości c_n wraz ze wzrostem n dla różnych wartości parametru p ; a) $p = 3.828$, b) $p = 3.30$, c) $p = 3.857$

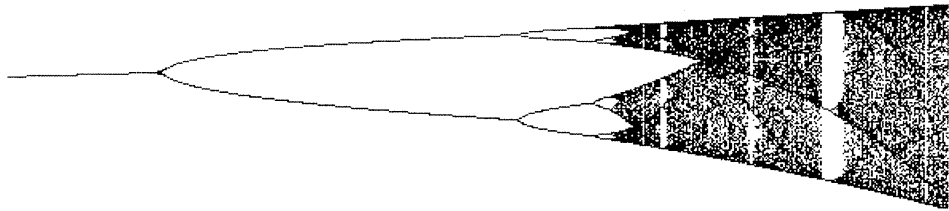


Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

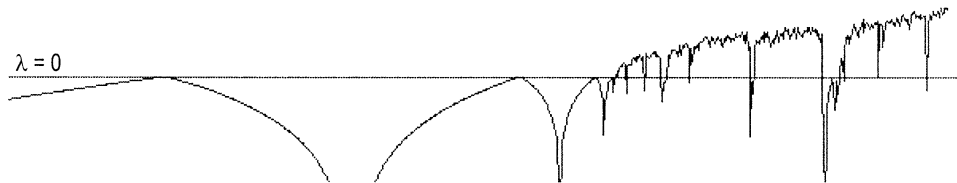
Jeżeli wartość parametru p nie jest dostatecznie duża to w pozostałych trzech punktach wartość pochodnej jest mniejsza niż 1 więc, punkty te stają się atraktorami. Przy wartościach p przekraczających 3.841 nachylenia krzywej odwzorowania 3-ciego rzędu stają się zbyt duże aby układ pozostał stabilny.

Rys. 2.8 Diagram bifurkacyjny odwzorowania logistycznego i odpowiadający mu przebieg wykładnika Lapunowa

Logistic map (bifurcation diagram)



Logistic map (liapunov exponent)



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

Mimo, że modelowanie zachowań na rynku papierów wartościowych za pomocą równania logistycznego nie jest w pełni realistyczne, to pokazuje jak złożone wyniki pojawiają się nawet w przypadku tak prostego systemu nieliniowego. Można sobie łatwo wyobrazić jak złożone są systemy nieliniowe, takie jak rynki kapitałowe czy zjawiska atmosferyczne.

Systemy takie wrażliwe są również na zmiany warunków początkowych. Jeżeli potraktujemy równanie logistyczne jako model prognostyczny, okaże się, że nieznaczną zmianę wartości p będzie powodować bardzo dużą zmianę ceny w czasie $t+n$ (rys. 2.7 a i c), szersze ujęcie tego zagadnienia zawiera (punkt 2.2.2.7) niniejszej pracy.

2.1.1.2 Atraktor Henona

Klasycznym przykładem pojawienia się chaosu w układach opisanych równaniami różnicowymi jest zachowanie się iteracji, tak zwanego dwuwymiarowego odpowiednika równania logistycznego postaci (Mosdorf R., 1997)⁶:

⁶ Por.: Mosdorf R.: *Dynamiczny model wrzenia na podstawie metody chaosu deterministycznego*, Wydawnictwa P.B., Białystok 1997, s. 115

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (2.3)$$

Kolejne iteracje równania (2.3) tworzą tak zwany atraktor Henona pokazany na rysunku 2.9.

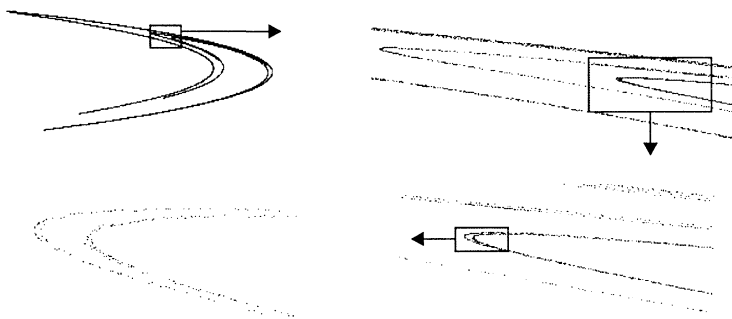
Główną cechą układu jest rozciąganie i składanie powierzchni odwzorowania. Dla pewnych wartości parametrów a i b trajektorie punktów płaszczyzny są nieograniczone, albo przyciągane są przez pewien atraktor w kształcie litery U. Na atraktor ten składają się jedna na drugą strukturalne warstwy. Ponieważ dla $|b| < 1$ jakobian tego równania jest równy odwzorowaniu o postaci (2.4) (Schuster H. G., 1993)⁷,

$$\left| \det \begin{bmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \right| = |b| \quad (2.4)$$

to odwzorowanie ma własność zmniejszania powierzchni. W rezultacie nieskończonej ilości odwzorowań otrzymujemy atraktor Henona, którego rozmiar wynosi zero.

Przestrzeń fazowa pokazana na rys. 2.9 pokazuje uporządkowaną strukturę. Podobnie jak w grze w chaos punkty pojawiają się w przestrzeni w na pozór chaotyczny sposób. Ich porządek pojawiania się może być różny, ale w rezultacie zawsze otrzymuje się atraktor Henona. System ma dwa stopnie swobody. Każda kolejna wartość x zależy od poprzedniej wartości x oraz y , a wartość y związana jest z poprzednią wartością x .

Rys.2.9 Atraktor Henona i powiększenia zaznaczonych obszarów

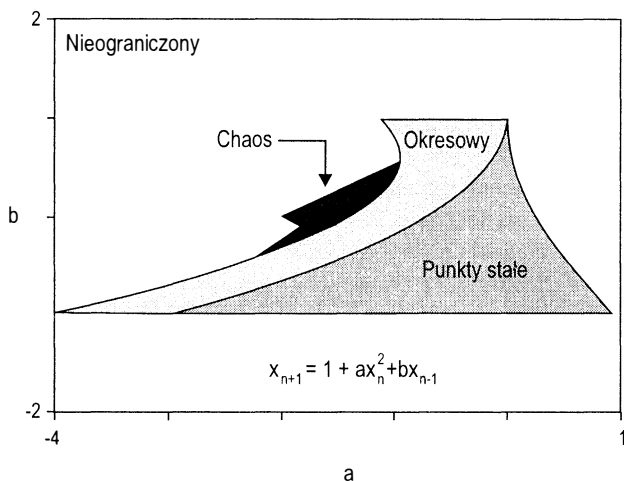


Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

Eksperymenty komputerowe pokazują, że atraktor Henona w dużym powiększeniu wygląda jak iloczyn kartezjański zbioru Cantora i odcinka.

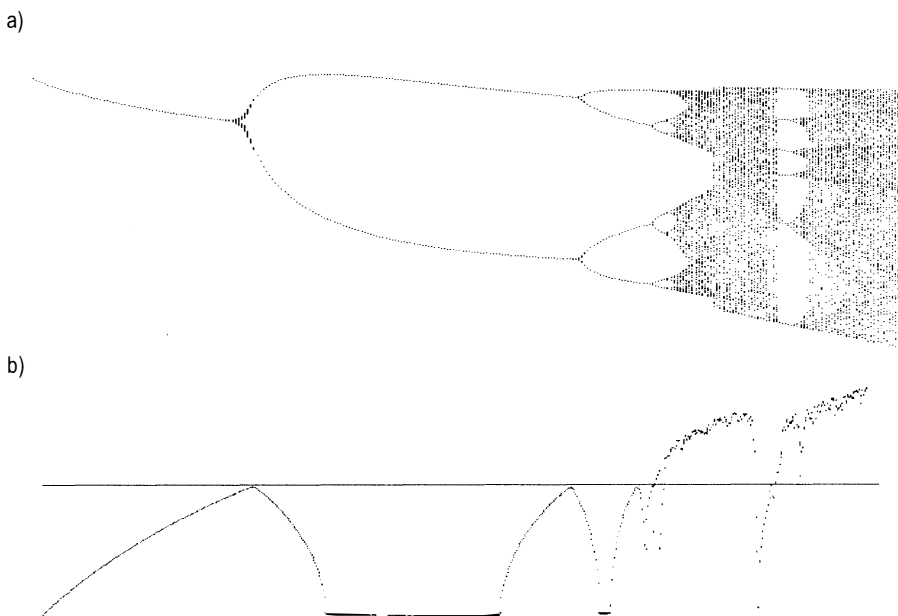
⁷ Por.: Schuster H.G.: op.cit., s. 116

Rys. 2.10 Zachowanie układu Henona w zależności od wartości parametrów a i b



Źródło: opracowanie własne na podstawie (Sprott, J. C., <http://www.sprott.physics.wisc.edu>).

Rys. 2.11 Diagram bifurkacyjny (a) i wykładnik Lapunowa (b) mapy Henona



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

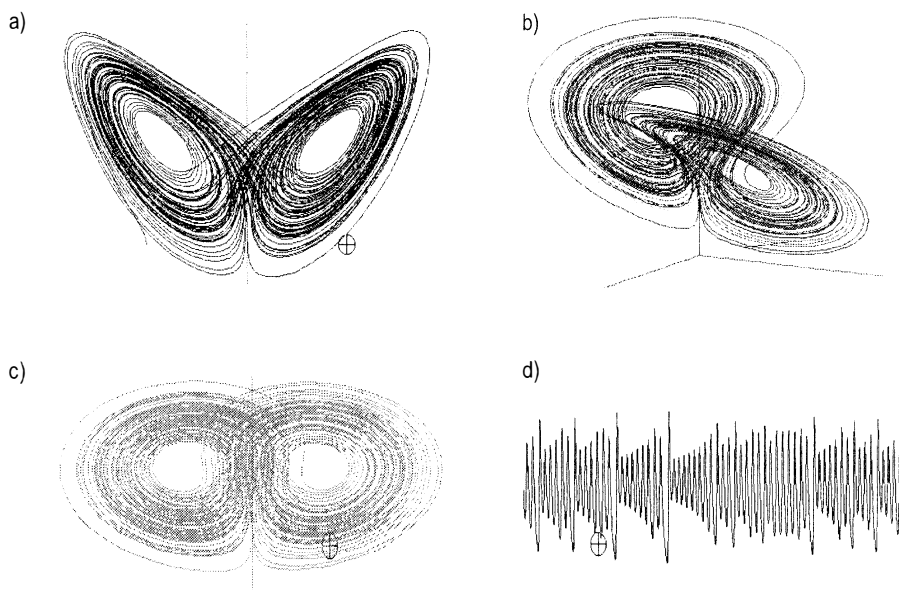
Odwzorowanie Henona jest fraktalem, podobnie jak większość atraktorów układów chaotycznych. Charakteryzuje się również lokalnym samopodobieństwem, a jego wymiar Hausdorfa przy parametrach $b = 0.3$ i $a = 1.4$ wynosi $D \approx 1.261$ (Schuster H.G., 1993)⁸.

2.1.1.3 Model Lorentza

Zjawisko konwekcji odpowiedzialne jest za wiele ważnych zjawisk atmosferycznych. Badania konwekcji wiążą się z chęcią odkrycia przez człowieka prawidłowości dających możliwość przewidywania zjawisk pogodowych. Prognozy pogody sporządza się dziś na podstawie danych statystycznych oraz skomplikowanych układów równań różniczkowych cząstkowych, które opisują modele matematyczne cyrkulacji atmosfery.

Jak dowodzą badania przeprowadzone w niniejszej pracy, prawidłowości powyższe można stosować również do prognozowania zjawisk ekonomicznych.

Rys. 2.12 Atraktor układu Lorentza



a) atraktor w płaszczyźnie $(-x, z)$, b) atraktor w przestrzeni 3-wymiarowej (x, y, z) , c) atraktor w płaszczyźnie (y, z) , d) przebieg zmian współrzędnej z trajektorii układu

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

Do rozwiązywania tych równań wykorzystywane są komputery o dużych mocach obliczeniowych.

⁸ Por.: Schuster H.G.: op.cit., s. 116

Około roku 1900 Henri Benard (Stewart I., 1994)⁹ przeprowadził szereg doświadczeń i odkrył, że podgrzewanie dolnych warstw cieczy powoduje wytworzenie w cieczy komórek konwekcyjnych w kształcie plastrów miodu. Opracowany przez B. Saltzmana model i równania go opisujące posiadały całkowicie nieregularne i nieokresowe rozwiązania.

W 1961 roku Lorenz pracując nad układem 12 równań różniczkowych zauważył, że są one wrażliwe na zmianę warunków początkowych, dając diametralnie różne wyniki przy niewielkiej zmianie wartości wejściowych. Wrażliwość tą Lorenz nazwał „efektem motyla”.

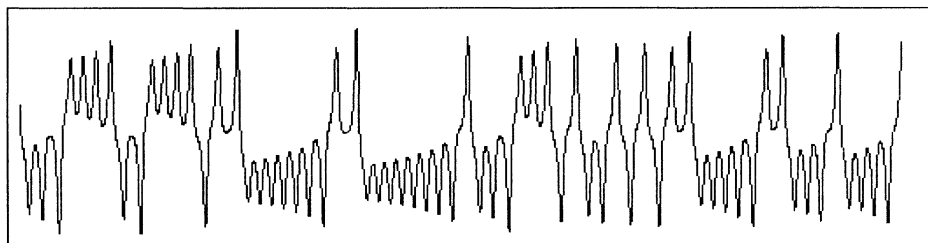
Lorenz przebudował układ zachowując tylko trzy ze zmiennych, które jego zdaniem miały największy wpływ na kształt rozwiązań otrzymując klasyczny dziś model w postaci (Zawadzki H., 1996)¹⁰:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\delta X + \delta Y \\ \dot{Y} = -XZ + rZ - Y \\ \dot{Z} = -bX + XY \end{cases} \quad (2.5)$$

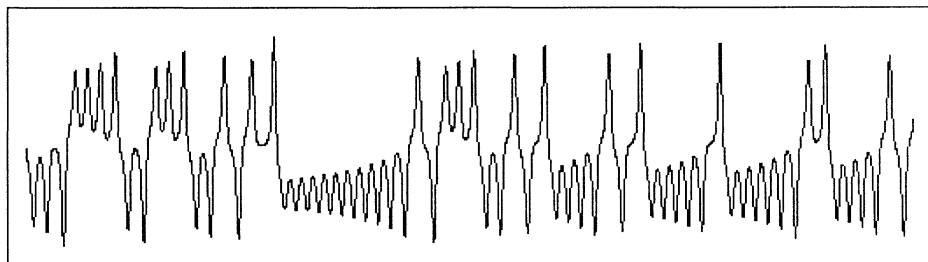
Układ ten zachował wrażliwość na niewielkie zmiany warunków początkowych.

Rys. 2.13 Efekt motyla. Zmiana w czasie współrzędnej x trajektorii układu Lorenza w zależności od warunków początkowych (10,10,10) (rys. a) i (10.1, 10,10) (rys. b)

a)



b)



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

⁹ Szerzej tę problematykę rozwinął Stewart J.: *Czy bóg gra w kości. Nowa matematyka chaosu*. PWN, Warszawa 1996, s. 158-160

¹⁰ Por.: Zawadzki H.: *Chaotyczne systemy dynamiczne*. AE, Katowice 1996, s. 156

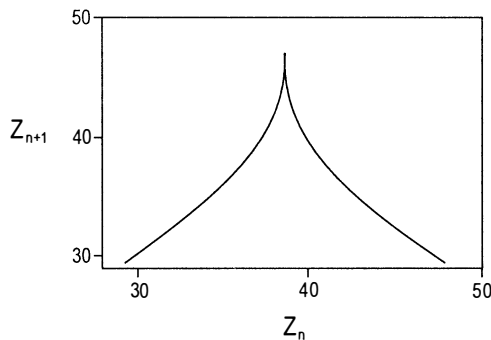
Typowymi wartościami parametrów pokazanych w równaniu (2.5): są: $r = 28$, $\sigma = 10$ i $b = 8/3$. W przypadku takich parametrów trajektorie układu (2.5) posiadają następujące właściwości:

- są przyciągane przez ograniczony obszar przestrzeni fazowej;
- wykonują ruch nieregularny krążąc wokół jednego z punktów stałych, a następnie przenosząc się w pobliże drugiego punktu, wykonują kilka pętli, po czym przenoszą się z powrotem w okolice punktu pierwszego; liczba obrotów i momenty przemieszczania między punktami są nieregularne i losowe;
- dla punktów leżących blisko siebie po niedługim czasie całkowicie się rozbiegają i wykonują zupełnie różne ilości obrotów wokół punktów stałych.

Trajektoria zatem jest wrażliwa na warunki początkowe, jest chaotyczna i jest przyciągana przez obszar przestrzeni fazowej (atraktor), którego przekroje posiadają struktury samopodobne podobne do zbioru Cantora. Analogicznie jak przy zbiorze Cantora objętość tego obszaru kurczy się do zera. Zbiór charakteryzuje się niecałkowitym wymiarem Hausdorffa, który jest mniejszy od trzech i równy dla tego układu $D_k \approx 2.06$.

Lorenz poszukiwał jakiejś prawidłowości w stworzonym przez siebie modelu. Wybrał zmienną z i narysował krzywą złożoną z jej wartości szczytowych. Mimo nieregularnych przedziałów czasowych otrzymał określoną krzywą (rys. 2.14). Na podstawie tej krzywej można przewidywać wartości następnego maksimum zmiennej z , zakładając, że zna się wartość jej obecnego maksimum. Przewidywania te okazują się krótkoterminowe z racji właściwości zwiężających i rozciągających układu, które powodują „wzmocnienie” błędów w kolejnych krokach przekształcenia (efekt motyla).

Rys. 2.14 Kolejne maksyma zmiennej z w modelu Lorenza



Źródło: na podstawie (Schuster H.G., 1993).

W modelu Lorenza stan układu wyznaczają mierzalne zmienne. Podobnie w wielu zjawiskach nieliniowych rolę tę spełniają fizyczne czynniki jak: temperatura, ciśnienie itp., które są wypadkową reakcji układu na inne siły zewnętrzne. W przypadku otoczenia rynkowego istnieją czynniki praktycznie nie podlegające pomiarowi. Według E. Petersa (Peters E. E., 1997)¹¹ *siły wprawiające w ruch rynek są raczej globalnymi charakterystykami łączącymi czynniki fundamentalne i techniczne*. Punkty w przestrzeni fazowej oddalają się

¹¹ Peters E.E.: *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*. Wig Press, Warszawa 1997, s. 181

na skutek nastrojów na rynku (czynniki techniczne), a zbliżają się (dążą do atraktora) w wyniku oceny wartości spółki, czyli czynników fundamentalnych.

Jeżeli zatem rynki kapitałowe są nieliniowymi systemami dynamicznymi, należy oczekiwać (Peters E. E. 1997)¹²:

- *Występowania długoterminowych korelacji i trendów (efekty sprzężenia zwrotnego);*
- *Kapryśnego zachowania rynków (poziomy krytyczne) w pewnych warunkach i pewnych okresach;*
- *Występowania szeregów czasowych stóp zwrotu, które na coraz mniejszych odcinkach będą zawsze wyglądać podobnie i będą mieć te same charakterystyki statystyczne (struktura fraktalna);*
- *Zmniejszania się trafności prognoz w miarę powiększania się ich perspektywy czasowej (wrażliwość na zmiany warunków początkowych).*

Wiele razy zachowania inwestorów wskazywały, że działają oni nie zawsze racjonalnie w sposób uporządkowany i systematyczny. Bódcze zewnętrzne nie raz powodowały bądź to załamania rynku bądź to hossy nie zawsze uzasadnione ekonomicznie.

2.1.2 Wybrane przykłady występowania chaosu

2.1.2.1 Bifurkacje

W prostych modelach matematycznych zachowania inwestycyjne sprowadzają się do prostych liniowych równań różniczkowych z jednym rozwiązaniem. Rynki natomiast nie są uporządkowane ani proste, są dynamiczne i nieliniowe.

W praktyce układy dynamiczne opisane są równaniami różniczkowymi, z jednym lub większą ilością parametrów. Parametry te reprezentują zazwyczaj różnorodne czynniki zewnętrzne mające wpływ na funkcjonowanie danego układu. W wielu przypadkach powoduje to również zmianę jakościową układu dynamicznego. Zmienia się liczba, rodzaj atraktorów takiego systemu lub jedno i drugie. Mówi się wtedy, że w systemie nastąpiła bifurkacja, co oznacza rozdzielenie się czegoś, rozgałęzienie, rozszczepienie jakiejś całości na dwoje (Zawadzki H., 1996)¹³. Najczęściej teorię bifurkacji omawia się na przykładzie odwzorowania odcinka jednostkowego w siebie w zależności od parametru p odwzorowania.

Jeżeli punkt x_0 należy do odcinka $[0,1]$ i jest punktem stałym dla odwzorowania f to punkt ten jest (Kurdewicz J., 1993)¹⁴:

- stabilny lub jest atraktorem jeżeli $|f'(x_0)| < 1$;
- niestabilny lub jest repilerem jeżeli $|f'(x_0)| > 1$;
- neutralny jeżeli $|f'(x_0)| = 1$.

¹² Podano za Peters E.E.: op.cit., s. 10

¹³ Por.: Zawadzki H.: op.cit., s. 68

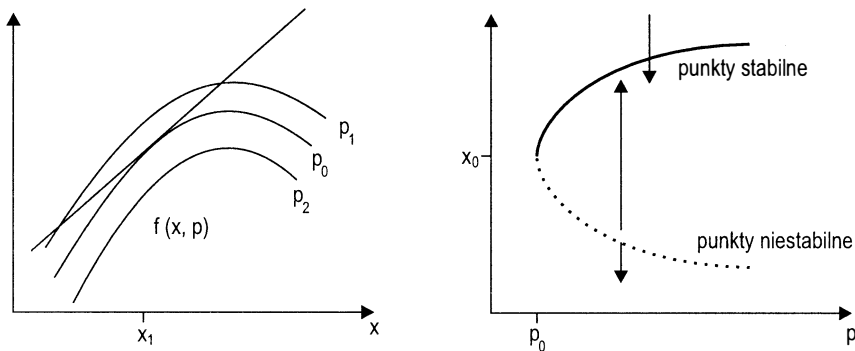
¹⁴ Por.: Kurdewicz J.: *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa 1993, s. 63

Orbita odwzorowania f złożona jest z punktów stałych odwzorowań g będących n -krotną iteracją odwzorowania f . Orbita jest stabilna, niestabilna lub neutralna w zależności od zachowania się punktów orbity, które są punktami stałymi odwzorowania g .

Odwzorowanie f było zależne od parametru p . Jeżeli dla pewnej wartości parametru p_0 punkt lub orbita przechodzi ze stanu przyciągania (stając się neutralną dla p_0) do stanu odpychania (brak stabilności strukturalnej) to wartość parametru p_0 jest zwana wartością bifurkacyjną.

Punktem bifurkacji może być tylko taki punkt p_0 , dla którego zachodzi jeden z następujących warunków $f(x, p_0) = x$ i $f'(x, p_0) = \pm 1$ lub n -ta iteracja $f^n(x, p_0) = x$ i $(f^n)'(x, p_0) = \pm 1$ dla $n > 1$.

Rys. 2.15 Schemat bifurkacji węzeł-siodło w zależności od zmian parametru p



Źródło: na podstawie (Kudrewicz J., 1993).

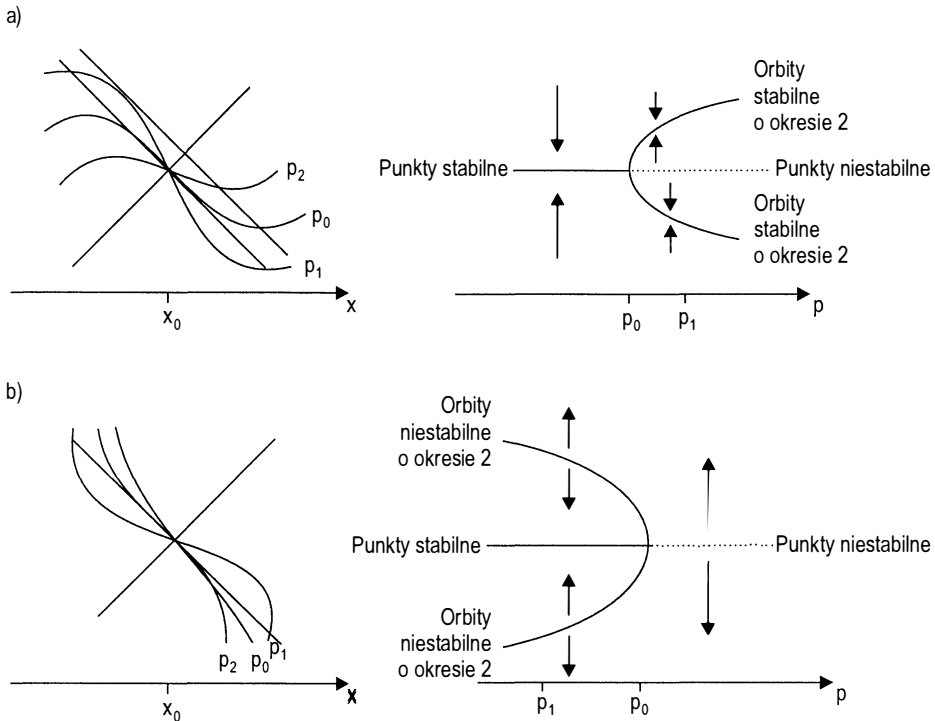
W zależności od wartości pochodnej odwzorowania dla parametru p_0 w układzie może wystąpić bifurkacja styczna, transkrytyczna i widłowa dla pochodnej $+1$ oraz bifurkacja podwajania okresu dla pochodnej -1 .

Bifurkacja typu węzeł-siodło jest bifurkacją ogólną, ponieważ punkty stałe leżą na gładkim jednowymiarowym obiekcie geometrycznym w przestrzeni złożonej z przestrzeni fazowej i przestrzeni parametrów. Kombinacja minimum i maksimum prowadzi do zjawiska bistabilności gdzie w pewnym przedziale parametrów istnieją dwa stabilne atraktory z jednym niestabilnym między nimi.

Bistabilność charakterystyczna jest np. dla histerez w wielu rzeczywistych fizycznych i technicznych układach. *Histeresa* jest to zjawisko zależności aktualnego stanu układu od stanów w poprzedzających chwilach czasowych. Histeresa towarzyszy takim procesom, jak zmiany namagnesowania ferromagnetyków (histeresa magnetyczna), odkształcanie sprężyste ciał rzeczywistych (histeresa sprężysta) lub zmiany polaryzacji ferroelektryków (histeresa dielektryczna). Histeresa to krzywa zamknięta, występująca w wielu układach technicznych. Pętla ta jest bardzo subtelnym zjawiskiem, zarówno szkodliwym jak i niepożądanym. Histeresa występuje również często w innych układach dynamicznych. Powodem występowania histerezy w zjawiskach spoza techniki wydaje się być inercja układów. Na wykresie histeresa przybiera kształt podobny do dużej litery S, a w zasadzie dwóch takich liter złączonych początkami i końcami z jednocześnie rozciągniętym środkiem. Wszystkie zjawiska dające się opisać tą krzywą, zachodzą w pewnym zamknię-

tym cyklu. Krzywa kreślona jest od początku wyznaczonego przez lewy dolny punkt litery, następnie stan oznaczający wykonanie, osiągnięcie celu, czyli prawy górny punkt i zwraca do początku. Pętla histerezy powstaje zatem zawsze podczas przechodzenia przez stany ekstremalne i jest zjawiskiem powszechnym, dlatego często niezauważanym. Drugim powodem jej niespostrzeżenia jest to, że wprowadzany efekt uboczny bywa nieznaczny. Przez efekt uboczny rozumiemy różnicę wynikającą z faktu, iż droga od początku do celu jest odmienna od drogi powrotnej.

Rys. 2.16 Schemat bifurkacji podwajania okresu:
a) superkrytycznej, b) subkrytycznej w zależności od zmian parametru p



Źródło: na podstawie (Kudrewicz J., 1993).

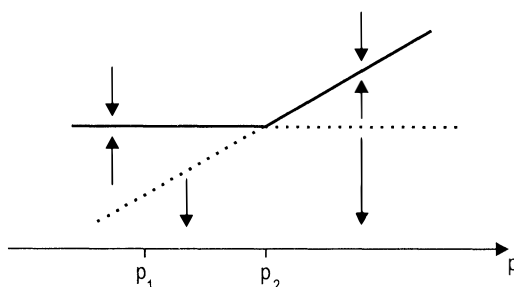
To zjawisko zachodzi jeżeli przesuwamy się parametrem odpowiednio wolno poza przedział bistabilności. Kiedy punkt przechodzi przedział bistabilności pierwotny atraktor zanika w bifurkacji węzeł-siodło i system nagle przechodzi do następnego atraktora. Przesuwanie parametru w innym kierunku nie powoduje żadnego efektu gdy przedział bistabilności jest powtórnie przekraczany. Opuszczenie przedziału bistabilności na drugim jego końcu powoduje, że system nagle przechodzi w kierunku nowo utworzonego atraktora.

Bifurkacje rozwidleniowe są możliwe w systemach dynamicznych z inwersją lub odbiciem symetrycznym. Równanie ruchu w tych układach pozostaje niezmiennie przy zmianie znaku przestrzeni fazowej zmiennych. Przykładem jest nienapędzane wahadło. Zwykle taki system ma symetryczny punkt stały (lub cykl graniczny).

Bifurkacje rozwidleniowe są bifurkacjami ogólnymi, a takie symetryczne rozwiązania zmieniają stabilność układu.

Gdy bifurkacyjne rozwiązanie nie posiada pełnej symetrii równania ruchu, to zjawisko takie nazywane jest „złamaną symetrią”. Rozwiązanie ze „złamaną symetrią” nie pojawia się samodzielnie ponieważ „złamana symetria” generuje nowe rozwiązanie gdzie symetria jest również „złamana”. Z tego powodu zawsze dwa punkty stałe ze złamaną symetrią rozwidlają się na raz w punkcie bifurkacji. Dwa są albo stabilne (superkrytyczna bifurkacja rozwidleniowa) lub niestabilne (subkrytyczna bifurkacja rozwidleniowa).

Rys. 2.17 Schemat *bifurkacji transkrytycznej* w zależności od zmian parametru p



Źródło: opracowanie własne.

Bifurkacja transkrytyczna powstaje wówczas, gdy w przestrzeni złożonej z przestrzeni fazowej i przestrzeni parametrów dwa różne gładkie obiekty geometryczne złożone z punktów stałych przecinają się. W punkcie przecięcia punkty stałe zmieniają swoje własności stabilności. Znaczący to, że niestabilny punkt stały staje się stabilny i na odwrót. Zauważmy, że poza punktem bifurkacji liczba punktów stałych nie zmieniła się, przeciwnie do bifurkacji węzeł-siodło, gdzie dwa stałe punkty pojawiają się lub znikają.

Podobnie jak podczas zmiany parametrów punkt równowagi może tracić stabilność, tak stabilne okresowe orbity mogą tracić swoją stabilność pod wpływem zmiany parametrów.

Bifurkacja styczna dla orbit okresowych jest podobna do bifurkacji węzeł-siodło w punkcie stałym i nazywana jest dlatego bifurkacją węzeł-siodło orbity okresowej. Bifurkację taką charakteryzują następujące własności:

- przed bifurkacją system dynamiczny porusza się po stabilnej okresowej orbicie odzwierciedlającej nieprzerwane oscylacje;
- w punkcie bifurkacji okresowa orbita staje się słabo stabilna i trajektoria zaczyna oddalać się od warunków ciągłej oscylacji;
- po bifurkacji orbita okresowa zanika i trajektoria rozbiega się.

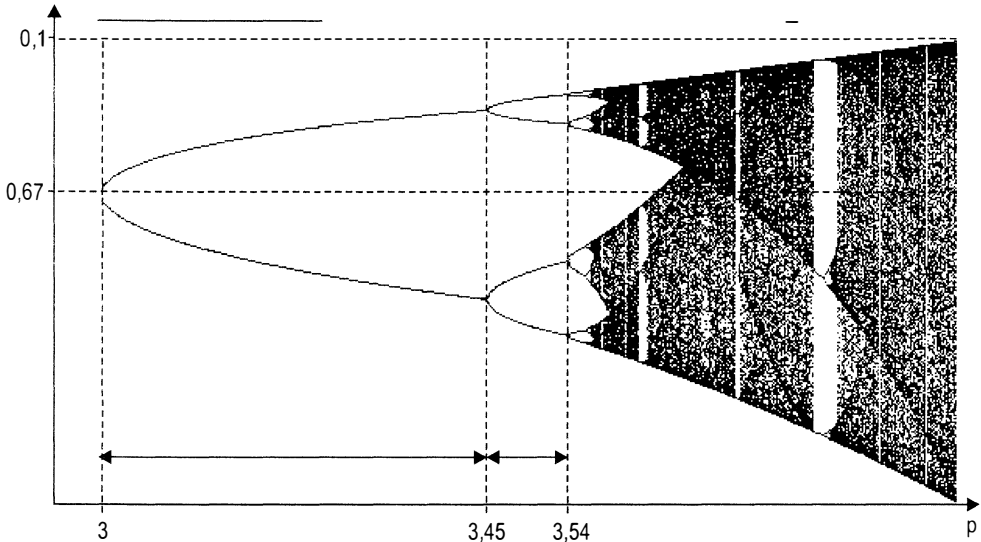
W zależności od doboru odwzorowania dynamika układu określona za pomocą takiego odwzorowania może być mniej lub bardziej skomplikowana. Jednym z prostszych odwzorowań jest odwzorowanie postaci (Baker G., Gollub J., 1998)¹⁵:

$$x_{n+1} = p x_n (1 - x_n) \quad (2.6)$$

¹⁵ Por.: Baker G., Gollub J.: op.cit., s. 84

Kolejne wyrazy tworzą ciąg $\{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$, którego zachowanie bada się ze względu na zmianę wartości parametru p oraz jak zachowują się kolejne wyrazy ciągu przy wzroście ilości iteracji n .

Rys. 2.18 Rozkład wyrazów ciągu dla odwzorowania kwadratowego (2.6) w funkcji zmiany parametru p (diagram bifurkacji)



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

Jeżeli wartość parametru p należy do przedziału $[0, 1]$ to dla dowolnego punktu początkowego x_0 należącego do odcinka jednostkowego ciąg określony równaniem (2.6) jest zbieżny do 0. Jeśli wartość parametru p jest z przedziału $(1, 3)$ to ciąg jest zbieżny do $x_n = 1 - 1/p$ gdy $n \rightarrow \infty$. Dla $p = 3$ punkt stały odwzorowania (2.6) traci stabilność i pojawia się okresowa orbita o okresie 2 (następuje bifurkacja podwojenia okresu). Dla p z przedziału $(3, 1 + \sqrt{6})$ orbita przyciąga punkty odcinka jednostkowego za wyjątkiem $x_n \rightarrow \infty$, który jest punktem stałym. W przypadku $p = 1 + \sqrt{6}$ orbita okresowa traci stabilność i pojawia się stabilna okresowa orbita o okresie 4, która przyciąga wszystkie punkty odcinka jednostkowego za wyjątkiem punktu stałego i orbity o okresie 2. Jak widać z rys. 2.18 istnieje nieskończony ciąg punktów bifurkacji podwojenia okresu, którym odpowiada nieskończony ciąg parametrów $\{p_0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$. W punktach tych orbita o okresie 2^k traci stabilność i pojawia się okresowa orbita o okresie 2^{k+1} . Zjawisko kolejnych bifurkacji podwojania okresu stabilnej orbity nosi nazwę kaskady Feigenbauma.

Ciąg punktów bifurkacji ma granicę w punkcie (Kurdewicz J. 1993)¹⁶:

$$p_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \approx 3.56995 \quad (2.7)$$

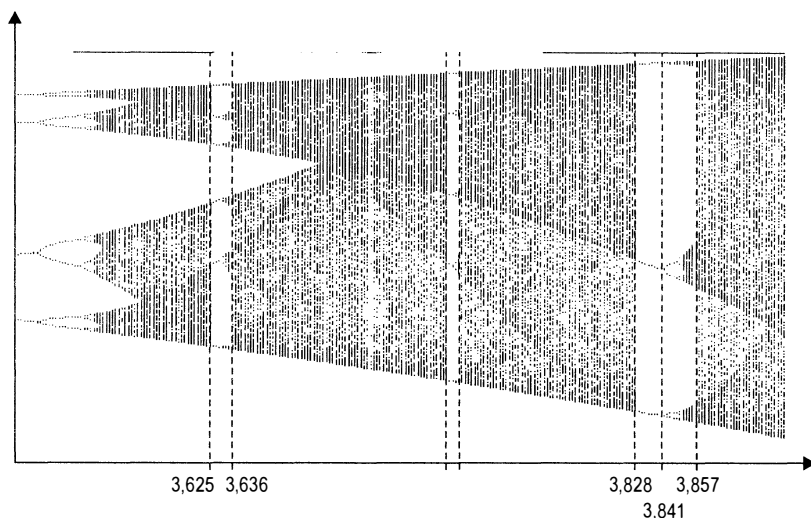
¹⁶ Por.: Kurdewicz J.: op.cit., s. 67

W przypadku ciągu zbieżnego można określić tzw. szybkość zbieżności (Kurdewicz J. 1993):

$$v^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{\infty} - p_n}{p_{\infty} - p_{n-1}} \approx 0.2141693 \quad (2.8)$$

W przypadku gdy $p > p_{\infty}$ istnieją w których żadna z orbit okresowych nie jest stabilna, a atraktory składają się z domkniętych odcinków (Kurdewicz J. 1993)¹⁷.

Rys. 2.19 Rozciągnięty fragment wykresu bifurkacji z rys. 2.18 z wyraźnie widocznymi oknami i punktami podwajania okresu w oknach (wartości parametrów są wartościami przybliżonymi)



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

Dla pewnych wartości parametru p występują przedziały, w których atraktorem jest okresowa orbita co widać na diagramie bifurkacji w postaci tzw. okien. Okien takich jest nieskończona ilość. W punkcie bifurkacji (początek okna) powstaje para orbit okresowych o pewnym okresie. Wraz ze wzrostem parametru p przy pewnych wartościach występują kolejne bifurkacje podwojenia okresu aż do wartości $2^{\infty} \times n$ w punkcie końca okna.

2.1.2.2 Zjawisko intermitencji i turbulencji w układach dynamicznych

W wielu rzeczywistych układach dynamicznych zaobserwowano zjawiska, które charakteryzują się długimi okresami regularnych zachowań przerywanych w sposób losowy dłuższymi lub krótszymi okresami o nieregularnych przebiegach. Częstotliwość występowania zakłóceń zwiększa się wraz ze wzrostem czynnika zewnętrznego i powoduje ciągle

¹⁷ Szersze ujęcie zagadnienia bifurkacji zawarto w pracy Kurdewicz J.: op.cit., s. 63-68

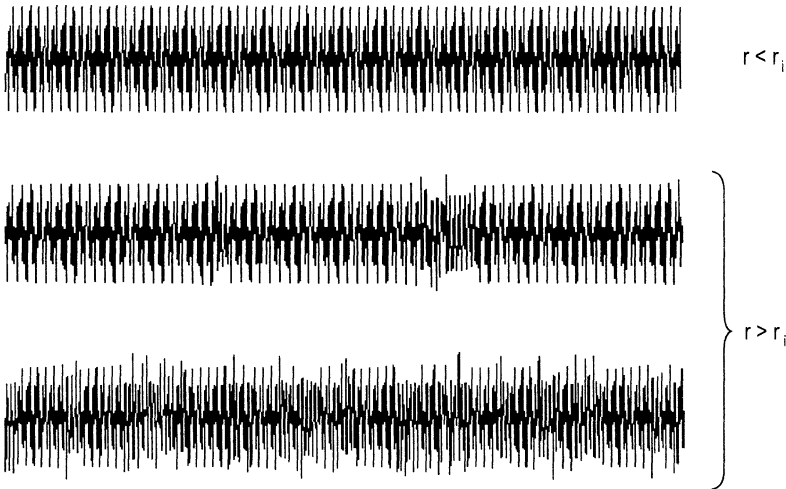
przejścia od zachowań regularnych do chaotycznych. Pojawienie się sygnału o takich właściwościach nazywane jest intermitencją.

Jako pierwsi zasadę przechodzenia układów poprzez intermitencje do zachowań chaotycznych badali Pomeau i Manneville. Podstawą były rozwiązania numeryczne układu równań różniczkowych modelu Lorentza (Zawadzki H., 1996)¹⁸.

$$\begin{cases} \dot{X} = \delta Y - \delta X \\ \dot{Y} = -XY + rX - Y \\ \dot{Z} = -XY - bZ \end{cases} \quad (2.9)$$

Zachowanie się zmiennej Y w zależności od wartości parametru r przedstawia rys. 2.20.

Rys. 2.20 Czasowy przebieg zmiennej Y w modelu Lorentza (2.5) w zależności od wartości parametru



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

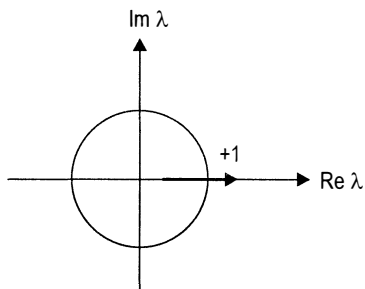
Dla pewnych wartości parametru $r < r_i$ $Y(t)$ wykonuje stabilny ruch okresowy. Przy pewnej wartości progowej r_i stabilna okresowość przerywana jest przez okresy zachowania chaotycznego, których częstość występowania rośnie wraz ze wzrostem parametru r prowadząc aż do ruchu całkowicie chaotycznego.

Stabilne zachowanie układu odpowiada stabilnemu punktowi stałemu odwzorowania Poincarego dla $r < r_i$. Powyżej tego progu punkt stały może utracić stabilność na trzy sposoby. Ze względu na te trzy przypadki Pomeau i Manneville wyróżnili trzy rodzaje intermitencji.

¹⁸ Por.: Zawadzki H.: op.cit., s. 156

Model Lorenza wykazuje intermitencję typu I dla której wartość własna zlinearyzowanego odwzorowania Poincaré staje się większa od jedności przecinając okrąg jednostkowy w punkcie $+1$.

Rys. 2.21 Zachowanie wartości własnych odwzorowania Poincaré w przypadku intermitencji typu I



gdzie:

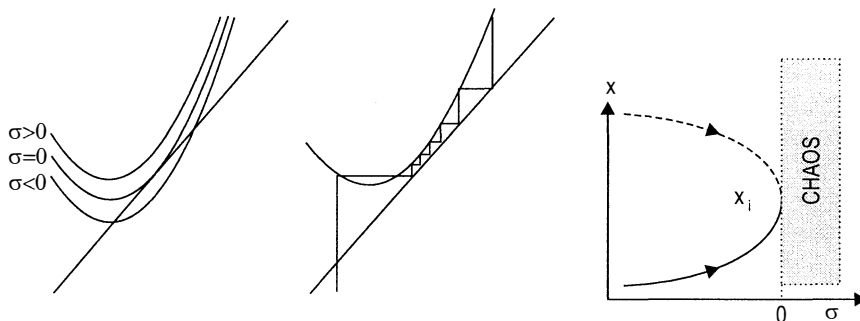
$\text{Im } \lambda$ – oznacza część urojoną wartości własnej zlinearyzowanego odwzorowania Poincaré,

$\text{Re } \lambda$ – oznacza część rzeczywistą wartości własnej zlinearyzowanego odwzorowania Poincaré.

Źródło: opracowanie własne.

Przejście układu do chaosu następuje przez bifurkację typu węzeł-siodło, w której dwa punkty stałe (stabilny i niestabilny) łączą się w punkcie bifurkacji.

Rys. 2.22 Powstawanie intermitencji typu I w odwzorowaniu logistycznym $x_{n+1} = (p+\sigma)(x_n - x_n^2)$

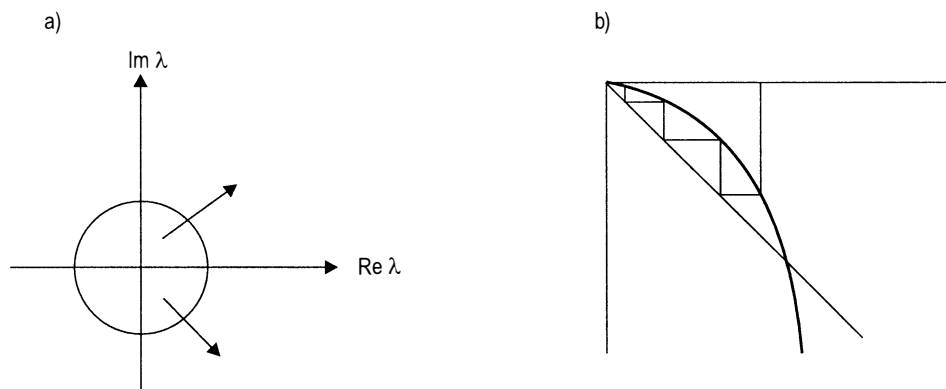


Źródło: na podstawie (Schuster H.G., 1993).

Odwzorowanie nie ma dla $r > r_i$ stabilnych punktów stałych natomiast przejście trajektorii przez wąską szczelinę między odwzorowaniem a prostą o równaniu $x_{n+1} = x_n$ w pewnym otoczeniu punktu x_i powoduje powstanie obszarów laminarnych. Po wyjściu ze szczeliny ruch staje się chaotyczny do czasu ponownego znalezienia się trajektorii w pobliżu punktu x_i .

Intermitencja typu *II* powstaje wówczas, gdy dwie zespolone wartości własne jednocześnie przecinają okrąg jednostkowy.

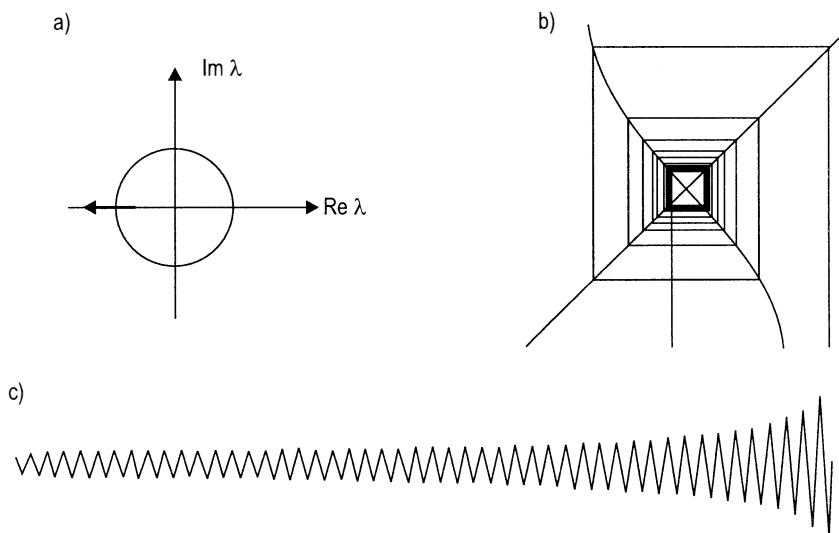
Rys. 2.23 Intermitencja typu *II*



a) zachowanie się wartości własnych odwzorowania Poincarégo w przypadku intermitencji typu *II*; b) schematyczny przebieg trajektorii i odwzorowania Poincarégo

Źródło: na podstawie (Schuster H. G., 1993).

Rys. 2.24 Intermitencja typu *III*



a) zachowanie się wartości własnej odwzorowania Poincarégo w przypadku intermitencji typu *III*; b) przebieg trajektorii i odwzorowania Poincarégo; c) wartości kolejnych wyrazów odwzorowania w funkcji wzrostu liczby iteracji

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

Przejście do chaosu w przypadku intermitencji typu *II* określane jest przez bifurkację Hopfa. W układach z czasem ciągłym cykl graniczny może ulegać bifurkacji rozpoczynając oscylację z „kanciastą” częstotliwością, która spowodowana jest przez urojoną część pary wartości własnych przecinających okrąg jednostkowy. W układzie dyskretnym orbita bifurkacyjna jest generalnie quasiokresowa za wyjątkiem, gdy argument pary przecinających wartości własnych osiągnie 2π . Interminacja typu *II* nie została stwierdzona (wg posiadanych danych) w eksperymentach z rzeczywistymi układami.

Intermitencję typu *III* po raz pierwszy (Schuster H.G., 1993)¹⁹ zaobserwowali w 1983 roku Dubois, Rubio i Berge w konwekcji Benarda, obserwując modulację wiązki światła przechodzącego przez małe prostokątne naczynie. Intermitencja typu *III* pojawia się wraz z bifurkacją podwajania okresu. Część rzeczywista wartości własnej przecina granicę stabilności w punkcie -1 . Sygnał rozbiega się, aż do momentu gdy amplituda osiąga dużą wartość i sygnał traci swą regularność.

Turbulencje wiążą się z powstawaniem nieregularnych zjawisk chaotycznych (nieprzewidywalnych) w różnych układach fizycznych. Zjawiska turbulencji obserwuje się zarówno w przestrzeni kosmicznej jak również w najgłębszych punktach oceanów. Od wielu turbulencja lat jest ważnym pojęciem w wielu dziedzinach nauki. Ma ona ważne znaczenie dla praktycznych zagadnień inżynierskich ponieważ może doprowadzić do szeregu niepożądanych skutków (np. zniszczenia rurociągów, katastrof lotniczych, itp.). Zjawisko powyższe można również wykorzystywać w badaniach ekonomicznych.

Turbulencje najczęściej kojarzy się z gwałtownym i burzliwym ruchem cieczy lub gazów. W obszarach turbulentnych następują chaotyczne i nieprzewidywalne zmiany parametrów układu. Skutkami turbulencji w atmosferze ziemskiej są między innymi różnego rodzaju zjawiska atmosferyczne (cyklony, tornada itp.) powstające na skutek konwekcji cząsteczek powietrza. Turbulencja nie jest związana tylko z niekorzystnymi zjawiskami atmosferycznymi. Z przykładami turbulencji spotykamy się każdego dnia, wystarczy odkręcić kran aby woda wypływająca z dużą prędkością stanowiła strumień turbulentny, obserwować dym z papierosa czy też odczuwać wiatr na twarzy.

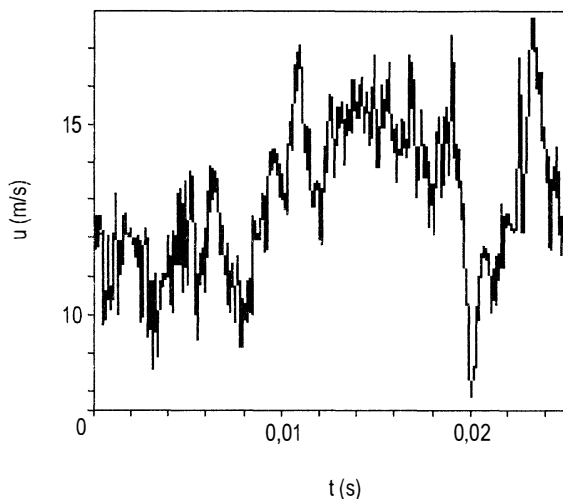
Badania turbulencji mają na celu znalezienie jak najmniej skomplikowanych modeli matematycznych tego zjawiska. Teoretyczne prace nad uniwersalną, małej skali strukturą turbulencji mogą być zasadniczo podzielone na dwa główne kierunki. Pierwszy kierunek wiąże się z istnieniem obszernego zbioru modeli zachowań, których próby porównania na zgodność z danymi eksperymentalnymi dają ważne informacje o kaskadowej lub statystycznej naturze przepływów turbulentnych.

Drugie podejście opiera się na równaniach mechaniki płynów. Typowo uznaje się, że mechanika płynów jest klasyczną teorią przepływów i sprowadza się do budowy teoretycznych metod przepływu w celu wyliczenia właściwych danych statystycznych. Jest to jednak bardzo trudne. Mimo wielu wysiłków i lat badań nie udało się dotychczas znaleźć dostatecznie dobrego opisu turbulencji.

Do tej pory istnieje również bardzo ogólna definicja turbulencji, która określa to zjawisko jako „nieuporządkowane zachowanie przepływu w przestrzeni i czasie” nie tłumacząc co oznacza „nieuporządkowane zachowanie”.

¹⁹ Pisze o tym Schuster H.G. [w.:] *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*, op.cit., s. 108-109

Rys. 2.25 Przykładowe wahania szybkości przepływu w funkcji czasu mierzone podczas turbulencji



Źródło: na podstawie (Zawadzki H., 1996).

Dobrze znana teoria zachowań dla statystyki ruchów małych rozmiarów była sformułowana w 1941 roku przez Kołmogorowa na bazie idei kaskad. W ostatnich latach okazało się, że teoria ta wymaga gruntownych poprawek. W prowadzonych badaniach podstawowym celem było zrozumienie małych rozmiarów struktur występujących w turbulencji. Najważniejszą rzeczą aby określić strukturę małych rozmiarów jest znalezienie strukturalnej funkcji. Jest to równoważne do określenia funkcji wiążącej zmiany szybkości cząstek w ruchu turbulentnym w dwu różnych punktach przestrzeni. Opis zjawiska za pomocą matematycznej koncepcji fraktali i modelu multifraktalnego dla inercyjnego zakresu zjawiska wydają się być dobrym opisem turbulentnej kaskady.

Istnieje wiele układów pozostających w stanie stabilności do czasu, gdy zewnętrzne czynniki powodują utratę stabilności wprowadzając układ w drgania lub nadając układowi cechy ruchu chaotycznego.

W ostatnich latach istnieje wiele interpretacji i wariantów modelu turbulencji, z których jednym z najciekawszych jest model multifraktalny. W tym modelu funkcja strukturalna ma największe znaczenie. Jest ona odpowiednikiem funkcji korelacji fluktuacji prędkości w dwu różnych oddzielnych punktach przestrzeni. Funkcja strukturalna może być zmierzona i jej zachowania mogą być porównane z rezultatami eksperymentalnymi. Wydaje się, że multifraktalny model daje dobry opis kaskady turbulencji mimo, że porównanie funkcji strukturalnej z wynikami eksperymentów wymaga wielu pomiarów skomplikowanej strukturalnie funkcji.

2.1.2.3 Kryzysy

Kryzysami nazywane są *zderzenia między chaotycznym atraktorem a współistniejącymi z nim niestabilnymi punktami stałymi lub orbitami okresowymi* (Schuster H.G. 1993)²⁰. Zderzenia takie powodują nagłe zmiany w atraktorze. Kryzys można zaobserwować w oknie diagramu bifurkacyjnego z okresem potrójnego odwzorowania logistycznego, w którym trzy stabilne i trzy niestabilne punkty stałe powstają w wyniku bifurkacji typu węzeł-siodło. Punkty stałe po przejściu do obszaru chaotycznego natychmiast odpychają trajektorie w taki sposób, że zachowanie w obszarach między pasmami stają się chaotyczne.

2.1.2.4 Dziwne atraktory, fraktale, odwzorowanie zwężające

Definicja *dziwnego atraktora* ulega ciągłej ewolucji i nie jest do końca jednoznaczna. Trudno jest sformułować jednoznaczną definicję matematyczną, którą można zastosować w analizie danych eksperymentalnych.

Atraktor chaotyczny (*dziwny*) jest zbiorem stanów w przestrzeni stanów układu, który posiada bardzo charakterystyczne właściwości:

- zbiór jest zbiorem przyciągającym się, tak że system startujący z warunkami początkowymi z basenu przyciągania ostatecznie kończy się w zbiorze,
- zbiór ma *skomplikowaną* strukturę geometryczną.

Pierwsza cecha mówi, że trajektorie startujące z basenu przyciągania niezależnie od zaburzeń krążą po całym atraktorze nigdy go nie opuszczając.

Dziwny atraktor jest wrażliwy na warunki początkowe. W przypadku zmniejszania się objętości nie wszystkie długość zmniejszają się i punkty, które znajdowały się na atraktorze wystarczająco blisko siebie, będą oddalały się wykładniczo w miarę upływu czasu (Schuster H.G., 1993)²¹.

Cecha mówiąca o skomplikowanej strukturze geometrycznej eliminuje ze zbioru dziwnych atraktorów zbiory, które są sumą skończonej liczby izolowanych punktów przestrzeni (punkt, zbiór punktów), oraz gładkie elementy k-wymiarowe.

Część naukowców uznaje, że dodatkową cechą „dziwnych atraktorów” jest to, że ich rozmiar nie jest liczbą całkowitą. Inaczej mówiąc dziwne atraktory mają tzw. wymiar fraktalny – są fraktalami.

Jeżeli mówimy o „rozmiarze” to mamy najczęściej na myśli jeden z dwu przypadków:

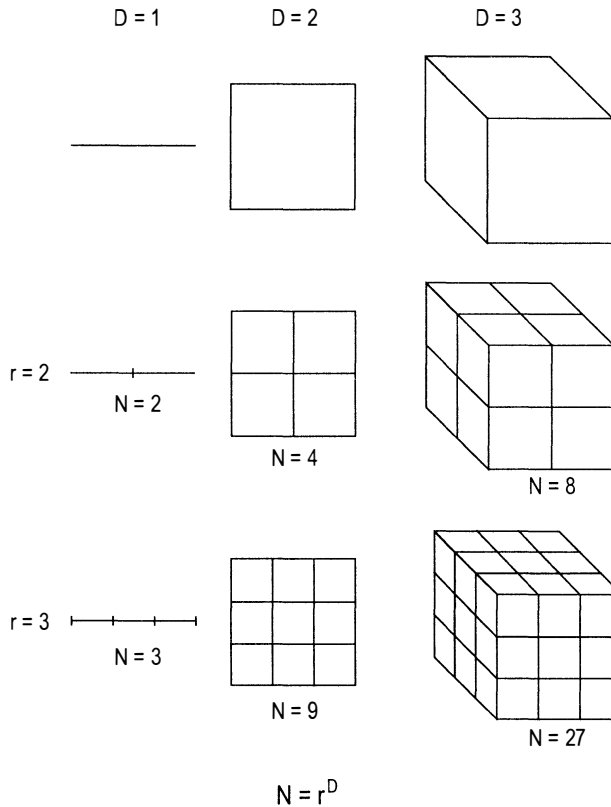
- trój-wymiarową przestrzeń euklidesową,
- liczbę zmiennych układu opisującego system dynamiczny.

W przypadku nieregularnych obiektów geometrycznych pojęcie „rozmiaru” wymaga nowego podejścia.

Jeżeli weźmiemy obiekt umieszczony w przestrzeni euklidesowej D i zmniejszymy jego liniowy rozmiar l/r w każdym kierunku w przestrzeni to jego rozmiar (długość, pole powierzchni, objętość) zmniejszy się $N = r^D$ razy w stosunku do oryginalnego.

²⁰ Schuster H.G.: op.cit., s. 186

²¹ Szersze ujęcie zagadnienia zawarto w pracy Schuster H.G.: op.cit., s. 145-149

Rys. 2.26 Zmiana rozmiaru w przestrzeni euklidesowej D -wymiarowej

Źródło: opracowanie własne.

Po przekształceniu logarytmicznym obu stron równania otrzymujemy:

$$\log(N) = \log(r^D) \text{ skąd } D = \log(N)/\log(r) \quad (2.10)$$

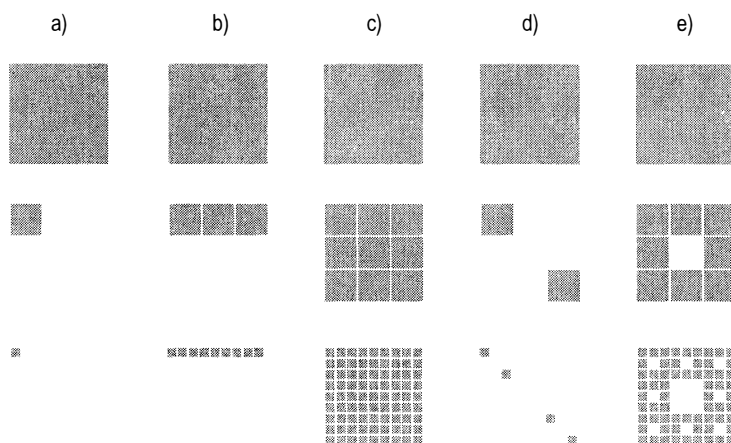
Element D otrzymany tym sposobem nie musi mieć rozmiaru wyrażonego liczbą całkowitą, jak to ma miejsce w geometrii euklidesowej. Może być ułamkiem w geometrii fraktalnej. Takie podejście do „rozmiaru” nazwane jest od nazwiska niemieckiego matematyka Felixa Hausdorffa wymiarem Hausdorffa.

Dziwne atraktory są zatem zbiorami, których wymiar Hausdorffa nie jest liczbą całkowitą.

Wymiar fraktalny nie musi zawierać się w przedziale $(0, 1)$. Za pomocą odpowiedniej metody można przekształcić euklidesowy kwadrat we fraktal, którego wymiar fraktalny będzie równy 1.8928. W każdym z poniższych przykładów każdy kwadrat będzie podzielony na dziewięć kwadratów o równych rozmiarach ($r_1 = 1/9$). Iteracja przeprowadzana jest n -razy. Aby przedstawić punkt euklidesowy (rys. 2.27 a) zachowujemy tylko jeden kwadrat w każdej iteracji ($N_1 = N_n = 1$). W następnym przykładzie (rys. 2.27 b) zatrzymujemy tylko trzy najwyższe kwadraty w każdej iteracji. ($N_1 = 3$ $N_2 = 9$). Dzięki temu proce-

sowi odkrywamy euklidesową linię o wymiarze jeden. Ostatnią euklidesową figurą, która wywodzi się z tego przykładu jest płaszczyzna (rys. 2.27 c). Aby to osiągnąć zatrzymujemy wszystkie kwadraty we wszystkich iteracjach.

Rys. 2.27 Demonstracja wymiaru fraktalnego na przykładzie kwadratu euklidesowego



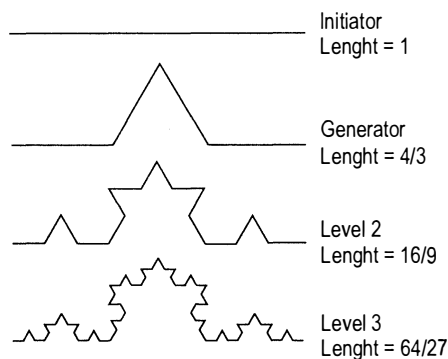
Źródło: opracowanie własne.

W celu otrzymania figury o wymiarze fraktalnym będziemy zachowywać tylko dwie części w górnym lewym i dolnym prawym rogu w każdej iteracji (rys.2.27 d) ($N_1 = 2$ $N_2 = 4$). W związku z tym w drugiej kolejności $D = \ln(2) / \ln(3) = 0.6309$. Z drugiej strony, jeżeli usuniemy tylko środkową część w każdej iteracji jak na rys. 2.27 e to ($N_1 = 8$ $N_2 = 64$). Ten przykład daje rozmiar fraktalny równy 1.8928.

Najprostszymi przykładami „dziwnych atraktorów” są zbiory będące atraktorami układów iterowanych odwzorowań

Poniżej przedstawiono zasadę tworzenia oraz obraz bardziej złożonego atraktora tzw. krzywej Kocha po trzech krokach iteracji.

Rys. 2.28 Przykład konstrukcji krzywej Kocha



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Fractal Explorer.

Krzywą, która nie ma stycznej w żadnym należącym do niej punkcie H. von Koch przedstawił w 1904 roku (Zawadzki H. 1996). Konstrukcja krzywej Kocha przedstawia się następująco. Zaczynamy od linii prostej – inicjatora. Inicjator dzielimy na trzy równe części, a w miejsce środkowej wstawiamy trójkąt równoboczny z którego usuwamy podstawę. W ten sposób otrzymuje się podstawowy element konstrukcji tzw. generator, który służy jako podstawa do kolejnych operacji. Powtarzamy więc tą konstrukcję w ten sposób, że każdy odcinek figury dzielimy na trzy równe części i w miejsce środkowego wstawiamy generator.

Krzywa Kocha ma wymiar topologiczny równy 1 i jest atraktorem IFS określonym za pomocą układu równań:

$$\begin{bmatrix} x_{\text{nowy}} \\ y_{\text{nowy}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

gdzie: p – prawdopodobieństwo iteracji z parametrami przedstawionymi poniżej.

| A | B | C | D | E | F | p |
|----------|----------|---------|---------|---------|---------|--------|
| 0.33330 | 0.00000 | 0.00000 | 0.33330 | 0.00000 | 0.00000 | 0.2500 |
| 0.33330 | 0.00000 | 0.00000 | 0.33330 | 0.66660 | 0.00000 | 0.2500 |
| 0.16666 | -0.28867 | 0.28867 | 0.16666 | 0.33330 | 0.00000 | 0.2500 |
| -0.16666 | 0.28867 | 0.28867 | 0.16666 | 0.66666 | 0.00000 | 0.2500 |

| | | | | | | |
|-------|------------|-----|------------|-----|------------|--------------|
| Xnew= | 0.33329999 | X + | 0.00000000 | Y + | 0.00000000 | probability: |
| Ynew= | 0.33329999 | X + | 0.00000000 | Y + | 0.00000000 | 0.25000000 |

Wymiar samopodobieństwa krzywej Kocha wynosi $D_s = \log 4 / \log 3 \approx 1.2619$ i jest równy wymiarowi Hausdorffa.

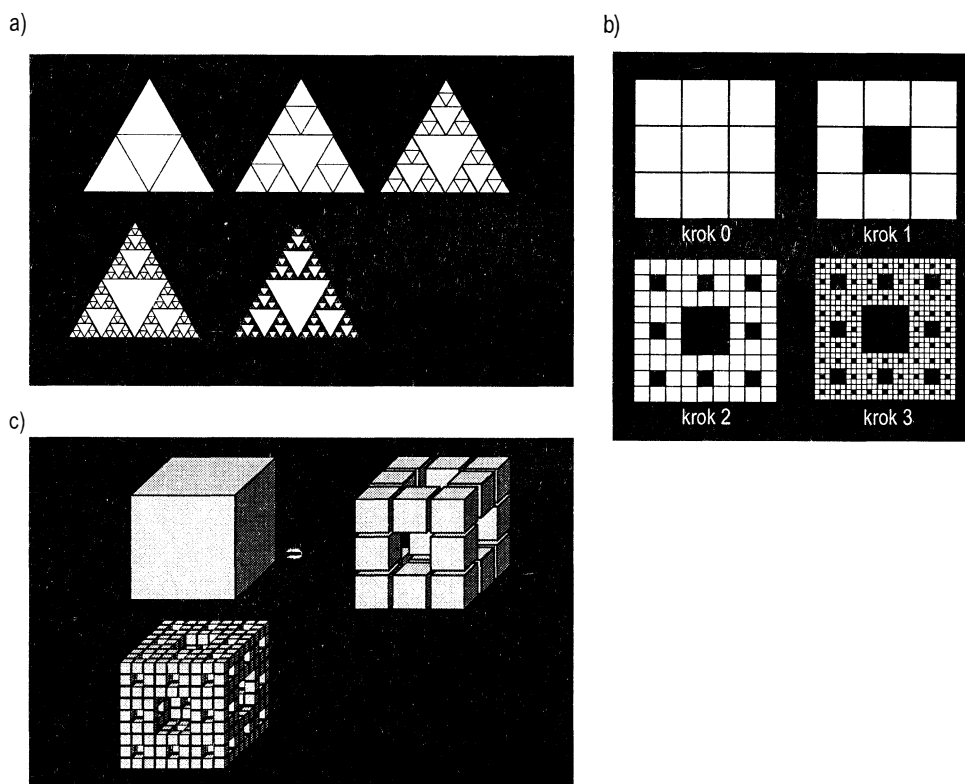
Na rysunku poniżej przedstawiono kolejne klasyczne przykłady atraktorów (fraktali) nazywane odpowiednio: trójkątem Sierpińskiego (a), dywanem Sierpińskiego (b), gąbką (kostką) Mengera (c). Każdy z tych zbiorów jest w sensie topologicznym krzywą i na wymiar topologiczny równy jedności. Każdy ze zbiorów jest również atraktorem IFS układów złożonych z jednakowym współczynnikiem prawdopodobieństwa.

Przykładowo trójkąt Sierpińskiego jest atraktorem IFS złożonym z trzech układów równań postaci (2.11) z parametrami przedstawionymi poniżej:

| A | B | C | D | E | F | p |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| 0.50000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.50000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.3333 |
| 0.50000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.50000 | 0.50000 | 0.00000 | 0.3333 |
| 0.50000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.50000 | 0.25000 | 0.50000 | 0.3333 |

| | | | | | | |
|-------|------------|-----|------------|-----|------------|--------------|
| Xnew= | 0.50000000 | X + | 0.00000000 | Y + | 0.00000000 | probability: |
| Ynew= | 0.50000000 | X + | 0.00000000 | Y + | 0.00000000 | 0.33329999 |

Rys. 2.29 Przykład trójkąta Sierpińskiego, dywanu Sierpińskiego, gąbki Menger

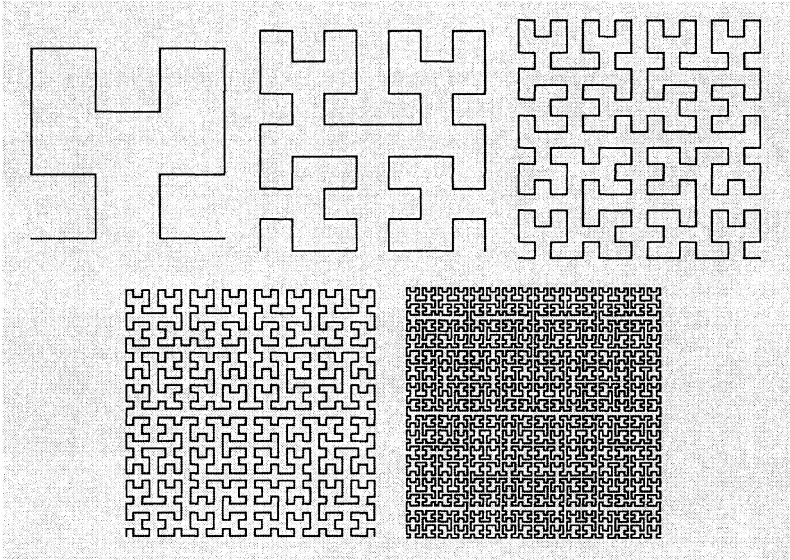


Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Fractal Explorer.

Dywan Sierpińskiego i gąbka Menger składają się odpowiednio z 8 i 20 podobieństw o tym samym współczynniku prawdopodobieństwa równym $1/3$. Wymiar Hausdorffa każdego z tych zbiorów wynosi odpowiednio $\log_3/\log_2 \approx 1.5850$ (trójkąt), $\log_8/\log_3 \approx 1.8927$ (dywan), $\log_{20}/\log_3 \approx 2.7268$ (gąbka).

Fraktale (atraktory) omówione powyżej miały niecałkowity wymiar Hausdorffa. Nie jest to jednak regułą. W 1890 roku Peano, a następnie w 1891 roku Hilbert podali przykłady krzywych o całkowitym wymiarze Hausdorffa. Krzywe te przechodzą przez każdy punkt płaszczyzny kwadratu. Na rysunku 2.30 pokazano proces konstrukcji krzywej przedstawionej przez Hilberta.

Rys. 2.30 Przykład krzywej Hilberta



Źródło: (Hayes B., 1999; www.sigmaxi.org).

Kolejnym przykładem występowania chaosu jest odwzorowanie zwięzające. Odwzorowaniem afinicznym na płaszczyźnie jest przekształcenie, które punkt o współrzędnych (x, y) przekształca w punkt o współrzędnych (x', y') takich, że (Kurdewicz J., 1993)²²:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Figura, która zostaje przekształcona według takiego odwzorowania posiada następujące własności (Kurdewicz J., 1993)²³:

- zmienia swoje położenie na płaszczyźnie,
- zostaje rozciągnięta lub ściśnięta w jednym z kierunków,
- powiększa lub zmniejsza swój obszar,
- zostaje obrócona o pewien kąt,
- gdy $ae - bd < 0$ zostaje lustrzanie odbita względem pewnej osi.

Przesunięcie danej figury opisuje układ określony wzorem (2.13).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + m \\ y + k \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Zmianę rozmiaru danej figury opisuje układ określony wzorem (2.14).

²² Por.: Kurdewicz J.: op.cit., s. 20-22

²³ Por.: Kurdewicz J.: op.cit., s. 20

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot x \\ t \cdot y \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Odwzorowanie jest zwięzające jeżeli wartości r i t zawierają się w przedziale $(0, 1)$. Gdy wartości r i t są ujemne otrzymuje się odbicie lustrzane względem odpowiedniej osi. Obrót uogólniony danej figury opisany jest układem określonym wzorem 2.15.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \cos(\phi) - y \cdot \sin(\phi) \\ x \cdot \sin(\phi) + y \cdot \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Odwzorowanie afiniczne jest odwzorowaniem zwięzającym, jeśli każdy odcinek ulegający przekształceniu jest krótszy niż przed przekształceniem.

Odwzorowanie f nazywamy zwięzającym w przestrzeni metrycznej (P, μ) , jeżeli (Kurdewicz J. 1993)²⁴:

- 1) dla każdego $x \in P$ istnieje $f(x) \in P$,
- 2) dla dowolnych $x_1, x_2 \in P$ istnieje liczba $0 \leq \sigma \leq 1$ taka, że $\mu[f(x_1), f(x_2)] \leq \sigma \mu(x_1, x_2)$ jest to tzw. warunek Lipschitza.

Punkt stały odwzorowania f jest rozwiązaniem równania $x = f(x)$. Zgodnie z twierdzeniem Banacha (Kurdewicz J. 1993)²⁵ odwzorowanie zwięzające ma w przestrzeni metrycznej (P, μ) dokładnie jeden punkt stały x_∞ (atraktor) będący granicą pewnego ciągu $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$, gdzie $x_0 \in P$ i $x_{n+1} = f(x_n)$ (tzn. element x_{n+1} uzyskuje się przez przekształcenie elementu x_n odwzorowaniem f).

W przestrzeni (np. dwuwymiarowej) fraktali definiuje się tzw. metrykę Hausdorffa. Niech X i Y będą zwartymi niepustymi podzbiorymi przestrzeni P . W przestrzeni istnieją dwa elementy x i y takie, że $x \in X$ a $y \in Y$. Odległości między zbiorami X, Y określają wyrażenia (Kurdewicz J. 1993)²⁶:

odległość zbioru X od zbioru Y :

$$o(X, Y) = \max_x \{o(x, Y); x \in X\}$$

odległość zbioru Y od zbioru X :

$$o(X, Y) = \max_y \{o(y, X); y \in Y\}$$

gdzie:

$o(x, Y)$ jest odległością elementu x od zbioru Y ,

$o(y, X)$ jest odległością elementu y od zbioru X .

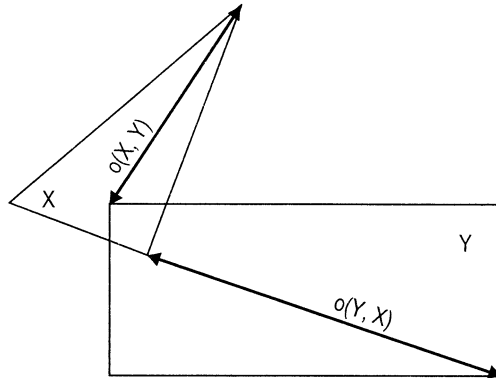
Wyrażenie $m(X, Y) = \max \{o(X, Y), o(Y, X)\}$ nazywa się metryką Hausdorffa. Przestrzeń P z metryką Hausdorffa jest przestrzenią metryczną zupełną i nosi nazwę przestrzeni fraktalnej.

W przestrzeni metrycznej zupełnej (P, m) można zdefiniować układ iterowanych odwzorowań (IFS – *Integrated Function System*). Zbiór tych odwzorowań zwięzających nazywa się układem iterowanych odwzorowań i oznacza się $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$.

²⁴ Por.: Kurdewicz J.: op.cit., s. 23

²⁵ Por.: Kurdewicz J.: op.cit., s. 22

²⁶ Por.: Kurdewicz J.: op.cit., s. 25

Rys. 2.31 Odległości między zbiorami $\rho(X, Y)$ i $\rho(Y, X)$ 

Źródło: opracowanie własne.

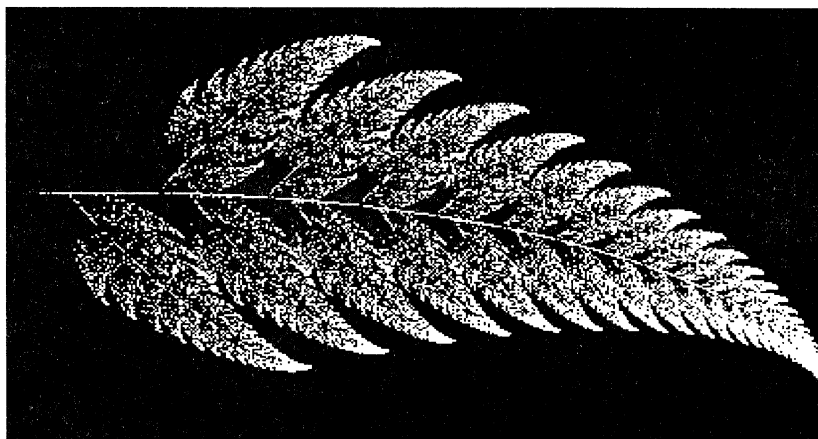
Granica X_∞ ciągu określonego przez złożenie iterowanych odwzorowań zwężających zgodnie z M. Barnsleym nazywana jest atraktorem lub inaczej deterministycznym fraktalem.

W celu uproszczenia metody IFS, która wymaga pamiętania dużej ilości punktów w czasie iteracji stosuje się tzw. metodę probabilistyczną, która polega na przyporządkowaniu układowi odwzorowań zwężających $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$ pewnych prawdopodobieństw p_1, p_2, \dots, p_n takich że $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Układ taki zapisuje się w postaci: $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_n; p_1, p_2, \dots, p_n\}$ i nazywany jest układem iterowanych odwzorowań probabilistycznych (w skrócie IFSP).

Idea odwzorowania IFSP jest bardzo prosta. Należy wybrać dowolny element e_0 należący do przestrzeni X , w której określony jest zbiór iterowanych odwzorowań $(f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)$, z których każde występuje z odpowiadającym mu prawdopodobieństwem $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$. Następnie przekształcić element e_0 wylosowanym odwzorowaniem f_m i narysować w przestrzeni element, który jest obrazem e_0 w wylosowanym odwzorowaniu $e_1 = f_m(e_0)$. W ten sam sposób otrzymuje się kolejny element e_n będący obrazem elementu e_{n-1} przez jedno z wylosowanych odwzorowań f_i z prawdopodobieństwem p_i , które jest niezależne od poprzednich losowań.

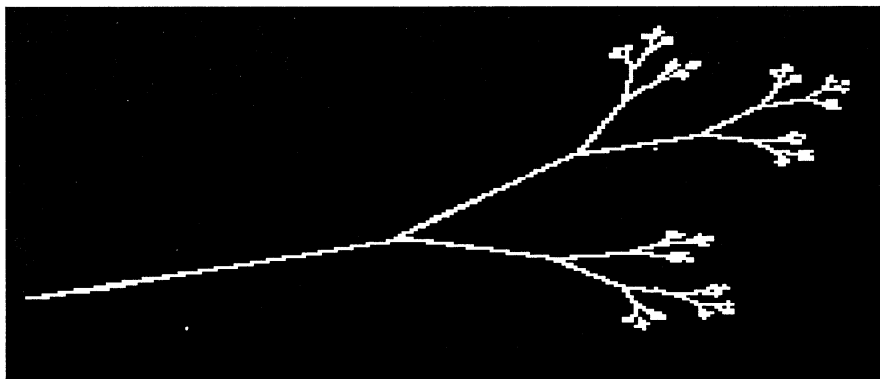
Rys. 2.32 Liść paproci – atraktor układu IFSP opisanego układem czterech odwzorowań (2.11) o współczynnikach przedstawionych poniżej



| A | B | C | D | E | F | p |
|----------|----------|----------|---------|---------|---------|--------|
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.16000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.0100 |
| 0.85000 | 0.04000 | -0.04000 | 0.85000 | 0.00000 | 1.60000 | 0.8500 |
| 0.20000 | -0.26000 | 0.23000 | 0.22000 | 0.00000 | 1.60000 | 0.0700 |
| -0.15000 | 0.28000 | 0.26000 | 0.24000 | 0.00000 | 0.44000 | 0.0700 |

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Fractal Explorer.

Rys. 2.33 „Gałązka” – atraktor układu IFSP opisanego układem czterech odwzorowań (2.11) o współczynnikach przedstawionych na następnej stronie



| A | B | C | D | E | F | P |
|----------|----------|----------|----------|---------|---------|--------|
| 0.38700 | 0.43000 | 0.43000 | -0.38700 | 0.25600 | 0.52200 | 0.3333 |
| 0.44100 | -0.09100 | -0.00900 | -0.32200 | 0.42190 | 0.50590 | 0.3333 |
| -0.46800 | 0.02000 | -0.11300 | 0.01500 | 0.40000 | 0.40000 | 0.3333 |

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Fractal Explorer.

2.2 Analiza fraktalna

Poniżej omówiono kilka podstawowych pojęć przydatnych w badaniu układów dynamicznych: przestrzeń fazową, istnienie atraktorów i przekrój Poincarego.

2.2.1 Analiza fraktalna układów dynamicznych

2.2.1.1 Przestrzeń fazowa

Graficzna interpretacja danych jest bardzo ważna w przypadku nieliniowych systemów dynamicznych. Umożliwia ona zobrazowanie liczby rozwiązań, która w wielu przypadkach jest bardzo duża lub nawet nieskończona. Wiele spośród systemów chaotycznych (lub uważanych za chaotyczne) posiada nieskończoną liczbę rozwiązań w przestrzeni o określonym wymiarze. Portrety zachowań takich systemów są przyciągane do pewnego obszaru przestrzeni, a zbiór możliwych rozwiązań ma wymiar niecałkowity (fraktalny). Obserwowanie danych odbywa się poprzez naniesienie zmiennych systemu na układ współrzędnych i zaznaczenie punktów odpowiadających wartościom tych zmiennych w danej chwili czasowej. Powstaje w ten sposób wykres, który jest portretem fazowym (trajektorią zmian) w przestrzeni fazowej, której wymiar zależy od liczby zmiennych koniecznych do opisanego systemu.

Ważną własnością trajektorii jest to, że trajektorie nie przecinają się, co wynika z faktu, że poprzednie i przyszłe stany układów deterministycznych są określone jednoznacznie przez stan układu w danej chwili.

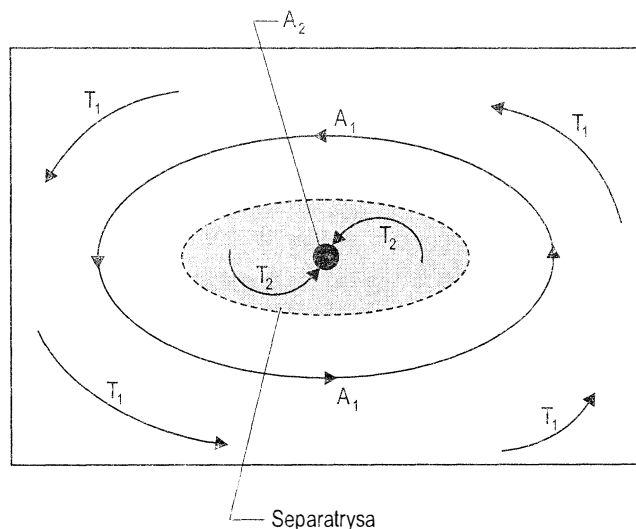
2.2.1.2 Atraktory

Atraktor jest zbiorem w przestrzeni fazowej, który ma tę własność, że każdy punkt pozostający w jego pobliżu zbliża się do niego w czasie zmierzającym do nieskończoności.

Atraktor nie może być podzielony na mniejsze podzbiory nawet gdyby każdy z nich zachowywał opisaną własność.

- Aby więc zbiór A przestrzeni n -wymiarowej był atraktorem musi charakteryzować się następującymi cechami (Kurdewicz J., 1993)²⁷:
- A jest zbiorem niezmienniczym: każda trajektoria, która startuje w A pozostaje w A przez cały czas,
- A przyciąga wszystkie trajektorie, które startują wystarczająco blisko A ,
- A jest zbiorem minimalnym. Najprostszymi przykładami atraktorów są punkty i cykle graniczne, ale są również atraktory o wielu wymiarach fraktalnych. Jeżeli system dynamiczny posiada więcej niż jeden atraktor poszczególne obszary przyciągania oddzielone są od siebie zbiorami punktów, które nie zmierzają do żadnego z atraktorów. Takie zbiory punktów noszą nazwę separatrys.

Rys. 2.34 Schematyczny portret fazowy posiadający dwa atraktory



A_1 – cykl graniczny, A_2 – punkt krytyczny. T_1 – trajektorie z basenu przyciągania atraktora A_1
 T_2 – trajektorie z basenu przyciągania atraktora A_2

Źródło: na podstawie (Zawadzki H., 1996).

Atraktory mogą występować w różnych rodzajach układów dynamicznych. Jednym z najprostszych tego rodzaju układów jest zachowanie wahadła tłumionego, które można opisać następującym równaniem różniczkowym (Baker G, Gollub J., 1998)²⁸:

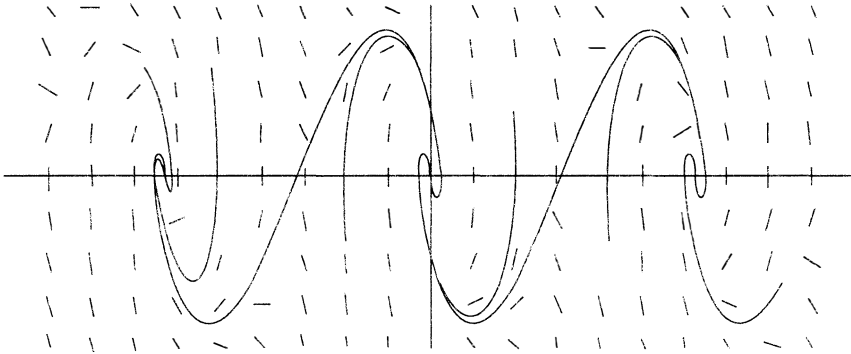
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = 0 \quad (2.16)$$

Typowe trajektorie ruchu przedstawiono na rysunku 2.35.

²⁷ Pisze o tym Kurdewicz J.: op.cit., s. 58 in.

²⁸ Por.: Baker G., Gollub J.: op.cit., s. 27

Rys. 2.35 Portret fazowy tłumionego wahadła, kierunki zakreślenia wskazują baseny przyciągania



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamics Solver.

Człon tłumienia powoduje, że w punktach o współrzędnych $(\pm n\pi, 0)$ pojawiły się atraktory jako punkty stabilności, w których prędkość fazowa wahadła ω spada do θ . W punktach tych zachodzą następujące zależności:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega = 0 \\ \frac{d\omega}{dt} = -\omega - \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Aby zbadać zachowanie wahadła w pobliżu punktu krytycznego można wykorzystać przybliżenie liniowe i zastąpić każdy z członów nieliniowych równania różniczkowego odpowiednim przybliżeniem liniowym.

W przypadku równania ruchu wahadła tłumionego układ równań:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\omega - \sin \theta \end{cases} \quad (2.18)$$

po zastosowaniu przybliżenia liniowego otrzymuje postać (Baker G, Gollub J., 1998)²⁹:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\omega - (\theta - n\pi) \end{cases} \quad (2.19)$$

w przypadku n parzystego i

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\omega + (\theta - n\pi) \end{cases} \quad (2.20)$$

w przypadku n nieparzystego.

²⁹ Por.: Baker G., Gollub J.: op.cit., s. 28

Zastępując w obu równaniach człon $(\theta - n\pi)$ za pomocą członu $\Delta\theta$ odzwierciedlającym zmianę kąta w stosunku do punktu krytycznego równania dla płaszczyzny fazowej równania przybiorą postać:
dla n parzystego

$$\begin{cases} \frac{d\Delta\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\omega - \Delta\theta \end{cases} \quad (2.21)$$

dla n nieparzystego

$$\begin{cases} \frac{d\Delta\theta}{dt} = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = -\omega + \Delta\theta \end{cases} \quad (2.22)$$

Stosując podstawienie $\Delta\theta = Ae^{\lambda t}$ i $\omega = Be^{\lambda t}$ otrzymuje się układ dwu par równań jednorodnych, dla których warunkiem istnienia nietrywialnego rozwiązania jest znikanie wyznacznika w równaniach na A i B . Na tej podstawie istnieją dwa równania (Baker G., Gollub J., 1998)³⁰:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \text{ dla } n \text{ parzystego} \quad \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \text{ dla } n \text{ nieparzystego}$$

Jeżeli n jest parzyste to λ są sprzężzonymi liczbami zespolonymi posiadającymi ujemne części rzeczywiste z czego wynika, że $\Delta\theta$ i ω zmierzają do atraktora punktowego zwanego ogniskiem po trajektorii w kształcie spirali.

W przypadku n nieparzystego równanie ma rozwiązanie w postaci pierwiastków rzeczywistych λ o różnych znakach. Trajektorie fazowe zmierzające do punktu krytycznego są stabilne, a trajektorie niestabilne oddalają się od niego tworząc punkt krytyczny w formie siodła.

W przypadku wahadła z napędem ruch można opisać układem równań pierwszego rzędu w postaci (Baker G., Gollub J., 1998)³¹:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\omega}{q} - \sin\theta + g \cos\phi \\ \frac{d\omega}{dt} = \omega \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega_D \end{cases} \quad (2.23)$$

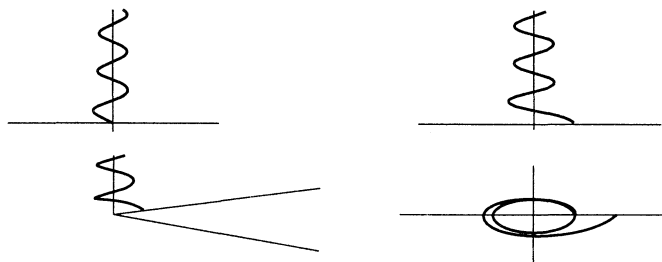
Równania powyższe otrzymano na podstawie równia $d^2\theta/dt^2 + (d\theta/dt)/q + \sin\theta = g \cos\omega_D t$, w którym wprowadzono zmienną ω_D w celu przekształcenia układu nieautonomicznego w układ autonomiczny, w którym zmiennymi dynamicznymi są θ, ω i ϕ .

Rysunek 2.36 przedstawia ruch słabo napędzanego wahadła w dwu- i trójwymiarowej przestrzeni fazowej.

³⁰ Por.: Baker G., Gollub J.: op.cit., s. 28

³¹ Por.: Baker G., Gollub J.: op.cit., s. 25

Rys 2.36 Trajektorie ruchu i atraktor wahadła z napędem



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamics Solver.

Po zakończeniu się stanu przejściowego układ przeszedł w stan ustalony. Powstała zamknięta orbita, która jest jednowymiarowym atraktorem – cyklem granicznym.

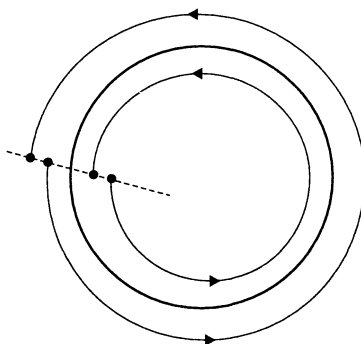
W klasycznej ekonometrii zakłada się, że systemy gospodarcze są systemami zrównoważonymi (atraktor punktowy) lub oscylują wokół stanu równowagi (atraktor w formie cyklu granicznego). Na podstawie obserwacji rzeczywistych procesów gospodarczych można zauważyć, że mają one charakter cykli nieokresowych (brak określonej długości cyklu i skali czasowej). Cykle tego rodzaju występują w nieliniowych układach dynamicznych.

2.2.1.3 Przekrój Poincaré

Analiza układów wielowymiarowych z czasem ciągłym nastręcza wiele trudności. Henry Poincaré opracował metodę pozwalającą na analizę złożonych układów fazowych n -wymiarowych z czasem ciągłym poprzez analizę pewnego związanego z nimi systemu z czasem dyskretnym. Zastosowanie tej metody pozwala na redukcję wymiarów przestrzeni stanów oraz zastosowanie znacznie prostszych metod numerycznych, a tym samym komputerów do badania tych zjawisk.

Weźmy pod uwagę dwuwymiarowy układ mający stabilny cykl graniczny, czyli atraktor okresowy.

Rys. 2.37 Schematyczny przekrój Poincaré – kropki w układzie cyklu granicznego



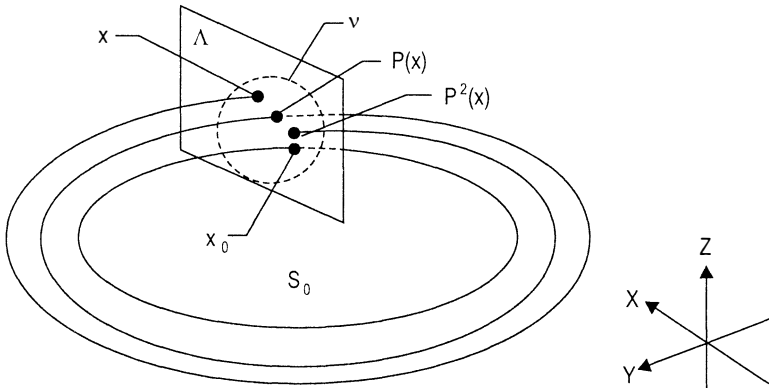
Źródło: na podstawie (Sterwart I., 1996).

Trajektorie przecinamy w poprzek odcinkiem. Każdy punkt wychodzący z odcinka jeżeli nie znajduje się na cyklu granicznym zgodnie z własnością basenu przyciągania zbliża się do atraktora. Zachowanie układu śledzi się w regularnych odstępach czasowych (próbkiwanie stroboskopowe). Odwzorowanie odcinka ścisną go wokół punktu, w którym przecina on cykl graniczny. Na tej podstawie można stwierdzić, że jeżeli istnieje odcinek prostej przecinający trajektorię układu, taki że każdy punkt wychodzący z niego powraca do niego to istnieje co najmniej jeden atraktor okresowy, który przechodzi przez ten odcinek.

Taki rodzaj odcinka zwany jest przekrojem Poincaré, a związane z nim odwzorowanie odwzorowaniem Poincaré.

Podobną ideę można zastosować w przestrzeni zastępując odcinek płaszczyzną. Nie można jednak podać ogólnej zasady wyznaczania przekroju Poincaré oraz odwzorowania, które pasowałyby do każdego układu równań różniczkowych.

Rys. 2.38 Odwzorowanie Poincaré dla układu w przestrzeni 3-wymiarowej



Źródło: na podstawie (Zawadzki H., 1996).

Weźmy system opisany autonomicznym układem równań w postaci wektorowej,

$$\overset{\lambda}{\dot{X}} = f(x) \quad x \in M^n \quad (2.24)$$

gdzie:

λ oznacza, że dany układ traktowany jest w przestrzeni liczb zespolonych.

Załóżmy, że układ opisany tym układem ma rozwiązanie okresowe $\phi(t, x_0)$ niezerywującym okresie. Trajektorię okresową dla tego rozwiązania oznaczono S_0 .

Przekrojem Poincaré pola wektorowego określonego przez równanie (2.24) w przestrzeni o n wymiarach będzie każda $n-1$ wymiarowa płaszczyzna $\Lambda \in M^3$ przechodząca przez punkt x_0 i transwersalna do trajektorii S_0 w punkcie x_0 ³².

³² Transwersalna, oznacza przecinająca w poprzek, przebiegająca poprzecznie, poprzeczna (*Słownik wyrazów obcych*, PWN, Warszawa 1980).

Trajektoria wychodząca z punktu x_0 powraca do tego samego punktu po okresie T . Z założenia wynika, że trajektorie wychodzące z punktów leżących w bliskim otoczeniu v punktu x_0 po upływie czasu $t \approx T$ przetną płaszczyznę Λ w pobliżu x_0 .

Odwzorowanie P , które wszystkim punktom x z otoczenia v przyporządkowuje punkt $P(x)$ jego pierwszego powrotu do innego niewielkiego otoczenia punktu x_0 nosi nazwę odwzorowania Poincaré (Zawadzki H., 1996)³³.

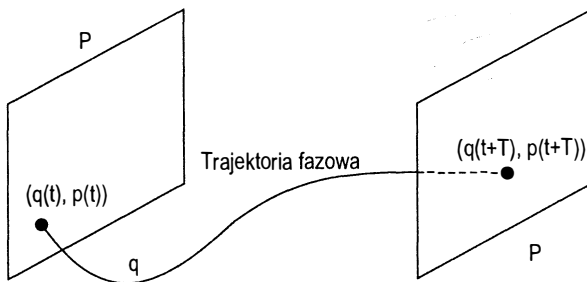
Przekrój Poincaré stosuje się do wyznaczenia $(n-1)$ -wymiarowego dynamicznego systemu, tzn. mapy Poincaré ciągłego przepływu w przestrzeni n -wymiarowej. Odwzorowanie Poincaré jest używane do śledzenia okresowego lub quasi-okresowego systemu dynamicznego. Zakłada się, że przekrój Poincaré Λ jest częścią płaszczyzny, która jest umieszczona w przestrzeni fazowej 3-wymiarowej ciągłego systemu dynamicznego tak, że zarówno orbita okresowa jak i atraktor chaotyczny przecinają przekrój Poincaré.

Odwzorowanie Poincaré może być zdefiniowane jako dyskretna funkcja $p: \Lambda \rightarrow \Lambda$, która opisuje kolejne przecięcia trajektorii 3-wymiarowego strumienia z Λ .

Istnieje kilka ważnych powiązań między 3-wymiarowym strumieniem, a odpowiadającym odwzorowaniem Poincaré. Cykl C systemu, który przecina przekrój Poincaré Λ w punktach q ($q \geq 1$) jest powiązany z punktem okresowym $c = C \cap \Lambda = p^q(c)$ odwzorowania Poincaré p , to c jest krytycznym punktem odwzorowania p^q . Ponadto charakterystyki stabilne są dziedziczone przez punkt krytyczny: stabilny, niestabilny lub cykle siodłowe. Dlatego wiele charakterystyk okresowego lub quasi-okresowego systemu dynamicznego mogą wywodzić się z odpowiedniego odwzorowania Poincaré.

Punkt x_0 jest punktem stałym odwzorowania p i odpowiada trajektorii okresowej $S(x_0)$ o okresie T . Punkt okresowy o okresie q tego odwzorowania odpowiada trajektorii okresowej tego układu, której każdy punkt przechodzi przez otoczenie v punktu x_0 na płaszczyźnie Poincaré q -krotnie. Podstawowy okres tej trajektorii będzie w przybliżeniu równy qT .

Rys. 2.39 Schematyczny model odwzorowania Poincaré



Źródło: opracowanie własne.

W przypadku układu nieautonomicznego, okresowo zmiennego opisanego równaniami różniczkowymi postaci

$$\dot{X} = f(x, t) \quad (x, t) \in M^n \times M \tag{2.25}$$

³³ Por.: Zawadzki H.: op.cit., s. 75

płaszczyzna przekroju jest *stroboskopowym*³⁴ obrazem zmian. Rozpatruje się stan systemu w czasie próbkowania z okresem równym T . Jeżeli T jest okresem ruchu to dla każdej trajektorii płaszczyzna przekroju zawiera punkty przestrzeni fazowej $(q(t), p(t))$, $(q(t+T), p(t+T))$, $(q(t+2T), p(t+2T))$ itd. Jeżeli system ma jeden stopień swobody wtedy można wyznaczyć sekwencje punktów przestrzeni fazowej na płaszczyźnie (q, p) .

Jeżeli układ opisany równaniami (2.30) jest okresowy to:

$$f(x,t) = f(x,t+T) \quad (2.26)$$

W celu przekształcenia układu opisanego równaniami (2.14) w układ $n+1$ równań autonomicznych należy wprowadzić dodatkową funkcję $\Omega(t) = 2\pi T^{-1} t$ (Zawadzki H., 1996)³⁵.

$$\begin{cases} \dot{X} = \left(\frac{x, \Omega T}{2\pi} \right) \\ \dot{\Omega} = \left(\frac{2\pi}{T} \right) \end{cases} \quad (2.27)$$

Przestrzeń stanów stanowi zbiór $M^n \times Z^1$ – tzw. cylindryczna przestrzeń stanów. Rozwiązaniem układu jest funkcja wektorowa (Zawadzki H., 1996)³⁶.

$$\left(\varpi(t, t_0, x_0), \frac{2\pi t}{T(\text{mod } 2\pi)} \right) \quad (2.28)$$

$\varpi(t, t_0, x_0)$ jest rozwiązaniem układu z warunkiem początkowym $\varpi(t_0) = x_0$.

Przekrój Poincaré układu opisanego równaniami (2.14) definiowany jest jako płaszczyzna Λ taka że:

$$\Lambda_{\Omega_0} = \{(x, \Omega) \in M^n \times Z^1 \text{ przy } \Omega = \Omega_0\} \quad (2.29)$$

Natomiast odwzorowanie Poincaré $p: \Lambda \rightarrow \Lambda$ określa wzór (Zawadzki H., 1996)³⁷:

$$p(x, \Omega_0) = \left(\varpi(t_0 + T, x, t_0), \Omega_0 \right) \quad (2.30)$$

Zatem odwzorowanie p przyporządkowuje wszystkim punktom przekroju Λ_{Ω_0} punkt z przekroju Λ_{Ω_0} , w którym znajdzie się on po czasie T .

2.2.2 Analiza fraktalna danych eksperymentalnych

Złożoność zjawisk na rynkach kapitałowych powoduje, że nie jest możliwe wykrycie wszystkich zmiennych wpływających na zachowanie układu. Opiswane przez równania modelowe dziwne atraktory rzadko zdarzają się w rzeczywistości, niemniej jednak na

³⁴ *Próbkowanie stroboskopowe* oznacza badanie zachowania układu poprzez obserwację zmian w stałych, krótkich odstępach czasowych.

³⁵ Por.: Zawadzki H.: op.cit., s. 76

³⁶ Por.: Zawadzki H.: op.cit., s. 77

³⁷ Por.: Zawadzki H.: op.cit., s. 77

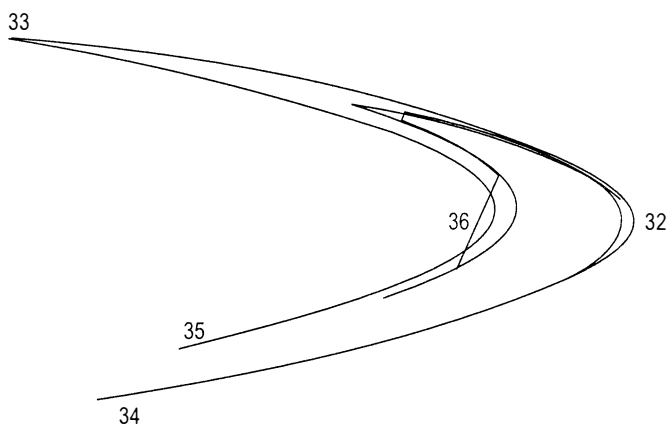
ich podstawie można stwierdzić czy system jest liniowy, czy chaotyczny. Ponieważ wykrycie wszystkich zmiennych opisujących układ jest mało realne, celowym staje się budowanie przestrzeni fazowej na podstawie mniejszej liczby zmiennych i danych z przeszłych okresów czasowych.

2.2.2.1 Rekonstrukcja atraktora

Konstrukcja przestrzeni fazowej jest prosta w przypadku istnienia równań opisujących dane zjawiska i znajomości wszystkich zmiennych związanych z systemem. W przypadku nieznaności zmiennych systemu na podstawie efektów można przeprowadzić rekonstrukcję przestrzeni fazowej.

David Ruelle opracował metodę rekonstrukcji przestrzeni fazowej na podstawie jednej zmiennej dynamicznej. Pozostałe wymiary zastępowane są opóźnionymi odpowiednikami obserwowanej zmiennej.

Rys. 2.40 Zrekonstruowany atraktor Henona z zaznaczeniem kilku kolejnych iteracji w celu pokazania nieregularnego charakteru ruchu



Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Dynamic Solver.

Jeżeli przyjmiemy, że drugie z równań mapy Henona (2.3) można zapisać w postaci $y_n = b x_{n-1}$, to mapa ta może być przedstawiona za pomocą równania kwadratowego z jedną zmienną.

$$x_{n+1} = 1 - a x_{n+1}^2 + b x_{n-1} \quad (2.31)$$

Parametr b jest miernikiem kurczenia się. Mapa Henona jest najbardziej ogólną 2-wymiarową kwadratową mapą z taką własnością, że kurczenie się jest niezależne od x i y .

Nieliniowe systemy są zatem zbiorami wzajemnych zależności, a bieżące wartości każdej ze zmiennych powstają na skutek transformacji wartości poprzednich. W równaniu Henona zarówno x_{t+1} jak też y_{t+1} zależą od poprzednich wartości x i y . Wykładnik zmiennej powoduje, że układ jest nieliniowy, a także dynamiczny.

Ruelle przeprowadził dowód matematyczny i wykazał, że zrekonstruowana przestrzeń fazowa charakteryzuje się identycznym (z prawdziwą przestrzenią fazową dwóch zmiennych) wymiarem fraktalnym oraz rozkładem wykładników Lapunova. Na tej podstawie można stwierdzić, że przestrzeń fazową można zrekonstruować bez znajomości równań ruchu na podstawie danych eksperymentalnych. Dane eksperymentalne konieczne są do ustalenia informacji potrzebnych do rekonstrukcji np. właściwego opóźnienia czasowego. Informację o ilości wymiarów atraktora zastępuje się przez umieszczenie go w przestrzeni o liczbie wymiarów wyższej niż on sam (np. płaszczyzna umieszczona dowolnie w przestrzeni trzy wymiarowej ma w dalszym ciągu dwa wymiary). Atraktor jako nieliniowy układ dynamiczny zachowuje swój wymiar przy zwiększaniu wymiaru pojemnościowego ponad wymiar fraktalny ponieważ punkty są skorelowane i zagęszczają się w określonym miejscu przestrzeni niezależnie od wymiaru. Jeżeli więc rekonstruuje się atraktor o wymiarze wyższym od wymiaru właściwego atraktora wybór odpowiedniego wymiaru nie stanowi problemu.

Oszacowanie odpowiedniego opóźnienia czasowego można dokonać na podstawie równania (Peters E.E 1997)³⁸:

$$m \times \tau = Q \quad (2.32)$$

gdzie:

m – oznacza wymiar pojemnościowy,

τ – oznacza przesunięcie czasowe.

Q – oznacza średni okres orbitalny.

Opóźnienie czasowe jest procentową częścią orbity przypadającą na każdy wymiar. Z tego względu na ten iloraz okres orbitalny nie ulega zmianie w wyższych wymiarach. Średni okres orbitalny można otrzymać na podstawie analizy R/S wyznaczając moment czasowy, w którym następuje zanik korelacji między przebiegami czasowymi, szerzej na ten temat traktuje (punkt 2.2.2.4).

Rekonstrukcja atraktora polega zatem na eksperymentalnym wypróbowaniu różnych reguł w celu znalezienia najbardziej odpowiadającej rzeczywistości i daje nam możliwość obliczania wymiarów fraktalnych oraz mierzenia wrażliwości na zmiany warunków początkowych.

2.2.2.2 Analiza Fouriera

Zmiany stanu układu dynamicznego w czasie, opisywane są przez funkcje czasu $F(t)$ w przypadku czasu ciągłego lub szeregu czasowego w przypadku próbkowania w regularnych odstępach czasowych. Każdą funkcję zależną od czasu $F(t)$ można zastąpić superpozycją jej składowych okresowych. Rozkład funkcji $F(t)$ na składowe nosi nazwę rozkładu widmowego.

W zależności od charakteru funkcji $F(t)$ można ją przedstawić na dwa sposoby. Funkcję okresową można zastąpić złożeniem zbiorem funkcji o częstotliwościach będących całkowitymi wielokrotnościami częstotliwości podstawowej. Złożenie liniowe tych funkcji nosi nazwę szeregu Fouriera.

³⁸ Por.: Peters E.E.: op.cit., s152

Jeżeli $F(t)$ jest funkcją okresową o okresie T tzn. $F(t) = F(t+nT)$ to częstości wszystkich składowych są całkowitymi wielokrotnościami częstości podstawowej $1/T = \omega_0/2\pi$. Szereg Fouriera w postaci zespolonej przybiera postać (Baker G.L., Gollub J.P., 1998)³⁹:

$$F(t) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} (a_n e^{in\omega_0 t}) \quad (2.33)$$

gdzie:

a_n – oznacza amplitudę n -tej składowej o częstości $n\omega_0$,

Wartość amplitudy można otrzymać za wzoru (Baker G.L., Gollub J.P., 1998)⁴⁰:

$$a_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} F(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (2.34)$$

Częstszym zjawiskiem są jednak funkcje nieokresowe, dla których widmo wyraża się przez oscylacje z kontinuum częstości. Widmo takie nosi nazwę transformaty Fouriera. Taki rodzaj reprezentacji funkcji zmiennej w czasie ma szczególne znaczenie w przypadku dynamicznych układów chaotycznych. Transformata Fouriera stanowi ogólną postać szeregu Fouriera. Ponieważ przyjmuje się, że okres T funkcji $F(t)$ może być nieskończenie wielki, funkcja $F(t)$ może zostać opisana nawet jeżeli nie jest okresowa. W przypadku funkcji nieokresowych dyskretny zbiór częstości składowych staje się ciągłym zbiorem częstości widmowych. Amplituda składowej a_n zamieniona zostaje transformatą Fouriera $a(\omega)\delta\omega$.

Szereg Fouriera przekształca się w transformatę Fouriera w wyniku transformacji:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \infty, \\ n\omega_0 &\rightarrow \omega, \\ a_n &\rightarrow a(\omega)d\omega \end{aligned} \quad (2.35)$$

Transformata Fouriera $a(\omega)$ jest często w postaci zespolonej, wówczas definiuje się funkcję rzeczywistą tzw. widmo mocy⁴¹:

$$S(\omega) = |a(\omega)|^2 \quad (2.36)$$

Za pomocą transformaty Fouriera analizować można przebiegi czasowe, których własności nie znamy. Jeżeli przebieg czasowy jest skomplikowany to wyznaczenie transformaty Fouriera jest skomplikowane.

2.2.2.3 Funkcja autokorelacji i współczynnik autokorelacji nieliniowej

Przebiegi chaotyczne ze względu na „efekt motyla” szybko tracą informację o swoim stanie początkowym. Informację o przyszłym stanie układu wyraża się w postaci współczynnika autokorelacji nieliniowej i otrzymuje się na podstawie obserwacji przeszłych zachowań układu. Jest on analogiczną miarą do funkcji autokorelacji, którą stosuje się w przypadku układów liniowych. Podstawowa różnica między tymi dwoma wyznacznikami

³⁹ Por.: Baker G., Gollub J.: op.cit., s. 37

⁴⁰ Por.: Baker G., Gollub J.: op.cit., s. 38

⁴¹ Por.: Baker G., Gollub J.: op.cit., s. 40

polega na tym, że współczynnik jest miarą statystyczną i określa prawdopodobieństwo znalezienia się układu w przyszłych okresach czasowych w tym samym obszarze przestrzeni stanów. Funkcja autokorelacji jest natomiast zależną od czasu miarą dopasowania kształtu sygnału w systemach liniowych.

Przy rekonstrukcji atraktora ze współczynnika autokorelacji korzysta się w celu wyznaczenia odpowiedniego opóźnienia czasowego, które musi być na tyle duże aby próbka sygnału dawała nowe informacje i na tyle krótkie aby informacje nie przestały być zależne. Optymalne opóźnienie czasowe występuje przy minimalnej wartości współczynnika autokorelacji. Współczynnik autokorelacji określa równanie (Zieliński J., S. 2000)⁴²:

$$I_{XY}(T) = \sum P_{XY}(x, y) \log_2 \left[\frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x)P_Y(y)} \right] \quad (2.37)$$

gdzie:

$P_X(x)$ i $P_Y(y)$ – oznaczają prawdopodobieństwa, że obserwowane wartości x i y z sekwencji X i Y pojawiają się,

$P_{XY}(x, y)$ – określa wspólne prawdopodobieństwo, że x i y pojawią się jednocześnie.

Przewagą zastosowania współczynnika autokorelacji nieliniowej jest to, że uwzględnia ono zaniki okresowości, które mogą być zagubione przy stosowaniu metod liniowych oraz zmiany okresów wahań które są całkowicie pomijane w metodach liniowych.

2.2.2.4 Analiza przeskalowanego zakresu R/S

Alternatywna metoda określenia opóźnienia czasowego τ polega na wyznaczeniu wykładnika Hursta. Jeżeli badamy układ o wielu stopniach swobody to zazwyczaj zakładamy, że występujące w tym układzie zmiany mają charakter błędzenia przypadkowego (charakter ruchów Browna). Badając zmiany stanu wody w sztucznych zbiornikach wodnych Hurst testował to założenie i stwierdził, że wahania poziomu wody nie tworzą szeregu czasowego, w którym zakres wahań jest proporcjonalny do $t^{1/2}$ (jest tak w przypadku ruchów Browna). Dzieląc zakres wahań przez odchylenie standardowe obserwacji stworzył bezwymiarowy wskaźnik H . Ten rodzaj analizy nazywa się analizą przeskalowanego zakresu (*rescaled range analysis*), w skrócie analizą R/S (Peters E. E., 1997)⁴³.

Wykładnik Hursta wyznacza się następująco. Dane pomiarowe (w postaci kolejnych próbek) dzieli się na przedziały o stałej ilości punktów równej N , co pokazano na rys. 2.41.

Dla każdego z pokazanych na rys.2.41 przedziałów definiujemy szereg postaci (Peters E. E., 1997)⁴⁴:

$$T_i = \sum_{j=1}^i (x_j - \bar{x}_N) = \sum_{j=1}^i x_j - i \cdot \bar{x}_N, \quad (2.38)$$

gdzie:

T_i - oznacza skumulowane odchylenie w N próbkach,

x_j - wartość próbki w chwili j ,

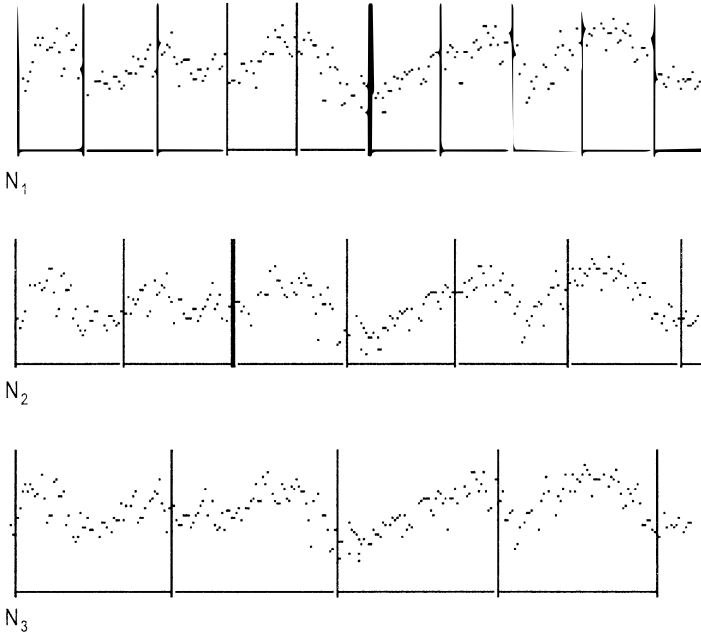
\bar{x}_N - średnią arytmetyczną danych dla N próbek.

⁴² Por.: Zieliński J.S.: op.cit., s. 254

⁴³ Opisał to Peters E.E.: op.cit., s. 64 in.

⁴⁴ Por.: Peters E.E.: op.cit., s. 65

Rys. 2.41 Zasada wyznaczania wykładnika Hursta



Źródło: opracowanie własne.

Dla szeregu (2.34) dla każdego z przedziałów obliczamy wielkość R zwaną zakresem:

$$R = \max(T_i) - \min(T_i) \quad (2.39)$$

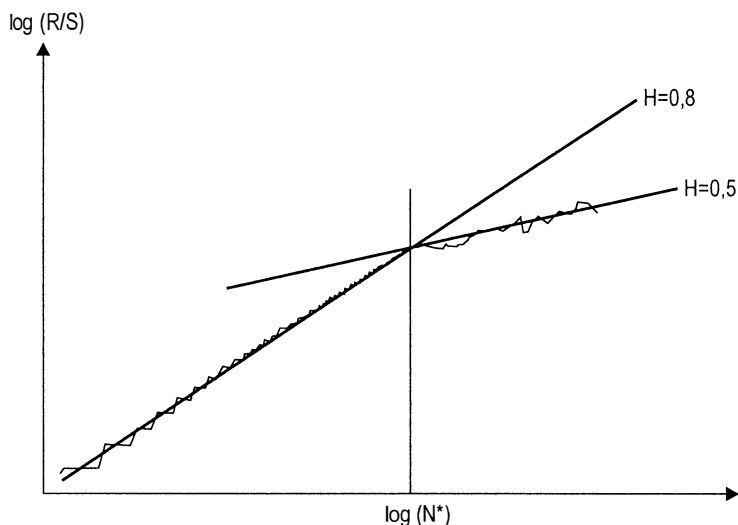
oraz odchylenie standardowe S .

Wielkość R/S charakterystyczną dla całego szeregu czasowego wyznaczamy jako średnią arytmetyczną R/S wyznaczonych dla wszystkich przedziałów o długości N .

Dla kolejnych wartości N buduje się wykres pokazany na rys. 2.42.

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu $\ln(R/S)$ w funkcji $\ln(N)$ określa wartość współczynnika H . W praktyce współczynnik stycznej zastępuje się współczynnikiem kierunkowym prostej regresji określonej dla danego przedziału zmian liczności przedziałów N . Jeżeli liczba N obejmuje zbyt dużą liczbę punktów pomiarowych wówczas proces przypomina błądzenie przypadkowe (zanika pamięć długookresowa – pamięć pomiędzy kolejnymi przedziałami). Punkt ten odpowiada kresowi naturalnego okresu układu fizycznego (rys.2.42 – $\log(N^*)$). W punkcie N^* krzywa $\ln(R/S)$ zmienia nachylenie co pokazano na rys.2.42, dla sygnałów o charakterze stochastycznym $H = 0.5$.

Rys. 2.42 Wykładnik Hursta



Źródło: (Nazarko J., Siemieniuk N., Mosdorf R., 1999, s.157).

Wielkość N^* pozwala na określenie wielkości przesunięcia czasowego τ koniecznego przy rekonstrukcji atraktora. Wielkość τ wyznacza się z zależności:

$$\tau = \frac{N^*}{n} \quad (2.40)$$

gdzie:

n – wymiar zanurzenia rekonstruowanego atraktora

Z punktu widzenia J.Zielińskiego (Zieliński J.S., 2000)⁴⁵, *minimalny wymiar zanurzenia jest minimalną liczbą geometrycznych współrzędnych potrzebnych do wiernego odzwierciedlenia całego atraktora. Jest to też liczba stopni swobody (liczba niezależnych zmiennych) potrzebnych do reprezentacji dynamicznego systemu.*

Wykładnik Hursta można stosować w analizach różnych szeregów czasowych przy niewielkiej ilości założeń dotyczących badanego systemu. Na jego podstawie możliwe staje się odróżnienie szeregów losowych od nielosowych. Rozróżnia się trzy klasy wielkości wykładnika Hursta (Peters, E,E 1997)⁴⁶:

- $H = 0,5$ przy którym szereg czasowy jest losowy,
- $0 \leq H < 0,5$ szereg czasowy jest antypersystentny lub ergodyczny („powracający do średniej”),
- $0,5 < H < 1$ szereg czasowy jest persystentny czyli wzmacniającym trend.

⁴⁵ Zacytowane za J.Zieliński: op.cit., s. 255

⁴⁶ Pisze o tym E.Peters: op.cit., s. 67

Rynki kapitałowe są właśnie szeregami persystentnymi i są fraktalami. Zdarzenia są skorelowane we wszystkich skalach czasowych co powoduje, że prawdopodobieństwa wystąpienia dwóch następujących po sobie zdarzeń z tym samym znakiem nie są równe, a wymiar fraktalny rozkładu prawdopodobieństwa wyraża się liczbą mieszczącą się w przedziale między 1 i 2. W szeregach czasowych, dla których wykładnik Hursta zbliża się do jedności coraz więcej następujących po sobie obserwacji ma ten sam znak. Wraz ze wzrostem H linia staje się coraz gładzsza, w systemie jest mniej szumu, uwidaczniają się trendy, rosną odchylenia od średniej. Wykładnik Hursta jest miernikiem złożoności szeregu fraktalnego.

W wyniku zastosowania analizy R/S do różnych rynków kapitałowych można wykazać, że mają one strukturę fraktalną, a obecność cykli nieokresowych świadczy, że są one zjawiskami nieliniowymi.

2.2.2.5 Entropia korelacyjna Kołmogorowa

Pojęcie entropii zostało wprowadzone przez analogię do układów termodynamicznych, w których entropia termodynamiczna jest miernikiem stopnia nieuporządkowania danego układu. Analogicznie entropia Kołmogorowa mierzy stopień chaotyczności układu dynamicznego, jest więc proporcjonalna do szybkości utraty informacji o stanie układu.

Entropię Kołmogorowa K wyznacza się na podstawie zachowania trajektorii $x(t)$ w d -wymiarowej przestrzeni fazowej.

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_d(t)] \quad (2.41)$$

W celu określenia zachowania się punktów przestrzeni dzieli się na wycinki o wielkości v^d , a następnie bada się stan układu w odstępach czasu równych Δt . Zakładamy, że prawdopodobieństwo tego, że x w chwili $t = 0$ należy do wycinka p_0 wynosi Pp_0 , analogicznie prawdopodobieństwo, że x w chwili $t = n\Delta t$ należy do wycinka p_n wynosi Pp_n . Łączne prawdopodobieństwo stanu położenia punktu w dowolnej chwili wynosi $Pp_0 \dots p_n$. Na podstawie wzoru Shanona (Schuster H.G., 1993)⁴⁷ wielkość

$$K_n = - \sum Pp_0 \dots p_n \ln Pp_0 \dots p_n \quad (2.42)$$

przy znanych prawdopodobieństwach $Pp_0 \dots p_n$ jest proporcjonalna do określenia położenia punktu na trajektorii z dokładnością v . Różnica $K_{n+1} - K_n$ mierzy ubytek informacji o stanie układu między chwilami czasowymi $t = (n+1)\Delta t$, a $t = n\Delta t$.

Entropię Kołmogorowa określa się jako średnią prędkość ubytku informacji o stanie układu i wyraża wzorem (Schuster H.G., 1993)⁴⁸:

$$K = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{v \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=1}^{n-1} (K_{n+1} - K_n) = \\ = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{v \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{p_0, \dots, p_{N-1}} Pp_0 \dots p_{N-1} \ln Pp_0 \dots p_{N-1} \quad (2.43)$$

⁴⁷ Por.: Schuster H.G.: op.cit., s. 118

⁴⁸ Por.: Schuster H.G.: op.cit., s. 118

Granica $v \rightarrow 0$ powoduje, że wartość K nie zależy od sposobu wyboru podziału przestrzeni fazowej. Natomiast w przypadku układów dyskretnych krok czasowy $\Delta t = 1$ więc granica przy $\Delta t \rightarrow 0$ jest pomijana.

W analizie własności układu dynamicznego istniejącego w dowolnie wymiarowej przestrzeni fazowej wprowadza się pojęcie entropii korelacyjnej, wyrażonej za pomocą poniższego wzoru, który sformułowano na podstawie wzoru (2.43):

$$K_2 = -\lim_{v \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \sum_{p_0 \dots p_{N-1}} P_{p_0 \dots p_{N-1}}^2 \quad (2.44)$$

Wielkość $\sum_{p_0 \dots p_{N-1}} P_{p_0 \dots p_{N-1}}^2$ jest łącznym prawdopodobieństwem znalezienia trajektorii układu w wyznaczonym obszarze przestrzeni fazowej. Wielkość K_2 jest dolną granicą entropii Kołmogorowa. Warunek $K_2 > 0$ jest warunkiem dostatecznym istnienia chaosu w badanym układzie.

Entropia Kołmogorowa jest jedną z najważniejszych miar charakteryzujących chaotyczne zachowanie się układu dynamicznego. K jest równe zero dla ruchu regularnego, $K > 0$ dla ruchu wykazującego własności chaosu deterministycznego i K jest nieskończone dla układu losowego. Wielkość K dla układów jednowymiarowych jest równa wykładnikowi Lapunowa zaś dla układów wielowymiarowych jest równa uśrednionej sumie dodatnich wykładników Lapunowa.

2.2.2.6 Wymiar fraktalny i korelacyjny

Trajektorie układu chaotycznego w przestrzeni fazowej nie tworzą żadnego pojedynczego obiektu geometrycznego takiego, jak okrąg lub torus, tworzą natomiast obiekty nazywane dziwnymi atraktorami, których struktura przypomina strukturę fraktala. Wymiar fraktalny opisuje, w jaki sposób układ wypełnia swoją przestrzeń i jest skutkiem wszystkich czynników wpływających na ten układ.

Najczęściej obiekt umieszcza się w przestrzeni, której wymiar jest większy niż wymiar fraktalny obiektu. Przestrzeń taką nazywamy wymiarem pojemnościowym lub topologicznym. Umieszczenie obiektu fraktalnego w wymiarze pojemnościowym większym od jego wymiaru fraktalnego nie powoduje zmiany ich wymiaru. Wymiar fraktalny zależy od sposobu wypełniania przez obiekt lub szereg czasowy swojej przestrzeni. Aby wyznaczyć wymiar fraktalny dla danej struktury należy zmierzyć, jak zągęszcza się ona w przestrzeni.

Dla danych eksperymentalnych wyznacza się wymiar korelacyjny D_2 , który definiuje wyrażenie postaci (Schuster H. G., 1993)⁴⁹:

$$D_2 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} \ln \sum_i p_i^2 \quad (2.45)$$

⁴⁹ Por.: Schuster H.G.: op.cit., s. 133

$$\sum_i p_i^2 \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \Theta(l - |x_i - x_j|) = C_2(l) \quad (2.46)$$

gdzie:

Θ – oznacza funkcję skokową Heaviside'a określającą ilość par punktów atraktora, których odległość jest mniejsza od l

Wielkości K_2 i D_2 powiązane są zależnością (Schuster H. G., 1993):

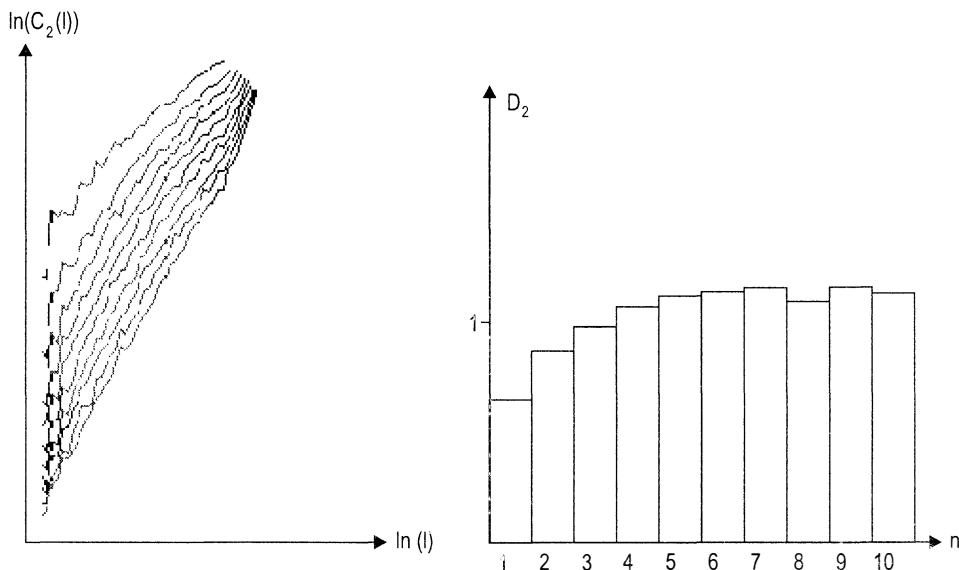
$$\lim_{l \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln C_2^n(l) = D_2 \ln l + nK_2 \quad (2.47)$$

gdzie:

n – wymiar zanurzenia

Obliczenia funkcji $C_2(l)$ wykonuje się dla τ określonego w oparciu o zależność (2.40). Przykładowe wyniki obliczeń funkcji $C_2(l)$ pokazane są na rys.2.43.

Rys. 2.43 Wyznaczanie wymiaru fraktalnego w oparciu o funkcję $\ln C_2(l)$



Źródło: na podstawie (Mosdorf R., Ulbrich R, 1998).

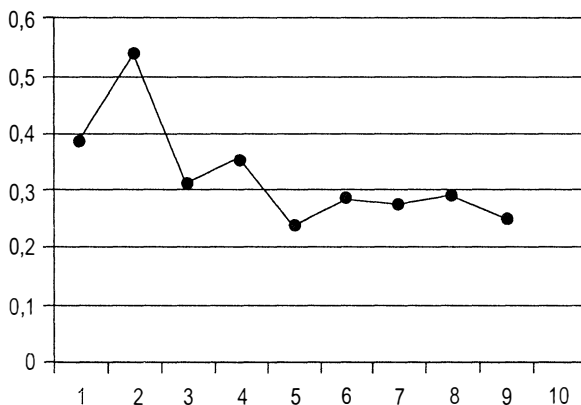
Wymiar fraktalny oblicza się wyznaczając wartość współczynnika kierunkowego prostej regresji przechodzącej przez środkową część krzywej $\ln C_2(l)$.

Dla sygnału stochastycznego wymiar fraktalny rośnie wraz z wymiarem zanurzenia. Jeżeli badany sygnał ma charakter chaosu deterministycznego, to wielkość współczynnika kierunkowego prostej regresji zdąży do wielkości stałej D_2 . Określa ona wymiar korelacyjny badanego atraktora. Na rys. 2.43 pokazano przykładowy układ krzywych $\ln C_2(l)$ w funkcji $\ln(l)$ oraz zmiany wymiaru korelacyjnego w funkcji wymiaru zanurzenia.

Wyznaczenie wymiaru korelacyjnego przeprowadza się dla wymiaru zanurzeniowego $M > 2D + 1$, gdzie D jest wymiarem korelacyjnym rozpatrywanego atryktora (Parker, L.O. Chua; 1987).

Na wykresie funkcji $\ln C_2^n(l)(\ln l)$ dla ustalonego l , wielkość K_2 można wyznaczyć jako różnicę między wielkościami $\ln C_2^{n-1} - \ln C_2^n$. Na rys. 2.44 pokazano zmiany entropii K_2 w funkcji wymiaru zanurzenia. Wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia wartość entropii K_2 zdąża do wartości stałej.

Rys. 2.44 Zmiany entropii K_2 w funkcji wymiaru zanurzenia



Źródło: opracowanie własne.

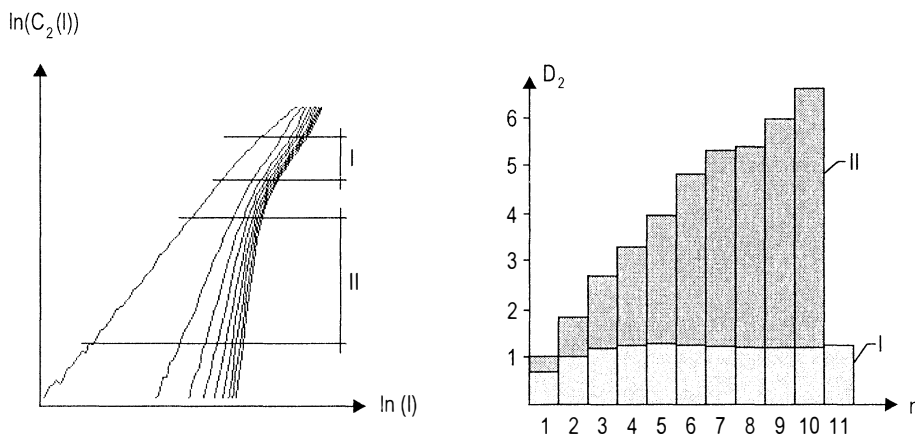
Nie zawsze wyniki obliczeń funkcji $\ln(C(l))$ są takie, jak pokazano to na rys. 2.43. W przypadku, gdy w układzie pojawiają się szumy stochastyczne, przebieg funkcji $\ln(C(l))$ może być bardziej złożony od pokazanego na rys. 2.45. Na rys. 2.45 pokazano zmiany funkcji $\ln(C(l))$ dla szeregu czasowego postaci: $x_n = \sin(0.1n) + \sigma$, gdzie σ oznacza zmienną losową o rozkładzie równomiernym. Na wykresie $\ln(C(l))$ widoczne są dwa obszary oznaczone cyframi I i II. Obszar II występuje dla mniejszych wartości l i odpowiada przypadkowym zmianom wartości x_n związanym z występującym szumem σ . Obszar I występuje dla większych wartości l i związany jest z długookresowymi zmianami x_n związanymi z funkcją $\sin(0.1n)$. Dla danych eksperymentalnych funkcja $\ln(C(l))$ może mieć przebieg jeszcze bardziej skomplikowany niż pokazany na rys. 2.45.

Wymiar fraktalny jest ważną informacją o systemie, ponieważ umożliwia ustalenie minimalnej liczby zmiennych dynamicznych potrzebnych do opisanie układu. Jednocześnie wymiar fraktalny stanowi dolną granicę liczby możliwych stopni swobody.

Rynki: amerykański, niemiecki, i brytyjski mają wymiar fraktalny mieszczący się w przedziale między 2 i 3 (Peters E. E., 1997)⁵⁰. Wynika stąd, że do opisu tych rynków wystarczy trzy zmienne. W przypadku rynków bardziej złożonych np. japońskiego (wymiar fraktalny 3,05) do opisanie jego zachowań potrzebna jest większa ilość zmiennych.

⁵⁰ Por.: Peters E.E.: op.cit., s. 165

Rys. 2.45 Zmiany funkcji $C_2(l)$ i wymiaru korelacyjnego D_2 dla szeregu czasowego $x_n = \sin(0.1n) + \sigma - \sigma$



Źródło: na podstawie (Mosdorf R., Ulbrich R., 1998).

2.2.2.7 Wykładniki Lapunowa

Chaotyczne systemy dynamiczne wyróżnia duża wrażliwość na warunki początkowe. Na skutek tej własności początkowo bliskie trajektorie wykładniczo się rozbiegają w skończonym przedziale czasowym. Ważnym sposobem wyznaczania wrażliwości układów na warunki początkowe jest analiza widmowa Lapunowa, która umożliwia wykrywanie obecności tej własności w sygnałach eksperymentalnych i układach dynamicznych.

Dla danych pomiarowych w postaci szeregu czasowego:

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n\} \quad (2.48)$$

niemożliwe jest wyznaczenie wszystkich współczynników Lapunowa. Możliwe jest natomiast wyznaczenie wartości największego wykładnika Lapunowa. W tym przypadku na atraktorze zanurzonej w D wymiarowej przestrzeni wybiera się dwa punkty odległe od siebie o co najmniej jeden okres orbitalny. Odległość tych punktów wynosi $L(\tau_j)$. Następnie obliczana jest odległość wybranych punktów po upływie pewnego czasu ewolucji. Nowa odległość pary punktów wynosi $L(\tau_{j+1})$. Największy wykładnik Lapunowa obliczany jest według wzoru (Peters E.E., 1997)⁵¹:

$$L_1 = \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^m \log_2 \frac{L(\tau_{j+1})}{L(\tau_j)} \quad (2.49)$$

gdzie:

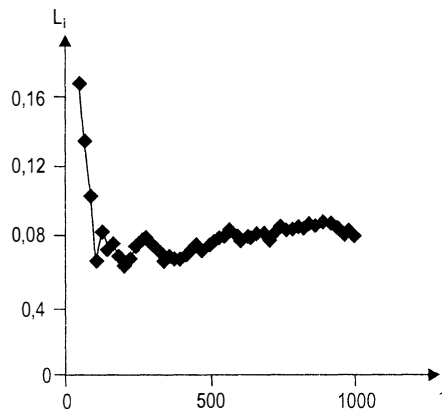
m – oznacza wymiar pojemnościowy,

τ – oznacza opóźnienie czasowe.

⁵¹ Por.: Peters E.E.: op.cit., s. 156

Wyznaczenie największego wykładnika Lapunowa możliwe jest w przypadku, gdy znane są takie charakterystyki atraktora, jak wymiar fraktalny, średni czas orbitalny oraz opóźnienie czasowe. Dla długich szeregów czasowych wyniki obliczeń wartości L_1 dążą do stabilnej wartości, która jest oszacowaniem wielkości największego wykładnika Lapunowa. Na rys.2.46 pokazano przykładowe wyniki obliczeń wykładnika Lapunowa w funkcji czasu ewolucji dla chaotycznego szeregu czasowego generowanego przez układ trzech równań różniczkowych.

Rys.2.46 Zmiany wartości największego wykładnika Lapunowa wyznaczonego z zależności (2.45) w funkcji czasu ewolucji układu



Źródło: (Nazarko J., Siemieniuk N., Mosdorf R., 1999, s.156).

Do wyznaczenia największego wykładnika Lapunowa potrzebne jest co najmniej 10^n punktów pomiarowych oraz 10^{n-1} okresów orbitalnych.

Wyznaczenie największego wykładnika Lapunowa możliwe jest w przypadku, gdy znany wymiar fraktalny atraktora. Natomiast do wyznaczenia wymiaru fraktalnego atraktora konieczna jest znajomość wielkości opóźnienia czasowego – wielkości niezbędnej do rekonstrukcji atraktora.

Algorytm wyznaczania współrzędnych kolejnych punktów atraktora pokazany jest na rysunku 2.47.

Rys. 2.47 Algorytm rekonstrukcji atraktora dla przesunięcia τ

| | | Wymiary zanurzenia atraktora | | | | | | |
|--------------|---|------------------------------|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| Numer punktu | 1 | X_1 | $X_{1+\tau}$ | $X_{1+2\tau}$ | $X_{1+3\tau}$ | $X_{1+4\tau}$ | $X_{1+5\tau}$ | ... |
| | 2 | X_2 | $X_{2+\tau}$ | $X_{2+2\tau}$ | $X_{2+3\tau}$ | $X_{2+4\tau}$ | $X_{2+5\tau}$ | ... |
| | 3 | X_3 | $X_{3+\tau}$ | $X_{3+2\tau}$ | $X_{3+3\tau}$ | $X_{3+4\tau}$ | $X_{3+5\tau}$ | ... |
| | 4 | X_4 | $X_{4+\tau}$ | $X_{4+2\tau}$ | $X_{4+3\tau}$ | $X_{4+4\tau}$ | $X_{4+5\tau}$ | ... |
| | 5 | X_5 | $X_{5+\tau}$ | $X_{5+2\tau}$ | $X_{5+3\tau}$ | $X_{5+4\tau}$ | $X_{5+5\tau}$ | ... |
| | 6 | X_6 | $X_{6+\tau}$ | $X_{6+2\tau}$ | $X_{6+3\tau}$ | $X_{6+4\tau}$ | $X_{6+5\tau}$ | ... |

Źródło: opracowanie własne.

Obraz atraktora w n wymiarowej przestrzeni zależy od opóźnienia czasowego τ . Na rysunku 2.48 pokazano przykład wpływu wielkości τ na kształt atraktora w przestrzeni trójwymiarowej. W przypadku, gdy opóźnienie czasowe jest zbyt małe, atraktor ulega „spłaszczeniu” (rys.2.48 a), co powoduje, że dalsza analiza jego struktury jest niemożliwa. Na rys. 2.48b pokazano wygląd atraktora w przypadku właściwego doboru τ . Wyniki obliczeń przedstawione na rys. 2.48 pokazują, że dobór wielkości opóźnienia czasowego ma bardzo duże znaczenie w analizie własności atraktora.

Rys. 2.48 Rekonstrukcja atraktora z szeregu czasowego

$$x_n = \sin(0.1 \cdot n\tau) + \cos(0.3 \cdot n\tau) + \sigma$$



gdzie:

σ – oznacza szum o rozkładzie równomiernym a) $\tau = 1$, b) $\tau = 85$

Źródło: opracowanie własne.

Analizę rozpoczyna się od wyznaczenia opóźnienia czasowego. W tym celu wylicza się funkcję autokorelacji określoną zależnością

$$C(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} x_n x_{n+t} \quad (2.50)$$

Wielkość opóźnienia czasowego τ wyznacza się z warunku $C(\tau) \approx 0.5 \times C(0)$. Wykładnik Lapunowa wskazuje, czy zachowanie układu dynamicznego jest chaotyczne. Można go zdefiniować również w postaci (Schuster H. G., 1993)⁵²:

$$\lambda(z_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(z_0 + \tau) - f^N(z_0)}{\tau} \right| \quad (2.51)$$

Parametr f^N we wzorze (2.51) jest N krotnym złożeniem funkcji f występującej w równaniu opisującym zachowanie układu dynamicznego. Jest on miarą zmiany odległości pomiędzy dwoma początkowymi punktami (z_0) i ($z_0 + \tau$), które ewoluują przez N iteracji. Współczynnik Lapunowa jest również miarą utraty informacji o układzie w jednej iteracji (Schuster H.G., 1993)⁵³. W przypadku, gdy $\lambda > 0$, o układzie dynamicznym mówimy, że jego zachowanie jest chaotyczne.

Jeżeli dla układu dynamicznego wyznaczy się jednakowy punkt startu dwukrotnie, to wykładnik Lapunowa wyznaczy średni wzrost błędów pomiędzy wartościami punktu dla określonego czasu T . Wykładnik oblicza się dla każdego wymiaru, jeżeli któryś z wykład-

⁵² Por.: Schuster H.G.: op.cit., s. 35

⁵³ Zwrócił uwagę na ten problem Schuster H.G.: op.cit., s. 35 in.

ników równy jest 0, wówczas do opisanego systemu wystarczą zwykłe równania różniczkowe. Jeżeli którykolwiek z wykładników Lapunowa układu jest większy od zera, to przyjmuje się, że układ jest chaotyczny.

2.2.3 Podsumowanie

W rozdziale omówiono wybrane zagadnienia teoretyczne związane z nieliniowymi i niestacjonarnymi układami dynamicznymi. Omówiono między innymi przestrzeń fazową, atraktory i ich podstawowe własności, a także narzędzie teoretyczne, zwane jako przekrój Poincaré. Przytoczono również przykłady prostych zjawisk chaosu deterministycznego, takie jak, odwzorowanie logistyczne, atraktor Henona i model Lorenza w celu lepszego przybliżenia czytelnika do zagadnień związanych z dynamiką nieliniową układów. Opisano również diagram bifurkacyjny, zjawisko intermitencji i turbulencji w układach dynamicznych, kryzysy, jak również dziwne atraktory i fraktale. Znajomość powyższych zjawisk pozwala bardziej ogólnie spojrzeć na dynamikę układu. W dalszej części rozdziału skoncentrowano się na wybranych metodach dotyczących identyfikacji i wykrywania chaosu w systemach. Metody powyższe podzielić można na metody klasyczne i metody oparte na twierdzeniu Takensa. Wśród metod klasycznych omówiono analizę Fouriera, funkcję autokorelacji i współczynnik autokorelacji nieliniowej i wykładnik Hursta. Z drugiej grupy metod scharakteryzowano wykładniki Lapunowa, dzięki którym można ocenić wrażliwość układu na warunki początkowe, jeden ze sposobów obliczania wymiaru fraktalnego (wymiar korelacyjny) i entropię Kołmogorowa, jak również rekonstrukcję atraktora.

Podsumowując można stwierdzić, że wyznaczenie największego wykładnika Lapunowa możliwe jest w przypadku, gdy znamy wymiar fraktalny atraktora. Natomiast do wyznaczenia wymiaru fraktalnego atraktora konieczna jest znajomość wielkości opóźnienia czasowego – wielkości niezbędnej do rekonstrukcji atraktora.

W rozdziale tym wykazano, że wiele metod stosowanych w ramach teorii chaosu deterministycznego, posiada właściwości, które pozwalają ująć jakościowo i ilościowo cechy dynamiki nieliniowej. Własności tych pozbawione są tradycyjne metody analityczne. Pokazano również, że nieliniowe efekty wywołane zjawiskiem chaosu deterministycznego występują w wielu układach dynamicznych z różnych dziedzin, z fizyką i ekonomią na czele.

Tak szczegółowe omówienie zagadnień teoretycznych związanych z teorią chaosu było świadomym posunięciem autora. Pozwoliło to bowiem wprowadzić czytelnika w kolejny rozdział pracy związany z empiryczną stroną zagadnienia, a mianowicie zastosowaniem wybranych metod analizy danych eksperymentalnych do identyfikacji chaosu deterministycznego w funkcjonowaniu spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

3.

Analiza fraktalnych właściwości polskiego rynku kapitałowego

Notowania cen akcji spółek na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie nie odbywały się regularnie, szczególnie w początkowej fazie rozwoju giełdy. Przeprowadzenie analizy fraktalnej wymagało stworzenia szeregu pokazującego zmiany ich wartości w poszczególnych dniach. Przyjęto, że dla dni, w których nie wyznaczano wartości akcji spółek na polskiej giełdzie, wartość ich jest równa wartości ostatniego notowania. Sposób postępowania pokazano w oparciu o wartości indeksu WIG (tabela 3.1).

Tabela 3.1 Wyznaczanie wartości WIG dla dni nie objętych notowaniami

| Data | WIG | Si | |
|----------|-----------|---------|-------------|
| 94 01 24 | 15 846.30 | | |
| 94 01 25 | 16 808.60 | 0.0607 | |
| 94 01 27 | 18 218.30 | 0.0839 | |
| 94 01 31 | 16 881.00 | -0.0734 | |
| 94 02 01 | 15 227.90 | -0.0979 | |
| 94 02 02 | 15 227.90 | -0.0979 | brak danych |
| 94 02 03 | 14 871.50 | -0.0234 | |
| 94 02 04 | 14871.50 | -0.0234 | brak danych |
| 94 02 05 | 14871.50 | -0.0234 | brak danych |
| 94 02 06 | 14 871.50 | -0.0234 | brak danych |
| 94 02 07 | 16 137.50 | 0.0851 | |
| 94 02 08 | 16 817.90 | 0.0422 | |
| 94 02 09 | 16 817.90 | 0.0422 | brak danych |
| 94 02 10 | 17 300.20 | 0.0287 | |

Źródło: opracowanie własne.

Wyznaczony w ten sposób szereg czasowy posłużył do budowy szeregów czasowych pokazujących zmiany wartości WIG na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w przedziałach czasowych o stałej liczbie dni.

W analizie rynków stosuje się logarytmiczne stopy zwrotu, zapisane następującą zależnością (Peters E. E., 1997)¹:

$$S_t = \ln(P_t / P_{(t-1)}) \quad (3.1)$$

gdzie:

S_t – oznacza logarytmiczną stopę zwrotu w okresie t ,

P_t – oznacza cenę w okresie t .

¹ Por.: Peters E.E., op.cit., s. 84

Jednak stosowanie stóp zwrotu do analizy wymiaru fraktalnego nie daje zadawalających rezultatów. Dlatego analizuje się ceny akcji ale po wyeliminowaniu trendu, zgodnie z zależnością (Peters E. E., 1997)²:

$$S_i = \ln(P_i) - (a \cdot i + \text{constant})$$

gdzie:

S_i – oznacza szereg czasowy o wyeliminowanym trendzie,

P_i – oznacza wyjściowy szereg czasowy,

i – oznacza liczbę obserwacji.

Eliminację trendu można także osiągnąć stosując analizę widma mocy szeregu, usuwając pierwsze jego częstotliwości, lub eliminując linię regresji $Y = AX+B$.

W celu uwzględnienia inflacji można analizować szereg postaci (Peters E.E., 1997)³:

$$S_i = \ln(P_i) - (a \cdot \ln(\text{CPI}) + \text{constant})$$

gdzie:

CPI – oznacza indeks cen konsumpcyjnych

W zależności od tego jakimi danymi dysponuje się stosuje się jeden lub drugi wzór. Dobór wzoru na podstawie którego przeprowadzona zostanie obróbka danych jest ściśle związany z rodzajem i charakterem szeregu, którym się dysponuje. Często wykorzystuje się kilka metod obróbki danych, jak na przykład eliminacja regresji liniowej plus wycinanie pierwszych częstotliwości widma mocy badanego szeregu.

3.1

Właściwości fraktalne polskiego rynku kapitałowego z wykorzystaniem analizy indeksu WIG

W przypadku analizy indeksu WIG zastosowano dwie metody przygotowywania danych eksperymentalnych, przeznaczonych do późniejszej analizy fraktalnej. Obie metody mają na celu eliminację trendu w badanym szeregu. Porównanie otrzymanych rezultatów analizy fraktalnej pozwoli wybrać jedną, najlepszą metodę do przygotowania danych, wybranych do analizy fraktalnej, wybranych spółek notowanych na polskiej giełdzie.

Pierwsza metoda polega na badaniu szeregu czasowego zwrotów indeksu WIG. Na odcinku czasowym ($i-\tau$, i) stopa zwrotu definiowana jest następująco (Weron A., Weron R., 1998)⁴:

² Sformułowano na podstawie Peters E.E., op.cit., s. 161

³ Podano za Peters E.E., op.cit., s. 161

⁴ Por.: Weron A., Weron R.: *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, WNT, Warszawa 1998, s. 283

$$S_i^\tau = \frac{P_i - P_{i-\tau}}{P_{i-\tau}} \quad (3.2)$$

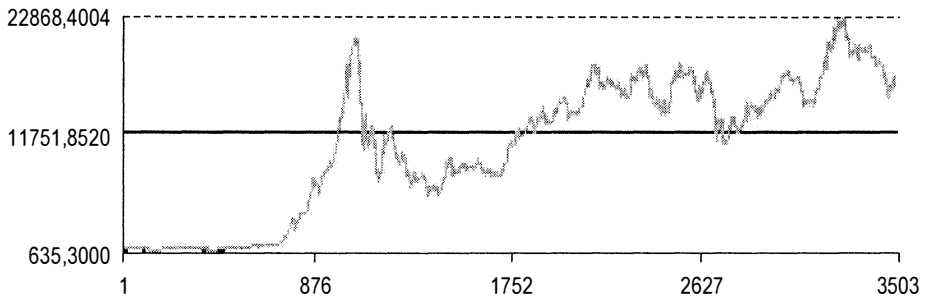
gdzie:

P_i – oznacza wartość indeksu WIG w dniu i .

Druga metoda wykorzystuje fourier’owską analizę widma mocy i usuwanie pierwszych składowych częstotliwości dla badanego szeregu.

Dla zobrazowania powyższych metod oraz analizy fraktalnej wybrano szereg czasowy notowań WIG z okresu od 16.04.1991 do 16.11.2000. Dane przed obróbką przedstawiono na rysunku 3.1.

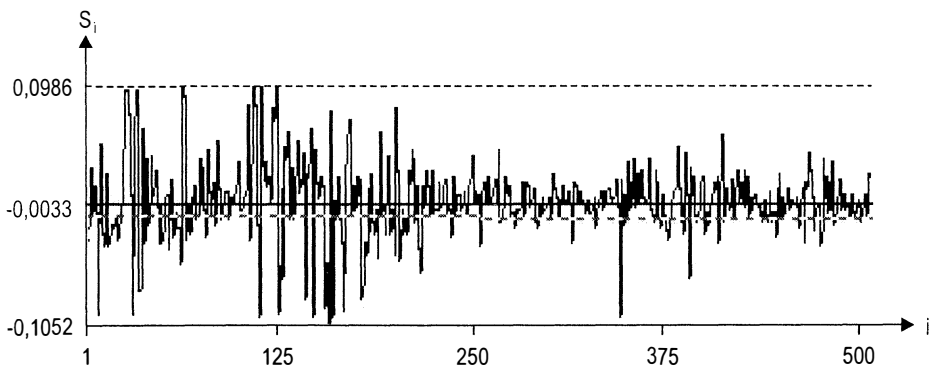
Rys. 3.1 Szereg czasowy notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000



Źródło: opracowanie własne.

W przypadku szeregu czasowego zwrotów indeksu WIG zgodnie ze wzorem (3.2) dla $\tau = 7$, otrzymano szereg czasowy tygodniowych przyrostów S_i , który nie zawiera wyraźnego trendu, co ilustruje rysunek 3.1a.

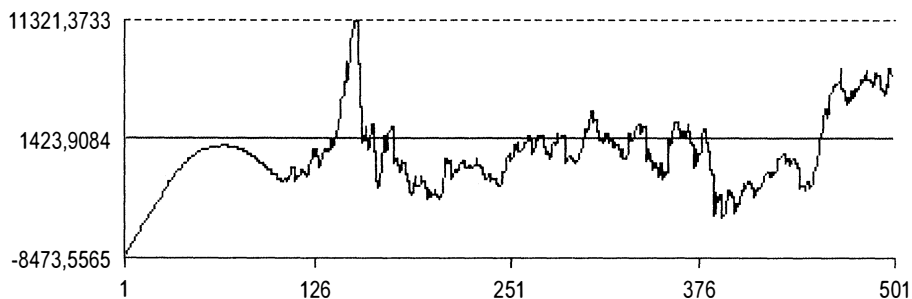
Rys. 3.1a Szereg czasowy przyrostów notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 (dane tygodniowe)



Źródło: opracowanie własne.

Wykorzystując analizę fourier'owską uzyskano również szereg czasowy indeksu WIG pozbawiony trendu, co ilustruje rysunek 3.1b.

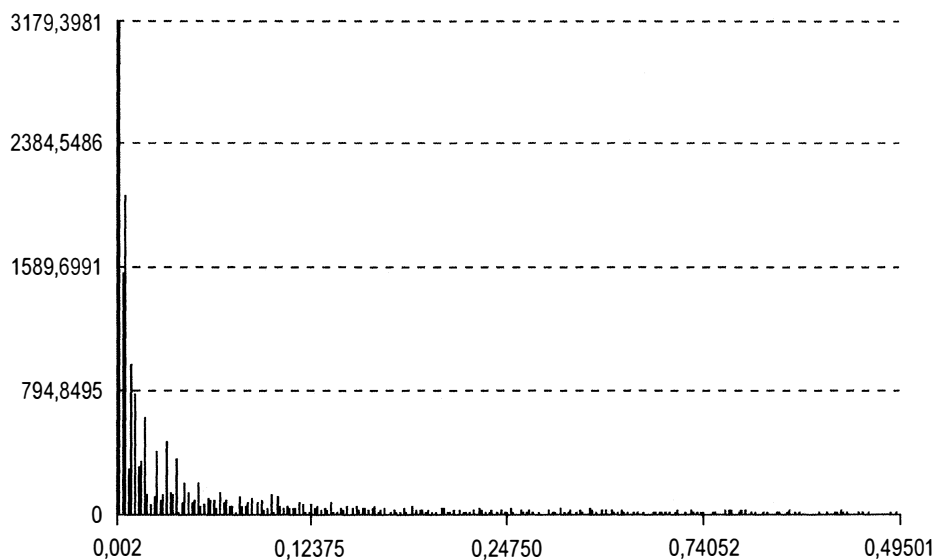
Rys. 3.1b Szereg czasowy notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000, pozbawiony trendu, przez usunięcie pierwszych trzech składowych częstotliwości widma mocy danego szeregu (dane tygodniowe)



Źródło: opracowanie własne.

Widmo mocy szeregu czasowego notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 przedstawia rysunek 3.2.

Rys. 3.2 Widmo mocy szeregu czasowego notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 (dane tygodniowe)



Źródło: opracowanie własne.

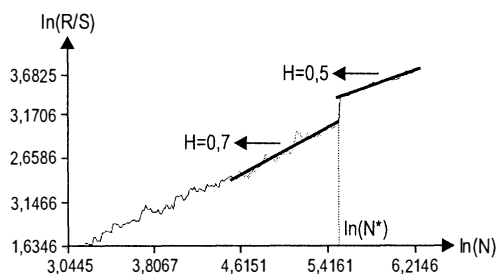
Wyniki analizy dla obu postaci szeregów czasowych wskaźnika WIG pokazano na rysunkach 3.3 i 3.3a. W tabeli 3.2 pokazano porównanie wartości wykładnika Hursta dla różnych rynków kapitałowych. W tabeli 3.2 zamieszczono również wyznaczone w oparciu o analizę R/S długości cykli długookresowych zmian wartości odpowiednich wskaźników. Dane dla innych giełd niż giełda polska, podano na podstawie pracy (Peters E. E., 1997)⁵.

Tabela 3.2 Wartości wykładnika Hursta dla wybranych rynków kapitałowych

| Badany indeks | Wartość wykładnika Hursta | Cykl w miesiącach |
|--|---------------------------|-------------------|
| WIG (na podstawie szeregu przyrostów) | 0,70 | 56,9 |
| WIG (na podstawie szeregu po usunięciu trzech pierwszych częstotliwości) | 0,88 | 51,6 |
| S&P 500 | 0,78 | 48 |
| MSCI Niemcy | 0,72 | 60 |
| MSCI Japonia | 0,68 | 48 |
| MSCI Wielka Brytania | 0,68 | 30 |

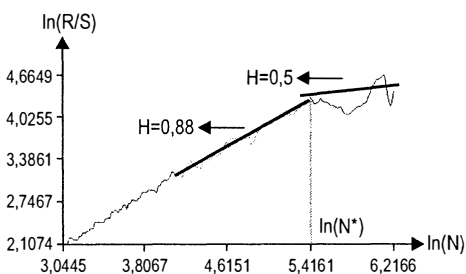
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.3 Wykładnik Hursta dla szeregu czasowego przyrostów notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 (dane tygodniowe)



Źródło: opracowanie własne.

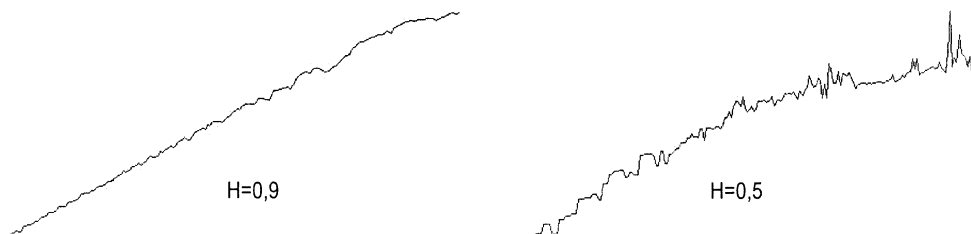
Rys. 3.3a Wykładnik Hursta dla szeregu czasowego notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000, po usunięciu trzech pierwszych częstotliwości (dane tygodniowe)



Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 3.4 podano przykładowe zmiany zmiennej losowej w przypadku, gdy wykładnik Hursta jest równy 0,9 i 0,5.

⁵ Por.: Peters E.E., op.cit., s. 91

Rys. 3.4 Zmiany wartości zmiennej losowej dla $H = 0,9$ i $H = 0,5$ 

Źródło: opracowanie własne.

Gdy wykładnik Hursta jest mniejszy, tym szereg jest bardziej chropowaty (bardziej przypadkowy). Wyższa wartość H oznacza mniejsze ryzyko, ponieważ w takim szeregu jest mniej szumu. Niemniej jednak z akcjami o wysokim wykładniku Hursta związane jest większe ryzyko gwałtownych zmian. Jak wynika z tabeli 3.2, inwestowanie na rynku polskim jest obciążone mniejszym ryzykiem niż na rynku japońskim.

Dowodem na to są raporty i analizy zagranicznych ośrodków i instytucji pozytywnie oceniające zmiany zachodzące w polskiej gospodarce i przedstawiające pomyślne perspektywy jej dalszego rozwoju. Oceny te świadczą o rosnącej konkurencyjności Polski i stanowią sygnał dla inwestorów zagranicznych o atrakcyjności naszego kraju jako miejsca inwestowania. Według szacunków zachodnich analityków polska gospodarka jest zdolna wchłaniać rocznie 10 mld USD bezpośrednich inwestycji zagranicznych. Zdaniem „Economist Intelligence Unit” do końca 2000 roku do Polski powinno napłynąć łącznie około 22 mld USD zagranicznych inwestycji bezpośrednich. Pojawiły się też szacunki przewidujące, że do końca 2000 roku rozmiary skumulowanych inwestycji zagranicznych w Polsce osiągną około 30 mld USD, natomiast w nowym tysiącleciu polskiej gospodarce będzie potrzebny napływ inwestycji zagranicznych na poziomie 12-15 mld USD rocznie (Olesiński Z., 1998)⁶.

W wyniku przeprowadzonej analizy R/S indeksu WIG, wartość wykładnika Hursta wskazuje na występowanie chaosu deterministycznego w przypadku obu badanych szeregów czasowych. Jednak w zależności od doboru metody konstrukcji szeregu otrzymano różne wyniki, dla identycznych notowań WIG. Dla szeregu przyrostów S_t zbudowanego zgodnie ze wzorem (3.2) otrzymano niższą wartość wykładnika Hursta równą 0,7 oraz dłuższy cykl równy 56,9 miesiąca. W przypadku szeregu, z którego wyeliminowano 3 pierwsze częstotliwości, wykładnik Hursta osiągnął wartość 0,88. Odnotowano nieco krótszy, niż w poprzednim przypadku, cykl wynoszący 51,6 miesiąca. Tak wysoka wartość wykładnika Hursta może świadczyć o silnym zdeterminizowaniu danych w szeregu czasowym, co w przypadku stosunkowo młodej jeszcze polskiej giełdy, raczej nie może mieć miejsca. Podważa to wiarygodność wyników otrzymanych na podstawie szeregu przygotowanego przy pomocy analizy fourier’owskiej – wyniki są zbyt idealne. Znacząco bardziej wiarygodne są natomiast wyniki otrzymane na podstawie szeregu przyrostów wartości notowań WIG. Wykładnik Hursta równy 0,7 można odczytać jako poprawną wartość, biorąc

⁶ Szersze ujęcie dotyczące inwestycji zagranicznych w Polsce można znaleźć w: Olesiński Z. (red.): *Bezpośrednie inwestycje zagraniczne w Polsce*, PWE, Warszawa 1998

pod uwagę młody wiek Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie. Również cykl długookresowy równy 56,9 miesiąca jest bardziej prawdopodobny. Dlatego też pozostałe obliczenia (zawarte w rozdziale 3.2) wykonane zostały w oparciu o szereg przyrostów S_t .

Analiza wpływu wielkości τ na wartość wykładnika Hursta pozwala wyznaczyć zakres występowania pamięci krótkoterminowej. Przeprowadzone obliczenia wykładnika dla różnych wartości τ zamieszczono w tabeli 3.3, natomiast rysunek 3.5 ilustruje zmiany wykładnika Hursta w funkcji τ .

Tabela 3.3 Zmiany wartości wykładnika H w funkcji τ

| Wielkość przedziału czasu τ (dni) | Wykładnik Hursta | Ilość danych | Okres (dni) | Okres (lata) |
|---|------------------|--------------|-------------|--------------|
| 1 | 0,67 | 2288 | 1218 | 3,34 |
| 3 | 0,68 | 762 | 390 | 3,21 |
| 5 | 0,69 | 457 | 225 | 3,08 |
| 7 | 0,71 | 326 | 166 | 3,18 |
| 9 | 0,72 | 253 | 130 | 3,21 |
| 11 | 0,74 | 207 | 106 | 3,19 |
| 13 | 0,74 | 175 | 89 | 3,17 |
| 15 | 0,75 | 151 | 79 | 3,25 |
| 17 | 0,78 | 133 | 68 | 3,17 |
| 19 | 0,78 | 119 | 61 | 3,18 |
| 21 | 0,74 | 108 | 54 | 3,11 |
| 23 | 0,79 | 98 | 50 | 3,15 |
| 25 | 0,77 | 90 | 46 | 3,15 |
| 27 | 0,80 | 83 | 43 | 3,18 |
| 29 | 0,79 | 77 | 40 | 3,18 |
| 31 | 0,83 | 68 | 35 | 2,97 |
| 33 | 0,79 | 64 | 33 | 2,98 |
| 35 | 0,86 | 60 | 31 | 2,97 |
| 37 | 0,78 | 57 | 30 | 3,04 |
| 39 | 0,79 | 54 | 28 | 2,99 |

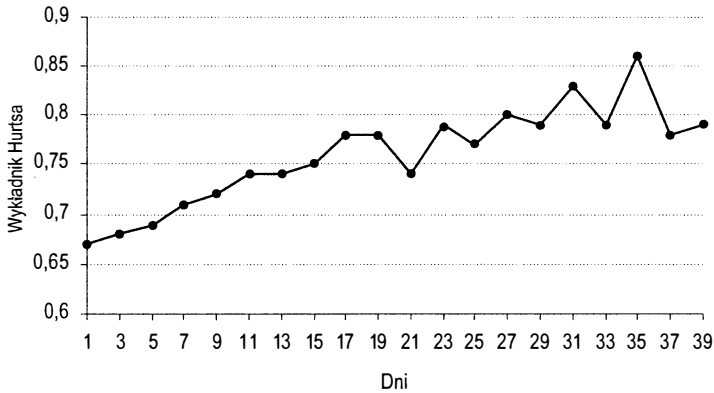
Na podstawie danych WIG z okresu od 16.04.1997 do 21.07.1997

Źródło: (Nazarko J., Siemieniuk N., Mosdorf R., 1999)

Początkowy spadek wartości H dla wielkości $\tau < 20$ dni można tłumaczyć występowaniem pamięci krótkoterminowej pomiędzy zmianami cen dla $\tau < 20$.

W tabeli 3.4 podano wartości wymiaru korelacyjnego otrzymanego dla wybranych rynków kapitałowych. Wartości tego wymiaru dla innych giełd niż giełda polska podano na podstawie pracy (Peters E. E., 1997)⁷. Z uwagi na niewielką liczbę danych obliczenia dla WIG przeprowadzono dla $\tau = 7$. Rysunki 3.6, 3.6a, 3.6b i 3.6c przedstawiają wymiary korelacyjne dla szeregów WIG tworzonych dwoma, wyżej omówionymi metodami.

⁷ Por.: Peters E.E., op.cit., s. 165

Rys. 3.5 Zmiany wartości wykładnika Hursta w funkcji τ 

Na podstawie danych WIG z okresu od 16.04.1997 do 21.07.1997

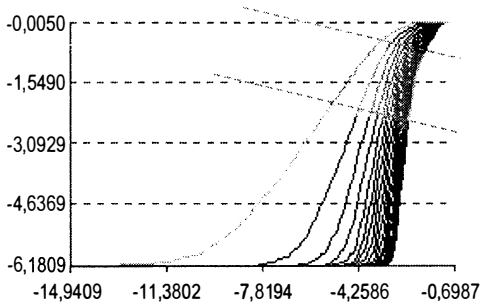
Źródło: (Nazarko J., Siemieniuk N., Mosdorf R., 1999)

Tabela 3.4 Wymiar korelacyjny dla wybranych rynków kapitałowych

| Badany indeks | Wymiar fraktalny | Liczba zmiennych |
|--|------------------|------------------|
| WIG (na podstawie szeregu przyrostów) | 2,47 | 3 |
| WIG (na podstawie szeregu po usunięciu trzech pierwszych częstotliwości) | 2,74 | 3 |
| S&P 500 | 2,33 | 3 |
| MSCI Niemcy | 2,41 | 3 |
| MSCI Japonia | 3,05 | 4 |
| MSCI Wielka Brytania | 2,94 | 3 |

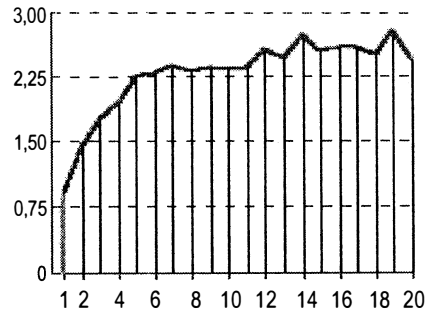
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.6 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla szeregu czasowego przyrostów notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 przy $\tau = 7$



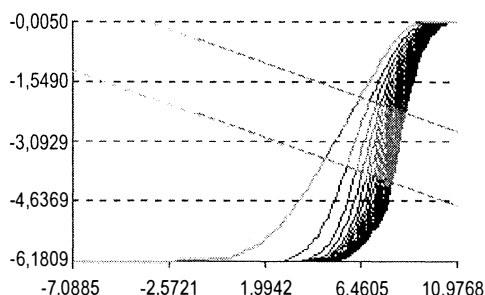
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.6a Wymiary korelacyjne dla szeregu czasowego przyrostów notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 przy $\tau = 7$



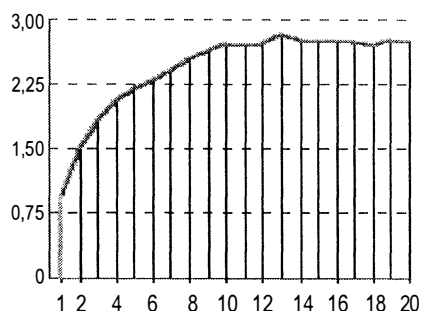
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.6b Krzywe $\ln C_2(l)$ dla szeregu czasowego notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000, z usuniętymi 3 pierwszymi częstotliwościami, przy $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.6c Wymiary korelacyjne dla szeregu czasowego notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000, z usuniętymi 3 pierwszymi częstotliwościami, przy $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Wymiar korelacyjny określa minimalną liczbę zmiennych, która w sposób pełny charakteryzuje dany układ. Im liczba ta jest mniejsza, tym układ jest prostszy, im większa, tym bardziej złożony. Jeżeli liczba zmiennych przekracza 9 można mówić o tzw. multi-fraktalu. Dane zamieszczone w tabeli 3.4, wyraźnie wskazują na występowanie chaosu deterministycznego, w badanych szeregach czasowych WIG. Zarówno na podstawie szeregu przyrostów, jak i szeregu po usunięciu trzech pierwszych częstotliwości, można ocenić złożoność szeregu notowań WIG – składa się on z trzech zmiennych. Podobne wyniki analizy fraktalnej obserwujemy dla rynków niemieckiego i brytyjskiego, co oznacza podobieństwo polskiego rynku kapitałowego, do o wiele starszych rynków zachodnich.

W tabeli 3.5 podano wyniki obliczenia wartości wykładnika Lapunowa dla wybranych rynków kapitałowych. Z uwagi na niewielką liczbę danych obliczenia dla WIG przeprowadzono dla $\tau = 7$. Wartość wykładnika Lapunowa dla innych giełd niż giełda polska podano na podstawie pracy (Peters E. E., 1997).

Tabela 3.5 Wykładnik Lapunowa dla wybranych rynków kapitałowych

| Badany indeks | Wykładnik Lapunowa bit/miesiąc | Cykl w miesiącach 1/wykładnik L Czas utraty informacji |
|--|--------------------------------|--|
| WIG (na podstawie szeregu przyrostów) | 0,0046 bit/7dni | $(1/0,0046)*7/30 = 50,7$ |
| WIG (na podstawie szeregu po usunięciu trzech pierwszych częstotliwości) | 0,0051 bit/7 dni | $(1/0,0051)*7/30 = 45,8$ |
| S&P 500 | 0,0241 | $1/0,0241 = 41,5$ |
| MSCI Niemcy | 0,0168 | $1/0,0168 = 59,5$ |
| MSCI Japonia | 0,0228 | $1/0,0228 = 43,8$ |
| MSCI Wielka Brytania | 0,0280 | $1/0,0280 = 35,7$ |

Źródło: opracowanie własne.

Wykładnik Lapunowa mówi o tym, w jakim tempie tracimy informacje o układzie. Na przykład dla S&P 500 w ciągu jednego miesiąca tracimy 0.0241 bita – jeśli na początku nasza informacja o układzie wynosi 1 bit, wówczas po 41,5 miesiącach tracimy całkowicie informację o układzie. Można też powiedzieć, że po 41,5 miesiącach system traci pamięć o warunkach początkowych. Według danych otrzymanych na podstawie szeregu przyrostów, dla WIG system traci informację po około 50,7 miesiącach, co odpowiada długości okresu 4,22 lata.

Wyniki obliczeń wykładnika Lapunowa dla polskiej giełdy obarczone są błędem z uwagi na niewielką liczbę danych pomiarowych. Jednakże porównanie wyników obliczeń wykładnika Lapunowa pokazanych w tabeli 3.5, z wynikami obliczeń długości długookresowego cyklu pokazanych w tabeli 3.2 wskazują na poprawność uzyskanych wyników.

Uzyskane rezultaty analizy indeksu WIG zbliżone są do wyników uzyskanych dla szeregu czasowego indeksu WIG od 16.04.1991 roku do 21.07.1997 roku (Nazarko J., Siemieniuk N., Mosdorf R.; 1999), co pokazuje, iż w tym okresie nie nastąpiła jakościowa zmiana dynamiki polskiego rynku kapitałowego.

3.2

Identyfikacja chaosu deterministycznego w funkcjonowaniu wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie

Do badań prowadzonych nad spółkami giełdowymi wygodnie jest użyć klasyfikacji sektorowej. Ten podział, mimo iż stał się powszechny, rzadko można dostrzec w pracach o tematyce związanej z analizą fraktalną polskiego rynku kapitałowego. Klasyfikację powyższą przedstawia tabela 3.6.

Tabela 3.6 Klasyfikacja sektorowa polskiego rynku kapitałowego

| Makrosektor | Podsektory |
|--------------------|---|
| Przemysł | Spożywczy, Lekki, Drzewny, Chemiczny, Materiałów budowlanych, Budownictwo, Elektromaszynowy, Metalowy, Inne |
| Finanse | Banki, Ubezpieczenia, Inne |
| Usługi | Handel, Telekomunikacja, Informatyka, Inne |

Źródło: <http://www.gpw.com.pl/gpw/klasyfikacja.html>

W zależności od podsektora danego makrosektora obejmuje on różną liczbę spółek. Nie można jednoznacznie stwierdzić czy istnieją jakieś zależności pomiędzy spółkami oprócz zakwalifikowania ich do jednego podsektora. Co więcej sytuacja podobnie wygląda w przypadku makrosektorów – dotychczas nie stwierdzono, że wszystkie spółki z makrosektora przemysł charakteryzuje taki sam wymiar fraktalny lub też wykładnik Hursta. Niewątpliwie jest to bardzo interesujące zagadnienie, warte dokładnej analizy, lecz należy tu

podkreślić fakt, że aby analiza była godna zaufania należałoby zgromadzić dużą i równą ilość danych giełdowych aby szeregi czasowe dla wszystkich spółek zawierały przynajmniej jeden pełny cykl (jeśli taki istnieje – a jak wykazują nowoczesne badania, kwestią wykrycia naturalnego cyklu jakiegokolwiek zjawiska, jest tylko zgromadzenie odpowiednio dużej liczby danych (Peters E.E., 1997 r)⁸, a co za tym idzie, dla większości spółek oznacza to długi okres czasu istnienia na giełdzie). W przypadku polskiej, młodej i wciąż jeszcze rozwijającej się giełdy, jest to praktycznie niemożliwe – wiele spółek za krótko istnieje, więc cykl ich notowań jest bardzo krótki. Jednakże wyniki przeprowadzonej analizy dowodzą o występowaniu zjawiska chaosu deterministycznego na polskiej giełdzie, jest to podejście alternatywne wobec badań (Jajuga K., Papla D., 1997)⁹, którzy w swoim artykule przedstawili argumenty świadczące o braku istnienia wymiaru fraktalnego dla jakiegokolwiek badanej przez nich, polskiej spółki giełdowej. Autorzy podkreślili jednak możliwość błędności swoich obliczeń ze względu na liczbę danych, która mogła okazać się niedostateczna.

Aby dla poszczególnych badanych spółek akcyjnych polskiej giełdy otrzymać jak najdokładniejsze wyniki analizy fraktalnej nie można ograniczyć liczby danych do pewnej, wspólnej dla wszystkich szeregów czasowych ilości – w zależności od daty pojawienia się spółki na giełdzie liczba ta jest większa lub mniejsza. Analiza opiera się na notowaniach cen akcji. Ostatnie dane dla wszystkich badanych spółek giełdowych pochodzą z dnia 17 czerwca 1998r. Nie jest to rozwiązanie doskonałe, umożliwia jednak wykrycie wymiaru fraktalnego tam gdzie jest to możliwe – okrojenie danych do tej samej liczby mogłoby zafałszować wyniki badań.

Po eliminacji z szeregów czasowych trendu obliczone zostały wymiary korelacyjne dla wymiarów zanurzenia od 1 do 20. Istotnym elementem analizy jest wyznaczenie odpowiedniego przesunięcia czasowego τ , niezbędnego do rekonstrukcji atraktora. Obliczenia były prowadzone dla $\tau = 7$ (z uwagi na niewielką liczbę danych dla niektórych spółek), a następnie dla τ wyznaczonego zgodnie ze wzorem (2.40). W przypadku większości spółek wyniki dla tych τ różniły się znacząco. Analiza tego zjawiska pozwala wyznaczyć zakres występowania pamięci krótkoterminowej.

Tabela 3.7 zawiera klasyfikację wybranych do analizy fraktalnej spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Do analizy wytypowano spółki, które najdłużej funkcjonują na polskiej giełdzie.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można dokonać nie tylko oceny ogólnych praw rządzących całym makrosektorem, ale również, dla większości spółek z konkretnego podsektora (gdzie zakwalifikowano co najmniej 2 spółki) zbadać istnienie jakichkolwiek reguł wiążących ten podsektor. Jest to badanie będące odpowiednikiem klastrowania. Oczywiście równie istotne jest zbadanie każdego szeregu czasowego oddzielnie. Wykrycie wymiaru fraktalnego dla którejkolwiek ze spółek giełdowych to w zasadzie priorytet tej szeroko zakreślonej analizy.

⁸ Por.: Peters E.E., op.cit.

⁹ Jajuga K., Papla D.: *Teoria chaosu w analizie finansowych szeregów czasowych – aspekty teoretyczne i badania empiryczne. V Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, nt. Dynamiczne modele ekonomiczne. 9-11 września 1997, Toruń, s. 5-16*

Tabela 3.7 Klasyfikacja wybranych do analizy spółek giełdowych, wg sektorów

| Makrosektor | Podsektor | Spółki |
|-------------|------------------------|--|
| PRZEMYSŁ | Spożywczy | Agros, Animex, Okocim, Rolimpex, Sokołów, Żywiec |
| | Lekki | Próchnik, Vistula |
| | Drzewny | Swarzędz |
| | Chemiczny | Jelfa, Polifarb-CW, |
| | Materiałów budowlanych | Irena |
| | Budownictwo | Budimex, Exbud, Mostostal-Exp |
| | Elektromaszynowy | Kable, Rafako, Tonsil |
| FINANSE | Banki | Amerbank, BIG, BPH, BRE, BŚK, Kredyt Bank PBI, WBK |
| | Ubezpieczenia | Warta |
| USŁUGI | Telekomunikacja | Elektrim |
| | Informatyka | Computerland, Optimus |

Źródło: <http://www.gpw.com.pl/gpw/klasyfikacja.html>

3.2.1 Makrosektor PRZEMYSŁ

Makrosektor Przemysł dostarcza największej liczby badanych spółek. Jest to uwarunkowane mnogością podsektorów przemysłu. Spółki akcyjne makrosektora Przemysł są jednymi z najdłużej funkcjonujących się na polskiej giełdzie. Duża ilość danych sugeruje więc, że można oczekiwać wiarygodnych wyników, opartych na analizie tego sektora.

3.2.1.1 Podsektor PRZEMYSŁ SPOŻYWCZY

W ramach podsektora wybrano do analizy następujące spółki: Agros, Animex, Okocim, Rolimpex, Sokołów, Żywiec (tabela 3.8). Jest to dosyć duża liczba. W tabeli 3.8 przedstawiono również ilość analizowanych danych dyskretnych dla poszczególnych spółek.

Tabela 3.8 Wybrane do analizy spółki sektora przemysłu spożywczego

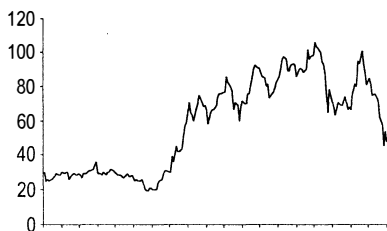
| Spółka | Liczba danych (tygodniowych) |
|----------|------------------------------|
| Agros | 190 |
| Animex | 187 |
| Okocim | 383 |
| Rolimpex | 243 |
| Sokołów | 305 |
| Żywiec | 403 |

Źródło: opracowanie własne.

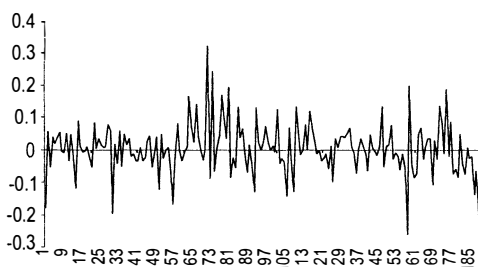
Widoczna jest znaczna różnica ilości danych: Animex – spółka z najmniejszą ilością danych, ma ich ponad dwa razy mniej niż Żywiec – spółka z największą ilością danych.

Dlatego też trudno jest porównać szeregi czasowe odpowiadające konkretnym spółkom. Zestawienie tych szeregów czasowych (dla niektórych spółek wraz z danymi oryginalnymi – bez wyliminowanego trendu) przedstawiają rysunki 3.7 – 3.14.

Rys. 3.7 Agros – dane oryginalne z trendem

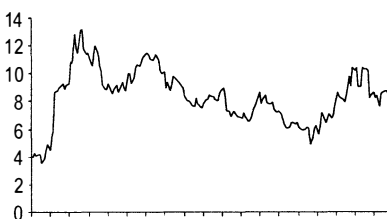


Źródło: opracowanie własne.

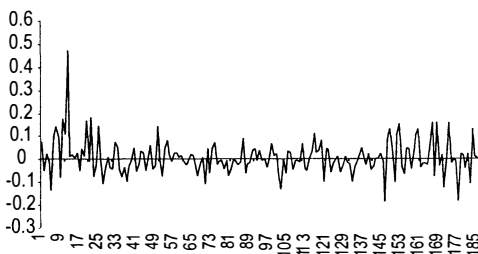
Rys. 3.8 Agros – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

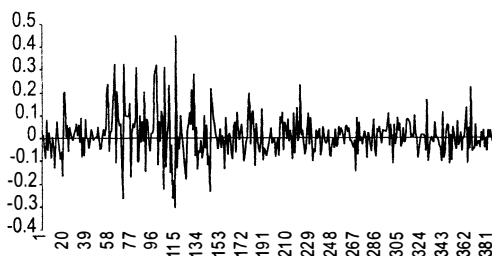
Rys. 3.9 Animex – dane oryginalne z trendem



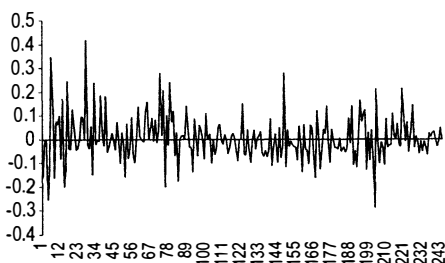
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.10 Animex – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

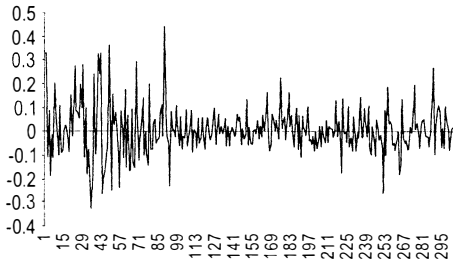
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.11 Okocim – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

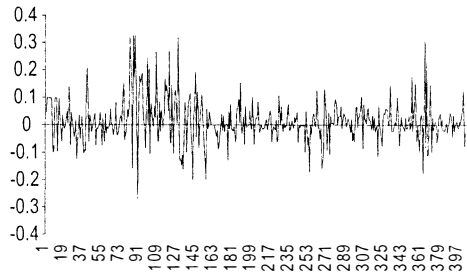
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.12 Rolimpex – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.13 Sokołów – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.14 Żywiec – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Powyższe szeregi czasowe są w zasadzie bardzo do siebie podobne, choć największe podobieństwo można zauważyć dla szeregów spółek Okocim i Żywiec – z pewnością ma na to wpływ największa liczba danych właśnie dla tych spółek. Nie opierając się na żadnych obliczeniach – tylko oceniając szeregi czasowe można spodziewać się, że przynajmniej niektóre zawierają co najmniej jeden pełny cykl. Przeprowadzając obliczenia dla $\tau = 7$ otrzymano wyniki zestawione w tabeli 3.9.

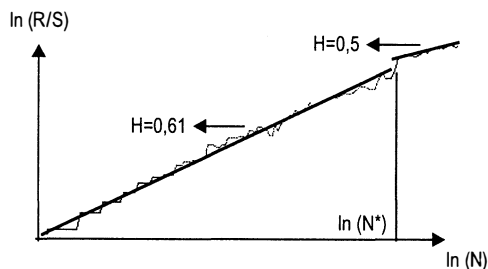
Tabela 3.9 Wykładnik Hursta dla wybranych spółek sektora przemysłu spożywczego

| Spółka | Wykładnik Hursta | Długość cyklu w miesiącach | Długość cyklu w latach | Liczba danych (tygodniowych) |
|-----------|------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------|
| Agros | 0,610 | 19,7 | 1,6 | 190 |
| Animex | 0,737 | 21,3 | 1,8 | 187 |
| Okocim | 0,637 | 43,6 | 3,6 | 383 |
| Rollimpex | 0,564 | 29,8 | 2,5 | 243 |
| Sokołów | 0,655 | 5,3 | 0,4 | 305 |
| Żywiec | 0,689 | 44,5 | 3,7 | 403 |

Źródło: opracowanie własne.

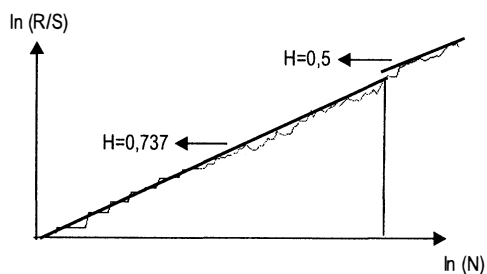
Większa ilość danych pozwala dokładniej określić długość cyklu. Zwykle, jak to widać w powyższej tabeli, owocuje to jego wydłużeniem. Wyjątkiem są jedynie Sokołów i Agros. Nie można jednak uznać tej zależności za regułę. Należy wziąć pod uwagę trudności w wyznaczeniu wykładnika Hursta. Graficzną prezentację otrzymanych wyników stanowią rysunki 3.15 – 3.20.

Rys. 3.15 Analiza R/S dla spółki Agros dla $\tau = 7$



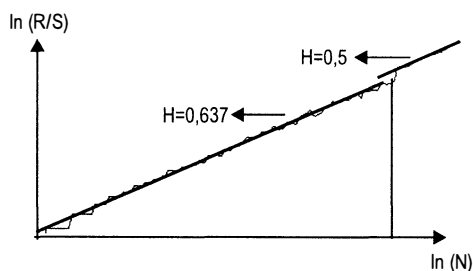
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.16 Analiza R/S dla spółki Animex dla $\tau = 7$



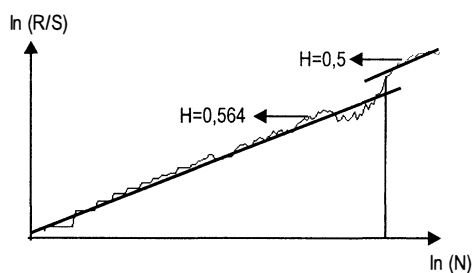
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.17 Analiza R/S dla spółki Okocim dla $\tau = 7$



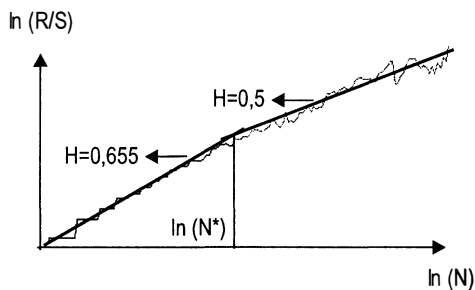
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.18 Analiza R/S dla spółki Rolimpex dla $\tau = 7$



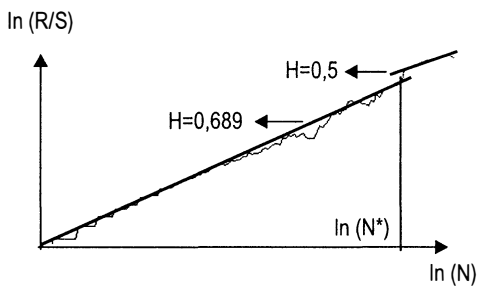
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.19 Analiza R/S dla spółki Sokołów dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.20 Analiza R/S dla spółki Żywiec dla $\tau = 7$

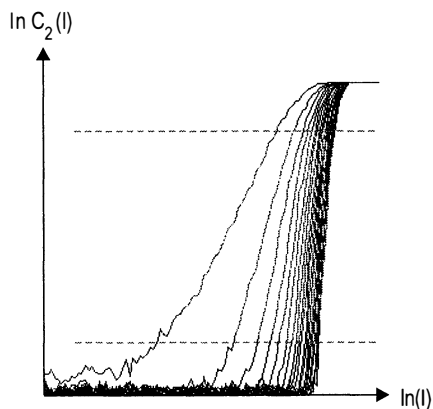


Źródło: opracowanie własne.

Wykładnik Hursta nie zawsze jest łatwy do wyznaczenia. Najtrudniejszym do wyznaczenia był wykładnik Hursta dla szeregu czasowego odchyłek notowań cen akcji Okocimia. Krzywa jest dosyć gładka; brak charakterystycznego skoku, załamania wykresu. Wartość punktu N^* , w którym krzywa $\ln(R/S)$ zmienia nachylenie (za tym punktem dla sygnałów o charakterze stochastycznym $H = 0.5$ (Peters E., 1997 r), okazała się niezmiernie trudna do oszacowania przy pomocy używanego w tym celu oprogramowania.

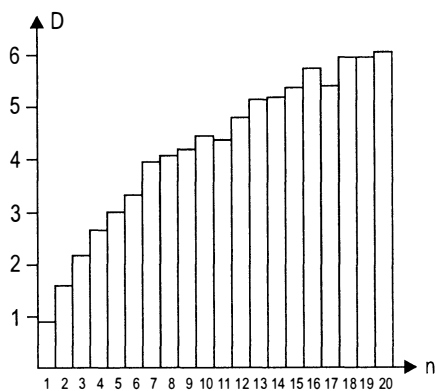
W celu wyznaczenia wymiaru fraktalnego określono wymiary korelacyjne dla wymiarów zanurzenia od 1 do 20. Wymiar fraktalny jest pewną liczbą D , do której zbiegają wszystkie wymiary korelacyjne dla danego szeregu czasowego. Rysunki 3.21, 3.23, 3.25, 3.27, 3.29, 3.31 zawierają wykresy układów krzywych $\ln C_2(l)$ w funkcji $\ln(l)$, natomiast rysunki 3.22, 3.24, 3.26, 3.28, 3.30, 3.32 to ilustracja wyznaczonych na ich podstawie zmian wymiaru korelacyjnego w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek badanego podsektora, zebranych następnie w tabeli 3.10, którą ilustruje rysunek 3.33.

Rys. 3.21 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Agros dla $\tau = 7$



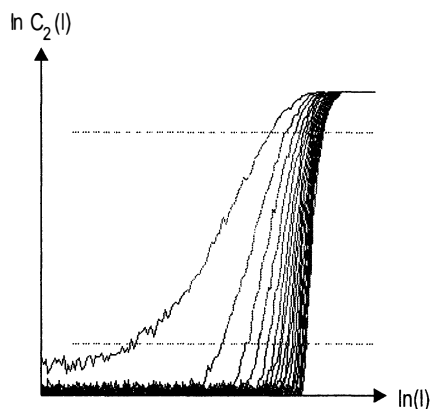
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.22 Wymiary korelacyjne
dla spółki Agros dla $\tau = 7$



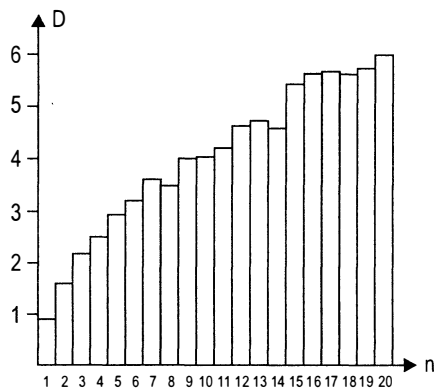
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.23 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Animex dla $\tau = 7$



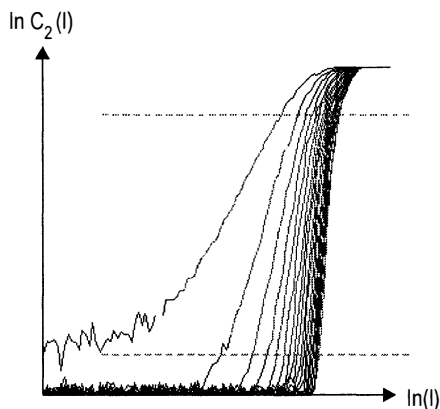
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.24 Wymiary korelacyjne dla spółki Animex dla $\tau = 7$



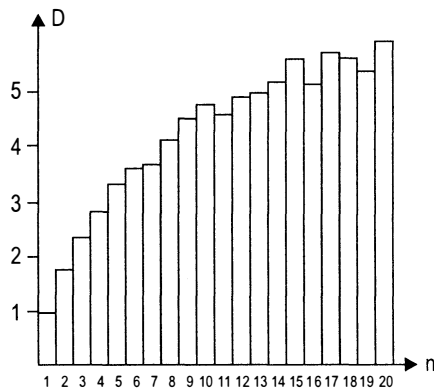
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.25 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Okocim dla $\tau = 7$



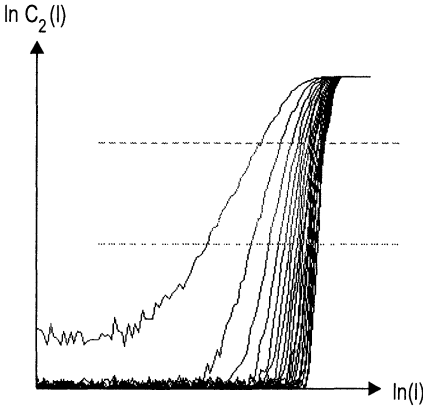
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.26 Wymiary korelacyjne dla spółki Okocim dla $\tau = 7$



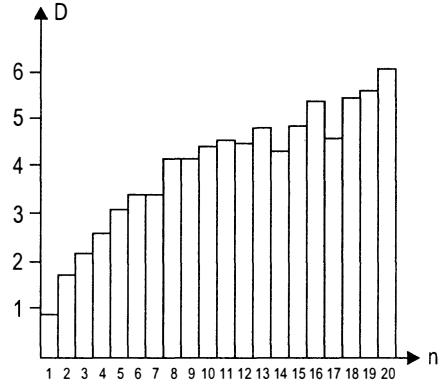
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.27 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Rolimpex dla $\tau = 7$



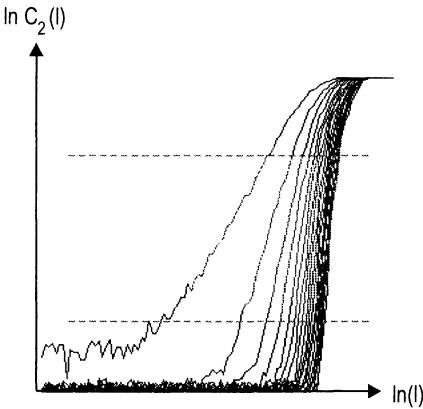
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.28 Wymiary korelacyjne dla spółki Rolimpex dla $\tau = 7$



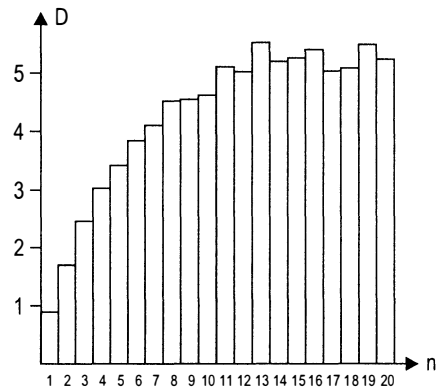
Źródło: opracowanie własne.

Rys.3.29 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Sokołów dla $\tau = 7$



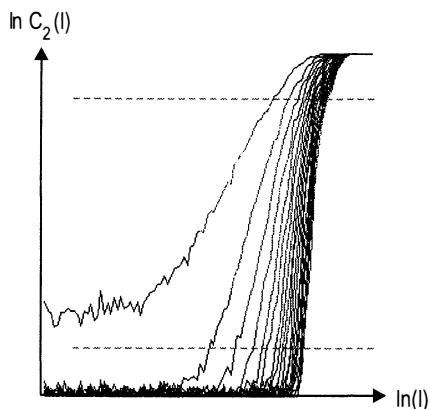
Źródło: opracowanie własne.

Rys.3.30 Wymiary korelacyjne dla spółki Sokołów dla $\tau = 7$



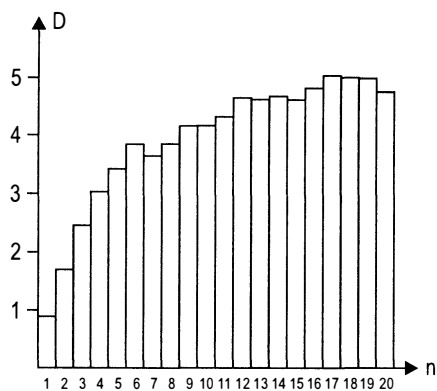
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.31 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Żywiec dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.32 Wymiary korelacyjne dla spółki Żywiec dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

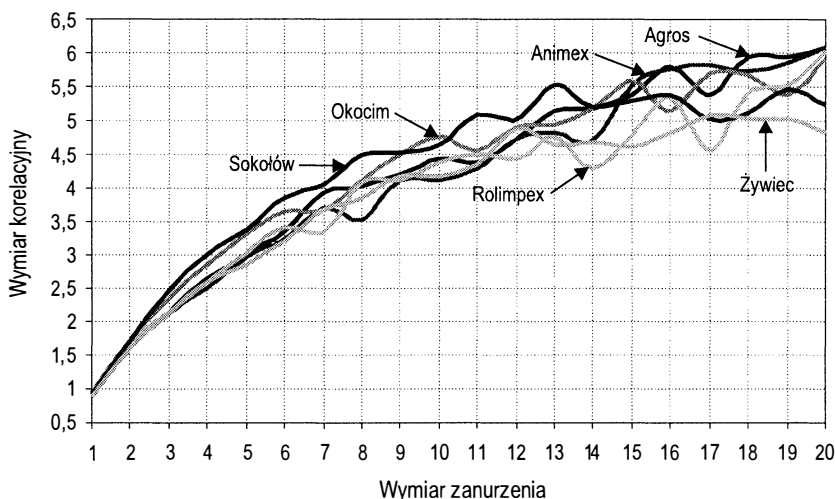
Tabela 3.10 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla wybranych spółek sektora spożywczego dla $\tau = 7$

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Agros | 0,913 | 1,6 | 2,16 | 2,66 | 3 | 3,35 | 3,95 | 4,04 | 4,21 | 4,45 |
| Animex | 0,92 | 1,6 | 2,13 | 2,51 | 2,96 | 3,25 | 3,7 | 3,54 | 4,11 | 4,12 |
| Okocim | 0,935 | 1,72 | 2,36 | 2,84 | 3,32 | 3,64 | 3,67 | 4,11 | 4,49 | 4,77 |
| Rolimpex | 0,891 | 1,68 | 2,14 | 2,58 | 3,03 | 3,41 | 3,35 | 4,1 | 4,11 | 4,38 |
| Sokołów | 0,902 | 1,71 | 2,46 | 2,99 | 3,39 | 3,85 | 4,07 | 4,51 | 4,54 | 4,64 |
| Żywiec | 0,883 | 1,58 | 2,12 | 2,6 | 2,84 | 3,22 | 3,68 | 3,85 | 4,19 | 4,19 |

| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Agros | 4,38 | 4,75 | 5,16 | 5,18 | 5,37 | 5,78 | 5,39 | 5,93 | 5,94 | 6,08 |
| Animex | 4,29 | 4,74 | 4,81 | 4,71 | 5,53 | 5,76 | 5,81 | 5,75 | 5,84 | 6,1 |
| Okocim | 4,56 | 4,91 | 4,94 | 5,18 | 5,59 | 5,16 | 5,7 | 5,67 | 5,38 | 5,92 |
| Rolimpex | 4,51 | 4,43 | 4,76 | 4,3 | 4,79 | 5,34 | 4,55 | 5,41 | 5,54 | 6,03 |
| Sokołów | 5,1 | 5,03 | 5,52 | 5,2 | 5,28 | 5,38 | 5,04 | 5,11 | 5,48 | 5,23 |
| Żywiec | 4,34 | 4,87 | 4,66 | 4,69 | 4,63 | 4,83 | 5,09 | 5,02 | 5,04 | 4,81 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys.3.33 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla wybranych spółek sektora spożywczego dla $\tau = 7$

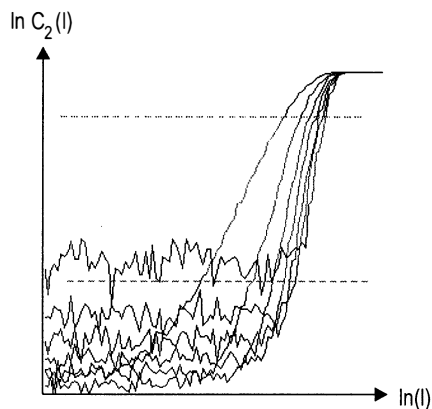


Bazując na powyższych obliczeniach i porównaniach, wymiar fraktalny można wyznaczyć jedynie dla Żywca i Sokołowa. Wyraźnie widoczne jest zdążanie wymiarów korelacyjnych wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia do pewnej charakterystycznej liczby. Liczba ta, będąca wymiarem fraktalnym, wynosi w przypadku Sokołowa około 5.5, a w przypadku Żywca zawiera się między 4.6 a 5.1. Szeregi czasowe spółek Agros, Animex i Okocim nie wykazują tendencji do stabilizacji wymiarów korelacyjnych wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia. Nie można więc mówić tu o wymiarze fraktalnym. Przyczyną takiego zachowania się danych może być, w przypadku pierwszych dwóch spółek, zbyt mała liczba danych (Agros i Animex cechuje najkrótszy szereg czasowy w całym sektorze przemysłu spożywczego), natomiast w przypadku Okocimia mamy do czynienia z bardzo długim cyklem. Ciekawą sytuację obserwujemy w przypadku spółki Rolimpex: mimo małej liczby danych (243) i wykładnika Hursta równego 0.564, wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia stabilizują się na pewnym poziomie, który można byłoby określić jako około 5.5, jednak od wymiaru zanurzenia 18, wymiary korelacyjne znów zaczynają rosnąć.

Kolejnym krokiem analizy jest próba wyznaczenia wymiaru fraktalnego przy użyciu punktu N^* , określonego poprzez wyznaczenie wykładnika Hursta. Metoda ta pozwoli określić najbardziej odpowiednie dla każdego szeregu czasowego τ (poprzednio przyjęto $\tau = 7$ dla wszystkich szeregów czasowych). Jeżeli możliwe będzie wyznaczenie wymiaru fraktalnego, to będzie on dużo bardziej wiarygodny. Niestety, przy użyciu tej metody, często nie jesteśmy w stanie wykreślić odpowiedniej liczby krzywych $\ln C_2(l)$ w funkcji $\ln(l)$, co sprowadza obliczenia do zbyt małej liczby wymiarów korelacyjnych, aby wyznaczyć wymiar fraktalny. Rysunki 3.34 – 3.45 i tabele 3.11 – 3.12 stanowią zestawienie otrzymanych wartości τ , jak też wymiarów korelacyjnych i innych pomocniczych danych (spodziewany wymiar fraktalny, punkt cyklu i liczba danych). W przypadku szeregów czasowych spółek Agros, Animex i Sokołów, krzywe $\ln C_2(l)$ w funkcji $\ln(l)$, wyznaczono przy użyciu innej

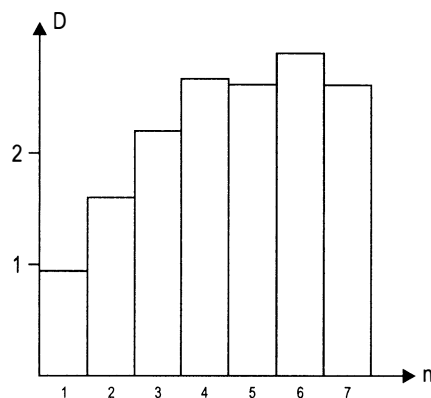
metody (fast 200 punktów) niż w przypadku pozostałych szeregów (normal 70 punktów). Dlatego też wykresy krzywych są mniej gładkie. Nie powoduje to jednak zmniejszenia dokładności obliczeń.

Rys. 3.34 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Agros dla $\tau = 196$



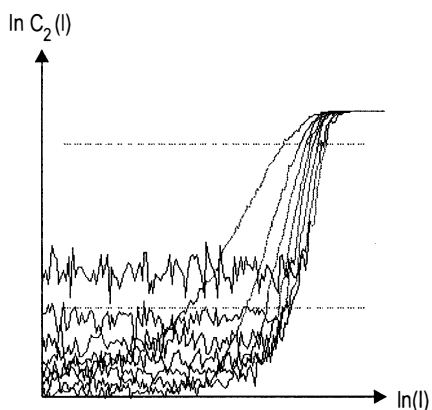
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.35 Wymiary korelacyjne dla spółki Agros dla $\tau = 196$



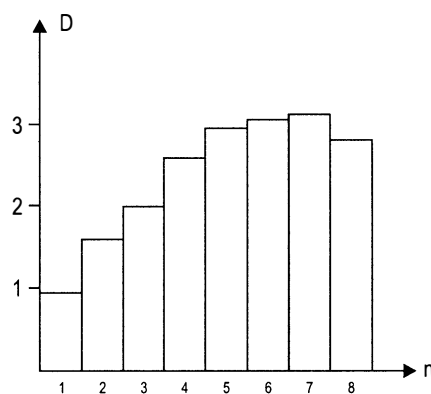
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.36 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Animex dla $\tau = 168$



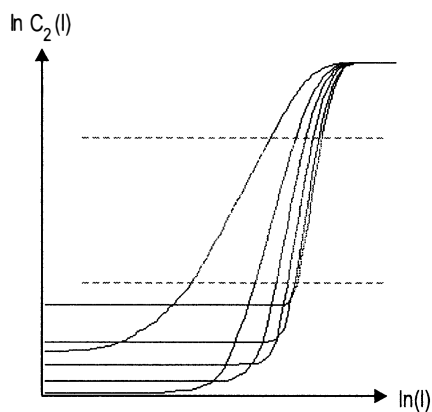
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.37 Wymiary korelacyjne dla spółki Animex dla $\tau = 168$



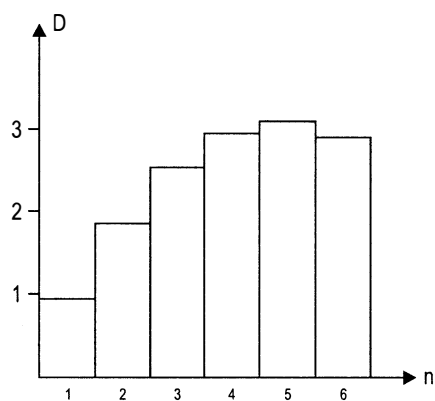
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.38 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Okocim dla $\tau = 441$



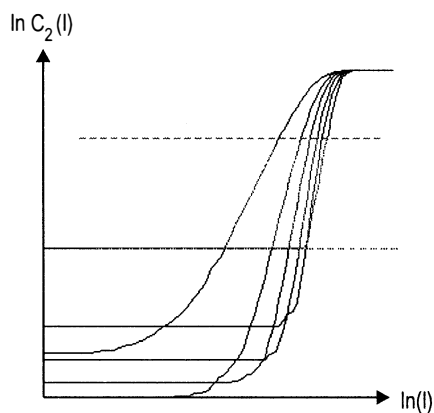
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.39 Wymiary korelacyjne
dla spółki Okocim dla $\tau = 441$



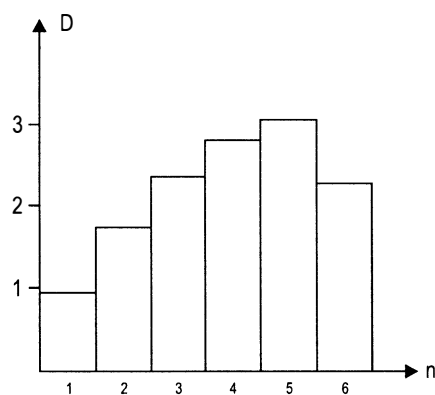
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.40 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Rolimpex dla $\tau = 315$



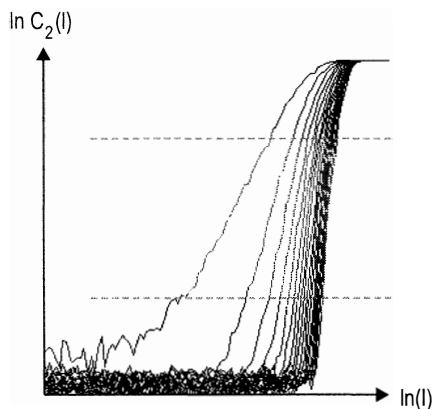
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.41 Wymiary korelacyjne
dla spółki Rolimpex dla $\tau = 315$



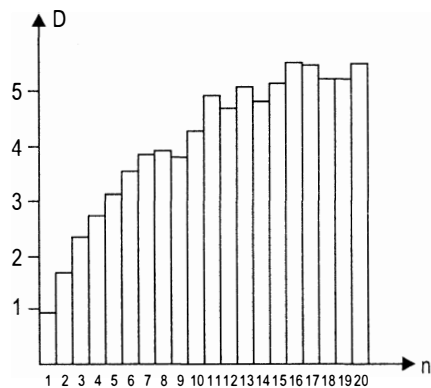
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.42 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Sokołów dla $\tau = 35$



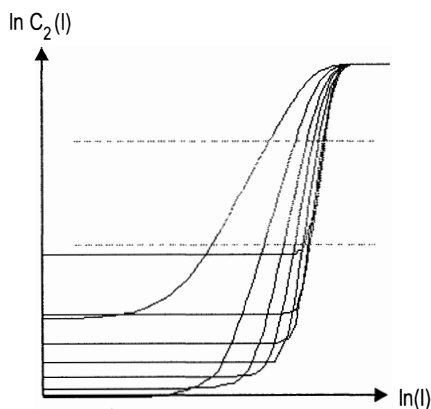
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.43 Wymiary korelacyjne dla spółki Sokołów dla $\tau = 35$



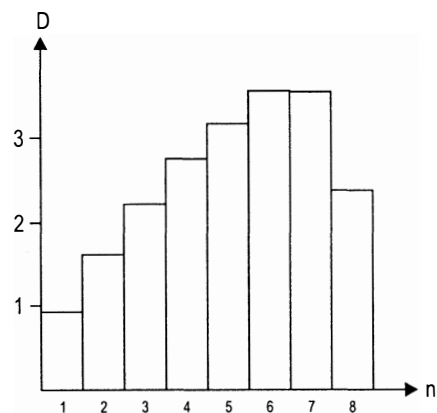
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.44 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Żywiec dla $\tau = 336$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.45 Wymiary korelacyjne dla spółki Żywiec dla $\tau = 336$



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.11 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla wybranych spółek sektora spożywczego dla τ wg tabeli 3.12

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Agros | 0,946 | 1,58 | 2,18 | 2,59 | 2,57 | 2,82 | 2,55 | | | |
| Animex | 0,951 | 1,63 | 2,05 | 2,62 | 3,01 | 3,09 | 3,17 | 2,28 | | |
| Okocim | 0,938 | 1,83 | 2,49 | 2,92 | 3,08 | 2,88 | | | | |
| Rolimpex | 0,932 | 1,76 | 2,37 | 2,83 | 3,07 | 2,3 | | | | |
| Sokołów | 0,914 | 1,7 | 2,36 | 2,76 | 3,14 | 3,55 | 3,85 | 3,94 | 3,81 | 4,32 |
| Żywiec | 0,897 | 1,61 | 2,22 | 2,74 | 3,15 | 3,55 | 3,54 | 2,38 | | |

| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----------|-----|------|------|-----|------|------|------|-----|------|------|
| Agros | | | | | | | | | | |
| Animex | | | | | | | | | | |
| Okocim | | | | | | | | | | |
| Rolimpex | | | | | | | | | | |
| Sokołów | 4,9 | 4,69 | 5,12 | 4,8 | 5,19 | 5,53 | 5,49 | 5,2 | 5,24 | 5,52 |
| Żywiec | | | | | | | | | | |

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.12 Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora przemysłu spożywczego

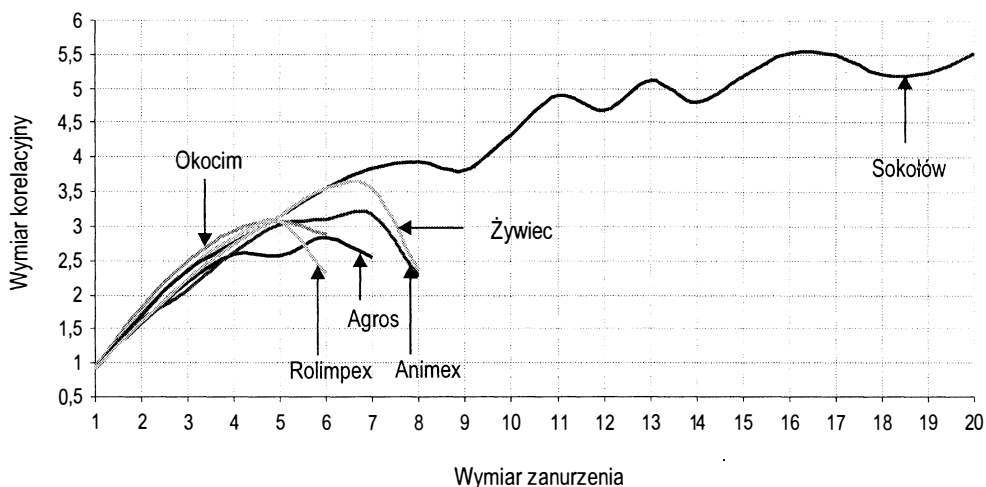
| Nazwa | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny | τ (w dniach) | Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|----------|------------------|-----------------------------|-------------------|------------------------------|----------------------------|------------------|
| Agros | 3 | 2.5 – 2.9 | 196 | 190 | 86 | 0,610 |
| Animex | 4 | 3.1 – 3.3 | 168 | 187 | 93 | 0,737 |
| Okocim | 3 | 2.8 – 3.1 | 441 | 383 | 190 | 0,637 |
| Rolimpex | 3 | 2.3 – 3.1 | 315 | 243 | 130 | 0,564 |
| Sokołów | 6 | 4.6 – 5.5 | 35 | 305 | 23 | 0,655 |
| Żywiec | 4 | 3.5 – 3.6 | 336 | 403 | 194 | 0,689 |

Źródło: opracowanie własne.

Zgodnie z wcześniejszymi przypuszczeniami, jedynie szereg czasowy Sokołowa pozwolił wyznaczyć 20 krzywych, $\ln C_2(l)$ w funkcji $\ln(l)$. Pozostałe szeregi czasowe pozwoliły na wyznaczenie krzywych, jedynie do co najwyżej 8 wymiarów zanurzenia. Spowodowane jest to dużym przesunięciem czasowym dla tych szeregów. Nie można jednoznacznie stwierdzić, że jest to liczba wystarczająca do wyznaczenia wymiaru fraktalnego, niemniej jednak zawiera się on (jeśli istnieje) w przedziale: 2.3 – 3.1 dla spółek Agros, Okocim, Rolimpex; 3.1 – 3.6 dla Animexu i Żywca. Najwyższy wymiar fraktalny wyznaczono dla szeregu czasowego spółki Sokołów – między 4.6 a 5.5. W porównaniu do wyników otrzymanych dla $\tau = 7$ wymiar fraktalny jest taki sam tylko dla Sokołowa. Dla pozostałych spółek nie można mówić o porównywaniu wymiaru fraktalnego, gdyż w przypadku

$\tau = 7$, nie można go było wykryć. Wyjątek stanowi szereg czasowy Żywca – tu wymiar fraktalny dla $\tau = 7$ wyniósł 4.6 – 5.1, lecz dla $\tau = 48$ już jedynie około 3.5 – 3.6. Ogólnie można powiedzieć, że dla sektora przemysłu spożywczego charakterystyczny jest wymiar fraktalny od 2.5 do 3.5 gdy przesunięcie czasowe jest wyznaczane przy wykorzystaniu punktu N^* otrzymanego przy wykreślaniu wykładnika Hursta.

Rys. 3.46 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu spożywczego



Źródło: opracowanie własne.

3.2.1.2 Podsektor PRZEMYSŁ LEKKI

Dla powyższego podsektora zbadano następujące spółki giełdowe: Próchnik oraz Vistula. Jest to dosyć mała liczba. Z tego względu twierdzenie o charakterystycznym wymiarze fraktalnym dla tego sektora nie może być wiarygodne – nawet zgodne wyniki dla szeregów czasowych powyższych spółek akcyjnych nie mogą świadczyć o istnieniu jakiegokolwiek reguły, mogą jedynie sygnalizować możliwość istnienia takiego związku. Również całkiem różne wymiary fraktalne, jak też niemożność ich wyznaczenia, nie mogą być podstawą do twierdzenia, że sektor przemysłu lekkiego nie jest charakteryzowany przez pewien z góry określony wymiar fraktalny, bądź też specyficzny wąski zakres przyjmowanych wymiarów fraktalnych.

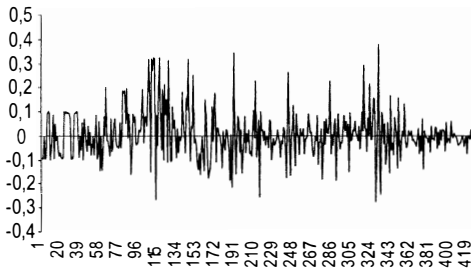
Tabela 3.13 Ilość danych dla spółek sektora przemysłu lekkiego

| Spółka | Liczba danych (tygodniowych) |
|----------|------------------------------|
| Próchnik | 426 |
| Vistula | 298 |

Źródło: opracowanie własne.

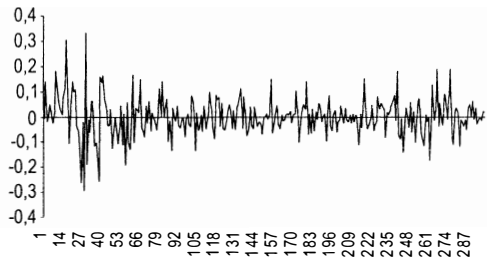
Różnica danych w szeregach czasowych tych dwóch firm sięga 128 punktów. Jest to stosunkowo duża liczba. Jednak w zależności od specyfiki danych uzyskane wyniki mogą okazać się bardzo wiarygodne a nawet podobne. Tygodniowe ($\tau = 7$) szeregi czasowe, po wyeliminowaniu trendu, dla spółek Próchnik i Vistula przedstawiają rysunki 3.47 i 3.48, graficznie wyznaczony wykładnik Hursta widoczny jest na rysunkach 3.49-3.50, natomiast tabela 3.14 stanowi zestawienie otrzymanych wyników:

Rys. 3.47 Próchnik – szereg czasowy przyrostów dla $\tau = 7$



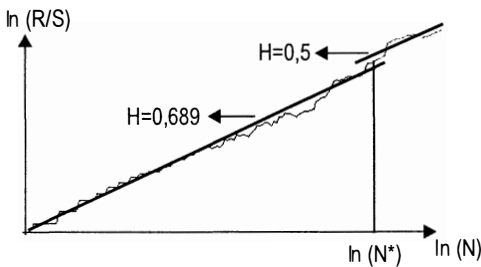
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.48 Vistula – szereg czasowy przyrostów dla $\tau = 7$



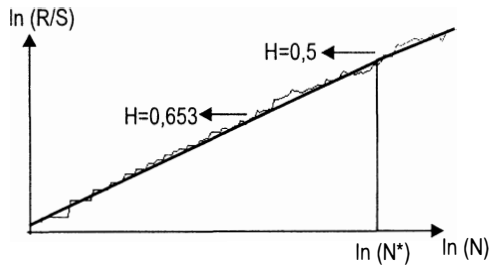
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.49 Analiza R/S dla spółki Próchnik dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.50 Analiza R/S dla spółki Vistula dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

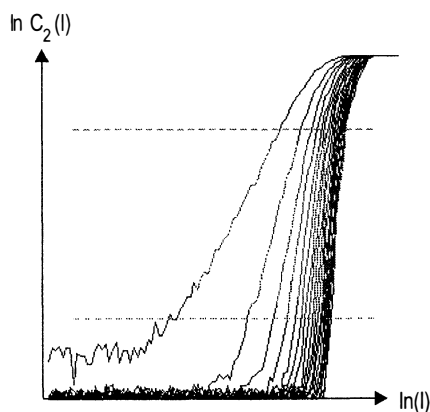
Tabela 3.14 Wykładnik Hursta dla spółek sektora przemysłu lekkiego

| Spółka | Wykładnik Hursta | Długość cyklu w miesiącach | Długość cyklu w latach | Liczba danych (tygodniowych) |
|----------|------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------|
| Próchnik | 0,689 | 42,9 | 3,6 | 426 |
| Vistula | 0,653 | 28,2 | 2,35 | 298 |

Źródło: opracowanie własne.

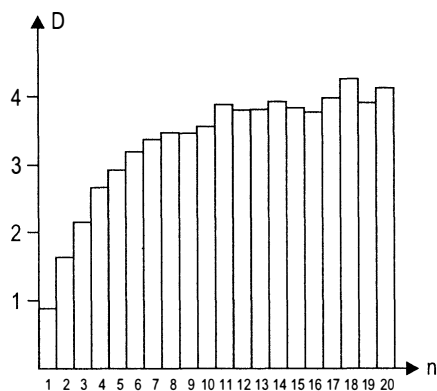
Obliczenia wskazują, że szeregom czasowym o wyższym współczynniku Hursta towarzyszy dłuższy cykl. Jednak dysponujemy zbyt małą liczbą szeregów odpowiadających notowaniom cen akcji spółek sektora przemysłu lekkiego, by wniosek ten uznać za regułę. Tymczasem obliczenia wykonane dla przemysłu spożywczego nie wykazały identycznej tendencji wzrostowej cyklu w zależności od współczynnika Hursta. Zatem takie zjawisko można by uznać za charakterystyczne tylko dla spółek sektora przemysłu lekkiego, gdyby poparte było identycznymi wynikami dla jeszcze co najmniej kilku spółek giełdowych. Przedstawione dane zachowały tę samą cechę, co szeregi czasowe spółek sektora przemysłu spożywczego. Dokładność wyznaczonego cyklu rośnie wraz ze wzrostem ilości danych którymi dysponujemy. Ze względu na charakter danych (rys. 41, 42), a co za tym idzie również krzywych analizy R/S (bardzo gładkie, szczególnie dla Vistuli, bez charakterystycznego załamania przy punkcie zmiany wartości współczynnika kierunkowego krzywej), wykładnik Hursta był trudny do wyznaczenia i może odbiegać od rzeczywistej wartości. W przypadku spółki Próchnik, ze względu na większą liczbę danych oraz, precyzyjniej niż dla spółki Vistula, wyznaczony wykładnik Hursta (a więc także cykl), można spodziewać się, łatwo wyznaczalnego wymiaru fraktalnego. Rysunki 3.51 – 3.54 i tabela 3.15 przedstawiają wyniki analizy wymiarów korelacyjnych dla $\tau = 7$.

Rys. 3.51 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Próchnik dla $\tau = 7$

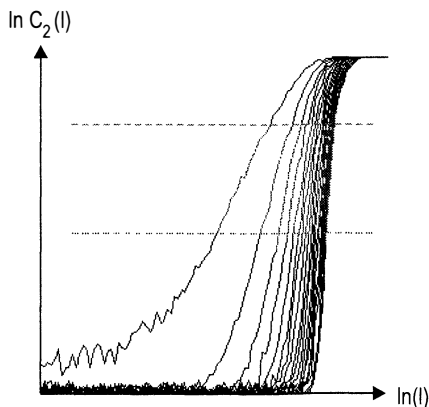


Źródło: opracowanie własne.

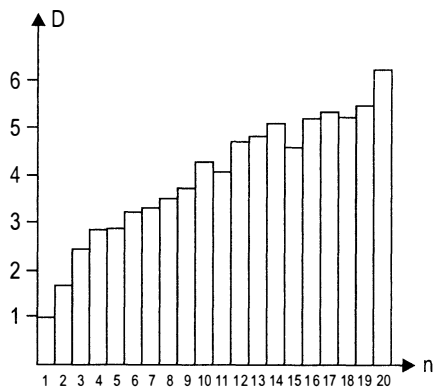
Rys. 3.52 Wymiary korelacyjne
dla spółki Próchnik dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.53 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Vistula dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.54 Wymiary korelacyjne dla spółki Vistula dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.15 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu lekkiego dla $\tau = 7$

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Próchnik | 0,889 | 1,63 | 2,18 | 2,69 | 2,92 | 3,18 | 3,38 | 3,46 | 3,46 | 3,56 |
| Vistula | 0,983 | 1,7 | 2,45 | 2,83 | 2,9 | 3,19 | 3,29 | 3,51 | 3,71 | 4,28 |

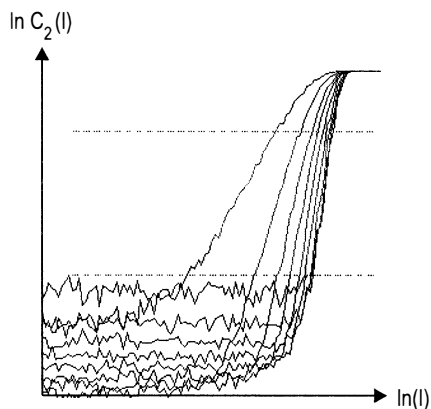
| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| Próchnik | 3,86 | 3,8 | 3,8 | 3,92 | 3,82 | 3,79 | 3,98 | 4,26 | 3,91 | 4,13 |
| Vistula | 4,05 | 4,72 | 4,8 | 5,05 | 4,56 | 5,21 | 5,25 | 5,22 | 5,48 | 6,26 |

Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane wyniki stanowią potwierdzenie wcześniejszych przypuszczeń – analiza fraktalna szeregu czasowego notowań spółki Próchnik pozwoliła wykryć stabilny wymiar fraktalny wynoszący około 4 (między 3.5 a 4.2). Wynik ten można uznać za zadawalający – już od siódmego wymiaru zanurzenia, wymiar korelacyjny stabilizuje się, przestaje gwałtownie rosnąć i zbiega do liczby 4 (ale nie jest jej równy, co wskazuje na istnienie chaosu). Natomiast w przypadku spółki Vistula obserwujemy stabilizację wymiarów korelacyjnych na poziomie między 4.5 a 5.5 dla wymiarów zanurzenia 12 – 18, po czym następuje ponowny, dosyć gwałtowny wzrost ich wartości. Nie można zatem jednoznacznie określić wymiaru fraktalnego dla tego szeregu czasowego. Może to być związane z niewystarczającą do zastosowania analizy fraktalnej liczbą danych (mniej o 128 tygodni niż w przypadku danych Próchnika), bądź też świadczy o braku takiego wymiaru. Istotne jest sprawdzenie na ile wymiar fraktalny, wyznaczony przy przesunięciu czasowym $\tau \neq 7$ i optymalnym dla danego szeregu czasowego, odbiega od otrzymanych powyżej wartości. Wyniki tych dzia-

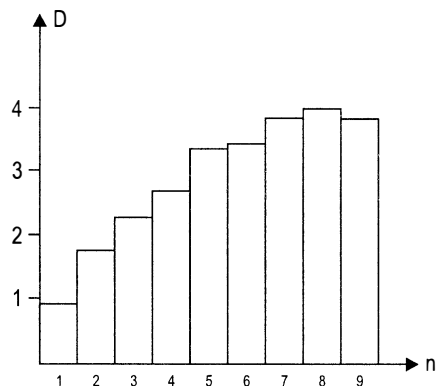
łań dla obu spółek giełdowych przedstawiono na rysunkach 3.54 – 3.58, po czym zestawiono w tabelach 3.16 i 3.17.

Rys. 3.55 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Próchnik dla $\tau = 322$



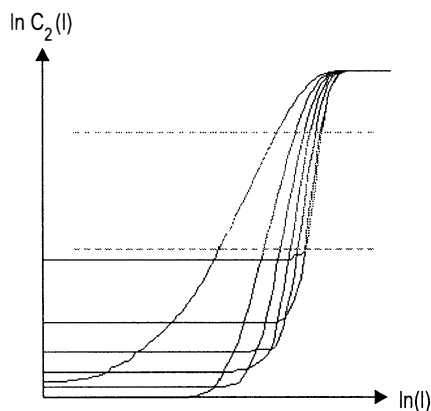
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.55a Wymiary korelacyjne dla spółki Próchnik dla $\tau = 322$



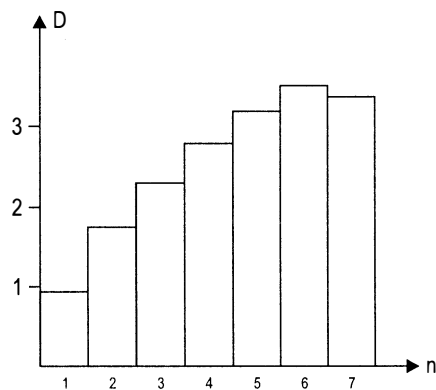
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.56 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Vistula dla $\tau = 287$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.57 Wymiary korelacyjne dla spółki Vistula dla $\tau = 287$



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.16 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu lekkiego dla τ wg tab. 3.17

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Próchnik | 0,934 | 1,76 | 2,3 | 2,27 | 3,38 | 3,42 | 3,82 | 4,02 | 3,85 |
| Vistula | 0,947 | 1,73 | 2,29 | 2,77 | 3,15 | 3,46 | 3,37 | x | x |

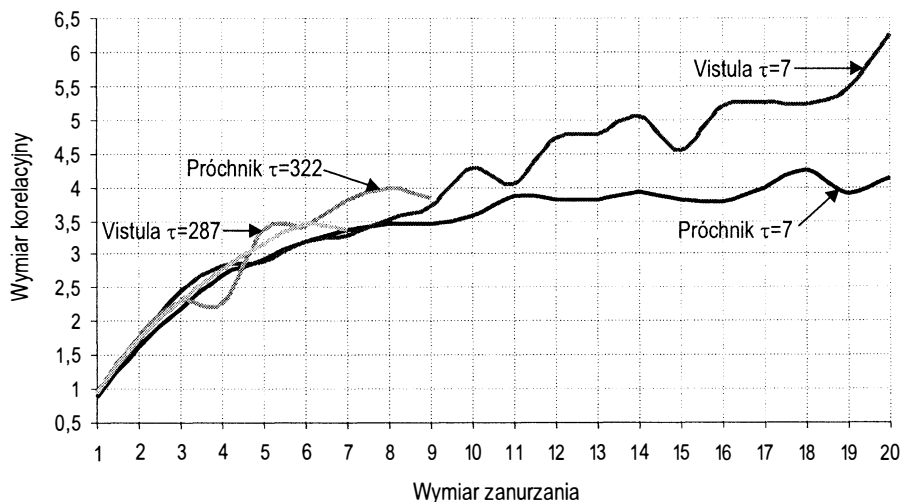
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.17 Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora przemysłu lekkiego

| Nazwa | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny | τ (w dniach) | Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|----------|------------------|-----------------------------|-------------------|------------------------------|----------------------------|------------------|
| Próchnik | 4 | 3.4 – 4.1 | 322 | 426 | 187 | 0,689 |
| Vistula | 4 | 3.1 – 3.5 | 287 | 298 | 123 | 0,653 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.58 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu lekkiego



Źródło: opracowanie własne.

W przypadku analizowanych danych można było wyznaczyć jedynie 9 krzywych $\ln C_2(l)$ dla szeregu czasowego notowań cen akcji spółki Próchnik oraz 7 w przypadku spółki Vistula. Pociąga to za sobą niemożność wyznaczenia większej liczby wymiarów korelacyjnych niż dziewięciu w pierwszym wypadku i siedmiu w drugim. Kiedy spodziewamy się trzech lub czterech zmiennych, ilość ta w zupełności wystarcza (wyznaczana jest z zależno-

ści $2 * \text{liczba zmiennych} + 1$) i tak też jest w tym przypadku. Czy jednak na podstawie obliczonych wymiarów korelacyjnych można określić wymiar fraktalny? Jest to tym trudniejsze, im mniej krzywych $\ln C_2(l)$, gdyż mniejsza ich ilość (czasami nawet mniejsza od wymaganej przedstawioną powyżej zależnością) powoduje brak wyraźnej stabilizacji wartości kolejnych wymiarów korelacyjnych, czyli innymi słowy, powoduje trudności w wyznaczeniu wymiaru fraktalnego. Dzieje się tak, ponieważ dla niskich wymiarów zanurzenia wymiar korelacyjny jest bliski właśnie danemu wymiarowi zanurzenia. Z tej przyczyny obserwujemy gwałtowny wzrost wartości wymiaru korelacyjnego wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia. O stabilizacji i zdążaniu do pewnej liczby D , mówić można dopiero od około 4 wymiaru zanurzenia, dlatego też dysponując jedynie 6 krzywymi $\ln C_2(l)$, wymiar fraktalny jest niekiedy niezmiernie trudno określić. Można podać jedynie jego przybliżoną wartość (zakres) zwykle obarczoną dużym błędem.

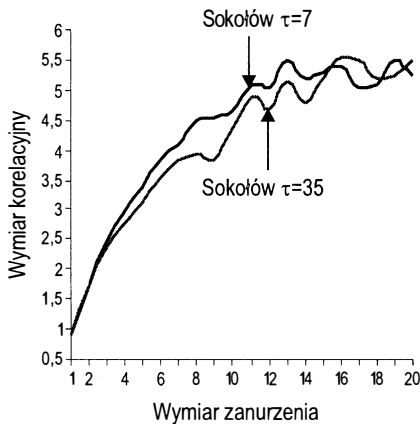
Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można zaproponować metodę zwiększania wiarygodności otrzymanego wymiaru fraktalnego dla dużych przesunięć czasowych τ , powodujących zmniejszenie ilości możliwych do wykreślenia krzywych $\ln C_2(l)$. Metoda ta ma sens zastosowania głównie w przypadku dysponowania niewielką liczbą danych (krótkimi szeregami czasowymi). Dla długich szeregów czasowych (na przykład dane giełdowe z kilkunastu – kilkudziesięciu lat) zwiększanie τ nie powoduje utraty danych a jedynie odpowiednio, pożądanie rozwinięcie atraktora.

Wszelkie obliczenia prowadzono dla $\tau = 7$ i τ obliczonego przy pomocy punktu cyklu (wtedy były to różne wartości τ , zwykle dosyć wysokie). Wróćmy na chwilę do uzasadnienia wykonywania obliczeń, dla danych tygodniowych – tę wspólną dla wszystkich szeregów czasowych wartość przesunięcia czasowego wybrano ze względu na stosunkowo małą liczbę danych, a także dlatego, iż na początku istnienia polskiej giełdy notowania odbywały się co tydzień. Jest jednak jeszcze jedna przyczyna: taka wartość (a nie niższa) gwarantuje wyeliminowanie pamięci krótkoterminowej. Mając to na względzie można sądzić, że przynajmniej początkowy przebieg wzrostu wymiaru korelacyjnego wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia będzie podobny przy obydwu obranych wartościach przesunięcia czasowego, dla danego szeregu odchyleń notowań cen akcji danej spółki giełdowej. Jeżeli wykres zmian wartości wymiaru korelacyjnego będzie istotnie różny (kształtem i wartościami) dla obu τ , oznaczać to będzie możliwość występowania pamięci krótkoterminowej mimo przyjęcia stosunkowo dużej wartości $\tau = 7$, lub też błędnie przeprowadzonej analizy R/S. W przypadku jakiegokolwiek podobieństwa (a szczególnie kształtów wykresów) można sądzić, że wymiar fraktalny – jeśli wymiary korelacyjne wykazują tendencję do stabilizacji i dążenia do pewnej liczby D – istnieje i można go poprawnie określić na podstawie otrzymanej liczby krzywych $\ln C_2(l)$, a co za tym idzie, na podstawie otrzymanych wartości wymiarów korelacyjnych, mimo ich niewielkiej ilości. O wymiarze fraktalnym będą decydowały wymiary korelacyjne od wymiaru zanurzenia równego liczbie zmiennych do wymiaru zanurzenia będącego podwojoną liczbą zmiennych danego układu.

Powyższą teorię ilustrują rysunki 3.59 i 3.60. Rysunek 3.59 przedstawia sytuację, gdy obie wartości τ są stosunkowo niskie (7 i 35 – spółka Sokołów). Wyraźnie widoczne jest podobieństwo kształtu rozkładu wartości wymiarów fraktalnych w obu przypadkach. Należy zwrócić uwagę, że dla początkowych wartości wymiarów zanurzenia wymiar korelacyjny zarówno dla wykresu $\tau = 7$ jak i $\tau = 35$ przyjmuje bardzo podobne wartości. Można się zatem spodziewać, że wymiar fraktalny rzeczywiście istnieje, wynosi około 5.5 i został poprawnie wyznaczony. Wart wyróżnienia jest fakt, że τ nie zmienia wartości wymiaru

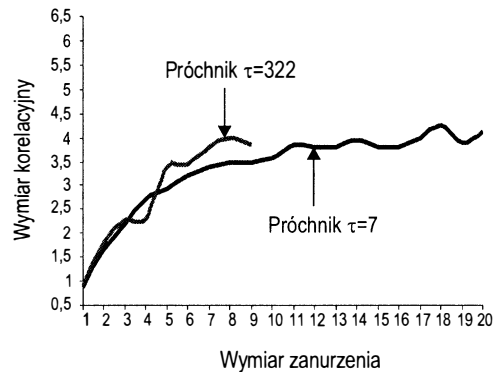
fraktalnego. Również w przypadku spółki Próchnik (rys. 3.60), dla której analiza przy $\tau = 7$ wykazała stabilny wymiar fraktalny równy około 3.9, można obserwować zauważoną wcześniej własność. Przy $\tau = 322$ widać duże podobieństwo kształtu wykresu, do kształtu analogicznego wykresu przy $\tau = 7$. Wartości początkowo rosną a przy piątym wymiarze zanurzenia zaczynają powoli zbiegać do liczby około 4 (wymiaru fraktalny jest liczbą zawierającą się w przedziale 3.5 – 4.1). Dlatego też, mimo braku większej niż 9 ilości wymiarów korelacyjnych (przy $\tau = 322$) można twierdzić, na podstawie sformułowanej poprzednio reguły, że wymiar fraktalny istnieje i wynosi około 3.5 – 3.9 dla obu wartości τ . Co więcej, świadczy to o poprawnie wykonanej analizie R/S jak też o dobrze dobranej wartości przesunięcia czasowego, eliminującego pamięć krótkoterminową.

Rys. 3.59 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Sokołów przy $\tau = 7$ i $\tau = 35$



Źródło: opracowanie własne.

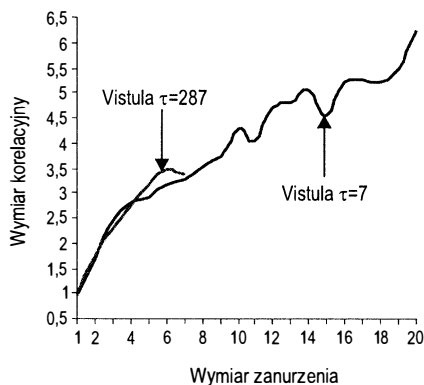
Rys. 3.60 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Próchnik przy $\tau = 7$ i $\tau = 322$



Źródło: opracowanie własne.

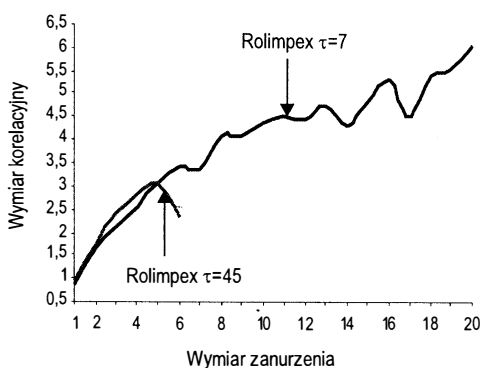
W przypadku spółki Vistula oba wykresy rosną w początkowej fazie, jednak dla $\tau = 7$ stabilizacja następuje znacznie później i jest bardzo krótkotrwała. Również dla $\tau = 287$ obserwujemy podobną sytuację – stabilizacja wymiaru korelacyjnego przebiega tylko na pewnym odcinku, następnie obserwujemy jego ponowny wzrost. Nie można więc wyznaczyć wymiaru fraktalnego dla żadnej z obranych wartości przesunięcia czasowego. Przypadek Rolimpexu wskazuje ogromne różnice kształtu i wartości wykresu, co sprowadza nas do twierdzenia o błędnie dobranym τ lub błędnej analizie R/S. Podsumowując – dla szeregow czasowych dla których już dla $\tau = 7$ można określić wymiar fraktalny, będzie to zwykle możliwe również dla wyższych wartości τ , co więcej, wymiar fraktalny dla dużych wartości przesunięć czasowych będzie zwykle bliski wymiarowi fraktalnemu dla τ mniejszych (w przypadku przeprowadzanych obliczeń dla $\tau = 7$), mimo niewielkiej ilości krzywych $\ln C_2(l)$.

Rys. 3.61 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Vistula przy $\tau = 7$ i $\tau = 287$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.62 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Rolimpex przy $\tau = 7$ i $\tau = 315$



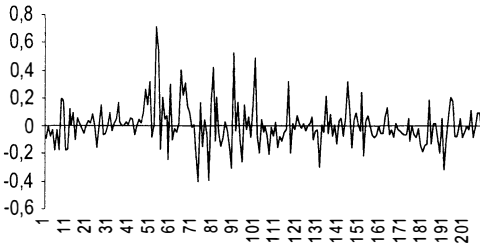
Źródło: opracowanie własne.

Dla całego sektora przemysłu lekkiego nie można zauważyć specyficznych tylko dla niego właściwości, takich jak na przykład pewien charakterystyczny wymiar fraktalny. Co prawda dla szeregu czasowego notowań cen akcji spółki Próchnik udało się go ustalić, lecz mniej satysfakcjonujące wyniki osiągnięto w przypadku Vistuli – spółki, która funkcjonuje na giełdzie znacznie krócej niż poprzednia. Jednakże współczynnik Hursta dla obu tych spółek okazał się różny od 0.5 (co jest wartością charakterystyczną dla sygnałów stochastycznych) i wyniósł odpowiednio 0.689 dla Próchnika i 0.653 dla Vistuli. Wyższa wartość tego współczynnika w przypadku Próchnika wskazuje, że inwestowanie w akcje tej spółki jest mniej ryzykowne. Fakt wykrycia wymiaru fraktalnego w postaci liczby ułamkowej, wskazuje także na to, że atraktor dla badanego szeregu czasowego jest atraktorem dziwnym, co sugeruje występowanie zjawiska chaosu deterministycznego.

3.2.1.3 Podsektor PRZEMYSŁ DRZEWNY

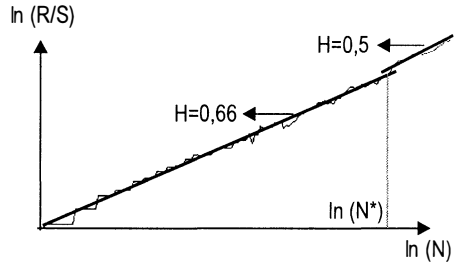
Jako reprezentanta tego sektora wybrano, do analizy fraktalnej, notowania cen akcji spółki Swarzędz, ze względu na największą liczbę danych spośród wszystkich spółek tego sektora, wymienionych na stronie głównej GPW. Liczba ta to 208 tygodni. W porównaniu do liczby danych Próchnika (426) jest to stosunkowo mało – ponad połowa mniej punktów w szeregu czasowym. Pamięając o tym, jak łatwo wyznaczony został wykładnik Hursta i wymiar fraktalny dla Próchnika – czyli spółki o największej ilości danych, można sądzić, że tu wyniki mogą okazać się mniej dokładne. 208 punktów może sugerować mniejszą precyzję w określaniu cyklu dla spółki Swarzędz.

Rys. 3.63 Swarzędz – szereg czasowy przyrostów dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.64 Analiza R/S dla spółki Swarzędz dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

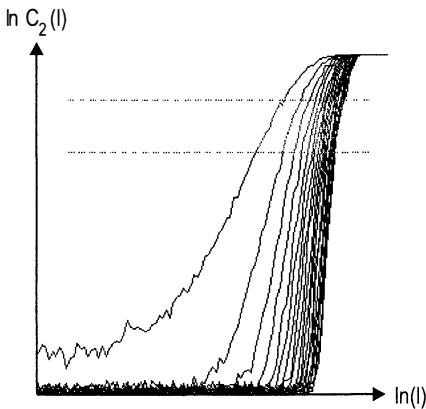
Tabela 3.18 Wykładnik Hursta dla Swarzędza – spółki sektora przemysłu drzewnego

| Wykładnik Hursta | Długość cyklu w miesiącach | Długość cyklu w latach | Liczba danych (tygodniowych) |
|------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------|
| 0.66 | 23.4 | 1.9 | 208 |

Źródło: opracowanie własne.

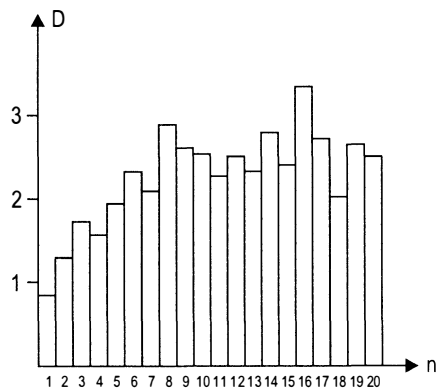
Wykładnik Hursta okazał się trudny do wyznaczenia – krzywa w analizie R/S była dosyć gładka, bez charakterystycznego załamania, co sprawiło, że odcinek o współczynniku kierunkowym 0.5 (charakterystycznym dla sygnałów stochastycznych) nie został wyznaczony dokładnie. Istnieje duże prawdopodobieństwo, że wynik przeprowadzonej analizy fraktalnej będzie obciążony błędem.

Rys. 3.65 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Swarzędz dla $\tau = 7$

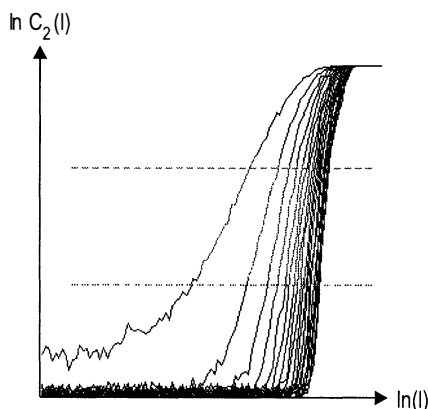


Źródło: opracowanie własne.

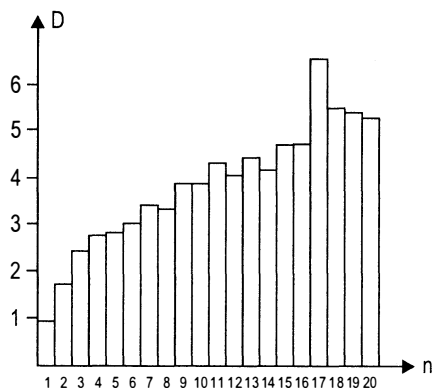
Ry. 3.66 Wymiary korelacyjne dla spółki Swarzędz dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.67 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Swarzędz dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.68 Wymiary korelacyjne dla spółki Swarzędz dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.19 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia spółki sektora przemysłu drzewnego dla $\tau = 7$

| Swarzędz | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| górnny | 0,84 | 1,28 | 1,71 | 1,56 | 1,94 | 2,31 | 2,09 | 2,87 | 2,61 | 2,54 |
| dolny | 0,957 | 1,73 | 2,43 | 2,75 | 2,83 | 3,02 | 3,39 | 3,34 | 3,84 | 3,89 |

| Swarzędz | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| górnny | 2,25 | 2,5 | 2,31 | 2,78 | 2,4 | 3,33 | 2,69 | 2,11 | 2,66 | 2,48 |
| dolny | 4,26 | 4,01 | 4,42 | 4,18 | 4,77 | 4,72 | 6,61 | 5,52 | 5,43 | 5,3 |

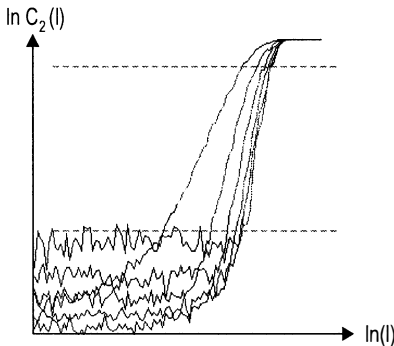
Źródło: opracowanie własne.

Charakterystyczną cechą dla tej spółki jest możliwość rozróżnienia dwóch fragmentów wykresu krzywych $\ln C_2(l)$, dla których uzyskuje się różne wyniki analizy fraktalnej. Obszar dolny, pokazany na rys.3.67 odpowiada przypadkowym zmianom wartości, za które odpowiedzialny jest szum. Za długookresowe zmiany badanych wartości odpowiada obszar przedstawiony na rys. 3.65. W związku z tym, dla dolnego obszaru nie można wyznaczyć wymiaru fraktalnego – wymiary korelacyjne nie zbiegają do pewnej, ustalonej wartości. Dla części górnej (powyżej obszaru uzależnionego od szumu), można zauważyć szybką, lecz dosyć chwiejną stabilizację wymiarów korelacyjnych. Od około szóstego wymiaru zanurzenia można mówić o wymiarze fraktalnym zawierającym się między 2.1 a 2.8. Podobnych wyników spodziewać się można przy $\tau \neq 7$. Ciekawym aspektem sprawy jest pojęcie szumu. W przypadku danych eksperymentalnych uzyskanych przy pomocy urządzeń pomiarowych, za szum można uznać błędy wynikające na przykład z zakłóceń powodowanych przez te urządzenia. Warto jednak zastanowić się co można uznać za szum w przypadku danych giełdowych. Żadne urządzenia pomiarowe nie mają tu wpływu na

notowania cen akcji, a co za tym idzie nie wpływają na postać szeregu czasowego. Jako jedyne źródło szumu można więc uznać sztuczne manipulowanie cenami akcji, co w przypadku początków działania polskiej giełdy miało z pewnością miejsce (jest to zresztą naturalne zjawisko na początku funkcjonowania każdej giełdy). Jeżeli jednak takie działanie powtarza się w czasie powoduje zakłócenie naturalnego cyklu dla danej spółki. Powstaje pytanie czy analiza fraktalna może wykazać opisane powyżej działania. Odpowiedź jest twierdząca – jako przykład podano szereg czasowy Swarzędza, w którym stwierdzono szum i dwa obszary na wykresie krzywych $\ln C_2(l)$. Pierwszy obszar – dla największych l – pozwala wykryć wymiar fraktalny, a więc wskazuje na istnienie chaosu deterministycznego, drugi obszar – dla mniejszych l – jest całkowicie przypadkowym, sztucznym szumem.

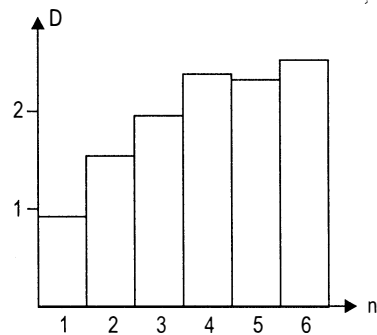
W przypadku wysokiego τ okazało się, że szum został wyeliminowany. Bardzo prawdopodobne jest twierdzenie, iż manipulacja cenami akcji odbywała się jedynie krótkoterminowo (najprawdopodobniej na początku funkcjonowania tej spółki na giełdzie) a obliczone na podstawie wzoru (2.40) przesunięcie czasowe wynoszące 238 dni sprowadza szum do niezwykle niskiego, praktycznie nieistotnego dla analizy poziomu. Zabrakło więc powodu by ponownie wyróżniać dwie strefy wyznaczania wymiaru fraktalnego.

Rys. 3.69 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Swarzędz dla $\tau = 238$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.70 Wymiary korelacyjne
dla spółki Swarzędz dla $\tau = 238$



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.20 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia
oraz inne dane dla spółki Swarzędz

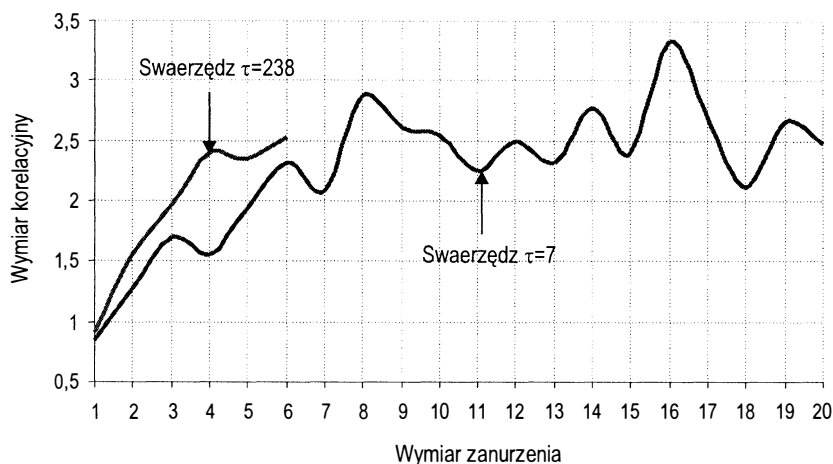
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny | τ (w dniach) |
|-------|------|------|------|------|------|------------------|-----------------------------|-------------------|
| 0,919 | 1,55 | 1,97 | 2,39 | 2,34 | 2,53 | 3 | 2,3 – 2,5 | 238 |

| Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|------------------------------|----------------------------|------------------|
| 208 | 102 | 0,66 |

Źródło: opracowanie własne.

Ponieważ wymiar fraktalny stabilizuje się w zakresie trzech ostatnich wymiarów korelacyjnych, można przypuszczać o błędzie w jego szacowaniu. Jednak jego wartość wynosząca około 2.5 zgadza się z poprzednimi obliczeniami, przeprowadzonymi dla $\tau = 7$. Stosując zdefiniowaną w poprzednim podrozdziale metodę można stwierdzić, czy i na ile ten wynik jest wiarygodny. Zestawienie otrzymanych wymiarów korelacyjnych w funkcji wymiaru zanurzenia dla $\tau = 7$ i $\tau = 238$ przedstawia rys.3.71.

Rys. 3.71. Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Swarzędz



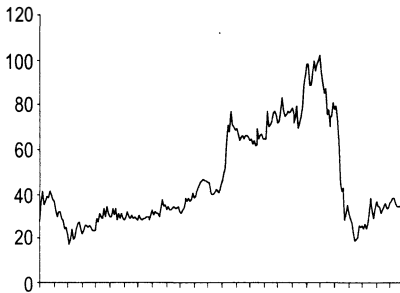
Źródło: opracowanie własne.

Widoczna jest dosyć duża, jak dla początkowych wymiarów zanurzenia, rozbieżność między wartościami wymiarów korelacyjnych dla $\tau = 7$ i $\tau = 238$. Jednak dokładne przeanalizowanie kształtów wykresu pozwala zauważyć ich ogromne podobieństwo. Przebieg wykresu dla $\tau = 238$ rośnie do czwartego wymiaru zanurzenia (dla $\tau = 7$ krzywa rośnie do 3 wymiaru zanurzenia) po czym przechodzi w stan stabilizacji. Dla szóstego wymiaru zanurzenia można zauważyć pewien wzrost wymiaru korelacyjnego, lecz porównując do wykresu dla $\tau = 7$, będzie to jedynie tymczasowe odchylenie nie mające wpływu na wynik analizy. Obie krzywe stabilizują się na podobnym poziomie wynoszącym około 2.5, zatem liczbę tę można uznać za wymiar fraktalny. Mimo iż analiza R/S była obciążona błędem, nie okazał się on istotny, aczkolwiek zawsze pozostanie wątpliwość, czy to nie ten błąd wygenerował chaos w badanym układzie trzech składowych.

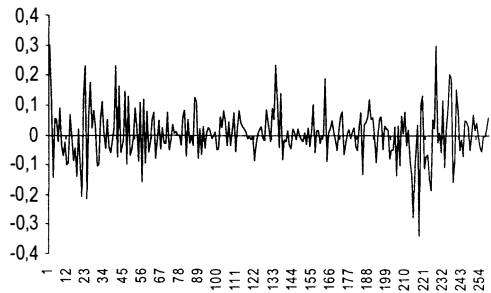
3.2.1.4 Podsektor PRZEMYSŁ CHEMICZNY

Do analizy fraktalnej wybrano dwie spółki sektora przemysłu chemicznego: Jelfa oraz Polifarb-CW. W przypadku Jelfy podano wykres zarówno danych oryginalnych jak i szeregu czasowego przyrostów siedmiodniowych (rys. 3.72 i 3.73).

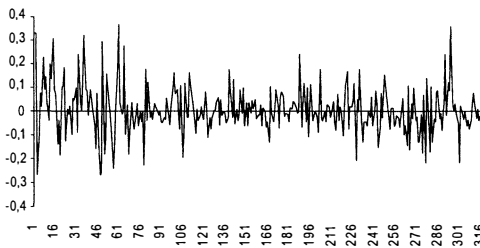
Rys. 3.72 Jelfa – dane oryginalne z trendem



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.73 Jelfa – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.74 Polifarb-CW – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

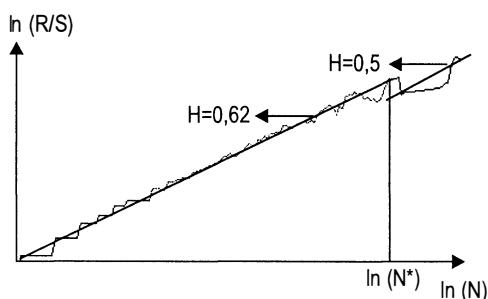
Już wzrokowe porównanie szeregów czasowych Jelfy i Polifarbu-CW pozwala stwierdzić duże ich podobieństwo. Odchylenia cen szeregu Jelfy mieszczą się w mniejszej skali wartości i szereg zawiera co prawda mniej danych, ale dla obu spółek można spodziewać się wykrycia naturalnego cyklu w trakcie analizy R/S.

Tabela 3.21 Ilość danych dla spółek sektora przemysłu chemicznego

| Spółka | Liczba danych (tygodniowych) |
|-------------|------------------------------|
| Jelfa | 258 |
| Polifarb-CW | 317 |

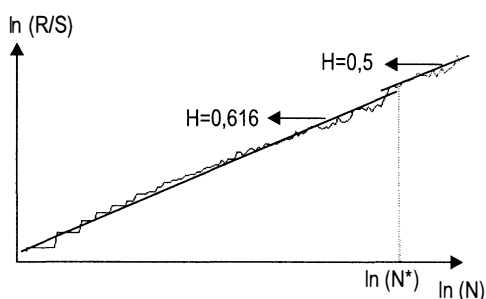
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.75 Analiza R/S dla spółki Jelfa dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.76 Analiza R/S dla spółki Polifarb-CW dla $\tau = 7$



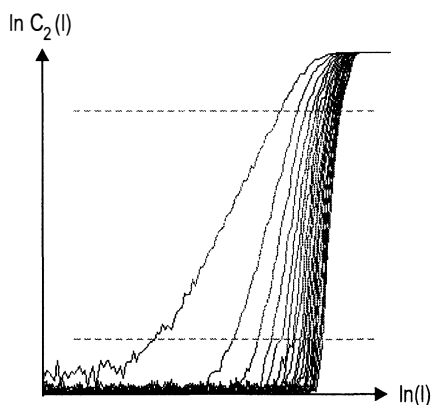
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.22 Wykładnik Hursta dla spółek sektora przemysłu chemicznego

| Spółka | Wykładnik Hursta | Długość cyklu w miesiącach | Długość cyklu w latach | Liczba danych (tygodniowych) |
|-------------|------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------|
| Jelfa | 0,620 | 26,4 | 2,20 | 258 |
| Polifarb-CW | 0,616 | 36,7 | 3,06 | 317 |

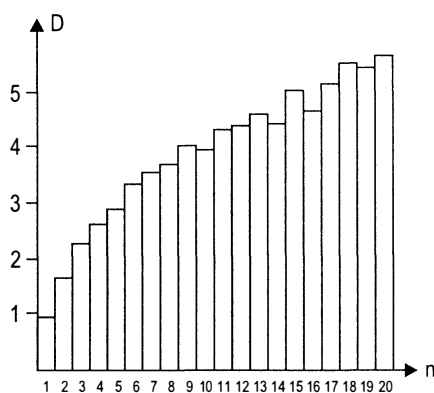
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.77 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Jelfa dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.78 Wymiary korelacyjne dla spółki Jelfa dla $\tau = 7$

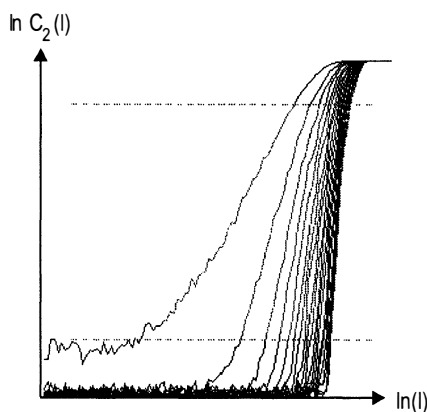


Źródło: opracowanie własne.

Wcześniejsze przypuszczenia potwierdziły się – dla obu szeregów czasowych wykryto cykl, o około rocznej różnicy długości. Ponieważ kształtem wykresy przyrostów były

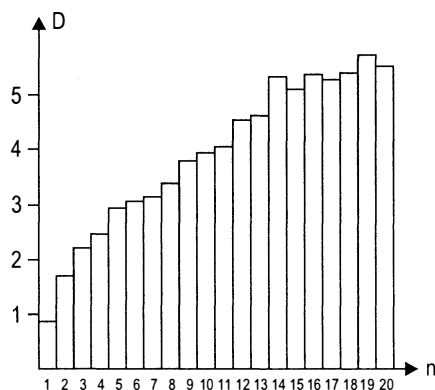
bardzo zbliżone, to różnica ta wynika z ilości danych. Polifarb-CW ma o 59 punktów w szeregu czasowym więcej, co daje około 1.1 roku dłuższego istnienia spółki na giełdzie – dlatego też jej cykl jest o około 0.8 roku dłuższy. Jako mniej ryzykowną należy jednak uznać Jelfę, ze względu na wyższy wykładnik Hursta. Różnica wykładników Hursta dla obu wybranych spółek sektora przemysłu chemicznego wynosi 0.004 i jest tak niewielka, że można ją uznać za błąd pomiarowy. Dopiero wyznaczenie wymiaru fraktalnego pozwoli dokładniej wnioskować o rynkowej atrakcyjności akcji badanych firm.

Rys. 3.79 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Polifarb-CW dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.80 Wymiary korelacyjne dla spółki Polifarb-CW dla $\tau = 7$



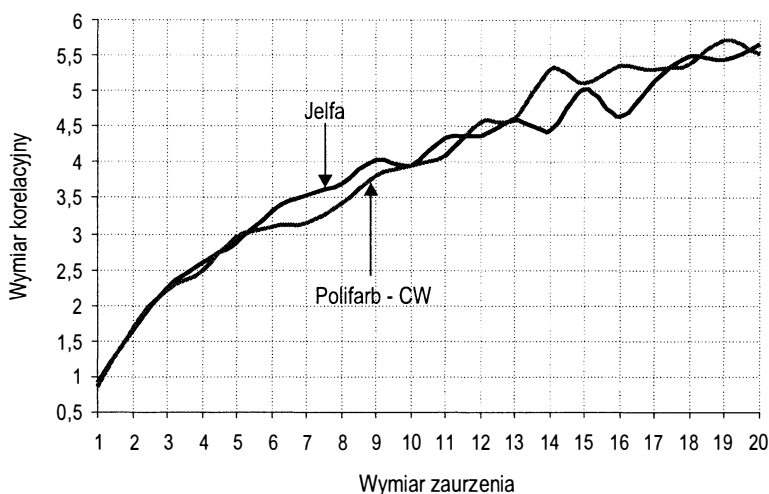
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.23 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu chemicznego dla $\tau = 7$

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Jelfa | 0,918 | 1,66 | 2,25 | 2,6 | 2,89 | 3,32 | 3,54 | 3,7 | 4,04 | 3,96 |
| Polifarb-CW | 0,854 | 1,68 | 2,2 | 2,49 | 2,96 | 3,09 | 3,16 | 3,43 | 3,83 | 3,96 |

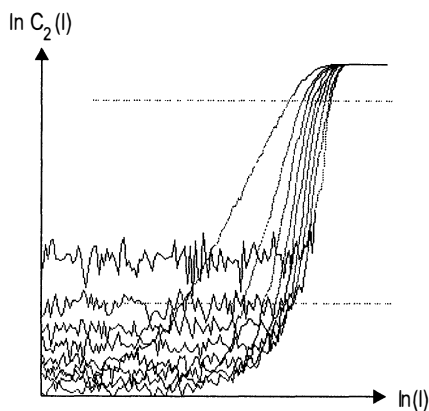
| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Jelfa | 4,34 | 4,38 | 4,6 | 4,44 | 5,04 | 4,65 | 5,13 | 5,51 | 5,45 | 5,66 |
| Polifarb-CW | 4,08 | 4,56 | 4,62 | 5,32 | 5,12 | 5,36 | 5,32 | 5,38 | 5,72 | 5,53 |

Źródło: opracowanie własne.

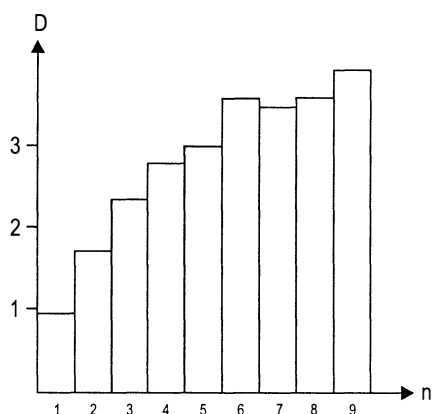
Rys. 3.81 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu chemicznego dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

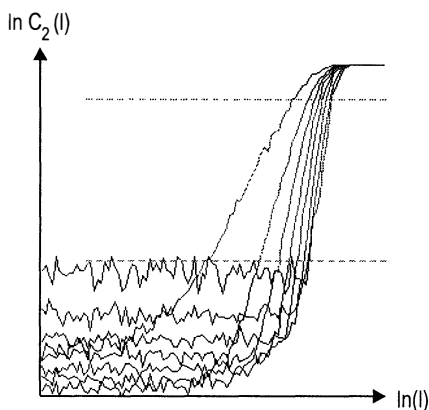
Na podstawie powyższych wyników nie można wykryć wymiaru fraktalnego w szeregu czasowym Jelfy. Przyczyną niepowodzenia mogła być niedostateczna liczba danych, aczkolwiek jest to mało prawdopodobne, gdyż dokładnie wyznaczono stosunkowo długi cykl. Inną przyczyną porażki mógł być duży poziom szumu w danych (co to jest szum dla danych giełdowych mówiono w poprzednim podrozdziale), co spowodowało ich zniekształcenie, a co za tym idzie, duże zniekształcenie atraktora. Jeżeli przyjmie się tę wersję, to analiza fraktalna dla dużej wartości przesunięcia czasowego powinna wyeliminować ten mankament obliczeń, jako że nie udało się wydzielić dwóch obszarów na rys.3.77. Jeśli chodzi o Polifarb-CW, to mimo bardzo podobnego przebiegu wykresu (wymiary korelacyjnych w zależności od wymiaru zanurzenia) jak w przypadku poprzedniej spółki (wymiary zanurzenia 1-13), od 14 wymiaru zanurzenia obserwować można stabilizację krzywej na poziomie 5.3 – 5.6. Średnią liczbę z tego przedziału (5.393) można uznać za wymiar fraktalny dla spółki Polifarb-CW, a z racji części ułamkowej tej liczby, można twierdzić, że atraktor jej odpowiadający jest atraktorem dziwnym co sugeruje występowanie zjawiska chaosu deterministycznego. W związku z otrzymanymi wynikami można uważać, że mniejsze ryzyko straty pociąga za sobą jednak kupno akcji Polifarbu, a nie, jak mogło здаwać się wcześniej, Jelfy. Pełną odpowiedź można będzie jednak sformułować dopiero po analizie szeregów czasowych dla τ wyznaczanych na podstawie wzoru (2.40).

Rys. 3.82 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Jelfa dla $\tau = 203$ 

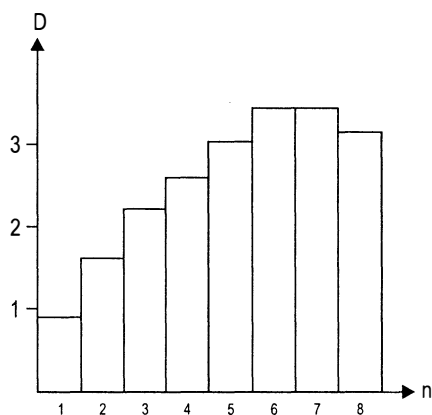
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.83 Wymiary korelacyjne dla spółki Jelfa dla $\tau = 203$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.84 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Polifarb-CW dla $\tau = 280$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.85 Wymiary korelacyjne dla spółki Polifarb-CW dla $\tau = 280$ 

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.24 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu chemicznego dla τ wg tab. 3.25

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Jelfa | 0,93 | 1,67 | 2,3 | 2,73 | 2,97 | 3,5 | 3,42 | 3,53 | 3,81 |
| Polifarb-CW | 0,922 | 1,65 | 2,24 | 2,62 | 3,08 | 3,46 | 3,45 | 3,19 | x |

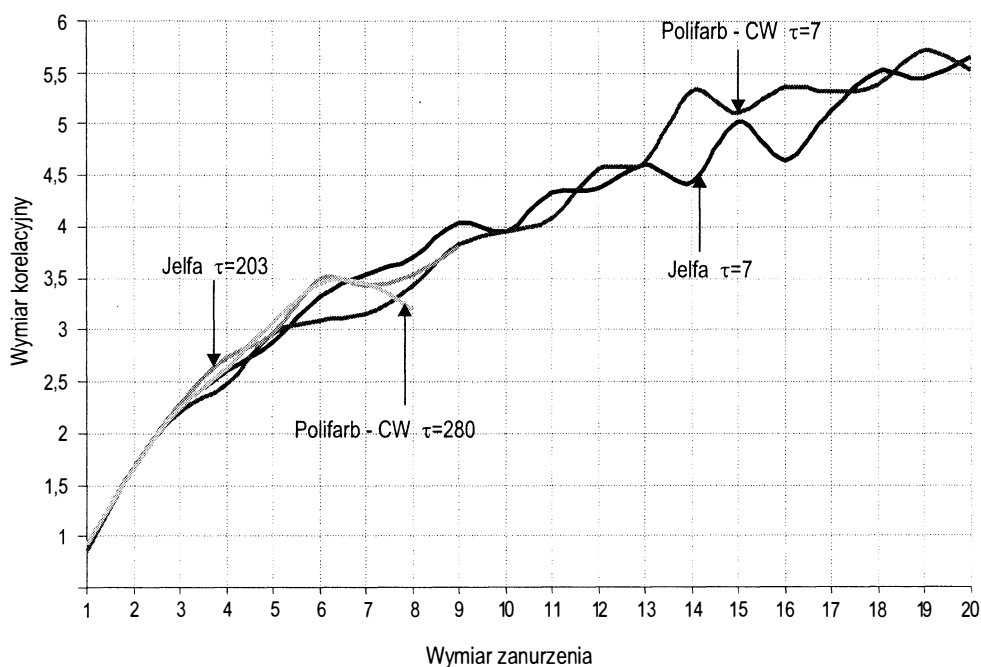
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.25 Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora przemysłu chemicznego

| Nazwa | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny | τ (w dniach) | Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|-------------|------------------|-----------------------------|-------------------|------------------------------|----------------------------|------------------|
| Jelfa | 4 | 3,4 – 3,5 | 203 | 258 | 115 | 0,620 |
| Polifarb-CW | 4 | 3,1 – 3,4 | 280 | 317 | 160 | 0,616 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3. 86 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla sektora przemysłu chemicznego, wraz z powiększeniem wykresu dla $\tau = 203$ (Jelfa) i $\tau = 280$ (Polifarb-CW)



Źródło: opracowanie własne.

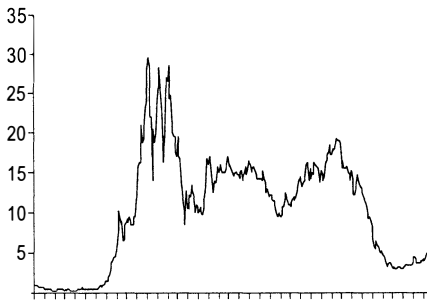
Liczba otrzymanych krzywych $\ln C_2(l)$ (9 Jelfa i 8 Polifarb-CW) jest w zasadzie wystarczająca dla obu spółek. Dla tak małej liczby obliczonych wymiarów korelacyjnych wymiar fraktalny – jeśli istnieje – powinien być szczególnie wyraźnie widoczny i łatwy do określenia. Innymi słowy wymiary korelacyjne powinny szybko zdążyć do liczby będącej wymiarem fraktalnym. Ponieważ ta część analizy miała, ze względu na wielkość przesunięcia czasowego, wyeliminować ewentualny szum w przypadku szeregu czasowego Jelfy, nie ma sensu porównywanie wykresów wymiarów korelacyjnych dla $\tau = 7$ (uzależniony więc przekłamany przez domniemany szum) i $\tau = 203$ (niezależny od szumu). Przeprowadzone dla $\tau = 203$ obliczenia, pozwoliły wykryć wymiar fraktalny wynoszący około 3.48 (średni wymiar korelacyjny dla wymiarów zanurzenia 6-8 – dziewiąty nie był brany pod uwagę ze

względu na specyfikę krzywej). Po raz kolejny można więc zauważyć zjawisko chaosu deterministycznego na polskiej giełdzie. Szereg czasowy Polifarb-CW dla $\tau = 280$ pozwolił wykryć wymiar fraktalny wynoszący około 3.3 – 3.5. Jest to wartość dużo mniejsza niż w przypadku obliczeń dla $\tau = 7$ (wymiar fraktalny około 5.5), niemniej jednak wskazuje na występowanie chaosu, lecz nie potwierdza zdefiniowanej wcześniej reguły potwierdzania poprawności wyniku. Przyczyny mogą być trzy: wyznaczono zbyt wielkie τ na skutek błędu już w fazie analizy R/S, sformułowana reguła jest błędna lub szereg czasowy spółki Polifarb-CW stanowi od niej odstępstwo. Co do dwóch ostatnich teorii – odpowiedź da dopiero analiza wszystkich sektorów giełdy, więc z wnioskami należy chwilowo powstrzymać się. Wracając do tematu ryzyka inwestowania w akcje jednej z badanych spółek, można powiedzieć, że jest ono praktycznie jednakowe. Wysokie wartości τ (eliminujące szum i pamięć krótkoterminową) wykazały zależność układu od czterech składowych w przypadku obu badanych szeregów czasowych. Sektor przemysłu chemicznego, na podstawie przebiegu zmian cen akcji Jelfy i Polifarb-CW, cechuje zjawisko chaosu deterministycznego, o wymiarze fraktalnym około 3.5.

3.2.1.5 Podsektor PRZEMYSŁU MATERIAŁÓW BUDOWLANYCH

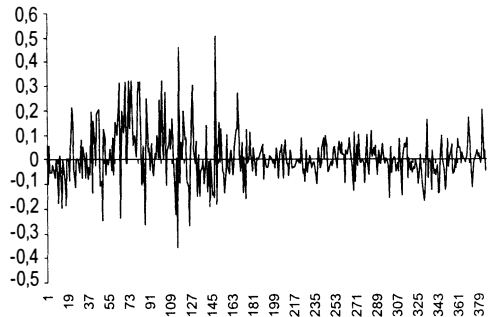
Do analizy fraktalnej wybrano tylko jedną spółkę tego sektora, a mianowicie firmę Irena. Jej szereg czasowy zawiera 385 tygodniowych danych, z więc spółka ta istnieje już około 7 lat na giełdzie papierów wartościowych.

Rys. 3.87 Irena – dane oryginalne z trendem



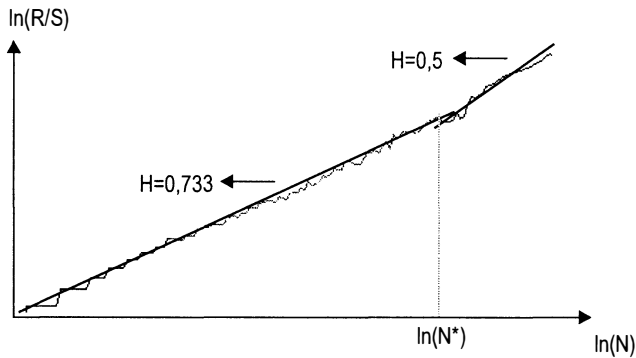
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.88 Irena – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$



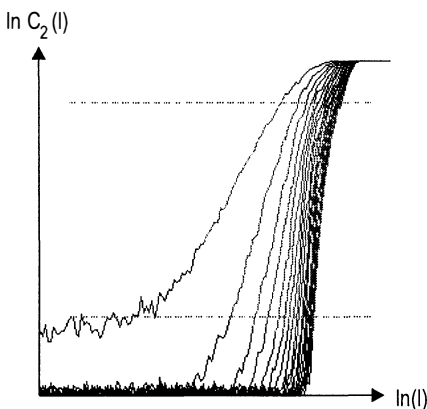
Źródło: opracowanie własne.

Na początku swego funkcjonowania na giełdzie, Irena miała niskie ceny akcji. Po pewnym czasie nastąpił gwałtowny skok cen akcji tej spółki – wtedy też odchylenia (przyrosty) cen były największe. Okres późniejszy to stabilizacja ceny, małe jej odchylenia, aż do gwałtownego spadku wartości akcji do poziomu prawie równego początkowemu. Jednak ten skok nie zaowocował większymi odchyleniami, co ilustruje rys.3.88. Można jednak na tej podstawie spodziewać się wykrycia jednego pełnego cyklu. Wyniki analizy przedstawiono na rysunku 3.89.

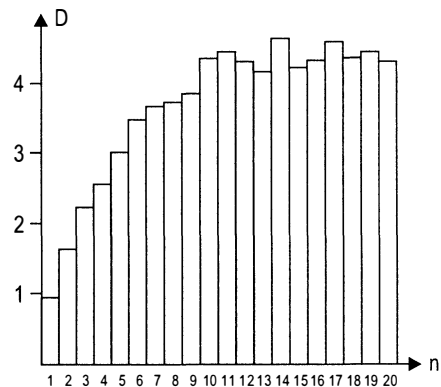
Rys. 3.89 Analiza R/S dla spółki Irena dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

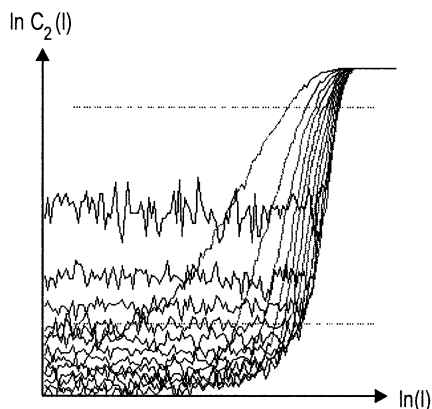
Wykładnik Hursta okazał się bardzo trudny do wyznaczenia – nie ma charakterystycznej dla sygnałów stochastycznych wartości współczynnika kierunkowego 0.5, więc został wyznaczony na podstawie załamania na krzywej i wyniósł około 0.733. Taka wartość świadczyłaby o bardzo niskim ryzyku przy inwestowaniu w akcje tej spółki. Należy pamiętać, że powyższy wynik może być obarczony błędem. Dalsza analiza to obliczenie optymalnej wielkości τ , która wykorzystuje wartość punktu cyklu. W tym przypadku punkt ten to 126, a więc czas jednego pełnego cyklu wyznaczono jako 28.9 miesiąca czyli inaczej 2.4 roku. Dalszą część analizy przedstawiają rysunki 3.90 – 3.93 oraz tabele 3.26 i 3.27.

Rys. 3.90 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Irena dla $\tau = 7$ 

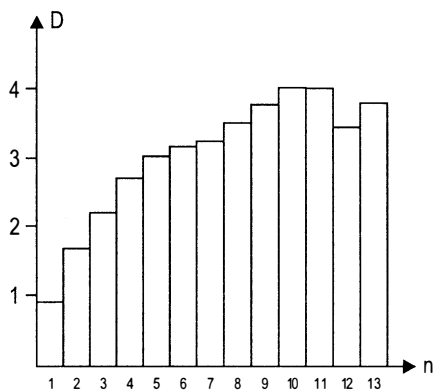
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.91 Wymiary korelacyjne dla spółki Irena dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.92 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Irena dla $\tau = 217$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.93 Wymiary korelacyjne dla spółki Irena dla $\tau = 217$ 

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.26 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla sektora przemysłu materiałów budowlanych

| Irena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\tau = 7$ | 0,933 | 1,65 | 2,24 | 2,55 | 3,01 | 3,5 | 3,68 | 3,72 | 3,84 | 4,36 |
| $\tau = 217$ | 0,916 | 1,69 | 2,21 | 2,71 | 3,02 | 3,16 | 3,25 | 3,51 | 3,78 | 4,05 |

| Irena | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|--------------|------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| $\tau = 7$ | 4,47 | 4,35 | 4,2 | 4,64 | 4,23 | 4,32 | 4,59 | 4,36 | 4,44 | 4,31 |
| $\tau = 217$ | 4,02 | 3,46 | 3,8 | | | | | | | |

Źródło: opracowanie własne.

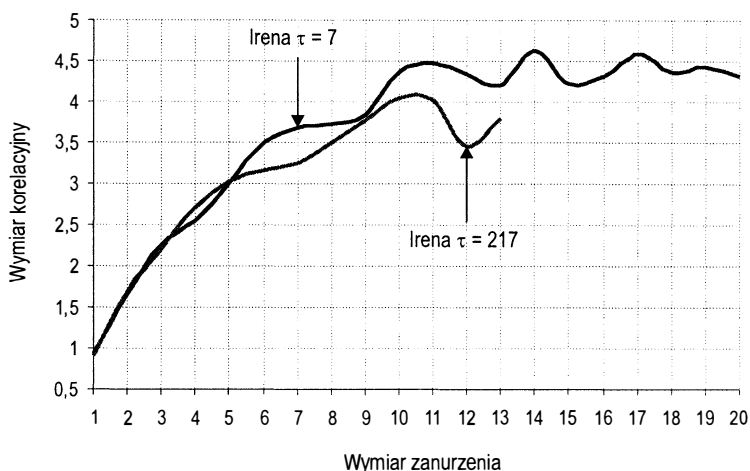
Tabela 3.27 Wartości τ oraz inne dane dla spółki sektora przemysłu materiałów budowlanych – Irena

| τ (dni) | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny |
|--------------|------------------|-----------------------------|
| 7 | 5 | 4,3 – 4,6 |
| 217 | 4 | 3,4 – 3,5 |

| Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|------------------------------|----------------------------|------------------|
| 385 | 126 | 0,733 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.94 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki sektora przemysłu materiałów budowlanych



Źródło: opracowanie własne.

Mimo wcześniejszego problemu z wyznaczeniem wykładnika Hursta, dalsza część analizy dała wyjątkowo dobre wyniki. Dla tygodniowego przesunięcia czasowego wymiary korelacyjne wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia bardzo szybko (już od 10 wymiaru zanurzenia) zaczęły oscylować wokół liczby 4.38. Analiza tego samego szeregu przy $\tau = 217$ dała podobny rezultat (wymiar fraktalny jest nieco niższy – wynosi około 3.77), co pozwala twierdzić, że błąd popełniony przy wyznaczaniu wykładnika Hursta nie był duży, a różnica wartości wymiarów fraktalnych jest nim powodowana. Ponieważ wspomniana różnica wynosi jedynie 0.268, oznacza to wyeliminowanie pamięci krótkoterminowej już dla $\tau = 7$. Dane spółki Irena są także świetnym przykładem ilustrującym sformułowaną uprzednio regułę potwierdzania poprawności i wiarygodności przeprowadzonej analizy fraktalnej dla wysokich τ . Mamy tu do czynienia z wyjątkowo silnym przejawem zjawiska chaosu deterministycznego.

3.2.1.6 Podsektor BUDOWNICTWO

Jest to najliczniejszy pod względem ilości zaklasyfikowanych do niego spółek giełdowych. Ich liczba to przeszło 38 różnych firm. Duża ilość firm sektora przemysłu budowlanego świadczy o wciąż jeszcze dużym zapotrzebowaniu, szczególnie na mieszkania. Analiza sektorów budowlanego i bankowego jest bardzo interesująca, bowiem walory tych firm wzbudzają największe zainteresowanie wśród inwestorów prywatnych, spodziewających się niskiego ryzyka inwestowania w prężnie działające i wciąż rozwijające się firmy. Czy ryzyko to jest rzeczywiście niskie można przekonać się na podstawie analizy fraktalnej. Do badań sektora przemysłu budowlanego wybrano trzy spółki: Budimex, Exbud oraz Mostosta-Exp. Liczbę analizowanych danych powyższych spółek przedstawia tabela 3.28.

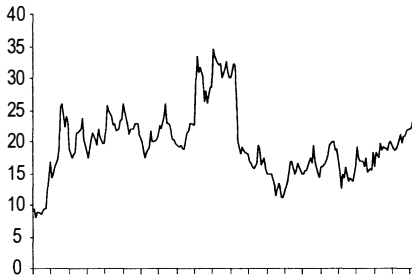
Tabela 3.28 Ilość danych dla spółek sektora budownictwo

| Spółka | Liczba danych (tygodniowych) |
|---------------|------------------------------|
| Budimex | 212 |
| Exbud | 426 |
| Mostostal-Exp | 368 |

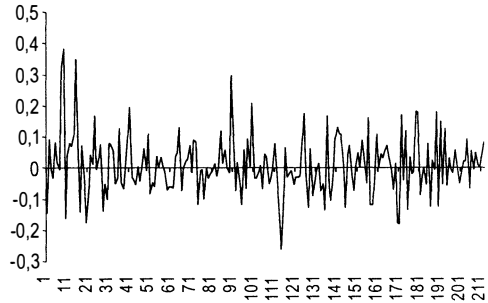
Źródło: opracowanie własne.

W przypadku Exbudu dysponujemy jednym z najdłuższych szeregów czasowych spośród wszystkich spółek giełdowych. Nieco mniej danych posiada szereg Mostostalu-Exp, lecz jest to też stosunkowo duża liczba. Jedynie Budimex odstaje od nich pod tym względem – jego szereg jest prawie dwukrotnie krótszy. Nie musi to jednak mieć dużego znaczenia dla analizy fraktalnej, jeśli dane nie zawierają zniekształcającego szumu a obejmują choć jeden pełny cykl. Rysunki 3.95, 3.97, 3.99 przedstawiają oryginalne dane z trendem, natomiast rysunki 3.96, 3.98, 3.100 ilustrują szeregi czasowe przy $\tau = 7$ dla wymienionych w tabeli nr 3.28 spółek.

Rys. 3.95 Budimex – dane oryginalne z trendem



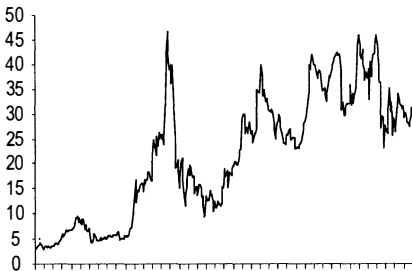
Rys. 3.96 Budimex – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$



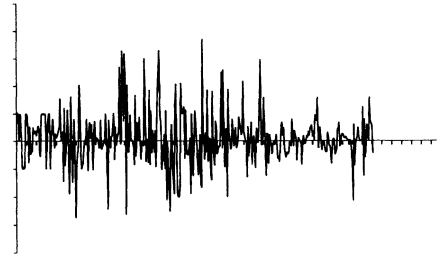
Źródło: opracowanie własne.

Źródło: opracowanie własne.

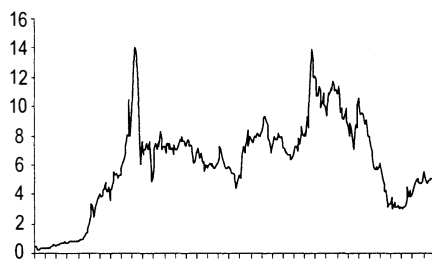
Rys. 3.97 Exbud – dane oryginalne z trendem



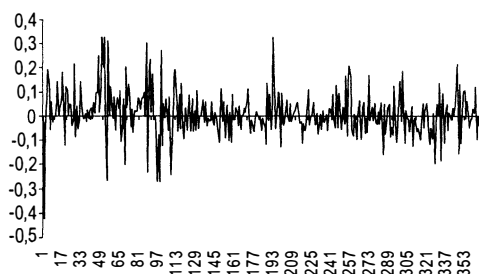
Rys. 3.98 Exbud – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$



Rys. 3.99 Mostostal-Exp – dane oryginalne z trendem

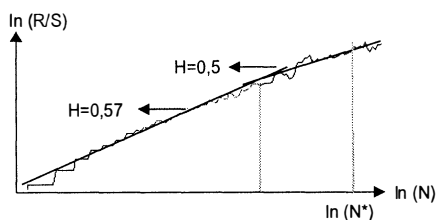


Źródło: opracowanie własne.

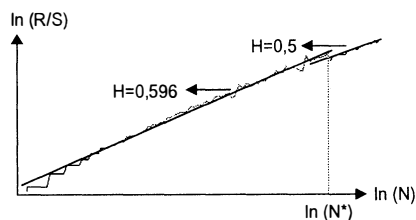
Rys. 3.100 Mostostal-Exp – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Ceny akcji Budimexu były dosyć stabilne, a ich odchylenia w kolejnych notowaniach niewielkie. Może to spowodować trudności w wyznaczeniu cyklu. Jeśli chodzi o Exbud, to odchylenia cen okazały się duże – cena akcji tej spółki ma tendencję do wzrostu – tu również analiza R/S będzie trudna. Natomiast dla szeregu czasowego Mostostalu-Exp można zaryzykować stwierdzenie, że dane zawierają co najmniej dwa cykle. Rysunki 3.101, 3.102, 3.103 ilustrują analizę R/S, a tabela 3.29 zawiera jej wyniki dla spółek badanego sektora przemysłu.

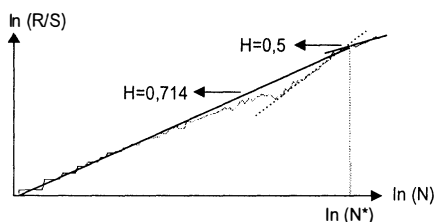
Rys. 3.101 Analiza R/S dla spółki Budimex dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.102 Analiza R/S dla spółki Exbud dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.103 Analiza R/S
dla spółki Mostostal-Exp dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

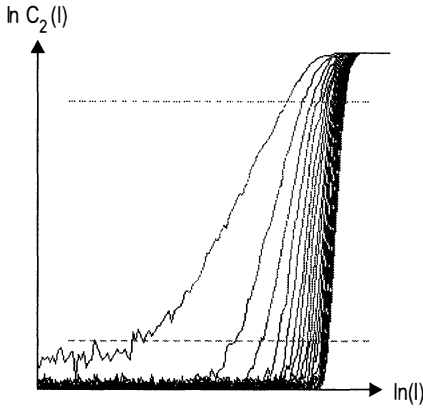
Tabela 3.29 Wykładnik Hursta dla spółek sektora przemysłu budowlanego

| Spółka | Wykładnik Hursta | Długość cyklu w miesiącach | Długość cyklu w latach | Liczba danych (tygodniowych) |
|---------------|------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------|
| Budimex | 0,570 | 10 | 0,83 | 212 |
| Exbud | 0,596 | 48,2 | 4,02 | 426 |
| Mostostal-Exp | 0,714 | 53,7 | 4,47 | 368 |

Źródło: opracowanie własne.

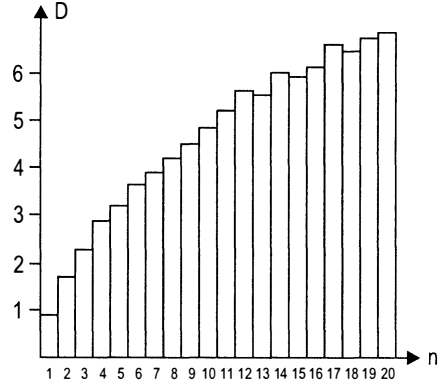
Według powyższych obliczeń, najniższe ryzyko powinno wiązać się z inwestowaniem w akcje spółki Mostostal-Exp – wykładnik Hursta dla jej szeregu czasowego jest najwyższy i wynosi 0.714. Jednak dane były trudne do analizy a krzywą w analizie R/S cechował brak charakterystycznego odcinka o współczynniku kierunkowym 0.5. W zasadzie krzywa składa się z trzech różnych odcinków, co pokazano na rys.3.103. Może to oznaczać istnienie dwóch podukładów rządzących badanym szeregiem czasowym, o różnych wymiarach fraktalnych. Nie udało się jednak stwierdzić ich istnienia na podstawie przeprowadzonej analizy, być może ze względu na zbyt małą ilość danych jak dla tak złożonego układu dynamicznego, na co wskazywałby długi, prawie 4.5 letni cykl. W przypadku Budimexu dane charakteryzują się bardzo niskim wykładnikiem Hursta, bliskim wartości typowej dla sygnałów stochastycznych – około 0.57. Również cykl jest bardzo krótki i wynosi zaledwie 10 miesięcy. Mogła na to mieć wpływ stosunkowo mała liczba danych. Exbud, tak jak Budimex charakteryzują się długim, czteroletnim okresem. Można by uznać to za regułę dla badanego sektora, od której jednak odstępstwem jest krótki, niespełna roczny cykl Mostostalu-Exp. Jeśli idzie o wykładnik Hursta, to jest on stosunkowo niski i wynosi około 0.596.

Rys. 3.104 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Budimex dla $\tau = 7$



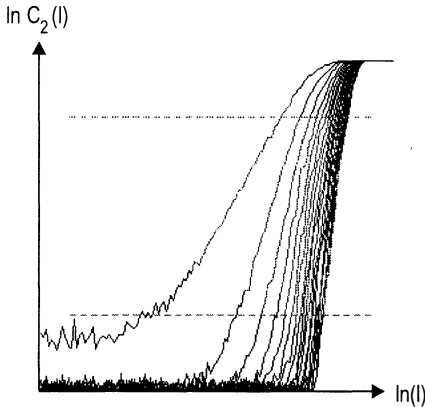
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.105 Wymiary korelacyjne dla spółki Budimex dla $\tau = 7$



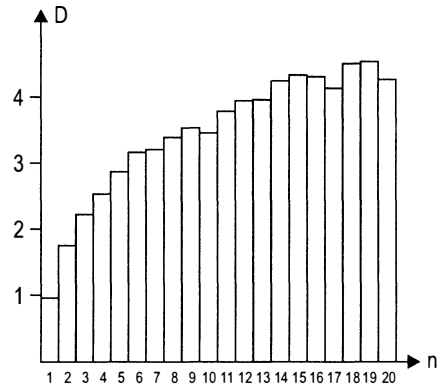
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.106 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Exbud dla $\tau = 7$



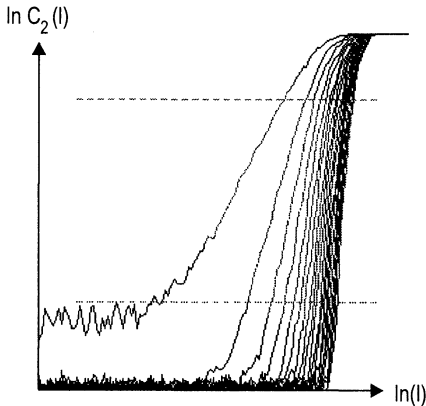
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.107 Wymiary korelacyjne dla spółki Exbud dla $\tau = 7$



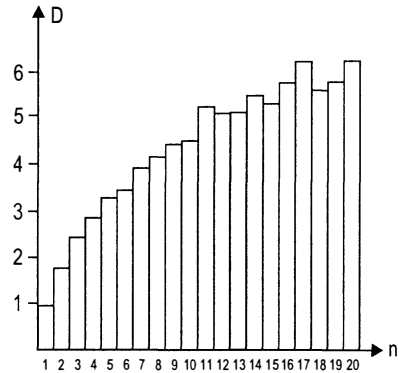
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.108 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Mostostal-Exp dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.109 Wymiary korelacyjne
dla spółki Mostostal-Exp dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rysunki 3.104, 3.106, 3.108 ilustrują wykresy krzywych $\ln C_2(l)$, a rysunki 3.105, 3.107, 3.109 przedstawiają wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia, dla badanych spółek sektora przemysłu budowlanego. Otrzymane wyniki zestawiono także w tabeli 3.30, na podstawie której sporządzono wykres 3.110.

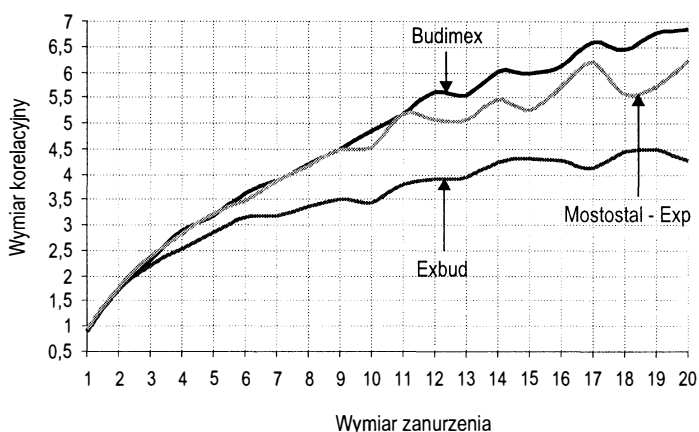
Tabela 3.30 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia
dla spółek sektora przemysłu budowlanego

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Budimex | 0,906 | 1,74 | 2,31 | 2,9 | 3,2 | 3,62 | 3,86 | 4,2 | 4,5 | 4,86 |
| Exbud | 0,929 | 1,73 | 2,22 | 2,54 | 2,86 | 3,16 | 3,19 | 3,38 | 3,5 | 3,44 |
| Mostostal-Exp | 0,95 | 1,76 | 2,4 | 2,84 | 3,21 | 3,47 | 3,86 | 4,15 | 4,48 | 4,52 |

| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Budimex | 5,2 | 5,62 | 5,56 | 6,02 | 5,97 | 6,13 | 6,59 | 6,47 | 6,77 | 6,86 |
| Exbud | 3,79 | 3,93 | 3,94 | 4,25 | 4,32 | 4,29 | 4,12 | 4,47 | 4,51 | 4,26 |
| Mostostal-Exp | 5,17 | 5,08 | 5,08 | 5,48 | 5,27 | 5,73 | 6,2 | 5,6 | 5,74 | 6,23 |

Źródło: opracowanie własne.

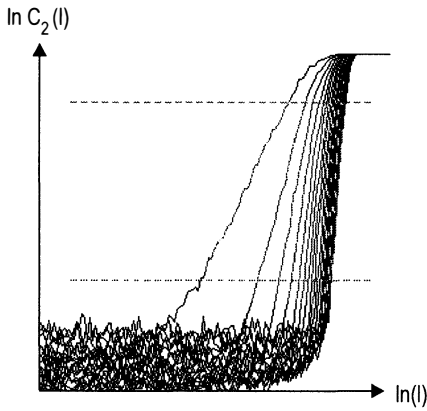
Rys. 3.110 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu budowlanego



Źródło: opracowanie własne.

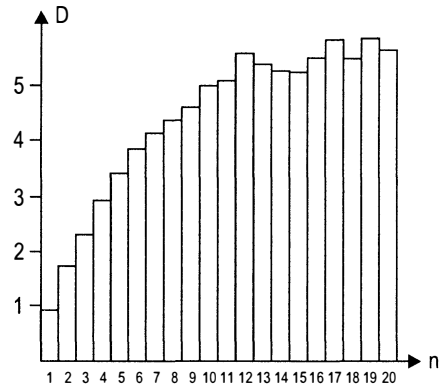
Analizując rysunek 3.110 można stwierdzić, że w przypadku badanego sektora trudno wykryć wymiar fraktalny dla poszczególnych spółek. Wymiary korelacyjne Budimexu rosną wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia. Nie daje się wyróżnić nawet fragmentu krzywej, na podstawie którego można by mówić o wymiarze fraktalnym. Przyczyną takiego stanu rzeczy może być bardzo niski wykładnik Hursta – około 0.57, jak również cykl – zaledwie 10 miesięcy. Wpływ na te wartości mogła mieć stosunkowo mała liczba danych. Wyniki uzyskane dla Mostostalu-Exp są nieco lepsze, mimo iż na ich podstawie również nie można mówić o wymiarze fraktalnym dla szeregu czasowego tej spółki. Jednak wzrost wymiarów korelacyjnych nie jest tak szybki i zdecydowany jak w przypadku Budimexu. Nie pozwala to jednak na to by mówić o wymiarze fraktalnym. Taka postać wyników analizy może być uwarunkowana wcześniejszą, dosyć problematyczną analizą R/S. Jeśli idzie o Exbud, to jest on jedyną spółką badanego sektora, dla której można w przynajmniej przybliżony sposób określić wymiar fraktalny. Analizując otrzymane wyniki nie sposób nie zauważyć, że powyżej 11 wymiaru zanurzenia dla kolejnych trójek tych wymiarów obserwować można przyjmowanie przez wymiar korelacyjny pewnej wspólnej wartości. Rysunek 3.107 pozwala stwierdzić, że wymiary korelacyjne od 14 wymiaru zanurzenia zaczynają przyjmować wartości już tylko z przedziału 4.25 – 4.51, co pozwala twierdzić że jest to przedział zawierający wymiar fraktalny. Średnia wymiarów korelacyjnych z tego przedziału dała liczbę 4.32, zatem można przyjąć tę wartość jako wyznaczony wymiar fraktalny. By potwierdzić poprawność otrzymanych wyników należy przeprowadzić obliczenia dla przesunięcia czasowego τ , wyznaczonego na podstawie wzoru (2.40), dla każdej z badanych spółek sektora przemysłu budownictwa oddzielnie. Rysunki 3.111, 3.113, 3.115 przedstawiają krzywe $\ln C_2(l)$, rysunki 3.112, 3.114, 3.116 to wykresy wartości wymiarów korelacyjnych w funkcji wymiaru zanurzenia dla poszczególnych spółek. W tabeli 3.31 i 3.32 zawarto zestawienie otrzymanych wyników. Rysunek 3.117 jest graficzną ilustracją tabeli 3.31.

Rys. 3.111 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Budimex dla $\tau = 49$



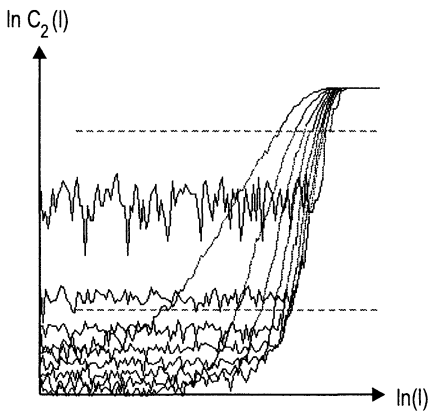
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.112 Wymiary korelacyjne
dla spółki Budimex dla $\tau = 49$



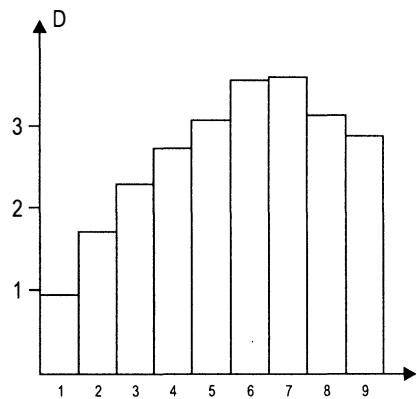
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.113 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Exbud dla $\tau = 364$

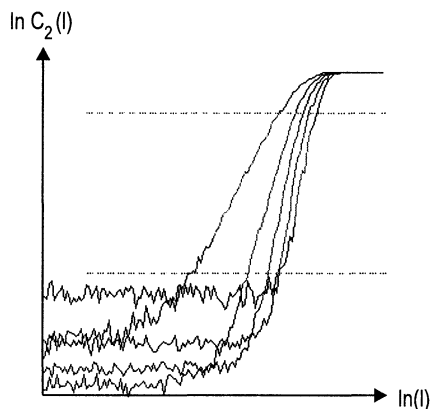


Źródło: opracowanie własne.

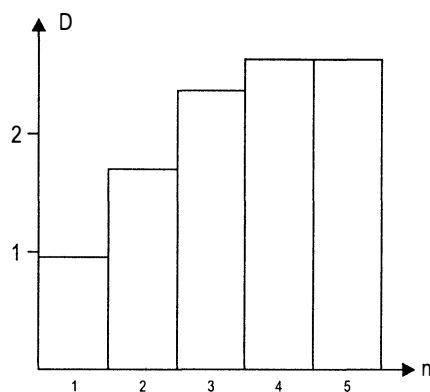
Rys. 3.114 Wymiary korelacyjne
dla spółki Exbud dla $\tau = 364$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.115 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Mostostal-Exp dla $\tau = 564$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.116 Wymiary korelacyjne dla spółki Mostostal-Exp dla $\tau = 564$ 

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.31 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu budowlanego dla τ wg tab. 3.32

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Budimex | 0,929 | 1,71 | 2,33 | 2,92 | 3,42 | 3,82 | 4,2 | 4,37 | 4,62 | 5,03 |
| Exbud | 0,918 | 1,69 | 2,25 | 2,7 | 3,03 | 3,5 | 3,54 | 3,1 | 2,85 | |
| Mostosta-Exp | 0,949 | 1,71 | 2,39 | 2,65 | 2,65 | | | | | |

| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|--------------|------|-----|------|------|------|------|------|-----|------|------|
| Budimex | 5,11 | 5,6 | 5,41 | 5,32 | 5,28 | 5,54 | 5,86 | 5,9 | 5,64 | 5,52 |
| Exbud | | | | | | | | | | |
| Mostosta-Exp | | | | | | | | | | |

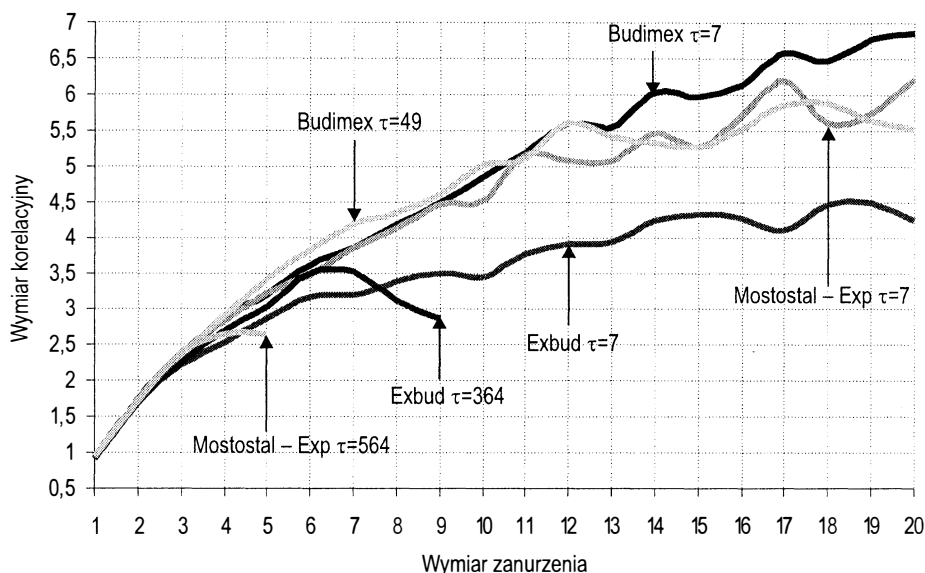
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.32 Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora budownictwo

| Nazwa | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny | τ (w dniach) | Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|--------------|------------------|-----------------------------|-------------------|------------------------------|----------------------------|------------------|
| Budimex | 6 | 5,03 – 5,63 | 49 | 212 | 44 | 0,570 |
| Exbud | 4 | 3,03 – 3,54 | 364 | 426 | 210 | 0,596 |
| Mostosta-Exp | 3 | 2,4 – 2,65 | 564 | 368 | 234 | 0,714 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.117 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora budownictwo



Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane wyniki wyjątkowo trudno zinterpretować i porównać. Ponieważ akcje spółek tego sektora przemysłu budzą żywe zainteresowanie, istnieje podejrzenie o manipulacje ich cenami przez wielkich inwestorów. To zaburza naturalny cykl i powoduje pojawianie się szumu przekłamującego dane, poprzez ich zniekształcanie. Tłumaczyłoby to otrzymane, prawie całkowicie rozbieżne wyniki. I tak na przykład dla Budimexu przy $\tau = 7$ nie można było określić wymiaru fraktalnego, a już przy $\tau = 49$ jest to możliwe – wymiary korelacyjne stabilizują się na poziomie 5.3 – 5.9 już od dwunastego wymiaru zanurzenia. Nie ma żadnych przesłanek wskazujących na to, by uznać że nie jest to wymiar fraktalny. Wartość przesunięcia czasowego wzrosła w tym przypadku jedynie siedmiokrotnie. Co prawda niewielka liczba danych (212) w szeregu czasowym Budimexu (zakładając jego zaszumienie) mogła być przyczyną mało satysfakcjonującego wyniku dla $\tau = 7$. Dopiero minimalizując udział szumu w danych, a więc zwiększając przesunięcie czasowe, można było wyznaczyć wymiar fraktalny. Należy także zwrócić uwagę na fakt, iż do dwunastego wymiaru zanurzenia dla obu przesunięć czasowych krzywa na rysunku 109 ma bardzo podobny przebieg. Świadczy za takim właśnie rozumowaniem. Również na podstawie szeregu czasowego Exbudu, mimo najdokładniejszej w tym sektorze analizy R/S, nie wygenerowano zadawalających wyników. Dla małej wartości τ udało się wyznaczyć wymiar fraktalny, lecz w przypadku dużej wartości przesunięcia czasowego (364) było to niemożliwe. Wartości wymiarów korelacyjnych rosną do 6-7 wymiaru zanurzenia po czym nieoczekiwanie zaczynają maleć. Dlatego też mówienie o wymiarze fraktalnym 3.5 wyznaczonym na podstawie jedynie dwóch wymiarów korelacyjnych (odpowiadających wymiarom zanurze-

nia 6 i 7) nie ma sensu. Porównując otrzymane wyniki dla obu wartości τ , zauważyć można podobieństwo krzywych jedynie dla pierwszych sześciu wymiarów zanurzenia. Dlatego też na podstawie metody uwiarygodniania otrzymanych wyników dla dużych wartości τ , sformułowanej na początku pracy, można twierdzić, że wyznaczenie wymiaru fraktalnego dla Exbudu nie jest możliwe. Ciekawe jest to, że szereg czasowy tej firmy cechowała jedna z największych ilości punktów, a mimo to, nie uzyskano zadawalającego wyniku. Inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku Mostostalu-Exp. Już na etapie analizy R/S pojawił się pierwszy problem: nie można było dokładnie wyznaczyć wykładnika Hursta. Następnie dla $\tau = 7$ nie zauważono zbiegania wymiarów korelacyjnych do pewnej wartości, przeciwnie, wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia wartości te rosły. Obliczenia dla $\tau = 564$, mimo iż wykazują istnienie wymiaru fraktalnego równego około 2.6, nie mogą być brane pod uwagę, ze względu na zbyt małą ilość wymiarów korelacyjnych (udało się wykreślić jedynie $5 \ln C_2(l)$), a dla trzech zmiennych ich ilość powinna wynosić co najmniej 7).

Reasumując – mimo ciągle rosnącego zainteresowania akcjami spółek badanego sektora przemysłu, inwestowanie w nie, jest dosyć ryzykowne, szczególnie z powodu niemożności wykrycia jakichkolwiek praw rządzących notowaniami cen akcji spółek tego sektora. Na podstawie przeprowadzonych badań można stwierdzić jednak występowanie zjawiska chaosu deterministycznego dla notowań cen akcji spółek sektora przemysłu budowlanego.

3.2.1.7 Podsektor PRZEMYSŁ ELEKTROMASZYNOWY

Do badań sektora przemysłu elektromaszynowego wybrano trzy spółki: Kable, Rafako oraz Tonsil. Spółki Kable i Tonsil są jednymi z najdłużej funkcjonujących na giełdzie papierów wartościowych. Notowania cen akcji Rafako rozpoczęły się nieco później i z tego też powodu szereg czasowy tej spółki jest około 1,5 raza krótszy niż pozostałych spółek zebranych w tabeli nr 3.33.

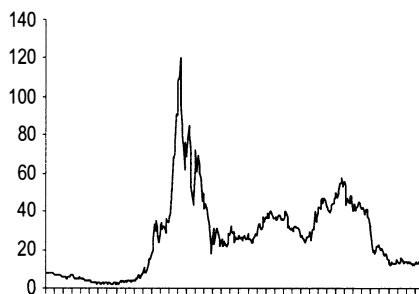
Tabela 3.33 Ilość danych dla spółek sektora przemysłu elektromaszynowego

| Spółka | Liczba danych (tygodniowych) |
|--------|------------------------------|
| Kable | 426 |
| Rafako | 275 |
| Tonsil | 426 |

Źródło: opracowanie własne.

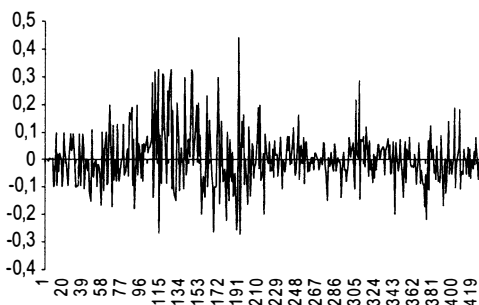
Analiza danych powyższych spółek, ze względu na długość ich szeregów czasowych, powinna dać bardzo dokładne wyniki. Rysunki 3.119 – 3.121 przedstawiają szeregi czasowe badanych spółek po wyeliminowaniu trendu, dla spółki Kable dołączono rysunek 3.118 przedstawiający dane z trendem.

Rys. 3.118 Kable – dane oryginalne z trendem



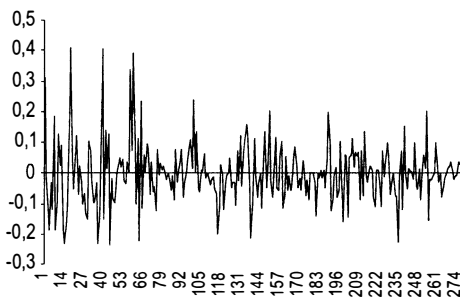
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.119 Kable – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$



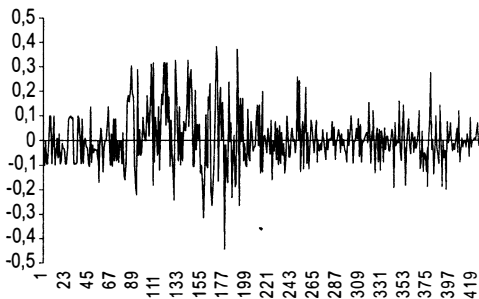
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.120 Rafako – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$



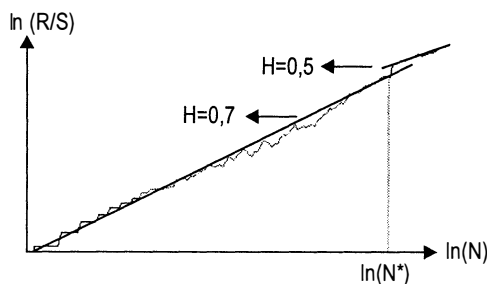
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.121 Tonsil – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$

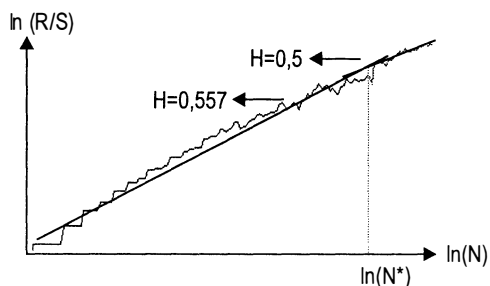


Źródło: opracowanie własne.

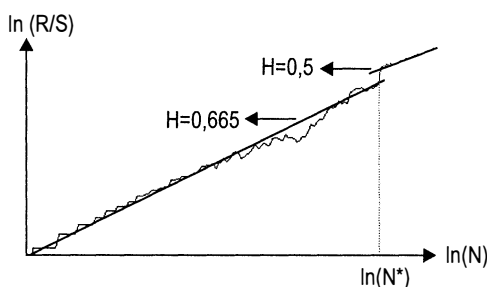
Analizując rysunek nr 3.118, można stwierdzić, że dla spółki Kable, bardzo prawdopodobne jest wyznaczenie co najmniej jednego pełnego cyklu (a nawet dwóch). Wyraźnie widoczne są obszary niskich cen akcji na początku i na końcu wykresu. Przepuszczenie to potwierdza rysunek 3.119. Również w przypadku spółki Tonsil (rys. 3.121) można spodziewać się podobnego wyniku. Trudności w wyznaczeniu cyklu wystąpiły w przypadku szeregu czasowego spółki Rafako (rys.3.120) ze względu na nieregularność odchylen cen.

Rys. 3.122 Analiza R/S dla spółki Kable dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.123 Analiza R/S dla spółki Rafako dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.124 Analiza R/S dla spółki Tonsil dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.34 Wykładnik Hursta dla spółek sektora przemysłu elektromaszynowego

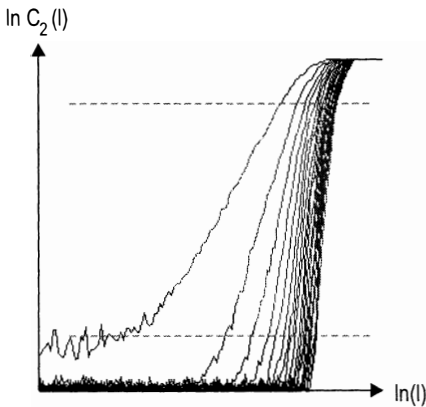
| Spółka | Wykładnik Hursta | Długość cyklu w miesiącach | Długość cyklu w latach | Liczba danych (tygodniowych) |
|--------|------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------|
| Kable | 0,700 | 48 | 4 | 426 |
| Rafako | 0,557 | 29,4 | 2,4 | 275 |
| Tonsil | 0,665 | 48 | 4 | 426 |

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku wszystkich badanych szeregów czasowych nie było trudności z wyznaczeniem wykładnika Hursta – bez problemu udało się wyznaczyć odcinek krzywej w analizie R/S, o współczynniku kierunkowym 0.5 charakterystycznym dla sygnałów stochastycznych. Wykładnik Hursta był najwyższy w przypadku spółki Kable, co oznacza, że inwestycja w akcje tej spółki niesie ze sobą najmniejsze ryzyko. Jako najbardziej ryzykow-

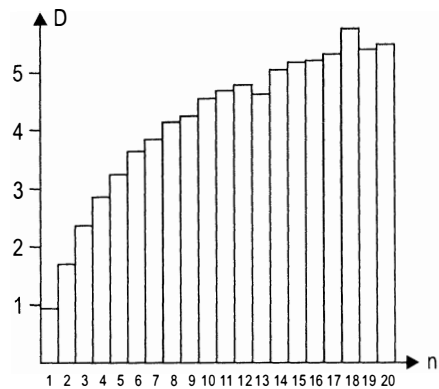
ną w tej kwestii spółkę należy uznać Rafako – tu wykładnik Hursta był najmniejszy i wyniósł jedynie 0.557. Ten sam wykładnik dla Tonsilu był dosyć wysoki – wynosił 0.665. Uwagę zwraca równa długość cyklu dla spółek o tej samej liczbie danych czyli firm Kable i Tonsil, oraz równocześnie wysoka i zbliżona w ich przypadku wartość wykładnika Hursta. Ogólnie analizę R/S można uważać za dokładną i przede wszystkim satysfakcjonującą – wysokie wartości współczynnika Hursta wskazują na występowanie zjawiska chaosu deterministycznego, co jeszcze wyraźniej uwidoczni dalsza część analizy.

Rys. 3.125 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Kable dla $\tau = 7$



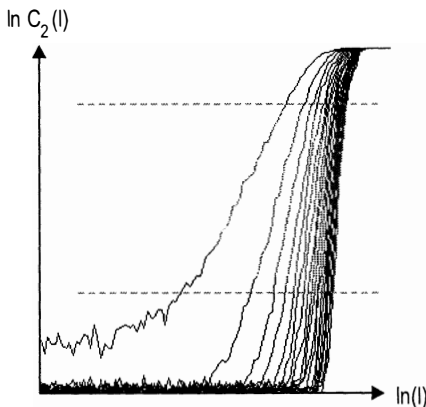
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.126 Wymiary korelacyjne dla spółki Kable dla $\tau = 7$



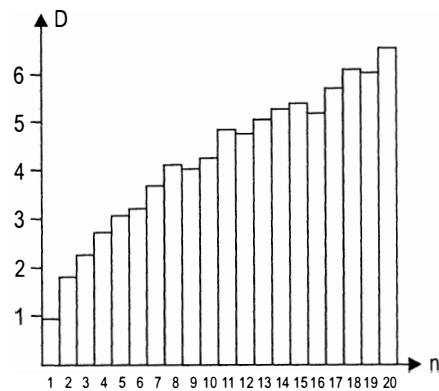
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.127 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Rafako dla $\tau = 7$

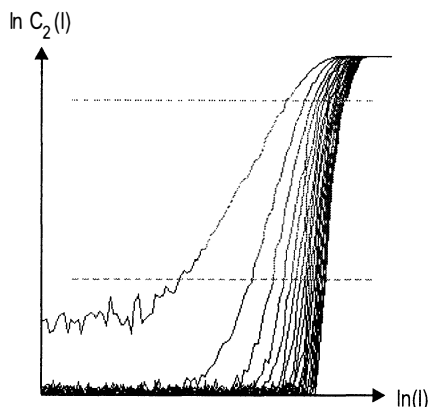


Źródło: opracowanie własne.

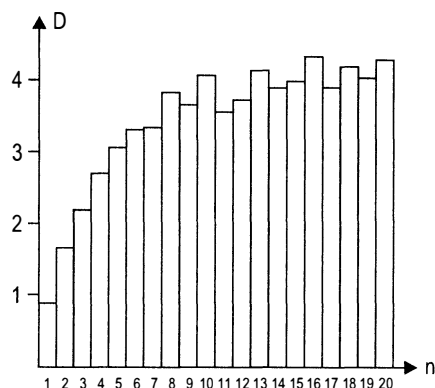
Rys. 3.128 Wymiary korelacyjne dla spółki Rafako dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.129 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Tonsil dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.130 Wymiary korelacyjne dla spółki Tonsil dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rysunki 3.125, 3.127, 3.129 ilustrują wykresy krzywych $\ln C_2(l)$, a rysunki 3.126, 3.128, 3.130 przedstawiają wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia, dla badanych spółek sektora przemysłu elektromaszynowego. Otrzymane wyniki zestawiono także w tabeli 3.35.

Tabela 3.35 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek przemysłu elektromaszynowego dla $\tau = 7$

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Kable | 0,911 | 1,72 | 2,36 | 2,89 | 3,24 | 3,64 | 3,85 | 4,17 | 4,25 | 4,56 |
| Rafako | 0,948 | 1,75 | 2,22 | 2,72 | 3,06 | 3,17 | 3,7 | 4,11 | 4,05 | 4,26 |
| Tonsil | 0,897 | 1,69 | 2,2 | 2,69 | 3,04 | 3,3 | 3,34 | 3,82 | 3,65 | 4,06 |

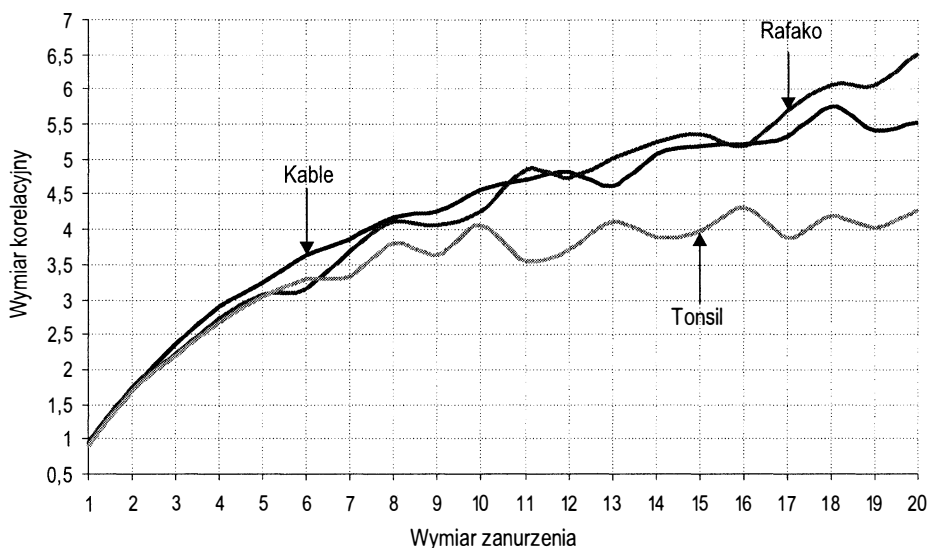
| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Kable | 4,71 | 4,81 | 4,63 | 5,09 | 5,2 | 5,22 | 5,34 | 5,76 | 5,41 | 5,52 |
| Rafako | 4,86 | 4,74 | 5,03 | 5,24 | 5,36 | 5,2 | 5,71 | 6,06 | 6,06 | 6,51 |
| Tonsil | 3,55 | 3,73 | 4,12 | 3,89 | 3,98 | 4,32 | 3,9 | 4,2 | 4,04 | 4,28 |

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.35 dostarcza zróżnicowanych wartości wymiarów korelacyjnych. W zależności od badanej spółki, określenie wymiaru fraktalnego ma różny stopień trudności. I tak dla szeregu czasowego spółki Kable wymiary korelacyjne rosną w zasadzie cały czas, wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia. Wzrost ten jest jednak dosyć powolny i można uznać za zbieganie do pewnej wartości już od czternastego wymiaru zanurzenia. Zgodnie z tym założeniem wymiar fraktalny zawiera się między 5.09 a 5.7, jego średnia wartość (średnia z wartości wymiarów korelacyjnych dla wymiarów zanurzeń 14-20) wyniosła 5.36. Mimo tak dużej ilości danych w szeregu czasowym spółki Kable, wynik ten nie jest zbyt satysfak-

cjonujący, lecz przyczyną może być niepoprawnie dobrana wartość $\tau = 7$, przez co atraktor nie mógł się prawidłowo rozwinąć. Dla tak długiego jak 4 lata cyklu bardzo prawdopodobna jest konieczność użycia do obliczeń wyższej wartości przesunięcia czasowego niż 7. Okaże się to w drugiej części analizy. Graficzną ilustracją danych zawartych w tabeli 3.35 jest rysunek 3.131.

Rys. 3.131 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek przemysłu elektromaszynowego

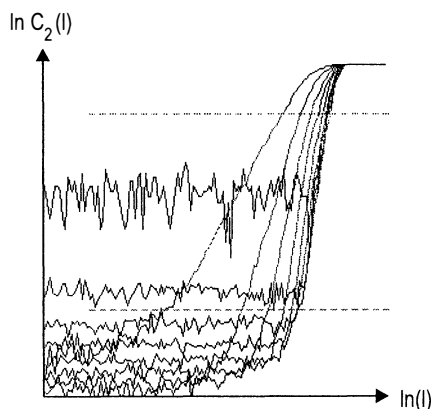


Źródło: opracowanie własne.

Powyższy rysunek doskonale ilustruje, dlaczego nie można wyznaczyć wymiaru fraktalnego dla drugiej badanej spółki – Rafako. Wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia rośnie wartość wymiaru korelacyjnego mu odpowiadającego. Wzrost ten jest gwałtowny i nie podlega nawet częściowej stabilizacji. Z pewnością jest to wpływ stosunkowo niewielkiej liczby danych, w porównaniu do pozostałych spółek sektora przemysłu elektromaszynowego, jak również niskiej wartości wykładnika Hursta. Sytuacja przedstawia się inaczej, gdy mówimy o ostatniej z badanych spółek, a mianowicie o szeregu czasowym Tonsilu. Dla tych danych stabilizacja i zdążanie wymiarów korelacyjnych do pewnej stałej wartości (a właściwie ich oscylację wokół niej) można obserwować już od 6-8 wymiaru zanurzenia, więc jest to proces szybko postępujący. Wymiar fraktalny dla tego szeregu zawiera się między 3.55 a 4.32, średnią jego wartość można określić jako około 3.96, więc jest to wartość bardzo bliska 4 (całkowita wartość wskazywałaby na brak występowania zjawiska chaosu, lecz w tym przypadku potwierdza występowanie tego zjawiska). Można powiedzieć, że dane Tonsilu to szandarowy przykład zjawiska chaosu deterministycznego na polskiej giełdzie papierów wartościowych.

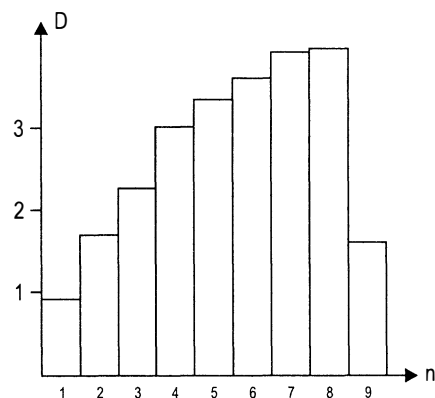
Dla wszystkich omówionych powyżej szeregów czasowych przeprowadzono identyczne obliczenia z zastosowaniem różnych wartości przesunięć czasowych. Rysunki 3.132, 3.134, 3.136 ilustrują wykresy krzywych $\ln C_2(l)$ a rysunki 3.133, 3.135, 3.137 przedstawiają wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia. Otrzymane wyniki zestawiono także w tabelach 3.36 oraz 3.37, przy czym graficzną ilustracją tabeli 3.36 jest rysunek 3.138.

Rys. 3.132 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Kable dla $\tau = 364$



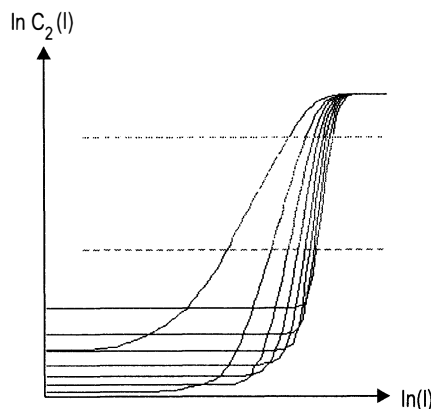
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.133 Wymiary korelacyjne
dla spółki Kable dla $\tau = 364$



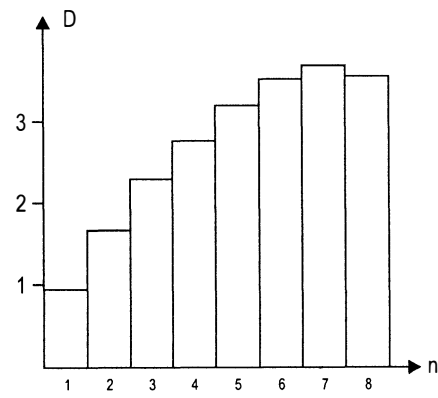
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.134 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Rafako dla $\tau = 224$

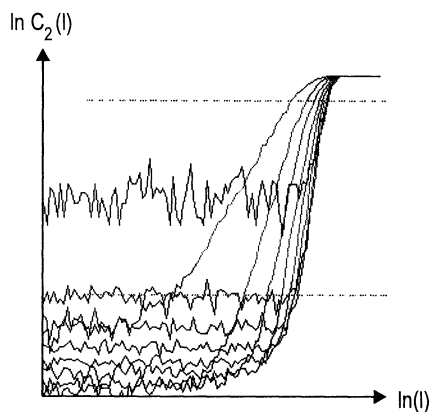


Źródło: opracowanie własne.

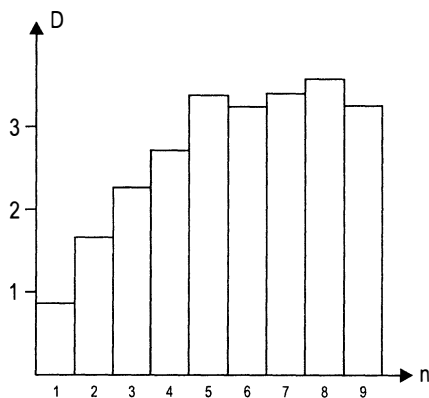
Rys. 3.135 Wymiary korelacyjne
dla spółki Rafako dla $\tau = 224$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.136 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Tonsil dla $\tau = 364$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.137 Wymiary korelacyjne dla spółki Tonsil dla $\tau = 364$ 

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.36 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla τ wg tab. 3.37

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Kable | 0,926 | 1,7 | 2,27 | 2,99 | 3,35 | 3,6 | 3,94 | 3,94 | 1,61 |
| Rafako | 0,929 | 1,68 | 2,29 | 2,77 | 3,2 | 3,54 | 3,67 | 3,56 | x |
| Tonsil | 0,892 | 1,67 | 2,3 | 2,73 | 3,38 | 3,26 | 3,42 | 3,6 | 3,29 |

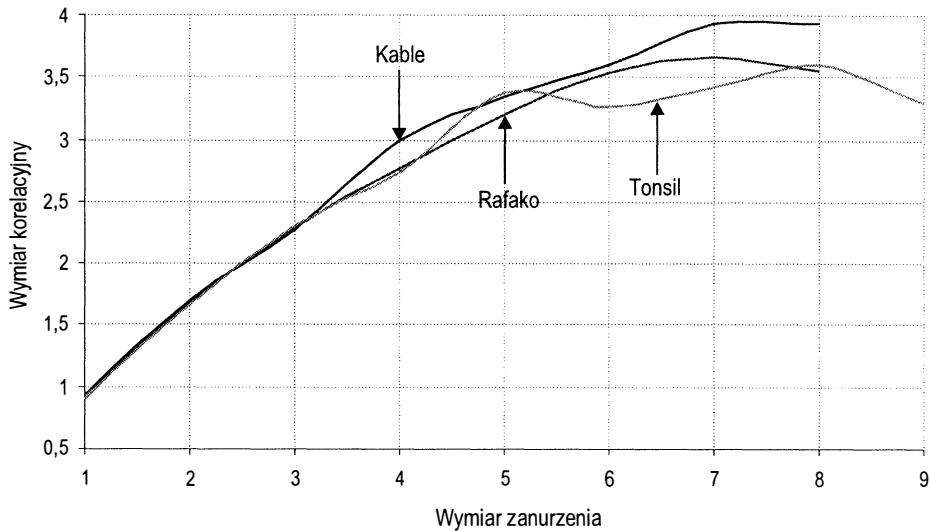
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.37 Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora przemysłu elektromaszynowego

| Nazwa | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny | τ (w dniach) | Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|--------|------------------|-----------------------------|-------------------|------------------------------|----------------------------|------------------|
| Kable | 4 | 3,6 – 3,9 | 364 | 426 | 209 | 0,700 |
| Rafako | 4 | 3,5 – 3,6 | 224 | 275 | 128 | 0,557 |
| Tonsil | 4 | 3,3 – 3,6 | 364 | 426 | 209 | 0,665 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.138 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu elektromaszynowego dla τ wg tab. 3.37



Źródło: opracowanie własne.

Przeprowadzone obliczenia wskazują na brak wymiaru fraktalnego dla takich spółek jak Kable i Rafako, co potwierdza wykonaną śniej analizę dla $\tau = 7$. Mimo wysokiego wykładnika Hursta (0.7) i dużej liczby danych (426) szereg czasowy spółki Kable nie pozwolił wykryć regularnej struktury jego budowy. Wysoka wartość przesunięcia czasowego (364) nie jest błędnie wyznaczona, gdyż dla tak samo wielkiej wartości τ , wykryto stabilny wymiar fraktalny dla ostatniej badanej spółki tego sektora – Tonsilu. Oba szeregi czasowe były równie długie, odpowiadał im identyczny cykl, jak też identyczna wartość τ . Jedynie wartości wykładnika Hursta różniły się nieznacznie. Na tej podstawie można twierdzić, że w przypadku spółki Kable, cykl jest o wiele dłuższy niż uprzednio wyznaczony, co pociąga za sobą konieczność zgromadzenia znacznie większej ilości danych. Na rysunku 3.138 usunięto dla tej spółki wartość wymiaru korelacyjnego dla dziewiątego wymiaru zanurzenia z powodu jego bardzo niskiej wartości uwarunkowanej charakterem krzywej $\ln C_2(l)$. Przypadek Rafako pozwala zaobserwować nieznaczne stabilizowanie się wymiarów korelacyjnych w okolicy liczby 3.5 dla trzech ostatnich wymiarów zanurzenia (6-8). Jest to jednak zbyt niewielka liczba, zważywszy że w analizie dla $\tau = 7$ nie uzyskano przybliżonej wartości wymiaru fraktalnego, by móc uznać wynik oparty na tej podstawie za wiarygodny. Dopatrując się przyczyny niepowodzenia analizy fraktalnej, nie możemy raczej mówić o występowaniu pamięci krótkoterminowej w przypadku przesunięcia czasowego równego 224. Niepowodzenie można tłumaczyć stosunkowo małą liczbą danych. Satisfakcjonujące wyniki osiągnięto jednak dla szeregu czasowego spółki Tonsil. Charakteryzował ją wykładnik Hursta 0.665 oraz długi, około 4 letni cykl. Analizę przeprowadzono dla $\tau = 364$, czyli identycznego jak w przypadku spółki Kable, przy tej samej liczbie danych. Wyznaczono 9 krzywych $\ln C_2(l)$, których współczynniki kierunkowe środkowych części pozwoliły okre-

ślić wymiary korelacyjne. Te szybko stabilizowały się na pewnym stałym poziomie, wynoszącym 3.3 – 3.6, już od piątego wymiaru zanurzenia. Na tej podstawie wyznaczono wymiar fraktalny, który wyniósł 3.39, a jego ułamkowa wartość świadczy o występowaniu zjawiska chaosu deterministycznego w badanym układzie.

3.2.2 Makrosektor FINANSE

Makrosektor Finanse dostarcza niewielkiej liczby badanych spółek. Jest to uwarunkowane małą liczbą jego podsektorów. Spółki tego makrosektora są jednymi z najdłużej utrzymujących się na giełdzie, bardzo podobnie jak w przypadku spółek makrosektora Przemysłu. Jednak spółki makrosektora finansowego stanowią bardzo ciekawą grupę, a mianowicie ich akcje budzą bardzo żywe zainteresowanie, ze względu na stabilną pozycję rynkową, co pociąga za sobą minimalne ryzyko inwestycji. Do badań zakwalifikowano dwa podsektory finansów: banki i ubezpieczenia.

3.2.2.1 Podsektor BANKI

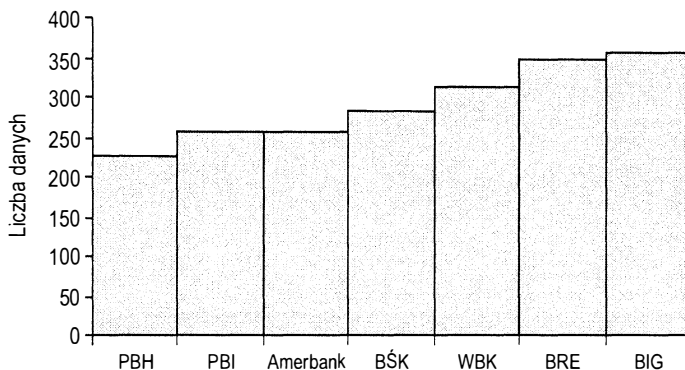
Do tego podsektora zakwalifikowano największą liczbę spółek giełdowych (7), mimo iż liczba wszystkich zawartych w nim spółek to jedynie 16. Jednak tylko sektor przemysłu spożywczego może być porównywany do sektora banki pod względem ilości analizowanych spółek (było ich 6). Banki będą reprezentowane przez spółki zawarte w tabeli 3.38.

Tabela 3.38 Wybrane do analizy spółki sektora banków

| Spółka | Liczba danych (tygodniowych) |
|-----------------|------------------------------|
| Amerbank | 258 |
| BIG | 357 |
| BPH | 227 |
| BRE | 349 |
| BŚK | 281 |
| Kredyt Bank PBI | 255 |
| WBK | 312 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.139 Liczba danych dla wybranych spółek sektora banków

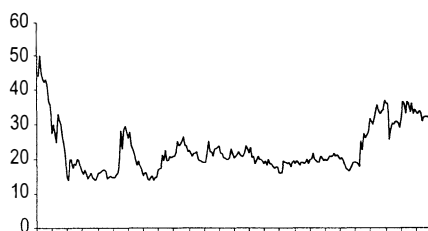


Źródło: opracowanie własne.

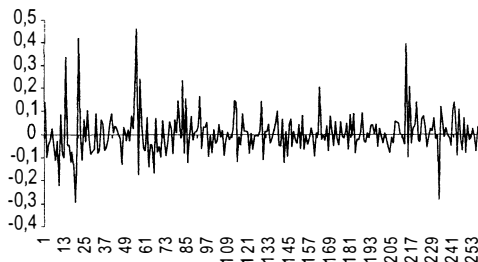
Na podstawie powyższej tabeli można zauważyć, że długości szeregów czasowych wymienionych w niej spółek są zróżnicowane. Rysunek 3.139 przedstawia zawarte w tabeli 3.38 spółki uporządkowane ze względu na liczbę danych. Pozwala to stwierdzić, że długość szeregów czasowych dla badanych banków jest zróżnicowana w sposób liniowy – nie ma gwałtownych skoków tych wartości, ale zauważyć należy, że pomiędzy spółką dla której dysponujemy największą liczbą danych (BIG 357 punktów) a tą dla której danych mamy najmniej (BPH 227 punktów) jest różnica aż 130 punktów. Fizyczny sens różnic tych długości to oczywiście różnice czasu początków funkcjonowania danych spółek na giełdzie – i tak na przykład wiadomo, że notowania BIG pojawiły się po raz pierwszy 130 tygodni wcześniej niż notowania BPH.

Poniżej zamieszczono wykresy szeregów czasowych, dołączono także wykresy danych zawierających trend dla wybranych spółek, wymienionych w tabeli 3.38.

Rys. 3.140 Amerbank – dane oryginalne z trendem

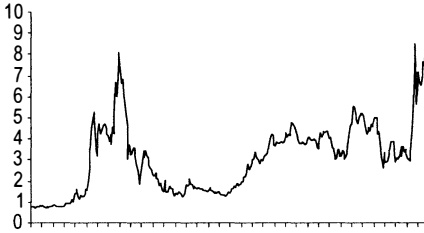


Źródło: opracowanie własne.

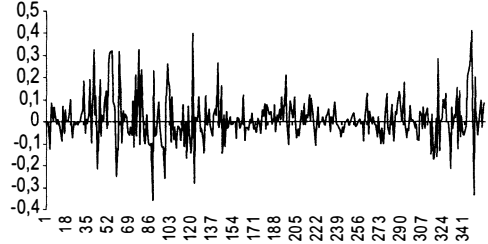
Rys. 3.141 Amerbank – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.142 BIG – dane oryginalne z trendem

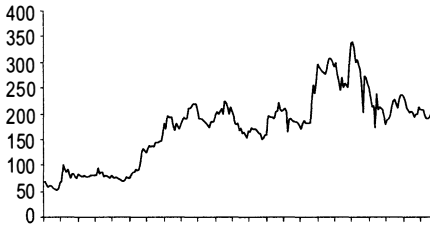


Źródło: opracowanie własne.

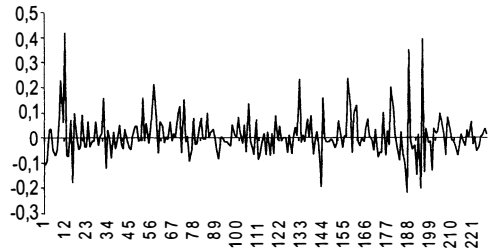
Rys. 3.143 BIG – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3. 144 BPH – dane oryginalne z trendem



Źródło: opracowanie własne.

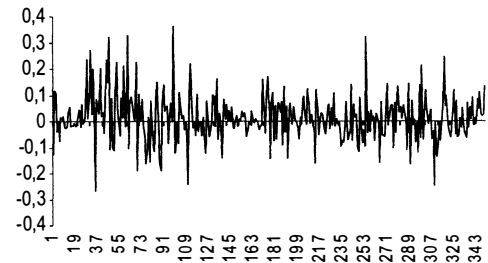
Rys. 3.145 BPH – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.146 BRE – dane oryginalne z trendem

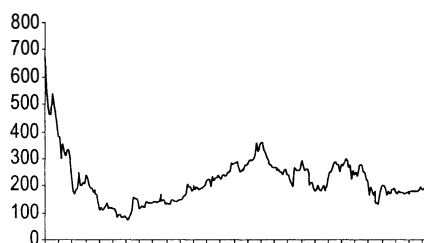


Źródło: opracowanie własne.

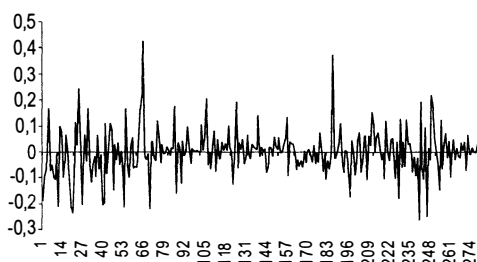
Rys. 3.147 BRE – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.148 BŚK – dane oryginalne z trendem

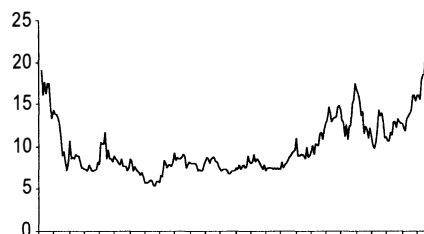


Źródło: opracowanie własne.

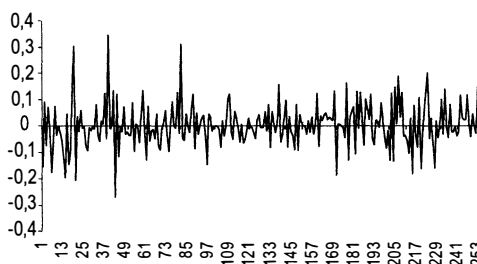
Rys. 3.149 BŚK – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.150 Kredyt Bank PBI – dane oryginalne z trendem



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.151 Kredyt Bank PBI – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

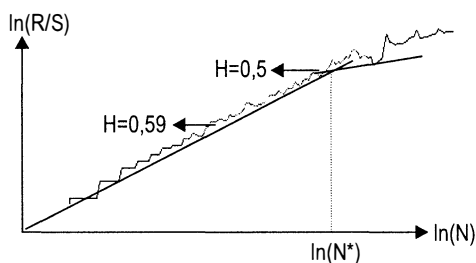
Rys. 3.152 WBK – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawione szeregi czasowe mają zróżnicowaną strukturę – część z nich wykazuje większe wahania cen, a część względnie równomierny proces tych wahań. Bez zastosowania żadnej analizy można stwierdzić na podstawie rysunku 3.143, że szereg czasowy BIG zawiera co najmniej jeden pełny cykl, co widać również na rysunku 3.142, obrazującym ten sam szereg czasowy zawierający trend. Podobną sytuację zaobserwowano dla danych spółki BRE (rys. 3.146 i 3.147). Na uwagę zasługuje rysunek 3.150, przedstawiający kształtowanie się cen akcji Kredyt Banku PBI – mógłby on obrazować jeden pełny cykl, lecz rysunek 3.151, ilustrujący przyrosty cen akcji tej spółki nie potwierdza takiego przypuszczenia. W przypadku pozostałych szeregów czasowych niezbędne jest wykonanie stosownych obliczeń, poza tym powinny one potwierdzić przypuszczenia co do banków BIG i BRE.

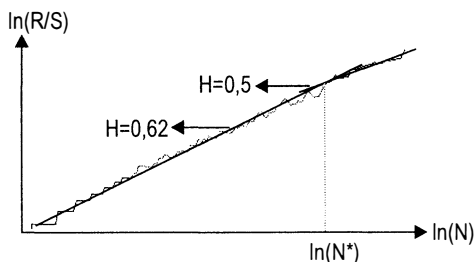
Obliczenia te, czyli analizę R/S obrazują rysunki 3.153 – 3.159 oraz tabela 3.39.

Rys. 3.153 Analiza R/S dla spółki Amerbank dla $\tau = 7$



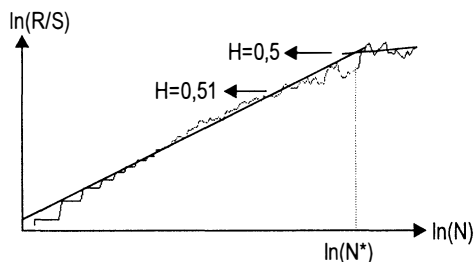
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.154 Analiza R/S dla spółki BIG dla $\tau = 7$



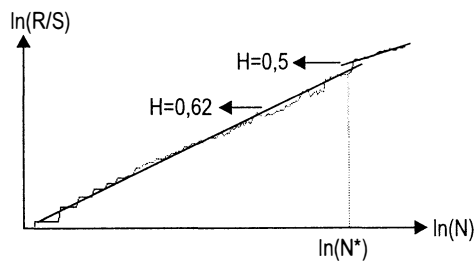
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.155 Analiza R/S dla spółki BPH dla $\tau = 7$

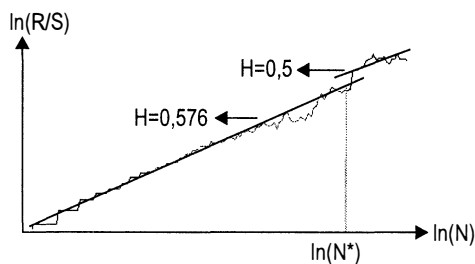


Źródło: opracowanie własne.

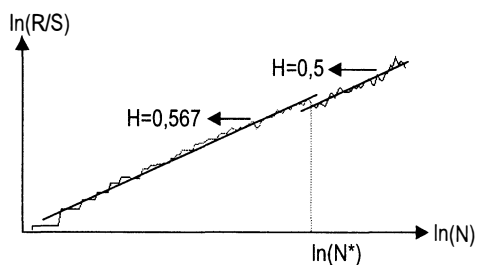
Rys. 3.156 Analiza R/S dla spółki BRE dla $\tau = 7$



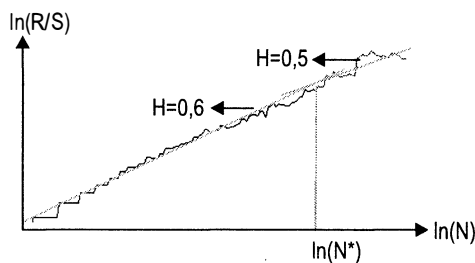
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.157 Analiza R/S dla spółki BŚK dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.158 Analiza R/S dla spółki Kredyt Bank PBI dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.159 Analiza R/S dla spółki WBK dla $\tau = 7$ 

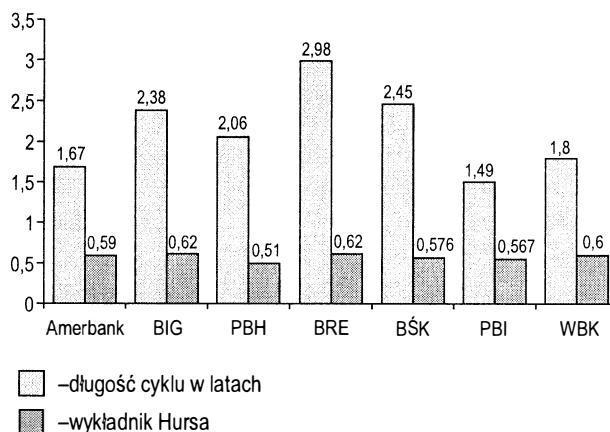
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.39 Wykładnik Hursta dla wybranych spółek sektora banków

| Spółka | Wykładnik Hursta | Długość cyklu w miesiącach | Długość cyklu w latach | Liczba danych (tygodniowych) |
|-----------------|------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------|
| Amerbank | 0,590 | 20,0 | 1,67 | 258 |
| BIG | 0,620 | 28,5 | 2,38 | 357 |
| BPH | 0,510 | 24,8 | 2,06 | 227 |
| BRE | 0,620 | 35,8 | 2,98 | 349 |
| BŚK | 0,576 | 29,4 | 2,45 | 281 |
| Kredyt Bank PBI | 0,567 | 17,9 | 1,49 | 255 |
| WBK | 0,600 | 21,6 | 1,80 | 312 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys.3.160 Porównanie wartości wykładników Hursta i długości cyklu dla badanych spółek sektora bankowego

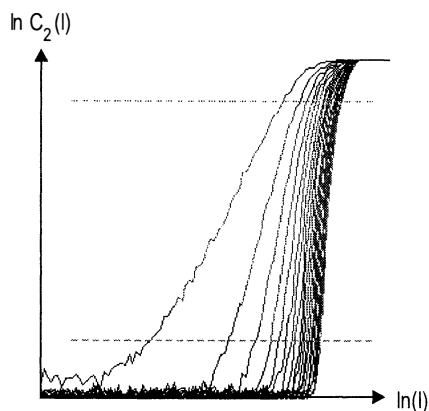


Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 3.160 wyraźnie pokazuje, że długość cyklu nie ma bezpośredniego wpływu na wykładnik Hursta i odwrotnie. Dwie spółki mające najwyższy wykładnik Hursta 0.62 to BRE oraz BIG. Mają one również zbliżoną liczbę danych (długości ich szeregów czasowych różnią się o 8 punktów, czyli zaledwie 2 miesiące później, w stosunku do BIG, akcje BRE pojawiły się na giełdzie po raz pierwszy). Jednak ich cykle różnią się zasadniczo – cykl BRE jest o ponad 7 miesięcy dłuższy. Najtrafniej byłoby inwestować właśnie w akcje tych dwóch spółek sektora bankowego, ze względu na najwyższą wartość wykładnika Hursta. Najbardziej niestabilną spółką akcyjną okazał się bank BPH – dla niego wartość wykładnika Hursta wyznaczono na 0.521 co jest bardzo niską wartością i oznacza, że szereg czasowy tej spółki przypomina raczej sygnał stochastyczny. Interesujący przypadek Kredyt Banku PBI (rys. 3.150) cechowała wartość wykładnika Hursta równa 0.567, lecz cykl, jak wykazały obliczenia był niższy niż się spodziewano i wyniósł jedynie półtora roku. Należy tu zaznaczyć, że spośród wszystkich badanych szeregów czasowych, jedynie dla Kredyt Banku PBI wystąpiły trudności w wyznaczeniu wykładnika Hursta (powodem była gładkość krzywej w analizie R/S, brak charakterystycznego załamania, za którym krzywa miałaby wartość współczynnika kierunkowego równą 0.5, charakterystyczną dla sygnałów stochastycznych). W przypadku pozostałych spółek wykładnik Hursta był dosyć wysoki i zawierał się w przedziale 0.576 – 0.6. Średnia wartość tej miary dla całego sektora bankowego wyniosła 0.58, natomiast średni cykl to 2.1 roku.

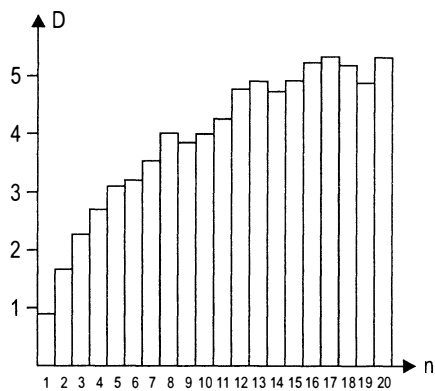
Poniżej zamieszczono wyniki analizy fraktalnej wybranych spółek sektora bankowego, dla $\tau = 7$. Rysunki 3.161 – 3.173 ilustrują wykresy krzywych $\ln C_2(l)$, a rysunki 3.162 – 3.174 przedstawiają wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia. Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 3.40, której to graficzną ilustracją jest rysunek 3.175.

Rys. 3.161 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Amerbank dla $\tau = 7$



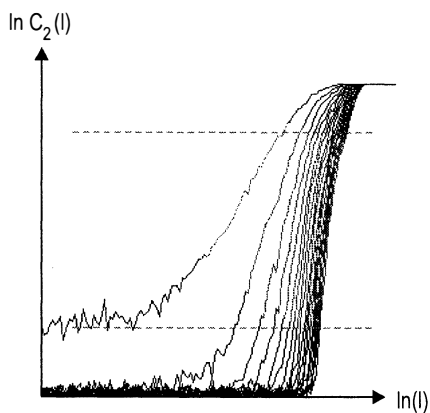
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.162 Wymiary korelacyjne dla spółki Amerbank dla $\tau = 7$



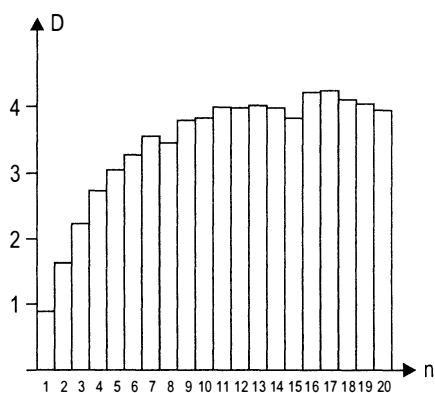
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.163 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki BIG dla $\tau = 7$



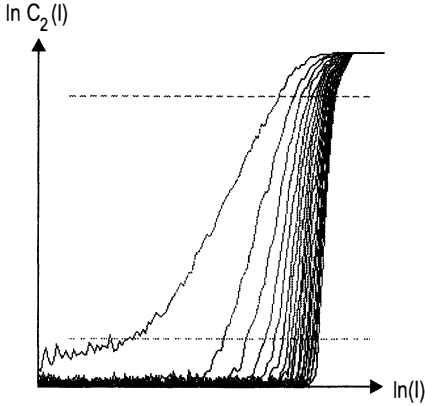
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.164 Wymiary korelacyjne dla spółki BIG dla $\tau = 7$



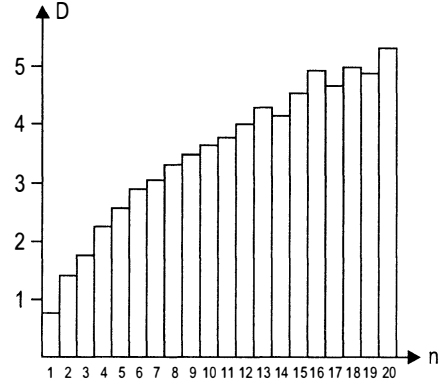
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.165 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki BPH dla $\tau = 7$



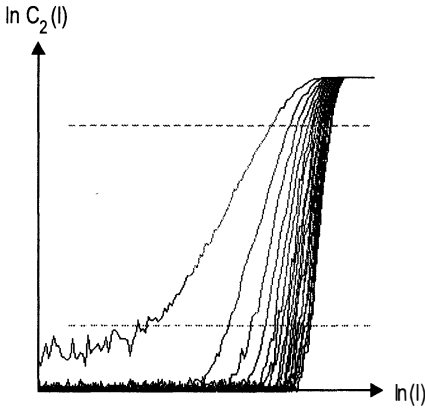
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.166 Wymiary korelacyjne
dla spółki BPH dla $\tau = 7$



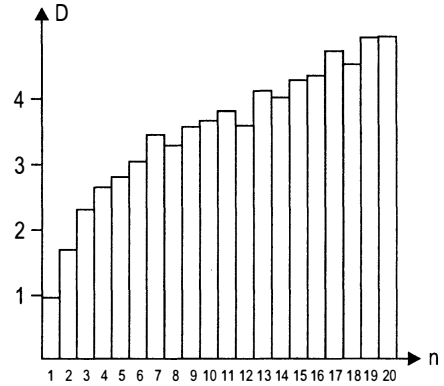
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.167 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki BRE dla $\tau = 7$



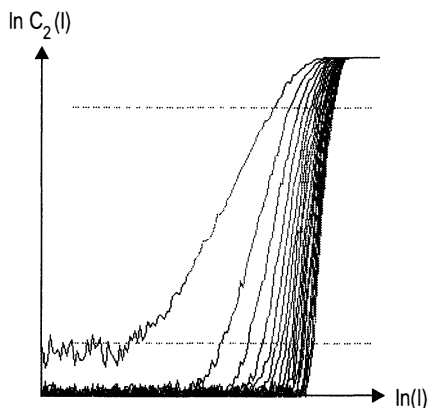
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.168 Wymiary korelacyjne
dla spółki BRE dla $\tau = 7$



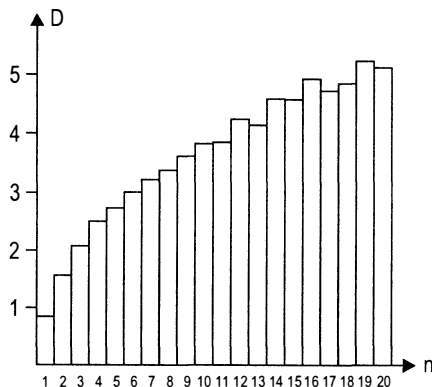
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.169 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki BSK dla $\tau = 7$



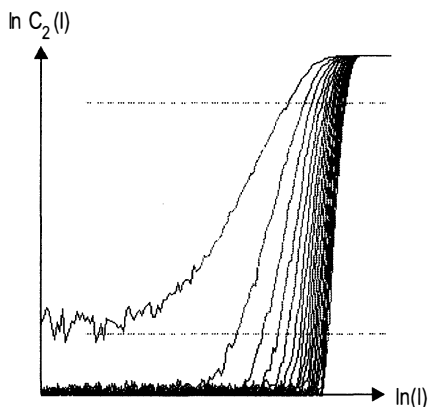
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.170 Wymiary korelacyjne dla spółki BSK dla $\tau = 7$



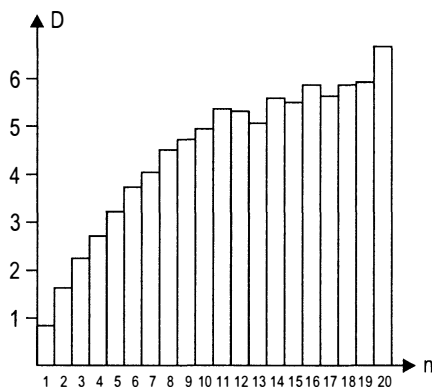
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.171 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Kredyt Bank PBI dla $\tau = 7$

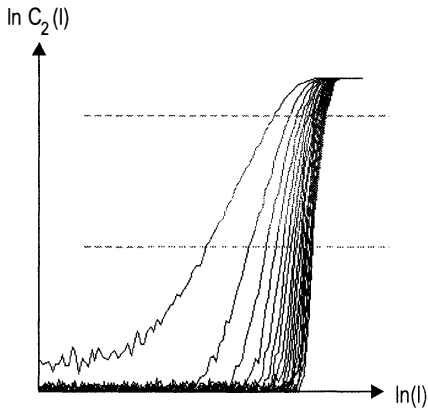


Źródło: opracowanie własne.

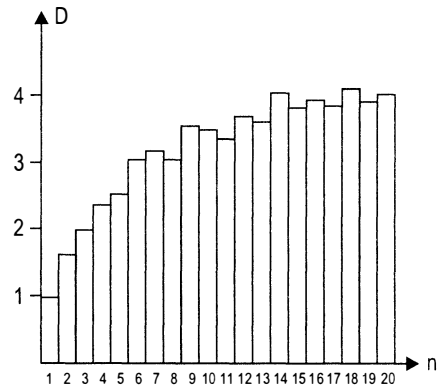
Rys. 3.172 Wymiary korelacyjne dla spółki Kredyt Bank PBI dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.173 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki WBK dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.174 Wymiary korelacyjne dla spółki WBK dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

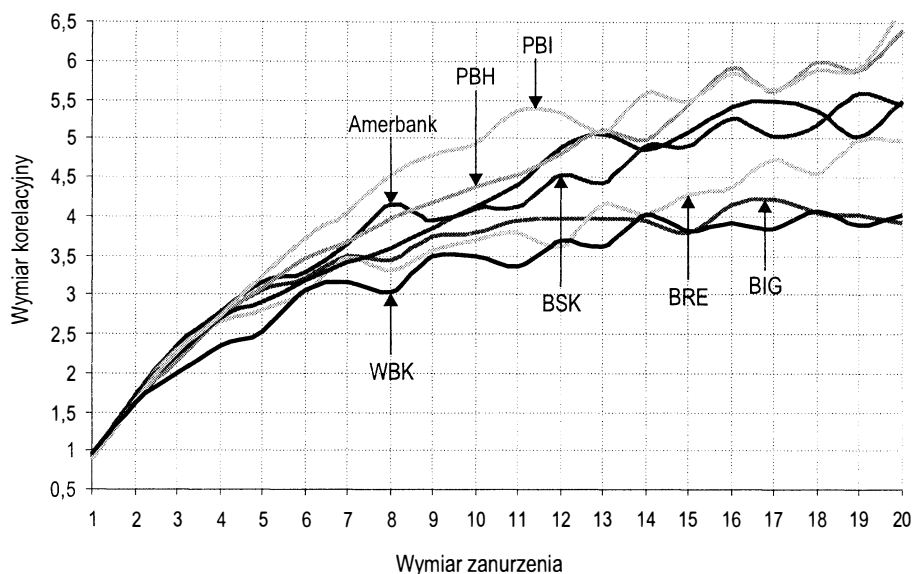
Tabela 3.40 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla wybranych spółek sektora banków dla $\tau = 7$

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Amerbank | 0,926 | 1,72 | 2,34 | 2,78 | 3,16 | 3,29 | 3,65 | 4,14 | 3,95 | 4,12 |
| BIG | 0,922 | 1,61 | 2,23 | 2,72 | 3,05 | 3,22 | 3,48 | 3,43 | 3,74 | 3,8 |
| BPH | 0,895 | 1,67 | 2,15 | 2,69 | 3,09 | 3,45 | 3,66 | 3,98 | 4,18 | 4,38 |
| BRE | 0,95 | 1,7 | 2,3 | 2,64 | 2,8 | 3,02 | 3,45 | 3,3 | 3,57 | 3,68 |
| BSK | 0,915 | 1,71 | 2,21 | 2,69 | 2,91 | 3,18 | 3,42 | 3,6 | 3,85 | 4,09 |
| PBI | 0,869 | 1,65 | 2,27 | 2,73 | 3,24 | 3,72 | 4,04 | 4,52 | 4,77 | 4,94 |
| WBK | 0,955 | 1,61 | 1,99 | 2,36 | 2,53 | 3,05 | 3,15 | 3,02 | 3,5 | 3,48 |

| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Amerbank | 4,39 | 4,89 | 5,06 | 4,86 | 5,07 | 5,42 | 5,48 | 5,35 | 5,04 | 5,5 |
| BIG | 3,94 | 3,97 | 3,98 | 3,94 | 3,78 | 4,15 | 4,22 | 4,04 | 4,03 | 3,91 |
| BPH | 4,53 | 4,8 | 5,12 | 4,97 | 5,43 | 5,93 | 5,61 | 5,99 | 5,88 | 6,4 |
| BRE | 3,78 | 3,61 | 4,15 | 4,01 | 4,28 | 4,37 | 4,74 | 4,56 | 4,97 | 4,98 |
| BSK | 4,13 | 4,53 | 4,43 | 4,91 | 4,91 | 5,27 | 5,04 | 5,19 | 5,59 | 5,44 |
| PBI | 5,36 | 5,33 | 5,07 | 5,6 | 5,5 | 5,85 | 5,64 | 5,89 | 5,92 | 6,68 |
| WBK | 3,37 | 3,7 | 3,61 | 4,02 | 3,82 | 3,93 | 3,83 | 4,07 | 3,9 | 4,01 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.175 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru dla wybranych spółek sektora bankowego dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

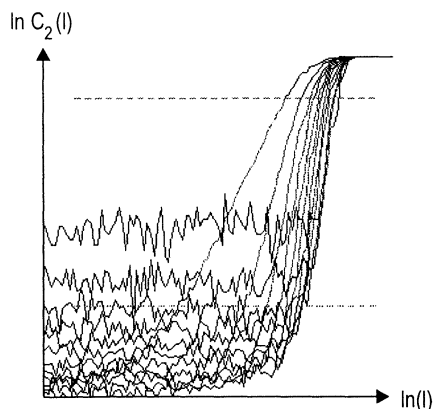
Ponieważ sektor banków jest tak liczny pod względem zaklasyfikowanych do analizy fraktalnej spółek, można było spodziewać się wykrycia wymiaru fraktalnego dla przynajmniej niektórych z nich. Przeprowadzone obliczenia wskazują, że spółkami takimi są Amerbank, BIG oraz WBK. Wszystkie te spółki cechuje wysoka (jak na ten sektor) wartość wykładnika Hursta. W przypadku Amerbanku, w odróżnieniu od BIG i WBK, dysponujemy stosunkowo krótkim szeregiem czasowym – jedynie 258 punktów przy 357 dla BIG i 312 dla WBK. Warto jednak zauważyć, że struktura danych Amerbanku jest bardzo regularna, dlatego nawet przy krótkim szeregu czasowym można wykonać dokładne obliczenia. Godny uwagi jest fakt, iż cykl dla tej spółki, wynoszący około 20 miesięcy, jest najkrótszy spośród wszystkich trzech spółek dla których wyznaczono wymiar fraktalny. Wymiar ten w przypadku Amerbanku zawierał się w przedziale 4.86 – 5.48, co daje średnią 5.186. Jednak wymiary korelacyjne zaczynają oscylować wokół tej wartości dosyć późno, bo dopiero od 12 wymiaru zanurzenia. BIG to kolejny ciekawy przypadek – tutaj wymiary korelacyjne stabilizują się bardzo szybko – już od dziewiątego wymiaru zanurzenia. Jednak oscylują one wokół liczby 4, co świadczyło by o braku wymiaru fraktalnego, a wręcz przeciwnie, o tym, że mamy do czynienia ze zwykłym czterowymiarowym układem. Tak byłoby, gdyby wymiary korelacyjne wynosiły dokładnie 4 (żaden z 20 obliczonych wymiarów korelacyjnych nie jest dokładnie równy 4), ale dla danych eksperymentalnych wymiar fraktalny można określić jedynie jako wartość przybliżoną przedziałem, lub jako średnią z wymiarów korelacyjnych (zakwalifikowanych do tego przedziału). W przypadku szeregu czasowego BIG przedział taki można określić jako 3.74 – 4.22, co nie jest najlepszym przybliżeniem, gdyż zawiera liczbę 4, dlatego jako wartość wymiaru fraktalnego lepiej przyjąć średnią,

która wyniosła 3.958. Wyraźnie widać, że nie jest to liczba całkowita, więc atraktor tego szeregu ma charakter fraktalny i nazywa się go atraktorem dziwnym. Za występowaniem zjawiska chaosu deterministycznego w szeregu czasowym BIG przemawia także wykładnik Hursta wynoszący 0.62, a więc dużo wyższy niż dla sygnałów o charakterze stochastycznym. Duża ilość danych (357), jak i dosyć długi (28.5 miesiąca) cykl, wskazują na dokładność i wiarygodność otrzymanego wyniku. Ostatnią spółką giełdową sektora bankowego, dla której można mówić o istnieniu wymiaru fraktalnego jest WBK. W jej przypadku dysponowano szeregiem czasowym o długości 312 punktów (czyli 312 tygodni) oraz ustalonym na 21.6 miesiąca cyklem. Wykładnik Hursta wyniósł 0.6 i był drugi co do wielkości w badanym sektorze. Jeśli chodzi o wymiar fraktalny, to można określić dwa rozdzielne obszary stabilizowania się wartości wymiarów korelacyjnych – będą to przedziały ograniczone wymiarami zanurzenia 9 – 13, oraz 14 – 20. Dla pierwszego obszaru wymiar fraktalny jest niższy i zawiera się między 3.37 a 3.7, inaczej wyrażone jako około 3.532. W drugim obszarze wymiar fraktalny jest nieco wyższy i wynosi około 3.94. Można także uznać, że wymiary korelacyjne zaczynają się stabilizować już od 9 wymiaru zanurzenia i na podstawie ich wartości dla zanurzeń 9 – 20 obliczyć wymiar fraktalny. Wtedy wartość jego wyniesie około 3.77 i będzie pośrednia między wartościami tego wymiaru dla obu obszarów stabilizacji wymiarów korelacyjnych. Ta miara wydaje się najbardziej właściwa. Ciekawy jest fakt dobierania się w pary spółek badanego sektora – zauważmy, że wartości wymiarów korelacyjnych, a więc i wymiaru fraktalnego, spółek BIG i WBK są bardzo zbliżone, wykresy ich dążą do tej samej wartości i splatają się. Co ciekawsze, ich wykładniki Hursta są bardzo podobne (0.59 i 0.6), tak jak zresztą długości cyklu (20 miesięcy i 21.8 miesiąca). Jeśli chodzi o spółki w przypadku których nie udało się określić wymiaru fraktalnego, to jest ich aż 4, a więc stanowią 57% wszystkich spółek zaklasyfikowanych do reprezentowania sektora bankowego w analizie fraktalnej. W ich przypadku również zaobserwowano łączenie się wykresów wymiarów korelacyjnych w funkcji wymiaru zanurzenia w pary. Jedynie spółka BRE odstaje nieco od tej reguły, ale należy pamiętać, że do analizy zaklasyfikowano 7 banków, czyli nieparzystą liczbę, i para BRE nie została uwzględniona. Poza tym do 14 wymiaru zanurzenia przebieg krzywej na rysunku 3.175, odpowiadającej BRE, jest podobny do przebiegów krzywych BIG i WBK. Dla wyższych wymiarów zanurzenia nie przeplata się z żadnym innym wykresem, aż do 19 wymiaru zanurzenia, kiedy to zaczyna przyjmować wartości bliskie przyjmowanym przez krzywą Amerbanku. Przyglądając się dokładnie temu złożonemu rysunkowi, można dostrzec również podobieństwo przebiegu krzywych BRE i BŚK – krzywe przyjmują podobne kształty, a ich wartości są od siebie oddalone o średnio około 1 (i są wyższe dla BŚK) od około 10 wymiaru zanurzenia. Widać więc, że nie całkiem odosobniony jest wykres BRE na rysunku 167, jedynie nie przeplata się z żadnym innym wykresem dla wyższych wymiarów zanurzenia. Dla tej spółki dysponowano dużą liczbą danych (349) i długim czasem cyklu (35.8 miesiąca) a także najwyższym w sektorze bankowym, wykładnikiem Hursta (0.62). Przy tak długim cyklu 349 punktów – to mogło być za mało by wyznaczyć wymiar fraktalny. Choć dla niskich wymiarów zanurzeń (7-12) wymiary korelacyjne oscylują wokół liczby 3.565. Kolejne interesujące zachowania obserwujemy dla pary krzywych, należących do BPH i Kredyt Banku PBI. Przez pierwsze 13 wymiarów zanurzenia obie krzywe, mimo że podobne kształtem, biegną oddalone od siebie. Dla 13 wymiaru zanurzenia stykają się, by przeplatać się aż do 15 wymiaru zanurzenia, po którym przyjmowane wartości wymiarów korelacyjnych, a więc również wykresy krzywych, są praktycznie takie same. Mogło to być przyczyną zbliżonej licz-

by danych (227 BPH i 255 PBI, lecz długości cykli odbiegają od siebie – 24.8 BPH i 17.9 PBI), jak też wykładników Hursta (0.51 BPH i 0.567 PBI). Co więcej, wykres wymiarów korelacyjnych w funkcji zanurzenia dla PBI swoim kształtem bardzo przypomina przesunięty do dołu o około 1.5, wykres BŚK. Wszystkie wahania wymiaru korelacyjnego są bardzo dokładnie zachowane – kiedy jego wartość dla PBI, również wymiar korelacyjny BŚK maleje. Mówi to o wyraźnych zależnościach pomiędzy wymienionymi bankami. Zachowane zostało podobieństwo ilości danych (281 BŚK i 255 PBI) oraz wykładników Hursta (0.576 BŚK i 0.567 PBI), lecz różnica cykli wręcz wzrasta (29.4 BŚK i 17.9 PBI) w stosunku do zależności pomiędzy BPH i PBI. Wykres BŚK łączy się w parę z wykresem Amerbanku – przeplatają się wzajemnie przyjmując podobne wartości. W tym przypadku także zachowane jest podobieństwo liczby danych (258 Amerbank i 281 BŚK) oraz wykładnika Hursta (0.59 Amerbank i 0.576 BŚK), a także zauważalna różnica cykli (20 miesięcy Amerbank i 29.4 miesiąca BŚK). Przyczyną takich zależności mogą być fuzje i porozumienia bankowe, które regulują ceny akcji kilku spółek jednocześnie. Zwróćmy uwagę na problem roku 2000 – notowania wszystkich banków, mimo zapewnień z ich strony, że są przygotowane do wkroczenia w nowe milenium, ulegały wahaniom. Niepowodzenie określonego posunięcia podjętego w jednym banku może powodować spadek cen nie tylko jego akcji, lecz także walorów banków, które podobne przedsięwzięcie podjęły. Jako ogólny wniosek na zakończenie tej części analizy, można wysnuć, że najbezpieczniej inwestować w akcje BIG, nie tylko ze względu na najwyższy wykładnik Hursta, ale także na istnienie wymiaru fraktalnego wynoszącego około 3.958, co świadczy o istnieniu czterech składowych układu.

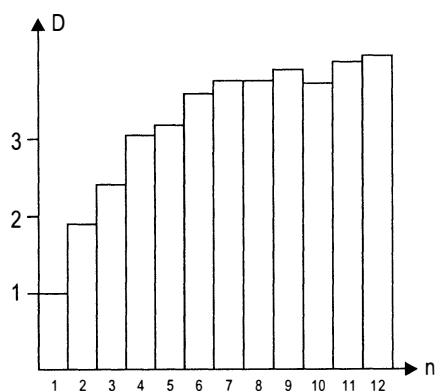
Część druga analizy to identyczne jak powyżej obliczenia, przeprowadzone dla przesunięć czasowych wyznaczonych zgodnie ze wzorem (2.40). Pozwala on indywidualnie dla każdego szeregu dobrać wartość τ , tak by obliczenia były najdokładniejsze, pamięć krótkoterminowa, która mogła być przyczyną niepowodzenia analizy dla $\tau = 7$, została wyeliminowana na rzecz pamięci długoterminowej. Przy tak wyznaczonym τ atraktor dla danej spółki powinien odpowiednio dokładnie rozwinąć się.

Rys. 3.176 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Amerbank dla $\tau = 154$



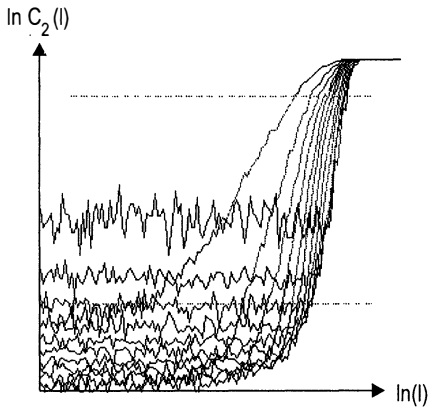
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.177 Wymiary korelacyjne dla spółki Amerbank dla $\tau = 154$



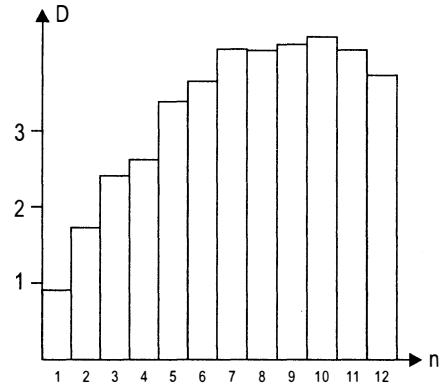
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.178 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki BIG dla $\tau = 217$



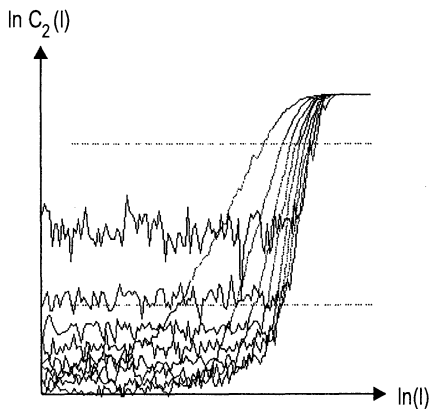
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.179 Wymiary korelacyjne
dla spółki BIG dla $\tau = 217$



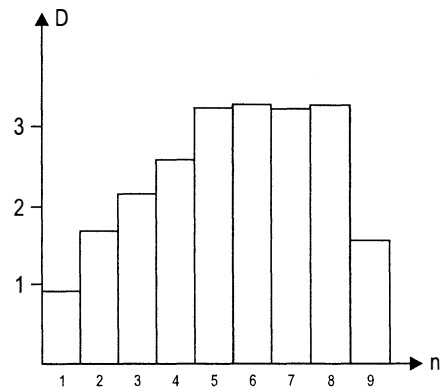
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.180 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki BPH dla $\tau = 189$



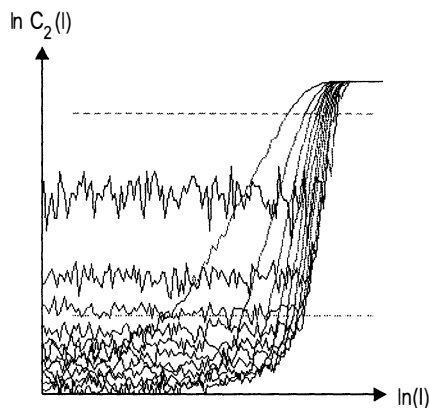
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.181 Wymiary korelacyjne
dla spółki BPH dla $\tau = 189$



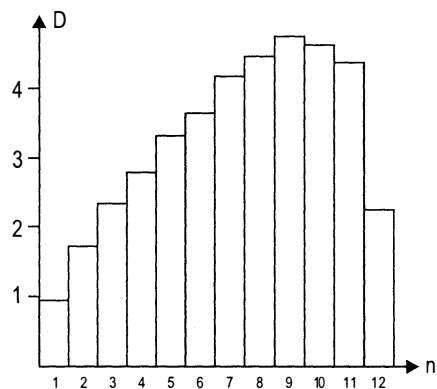
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.182 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki BRE dla $\tau = 217$



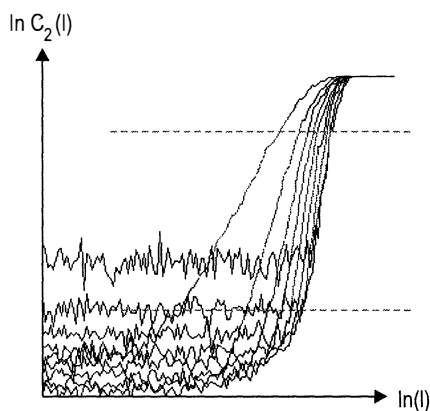
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.183 Wymiary korelacyjne dla spółki BRE dla $\tau = 217$



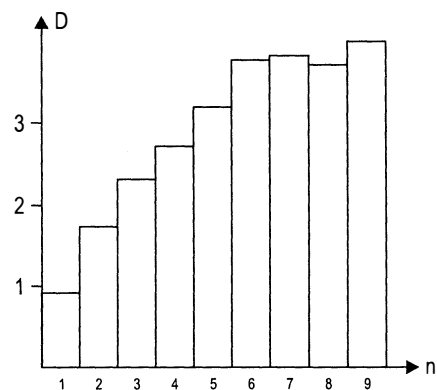
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.184 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki BSK dla $\tau = 224$



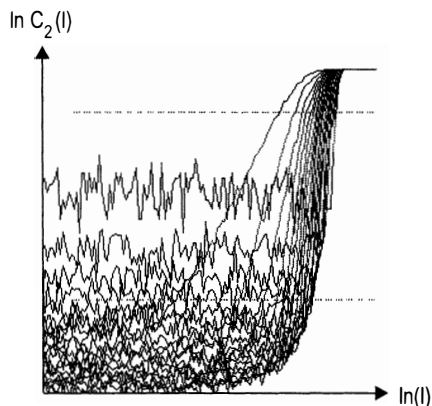
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.185 Wymiary korelacyjne dla spółki BSK dla $\tau = 224$



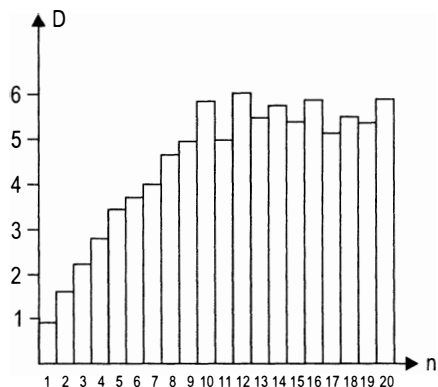
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.186 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Kredyt Bank PBI dla $\tau = 91$



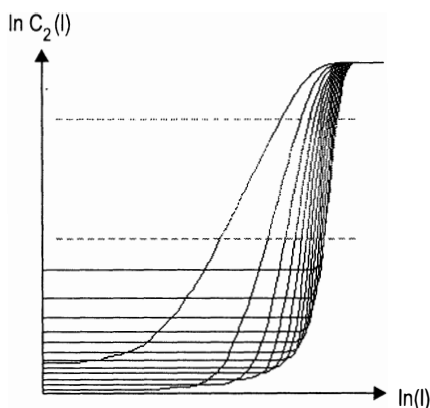
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.187 Wymiary korelacyjne
dla spółki Kredyt Bank PBI dla $\tau = 91$



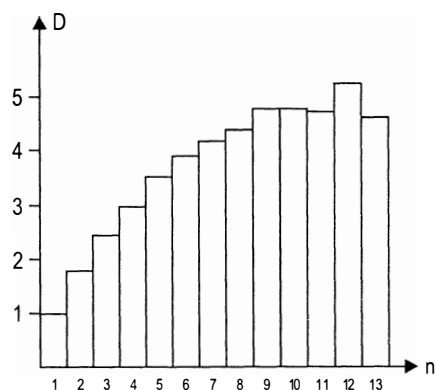
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.188 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki WBK dla $\tau = 161$



Źródło: opracowanie własne.

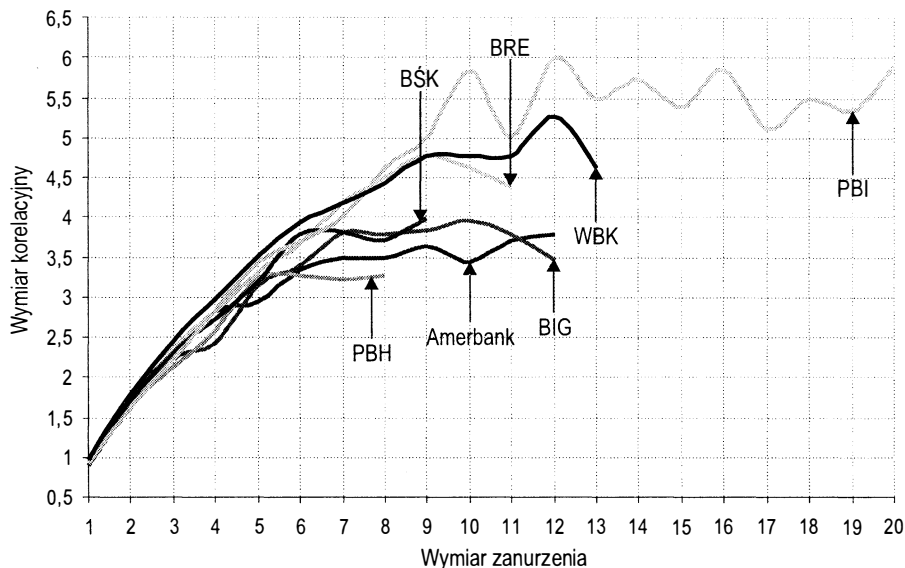
Rys. 3.189 Wymiary korelacyjne
dla spółki WBK dla $\tau = 161$



Źródło: opracowanie własne.

Rysunki 3.176, 3.178, 3.180, 3.182, 3.184, 3.186, 3.188 ilustrują wykresy krzywych $\ln C_2(l)$, a rysunki 3.177, 3.179, 3.181, 3.183, 3.185, 3.187, 3.189 przedstawiają wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia. Otrzymane wyniki zestawiono także w tabelach 3.41 i 3.42, przy czym graficzną ilustracją tabeli 3.41 jest rysunek 3.190.

Rys. 3.190 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora bankowego



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.41 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora banków dla τ wg tab. 3.42

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Amerbank | 0,953 | 1,78 | 2,25 | 2,82 | 2,95 | 3,33 | 3,5 | 3,49 | 3,63 | 3,45 |
| BIG | 0,899 | 1,64 | 2,22 | 2,43 | 3,15 | 3,4 | 3,8 | 3,78 | 3,83 | 3,95 |
| BPH | 0,924 | 1,67 | 2,14 | 2,58 | 3,23 | 3,27 | 3,21 | 3,26 | 1,57 | |
| BRE | 0,936 | 1,73 | 2,34 | 2,81 | 3,32 | 3,67 | 4,19 | 4,49 | 4,78 | 4,63 |
| BŚK | 0,923 | 1,71 | 2,3 | 2,71 | 3,19 | 3,78 | 3,81 | 3,71 | 3,99 | |
| PBI | 0,909 | 1,6 | 2,24 | 2,81 | 3,44 | 3,68 | 4,01 | 4,63 | 4,99 | 5,84 |
| WBK | 0,962 | 1,78 | 2,46 | 2,98 | 3,52 | 3,93 | 4,19 | 4,43 | 4,78 | 4,78 |

| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Amerbank | 3,72 | 3,78 | | | | | | | | |
| BIG | 3,79 | 3,47 | | | | | | | | |
| BPH | | | | | | | | | | |
| BRE | 4,37 | 2,26 | | | | | | | | |
| BŚK | | | | | | | | | | |
| PBI | 5,01 | 6,01 | 5,48 | 5,74 | 5,39 | 5,86 | 5,11 | 5,49 | 5,34 | 5,91 |
| WBK | 4,76 | 5,27 | 4,63 | | | | | | | |

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.42 Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora banków

| Nazwa | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny | τ (w dniach) | Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|----------|------------------|-----------------------------|-------------------|------------------------------|----------------------------|------------------|
| Amerbank | 4 | 3,30 – 3,78 | 154 | 258 | 87 | 0,590 |
| BIG | 4 | 3,40 – 3,95 | 217 | 357 | 124 | 0,620 |
| BPH | 4 | 3,21 – 3,27 | 189 | 227 | 108 | 0,510 |
| BRE | 5 | 4,19 – 4,78 | 217 | 349 | 156 | 0,620 |
| BŚK | 4 | 3,71 – 3,99 | 224 | 281 | 128 | 0,576 |
| PBI | 6 | 4,99 – 6,01 | 91 | 255 | 78 | 0,567 |
| WBK | 5 | 4,43 – 5,27 | 161 | 312 | 94 | 0,600 |

Źródło: opracowanie własne.

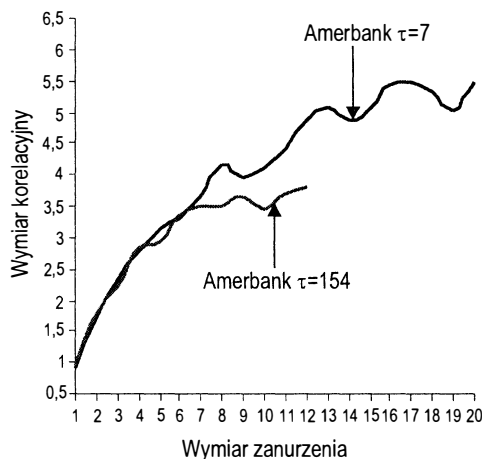
Najbardziej zwracającym uwagę wykresem na rysunku 3.190 jest oczywiście krzywa skonstruowana dla Kredyt Banku PBI. Wyznaczono dla niego aż 20 wymiarów korelacyjnych przy przesunięciu czasowym równym 91. Wymiar fraktalny można określać od dziewiątego wymiaru korelacyjnego (czyli wyznaczonego dla dziewiątego wymiaru zanurzenia). Wyraźnie oscyluje wokół liczby 5.5, przyjmując wartości z przedziału 4.99 – 6.01. Wymiar fraktalny można także przybliżyć poprzez średnią wartości wymiarów korelacyjnych obliczonych dla wymiarów zanurzeń 9 – 20. Jest on wtedy równy około 5.5142. Taki wynik nie jest zbieżny z obliczeniami przeprowadzonymi dla $\tau = 7$, co świadczy o wadze doboru odpowiedniego przesunięcia czasowego dla badanego szeregu. Jego wartość $\tau = 7$ spowodowała przejście wartości wymiarów korelacyjnych przez przedział 4.99 – 6.01, lecz potem wzrost wymiaru zanurzenia pociągał za sobą wzrost wymiaru korelacyjnego. Można więc z tego wnioskować, że dla $\tau = 7$ nie eliminowana jest pamięć krótkoterminowa, co spowodowało ciągły wzrost wartości wymiarów korelacyjnych, przy kolejnych wymiarach zanurzenia. W poprzedniej części analizy wymiar fraktalny wyznaczono dla trzech spółek: Amerbanku, BIG i WBK. Wymiar fraktalny był najbardziej zbliżony, dla obu wartości przesunięcia czasowego, w przypadku BIG. Przy $\tau = 7$ wyniósł 3.958, dla $\tau = 217$ był nieco niższy i wyniósł około 3.77, należy jednak pamiętać, że dla $\tau = 7$ wymiar fraktalny był obliczany na podstawie wymiarów korelacyjnych obliczonych dla wymiarów zanurzeń 9 – 20, a dla $\tau = 217$ tylko 7 – 12. Gdyby obliczyć wymiar fraktalny dla $\tau = 7$ na podstawie wymiarów korelacyjnych dla 7 – 12 wymiaru zanurzenia, to wynik wyniesie 3.73. Wskazuje to na duże podobieństwo otrzymanych wyników, co pozwala twierdzić, że już dla tak niskiej wartości przesunięcia czasowego jak tydzień eliminowana jest pamięć krótkoterminowa w znacznym stopniu. Całkowite jej wyeliminowanie możliwe jest jednak dopiero przy $\tau = 217$, ponieważ szereg czasowy jest długi co wskazuje na równie długie funkcjonowanie BIG na giełdzie papierów wartościowych. Ogólnie wiadomo, że na początku istnienia giełdy notowania odbywały się co tydzień, dlatego też przesunięcie czasowe $\tau = 7$ nie eliminuje całkowicie pamięci krótkoterminowej dla tak długich szeregów jak badany (357 tygodni – najdłuższy szereg sektora bankowego). Obrane $\tau = 217$ to inaczej około 7 tygodni, co w przypadku notowań cotygodniowych oznacza branie do analizy co siódmej danej – dlatego dla krótkich szeregów wartość $\tau = 7$ jest w większości przypadków słuszna a wyniki

obliczeń przy takim przesunięciu czasowym pokrywają się z wynikami dla τ wyznaczonych na podstawie wzoru (2.40).

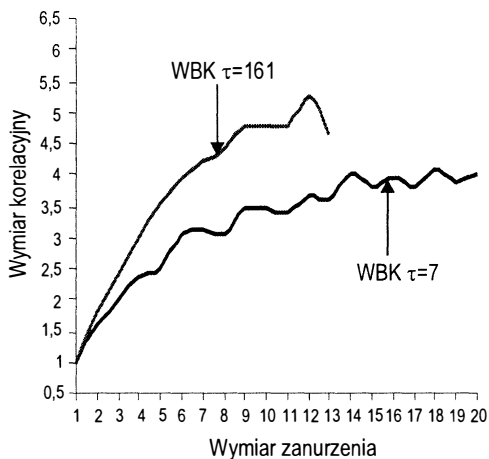
W przypadku pozostałych dwóch spółek, dla których przy $\tau = 7$ udało się określić wymiar fraktalny, czyli Amerbanku i WBK sytuacja przedstawia się nieco inaczej niż w przypadku BIG. Wartość wyznaczonego wymiaru fraktalnego dla Amerbanku, przy $\tau = 154$, jest dużo niższa niż dla $\tau = 7$. Na podstawie danych zebranych w tabeli 3.41 i rysunku 3.190 można stwierdzić, że wymiar fraktalny Amerbanku wynosi około 3.557, podczas gdy dla $\tau = 7$ jego wartość określono jako 5.186.

Rysunek 3.191 zawiera porównanie wykresów wymiarów korelacyjnych w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Amerbank przy obu wartościach przesunięć czasowych.

Rys. 3.191 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Amerbank przy $\tau = 7$ i $\tau = 154$



Rys. 3.192 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki WBK przy $\tau = 7$ i $\tau = 161$



Źródło: opracowanie własne.

Źródło: opracowanie własne.

W poprzedniej części analizy wspomniano już, że krzywa dla Amerbanku stabilizuje się na poziomie 5 – 5.5 dosyć późno, od około 13 wymiaru zanurzenia, co wskazywałoby na nie dość dobrze dobraną wartość przesunięcia czasowego. Dlatego też bardziej wiarygodne są wyniki analizy przy $\tau = 154$ – tutaj stabilizacja krzywej na poziomie około 3.5 następuje bardzo szybko – od około 6 wymiaru zanurzenia. Przy 4 zmiennych takiego układu dynamicznego ilość niezbędnych do wyznaczenia wymiaru fraktalnego wymiarów korelacyjnych to 9, przy czym ich zbieganie do pewnej wartości powinno być obserwowane już między 5-9 wymiarem zanurzenia. Taka sytuacja jest obserwowana w przypadku Amerbanku, dlatego też można twierdzić, że liczba 3.557 to wymiar fraktalny dla tego szeregu czasowego. Sytuację odwrotną obserwujemy dla spółki WBK – wymiar fraktalny wyznaczony przy $\tau = 7$ wynosi 3.77 i jest dużo niższy od wymiaru fraktalnego wyznaczonego dla $\tau = 161$ (rys. 3.192). Jest to bardzo ciekawy przypadek – zwykle obserwowano spadek

wartości wymiaru fraktalnego, lub brak jego zmiany dla wysokich wartości przesunięć czasowych w porównaniu do $\tau = 7$. Wielkość wymiaru fraktalnego dla $\tau = 161$ można ograniczyć przedziałem 4.43 – 5.27, lub wyznaczyć jego średnią wartość bazując na wymiarach korelacyjnych dla wymiarów zanurzenia 9 – 13. Wyniesie ona wtedy 4.844. Na rysunku 169 widać, że obie krzywe bardzo szybko się od siebie oddalają, ich przebiegi nie są do siebie podobne. Również wymiary korelacyjne dla zanurzeń 6 – 11 nie wykazują stabilizacji, wobec czego można podejrzewać, że dokładniejsze przybliżenie wymiaru fraktalnego uzyskano jednak dla $\tau = 7$.

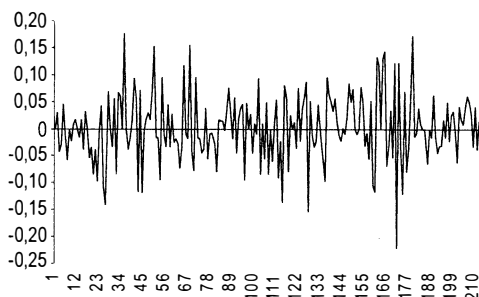
Dla szeregów czasowych spółek BPH i BSK w przypadku analizy dla $\tau = 7$ nie można było określić wymiarów fraktalnych. Wyznaczając τ zgodnie ze wzorem (2.40) okazało się to możliwe. W przypadku BPH wymiar fraktalny można wyznaczyć na podstawie czterech ostatnich wymiarów korelacyjnych (dla wymiarów zanurzeń 5 – 8) i wynosi on około 3.243. Wartości wymiaru korelacyjnego dla 9 wymiaru zanurzenia nie przedstawiono na rysunku i nie uwzględniono w obliczeniach ze względu na jego wątpliwą jakość spowodowaną specyfiką ostatniej wyznaczonej krzywej $\ln C_2(l)$. W przypadku BSK wymiar fraktalny jest wyznaczony w sposób identyczny jak dla BPH (na podstawie 4 ostatnich wymiarów korelacyjnych – dla zanurzeń 6 – 9) i wynosi 3.8225. Świadczy to, o dobrze dobranych wartościach τ , wynoszących 189 dla BPH i 224 dla BSK. Jedyną spółką dla której nie udało się wyznaczyć wymiaru fraktalnego w żadnej z części dwustopniowej analizy jest BRE – krzywa odpowiadająca tej spółce na rysunku 167 nie stabilizuje się na pewnym poziomie w żadnej części swego przebiegu, wręcz przeciwnie – do 9 wymiaru zanurzenia rośnie po czym zaczyna gwałtownie maleć. Jest to stosunkowo dziwne, gdyż dysponujemy w jej przypadku dużą ilością danych (349) a także wysokim wykładnikiem Hursta 0.62 i może wskazywać na popełniony błąd obliczeń. Przedstawione w powyższej analizie dane, wyraźnie wskazują na występowanie zjawisk chaosu deterministycznego w sektorze bankowym makrosektora finansów.

3.2.2.2 Podsektor UBEZPIECZENIA

Jedynym reprezentantem tego sektora, dysponującym wystarczająco długim szeregiem czasowym jest spółka akcyjna Warta. Szereg czasowy Warty składa się z 212 punktów, czyli dysponujemy notowaniami cen akcji tej firmy obejmującymi 212 tygodni.

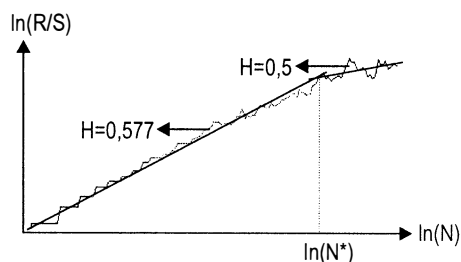
Analiza tego pliku była trudna – wyznaczenie charakterystycznego odcinka krzywej o współczynniku kierunkowym 0.5 w analizie R/S okazało się proste, lecz stanowi on większą część krzywej, przez co trudno było wyznaczyć wykładnik Hursta. Krótki odcinek krzywej, mający współczynnik kierunkowy 0.7 – to nie koniecznie prawdziwa i dokładna wartość wykładnika Hursta. Przez taki stan rzeczy również cykl ustalono na bardzo krótki okres – 17 tygodni, co daje 3.9 miesiąca lub inaczej 0.33 roku. Jednak rysunek 3.193 wskazuje, że cykl ten jest raczej bliższy 80 tygodniom, dlatego też wykładnik Hursta na rysunku 3.194 wyznaczono na podstawie charakterystycznego załamania krzywej a jego wartość wynosi 0.577 przy 84 tygodniowym cyklu (19.3 miesiąca, 1.6 roku). Rysunek 3.195 i 3.196 przedstawiają wykres krzywych $\ln C_2(l)$ i wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia. Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 3.43.

Rys. 3.193 Warta – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$



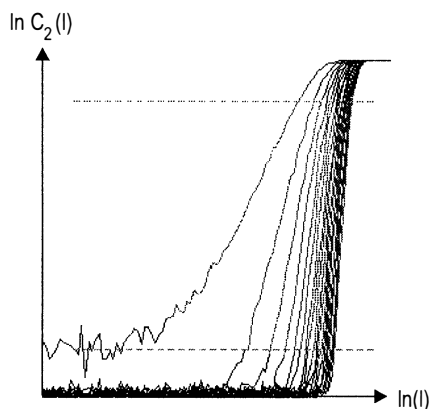
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.194 Analiza R/S dla spółki Warta dla $\tau = 7$



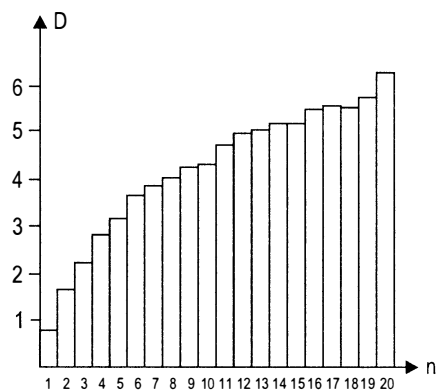
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.195 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Warta dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.196 Wymiary korelacyjne dla spółki Warta dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.43 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla sektora ubezpieczenia dla $\tau = 7$

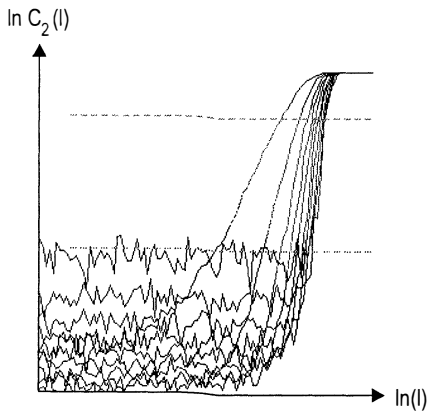
| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Warta | 0,803 | 1,66 | 2,25 | 2,83 | 3,17 | 3,62 | 3,87 | 4,01 | 4,29 | 4,31 |

| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|-------|------|------|------|------|------|-----|-----|------|------|------|
| Warta | 4,74 | 4,96 | 5,08 | 5,19 | 5,25 | 5,5 | 5,6 | 5,55 | 5,75 | 6,27 |

Źródło: opracowanie własne.

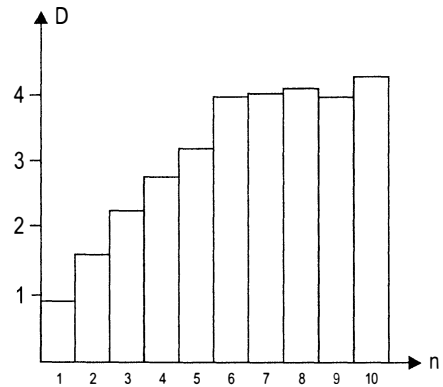
Niestety siedmiodniowe przesunięcie czasowe okazało się niewystarczające by na podstawie takich obliczeń wyznaczyć wymiar fraktalny. Wymiary korelacyjne rosną wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia. Przyczyną jest pamięć krótkoterminowa.

Rys.3.197 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Warta dla $\tau = 147$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.198 Wymiary korelacyjne dla spółki Warta dla $\tau = 147$



Źródło: opracowanie własne.

Rysunki 3.197 i 3.198 ilustrują drugą fazę analizy fraktalnej – obliczenia przeprowadzone dla $\tau = 147$, czyli przesunięcia czasowego wyznaczonego na podstawie wzoru (2.40). Wyniki tej części analizy zamieszczono w tabelach 3.44 i 3.45. Rysunek 3.199 jest porównaniem wykresów wartości wymiarów korelacyjnych w funkcji wymiaru zanurzenia dla obu wartości przesunięć czasowych – tygodniowego i wyznaczonego przy użyciu wzoru (2.40).

Tabela 3.44 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora ubezpieczeń dla τ wg tab. 3.45

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------|-------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|
| Warta | 0,934 | 1,62 | 2,24 | 2,76 | 3,16 | 3,98 | 3,99 | 4,1 | 3,99 | 4,27 |

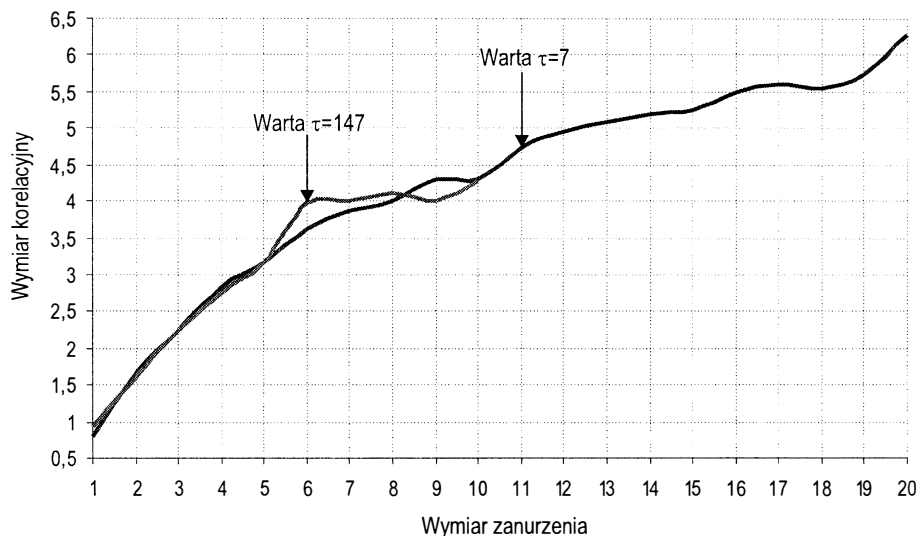
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.45 Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora ubezpieczeń

| Nazwa | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny | τ (w dniach) | Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|-------|------------------|-----------------------------|-------------------|------------------------------|----------------------------|------------------|
| Warta | 4 | 3,98 – 4,27 | 147 | 212 | 84 | 0,577 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.199 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora ubezpieczeń



Źródło: opracowanie własne.

W przypadku $\tau = 147$ wymiary korelacyjne począwszy od szóstego wymiaru zanurzenia zaczynają zdążać do ustalonej wartości – jest nią liczba 4.066 i ją traktować można jako wymiar fraktalny. Warto jeszcze zauważyć, że do piątego wymiaru zanurzenia wykresy dla obu wartości τ mają praktycznie identyczne przebiegi. Wartość wymiaru fraktalnego tak bliska liczbie 4 może wskazywać na błąd obliczeniowy, gdyż jak wiadomo wymiar fraktalny jest liczbą ułamkową, a różnica otrzymanego wymiaru fraktalnego od liczby 4 jest niewielka biorąc pod uwagę niedoskonałość obliczeń wykonywanych przez program komputerowy (zaokrąglenia oraz możliwość jedynie skończonej, z góry określonej reprezentacji liczby niecałkowitej).

3.2.3 Makrosektor USŁUGI

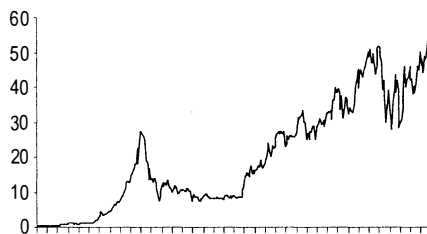
Makrosektor Usługi dostarcza niewielkiej liczby badanych spółek – są to jedynie trzy firmy. Jest to uwarunkowane małą liczbą jego podsektorów, jak również krótkim funkcjonowaniem spółek tego makrosektora na giełdzie. Do badań zakwalifikowano dwa podsektory usług: Telekomunikację i Informatykę.

3.2.3.1 Podsektor TELEKOMUNIKACJA

Do analizy fraktalnej podsektora Telekomunikacja wytypowano spółkę Elektrim, z uwagi na długi czas funkcjonowania na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Dysponujemy dla niej szeregiem czasowym złożonym z 377 punktów.

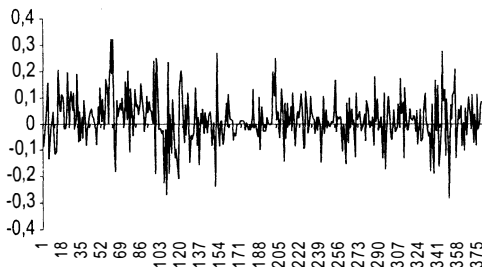
Poniżej zamieszczono rysunki przedstawiające dane z trendem oraz szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$ (rys. 3.200, 3.201), a także wyniki przeprowadzonej analizy R/S (rys. 3.202).

Rys. 3.200 Elektrim – dane oryginalne z trendem



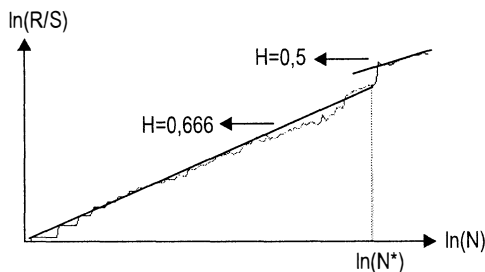
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.201 Elektrim – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$



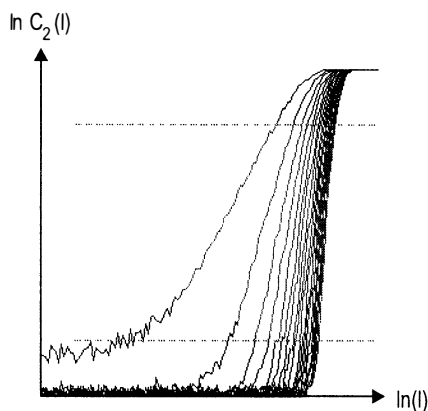
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.202 Analiza R/S dla spółki Elektrim dla $\tau = 7$

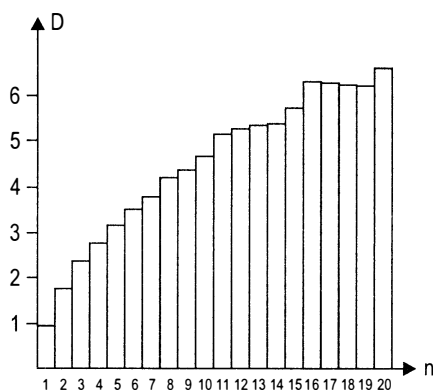


Źródło: opracowanie własne.

Analiza R/S pozwoliła określić wykładnik Hursta jako 0.666, oraz cykl wynoszący około 3.4 roku, co jest stosunkowo długim przedziałem czasu. Jednak wartość tę potwierdza wykres 3.201 (3.4 roku to około 177 tygodni a dla takiej liczby na rys.3.201 można wyodrębnić obszar, który może stanowić jeden pełny cykl). Wykonanie tej części analizy nie stanowiło większego. Nieco bardziej kłopotliwe okazało się wyznaczenie poszczególnych wymiarów korelacyjnych dla kolejnych dwudziestu zanurzeń. Rysunki 3.203 oraz 3.204 przedstawiają dane będące graficzną podstawą do wyznaczenia wymiaru fraktalnego, natomiast tabela 3.46 jest ich zestawieniem.

Rys. 3.203 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Elektrim dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.204 Wymiary korelacyjne dla spółki Elektrim dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.46 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Elektrim dla $\tau = 7$

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|-------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|
| Elektrim | 0,927 | 1,75 | 2,32 | 2,77 | 3,17 | 3,56 | 3,76 | 4,2 | 4,31 | 4,67 |

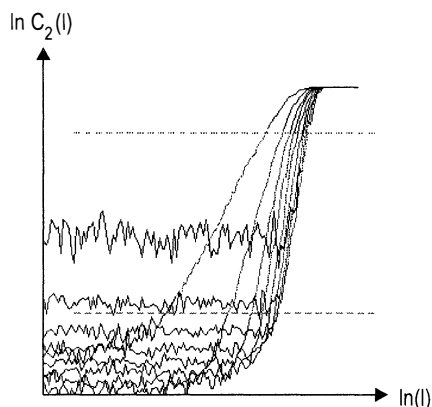
| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Elektrim | 5,16 | 5,26 | 5,34 | 5,39 | 5,71 | 6,29 | 6,31 | 6,27 | 6,21 | 6,61 |

Źródło: opracowanie własne.

Dla szeregu czasowego spółki Elektrim obserwujemy bardzo interesujące zachowanie wymiarów korelacyjnych dla różnych przedziałów wymiarów zanurzenia. I tak do piętego wymiaru zanurzenia wymiary korelacyjne rosną w zależności zbliżonej do liniowej. Następnie dla zanurzeń 11 – 15 obserwujemy stabilizację wartości wymiarów korelacyjnych na poziomie 5.2 – 5.7. Przedział 16 – 20 wymiarów zanurzenia to kolejny etap stabilizacji wymiarów korelacyjnych tym zanurzeniom odpowiadającym. Tym razem poziom wyznaczany przez wymiary korelacyjne to około 6.5. To ciekawe schodkowe zbieganie do pewnych wartości nie było w tak wyraźnie widoczne jeszcze dla żadnego dotąd analizowanego szeregu czasowego jakiegokolwiek spółki. W związku ze specyfiką otrzymanych wyników trudno mówić o wymiarze fraktalnym, dla tego szeregu czasowego. Można natomiast wyznaczyć wymiary fraktalne dla „schodków”, czyli obszarów wyznaczanych przez wymiary zanurzeń 11 – 15 oraz 16 – 20 i będą to odpowiednio liczby 5.372 dla pierwszego obszaru oraz 6.338 dla drugiego. Warto zwrócić uwagę, że wartości te różnią się prawie dokładnie o 1 (0.966). Szukając przyczyny powyższego kształtowania się wartości wymiarów korelacyjnych w funkcji wymiaru zanurzenia można rozważyć wiele aspektów mogących składać się na ich charakter. Z pewnością nie można całej odpowiedzialności zrzucić na zły dobór przesunięcia co implikuje występowanie pamięci krótkoterminowej. Równie trudno mówić tu o szumie giełdowym – wykres 181 nie pozwala wyróżnić dwóch, charak-

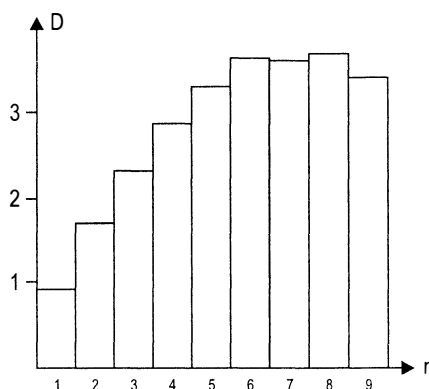
terystycznych przy występowaniu szumu, obszarów wykresu. Również gdyby rozważany układ dynamiczny składał się z dwóch podukładów można byłoby wydzielić dwa obszary tego wykresu, rozdzielone poprzez załamanie w górnej jego części. Jednak złożenie dwóch pierwszych czynników mogło być przyczyną otrzymanych wyników. Jeśli te przypuszczenia są słuszne, to analiza dla wyższej niż 7 wartości przesunięcia czasowego z pewnością pozwoli wykryć jeden tylko obszar na wykresie krzywych $\ln C_2(l)$, na podstawie którego będzie można określić jednoznacznie wymiar fraktalny. Duża wartość przesunięcia czasowego wyeliminuje bowiem zarówno szum, jak i pamięć krótkoterminową. Rysunki 3.205 i 3.206 przedstawiają obliczenia dla wartości przesunięcia czasowego wyznaczonej przy pomocy wzoru (2.40), natomiast tabele 3.47 i 3.48 zawierają zestawienie wyników tych obliczeń. Rysunek 3.207 jest graficzną ilustracją otrzymanych wyników dla obu wartości τ .

Rys. 3.205 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Elektrim dla $\tau = 315$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.206 Wymiary korelacyjne
dla spółki Elektrim dla $\tau = 315$



Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.47 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia
dla spółki Elektrim dla wg tab. 3.48

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|-------|-----|------|------|-----|-----|-----|-----|------|
| Elektrim | 0,931 | 1,7 | 2,32 | 2,85 | 3,3 | 3,6 | 3,6 | 3,7 | 3,46 |

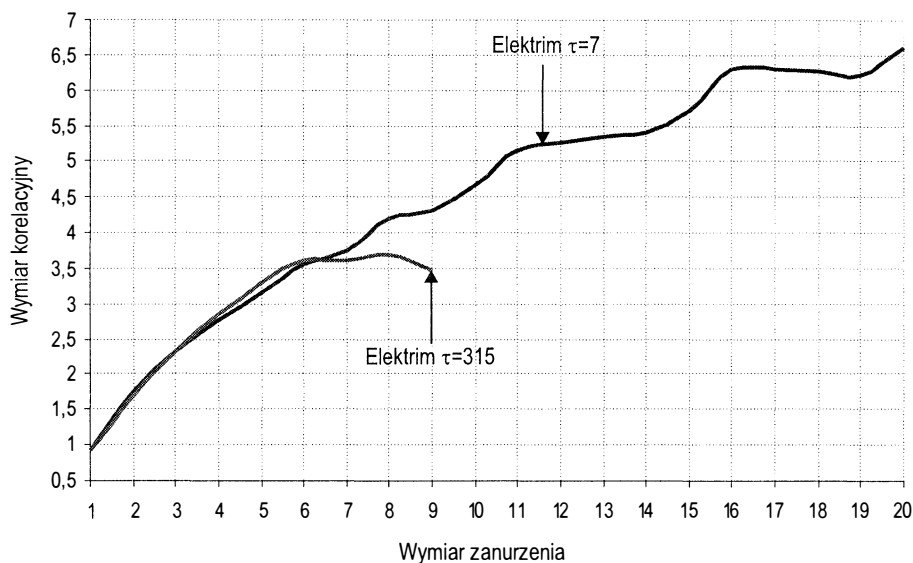
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.48 Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora telekomunikacja

| Nazwa | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny | τ (w dniach) | Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|----------|------------------|-----------------------------|-------------------|------------------------------|----------------------------|------------------|
| Elektrim | 4 | 3,3 – 3,7 | 315 | 377 | 180 | 0,666 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.207 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Elektrim



Źródło: opracowanie własne.

Obliczenia przeprowadzone dla przesunięcia czasowego wynoszącego 315 dni dały nieoczekiwane wyniki. Co prawda zlikwidowały efekt „schodków”, lecz wymiary korelacyjne nie stabilizują się na żadnym z wyznaczonych w poprzedniej części analizy poziomów („schodków”). Bez problemu można wyznaczyć wymiar fraktalny, lecz nie znajduje się on w przedziale 5.2 – 5.4 ani 6.3 – 6.4. Otrzymane wartości wymiarów korelacyjnych zbiegają do wartości około 3.5 a właściwie do liczby 3.59. Jest to średnia z czterech ostatnich wymiarów korelacyjnych (gdyż dla zanurzeń 6-9 obserwowana jest stabilizacja wartości wymiarów korelacyjnych) i można uznać ją za wymiar fraktalny dla tego szeregu czasowego. Do szóstego wymiaru zanurzenia wykresy dla obu τ mają bardzo podobny przebieg i mimo znaczącej różnicy pomiędzy wartościami poszczególnych wymiarów korelacyjnych dla zanurzeń większych niż 6, kształt „schodków” jest zachowany, lecz zredukowany do tylko jednego „schodka” o niższej wartości. Ta właściwość pozwala, w oparciu o sformułowaną w pracy regułę potwierdzającą i uwiarygodniającą wyniki analizy fraktalnej dla dużych τ , twierdzić, że analiza przeprowadzona została poprawnie i nie jest obciążona błędem. Wykrycie ułamkowego wymiaru fraktalnego (3.59) w szeregu czasowym Elektrimu wskazuje na istnienie dla niego atraktora dziwnego, co implikuje występowanie zjawiska chaosu deterministycznego.

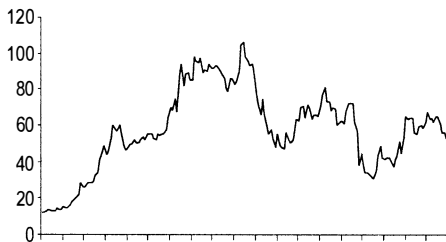
3.2.3.2 Podsektor INFORMATYKA

Podsektor Informatyka funkcjonuje na giełdzie polskiej stosunkowo krótko. Zaklasyfikowano do niego 12 różnych spółek (tabela 3.2), z czego do analizy wybrano dwie firmy: Computerland i Optimus, gdyż ich szeregi czasowe są najdłuższe. I tak dla Computer-

landu dysponujemy notowaniami cen ze 189 tygodni, natomiast w przypadku Optimusa liczba ta jest znacznie wyższa i wynosi 254 tygodnie.

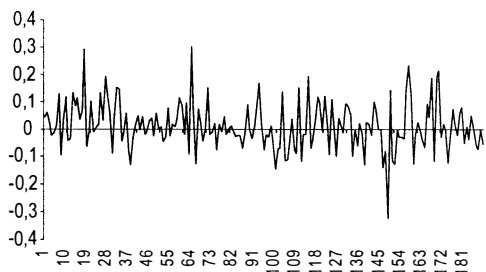
Poniżej zamieszczono rysunki przedstawiające dane z trendem oraz szereg czasowy Computerlandu (rys. 3.208 i 3.209), a także szereg czasowy dla spółki Optimus (rys. 3.210).

Rys. 3.208 Computerland – dane oryginalne z trendem



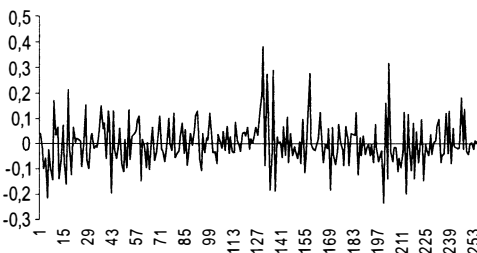
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.209 Computerland – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$



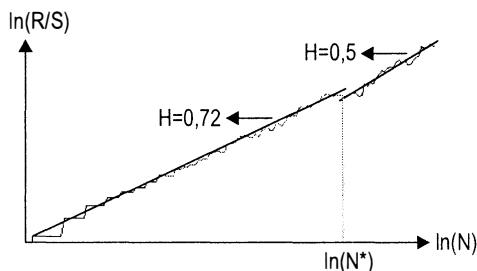
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.210 Optimus – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$

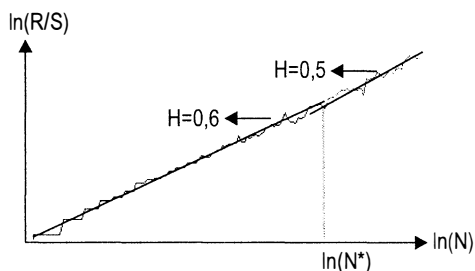


Źródło: opracowanie własne.

Przyglądając się powyższym szeregom czasowym trudno określić cykle dla spółek Computerland i Optimus jedynie na podstawie zamieszczonych rysunków. Przedstawione szeregi cechuje dosyć równomierne rozłożenie punktów, co sprawia, że parametry takie jak np. wykładnik Hursta czy długość cyklu można wyznaczyć jedynie eksperymentalnie, przeprowadzając stosowne obliczenia. Rysunki 3.211 i 3.212 zawierają ilustrację tych obliczeń.

Rys. 3.211 Analiza R/S dla spółki Computerland dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.212 Analiza R/S dla spółki Optimus dla $\tau = 7$ 

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.49 zawiera zestawienie otrzymanych w przeprowadzonej analizie R/S wyników, dla szeregów czasowych spółek Computerland i Optimus.

Tabela 3.49 Wykładnik Hursta dla spółek sektora informatyka

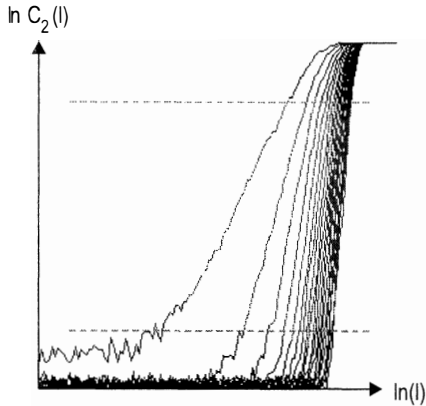
| Spółka | Wykładnik Hursta | Długość cyklu w miesiącach | Długość cyklu w latach | Liczba danych (tygodniowych) |
|--------------|------------------|----------------------------|------------------------|------------------------------|
| Computerland | 0,72 | 15,8 | 1,3 | 189 |
| Optimus | 0,60 | 18,8 | 1,5 | 254 |

Źródło: opracowanie własne.

Dla wybranych do analizy spółek szeregi czasowe nie są równe – wręcz przeciwnie, dla Computerlandu dysponujemy szeregiem krótszym o 65 tygodni. Powoduje to trudności w dokonaniu porównania obu spółek. Mimo jednak krótszego szeregu czasowego dla Computerlandu, wartość wykładnika Hursta dla tej firmy jest większa, niż dla spółki Optimus i wynosi 0.72. Oznacza to większą stabilność cen akcji, czyli inaczej mniejsze ryzyko inwestycji w akcje tej spółki, a także cykl, którego wyznaczenie nie sprawiło kłopotu. Długość cyklu to 15.8 miesiąca – wartość ta jest niższa niż w przypadku spółki Optimus, dla której to wyniosła 18.8 miesiąca. Jednak tu wykładnik Hursta był znacznie niższy – 0.6. Mimo więc dłuższego okresu funkcjonowania spółki Optimus na giełdzie, uzyskano dla niej gorsze wyniki analizy R/S – niższy wykładnik Hursta i dłuższy cykl. Jednak krzywa w analizie R/S dla spółki Optimus była stosunkowo gładka, bez charakterystycznego załamania, przez co trudno było wyznaczyć odcinek o współczynniku kierunkowym 0.5 typowym dla sygnałów stochastycznych.

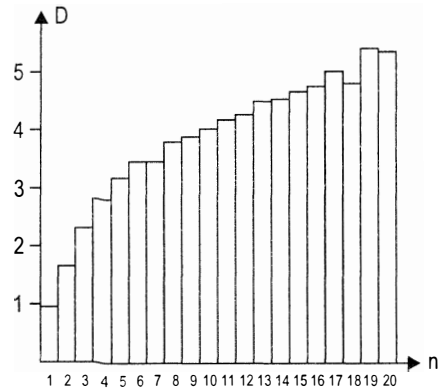
Rysunki 3.213 – 3.216 zawierają wyniki analizy fraktalnej dla obu spółek sektora usług telekomunikacyjnych i informatycznych, dla tygodniowego przesunięcia czasowego, zebrane następnie w tabeli 3.50.

Rys. 3.213 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Computerland dla $\tau = 7$



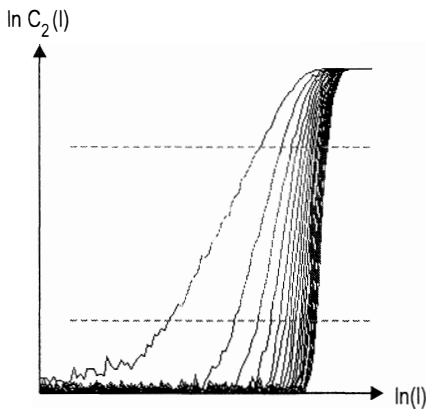
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.214 Wymiary korelacyjne
dla spółki Computerland dla $\tau = 7$



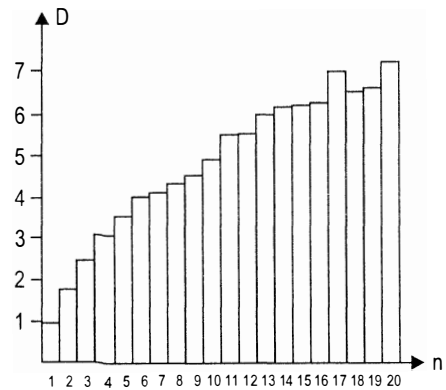
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.215 Krzywe $\ln C_2(l)$
dla spółki Optimus dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.216 Wymiary korelacyjne
dla spółki Optimus dla $\tau = 7$



Źródło: opracowanie własne.

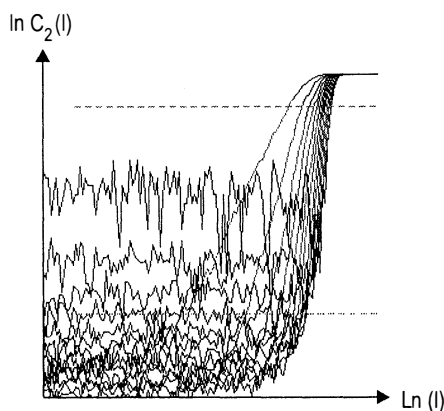
Tabela 3.50 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora informatyka dla $\tau = 7$

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Computerland | 0,893 | 1,64 | 2,28 | 2,79 | 3,18 | 3,48 | 3,47 | 3,79 | 3,88 | 4,02 |
| Optimus | 0,929 | 1,78 | 2,41 | 3,05 | 3,57 | 4,04 | 4,12 | 4,34 | 4,56 | 4,95 |

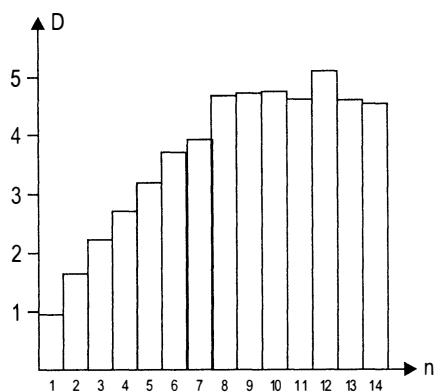
| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Computerland | 4,19 | 4,29 | 4,49 | 4,54 | 4,71 | 4,76 | 5,06 | 4,82 | 5,41 | 5,38 |
| Optimus | 5,5 | 5,54 | 6,02 | 6,2 | 6,24 | 6,25 | 7,04 | 6,54 | 6,67 | 7,32 |

Źródło: opracowanie własne.

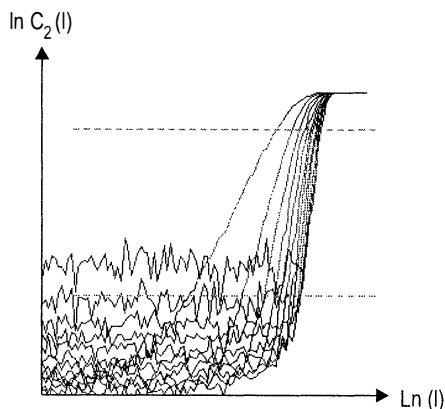
Analiza fraktalna dla $\tau = 7$ nie dała pożądaných efektów – na podstawie obliczonych wymiarów korelacyjnych dla kolejnych dwudziestu zanurzeń nie można ustalić wartości wymiaru fraktalnego, gdyż wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia wartości wymiarów korelacyjnych, dla obu badanych spółek, zamiast zbiegać do pewnych liczb, ciągle rosną. Przebiegi ich wykresów są do siebie bardzo podobne, lecz oddalone o około 3 jednostki (od 11 wymiaru zanurzenia), co ilustruje rysunek 3.221. Powodem takiego stanu rzeczy może być zbyt mała wartość przesunięcia czasowego, nie eliminująca pamięci krótkoterminowej. Stanowiło by to wyjaśnienie tak nieustabilizowanego wzrostu wymiarów korelacyjnych dla szeregów czasowych Computerlandu i Optimusa. Poniżej zamieszczono analizę tych samych danych przy zmiennym przesunięciu czasowym, obliczoną na podstawie wzoru (2.40), oddzielnie dla każdej ze spółek.

Rys. 3.217 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Computerland dla $\tau = 98$ 

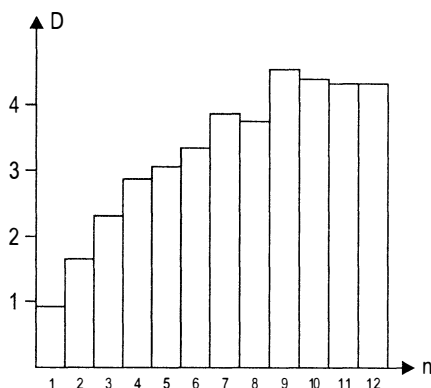
Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.218 Wymiary korelacyjne dla spółki Computerland dla $\tau = 98$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.219 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Computerland dla $\tau = 98$ 

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.220 Wymiary korelacyjne dla spółki Computerland dla $\tau = 98$ 

Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane wyniki zestawiono w tabelach 3.51 i 3.52 oraz przedstawiono na rysunku 3.221.

Tabela 3.51 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora informatyka dla τ wg tab. 3.52

| Nazwa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Computerland | 0,91 | 1,61 | 2,18 | 2,69 | 3,17 | 3,71 | 3,91 | 4,69 | 4,72 | 4,75 |
| Optimus | 0,94 | 1,63 | 2,32 | 2,88 | 3,06 | 3,33 | 3,9 | 3,75 | 4,54 | 4,38 |

| Nazwa | 11 | 12 | 13 | 14 |
|--------------|------|------|-----|------|
| Computerland | 4,62 | 5,1 | 4,6 | 4,51 |
| Optimus | 4,32 | 4,31 | x | x |

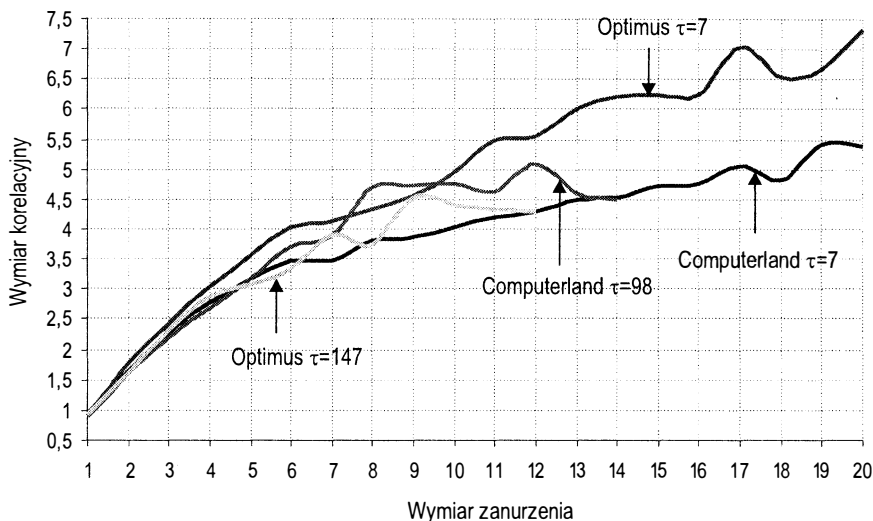
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.52 Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora informatyka

| Nazwa | Liczba zmiennych | Oczekiwany wymiar fraktalny | τ (w dniach) | Liczba danych (tygodniowych) | Punkt cyklu (w tygodniach) | Wykładnik Hursta |
|--------------|------------------|-----------------------------|-------------------|------------------------------|----------------------------|------------------|
| Computerland | 5 | 4,51 – 5,10 | 98 | 189 | 69 | 0,72 |
| Optimus | 5 | 4,31 – 4,54 | 147 | 254 | 84 | 0,60 |

Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3.221 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora informatyka



Źródło: opracowanie własne.

Wyniki analizy przeprowadzonej dla wartości przesunięć czasowych obliczonych na podstawie wzoru (2.40), dla każdej badanej spółki niezależnie, dały znacząco lepsze rezultaty niż analiza dla $\tau = 7$. Szczególnie dobrze wypadł szereg Computerlandu, dla którego τ określono na 98 dni. Wymiar fraktalny, przy tak dobranym przesunięciu czasowym, mieści się w przedziale 4.51 – 5.10. Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia szybko stabilizują się, przyjmując jedynie wartości z tego przedziału – już od 8 zanurzenia. Na tej podstawie wymiar fraktalny można określić jako liczbę ułamkową 4.713, co wskazuje na występowanie zjawiska chaosu deterministycznego, a co za tym idzie atraktor szeregu czasowego Computerlandu jest atraktorem dziwnym. Warto jeszcze zaznaczyć, że ze względu na możliwość wyznaczenia wymiaru fraktalnego na podstawie wymiarów korelacyjnych obliczonych dla zanurzeń już od 8 do 14, nie jest konieczne stosowanie zasady potwierdzającej słuszność i poprawność otrzymanego wyniku, sformułowanej wcześniej w tym rozdziale. Stosujemy ją wtedy, gdy τ jest bardzo duże i wymiar fraktalny jest określany na podstawie znikomej liczby wymiarów korelacyjnych. W przypadku spółki Optimus przeprowadzone obliczenia również pozwoliły wykryć istnienie wymiaru fraktalnego. Przesunięcie czasowe wyniosło tym razem 147 dni i dopiero taka jego wartość likwiduje wpływ pamięci krótkoterminowej na wyniki. Wymiary korelacyjne od około 9 wymiaru zanurzenia zaczynają oscylować wokół liczby 4.388, którą można uznać za wymiar fraktalny. Można uznać, że dla sektora usług telekomunikacja i informatyka, charakterystyczny jest wymiar fraktalny zbliżony do 4.5 – zauważmy, że otrzymane wartości wymiarów fraktalnych dla obu badanych spółek nie są mocno od siebie oddalone – ich różnica wynosi jedynie 0.325.

3.2.4 Podsumowanie

Przeprowadzona w rozdziale trzecim analiza fraktalna danych giełdowych dla wybranych spółek pozwoliła wykryć występowanie zjawiska chaosu deterministycznego na polskiej giełdzie papierów wartościowych. Na jej podstawie można było także ustalić charakter tego zjawiska, częstość jego występowania oraz ocenić jakość danych, którymi posłużono się w analizie. Wyniki obliczeń podstawowych charakterystyk dynamicznych zawiera tabela 3.53.

Tabela 3.53 Wartości τ oraz pozostałe charakterystyki dla wybranych spółek na polskiej giełdzie

| Lp | Nazwa spółki | Tau (dni) | Oczekiwany wymiar fraktalny | Liczba zmiennych | Długość cyklu w m-cach | Długość cyklu w latach | Wykładnik Hursta | Liczba danych (tygodniowych) |
|----|--------------|-----------|-----------------------------|------------------|------------------------|------------------------|------------------|------------------------------|
| 1 | Agros | 7 | | | 19,7 | 1,60 | 0,61 | 190 |
| | | 196 | 2,50 – 2,90 | 3 | | | | |
| 2 | Amerbank | 7 | | | 20 | 1,67 | 0,59 | 258 |
| | | 154 | 3,30 – 3,78 | 4 | | | | |
| 3 | Animex | 7 | | | 21,3 | 1,80 | 0,74 | 187 |
| | | 168 | 3,10 – 3,30 | 4 | | | | |
| 4 | Big | 7 | | | 28,5 | 2,38 | 0,62 | 357 |
| | | 217 | 3,40 – 3,95 | 4 | | | | |
| 5 | Bph | 7 | | | 24,8 | 2,06 | 0,53 | 227 |
| | | 189 | 3,21 – 3,27 | 4 | | | | |
| 6 | Bre | 7 | | | 35,8 | 2,98 | 0,62 | 349 |
| | | 217 | 4,19 – 4,78 | 5 | | | | |
| 7 | Bsk | 7 | | | 29,4 | 2,45 | 0,58 | 281 |
| | | 224 | 3,71 – 3,99 | 4 | | | | |
| 8 | Budimex | 7 | | | 10 | 0,83 | 0,57 | 212 |
| | | 49 | 5,03 – 5,63 | 6 | | | | |
| 9 | Computerland | 7 | | | 15,8 | 1,3 | 0,72 | 189 |
| | | 98 | 4,51 – 5,10 | 5 | | | | |
| 10 | Elektrim | 7 | | | 41,3 | 3,4 | 0,67 | 377 |
| | | 315 | 3,30 – 3,70 | 4 | | | | |
| 11 | Exbud | 7 | | | 48,2 | 4,02 | 0,60 | 426 |
| | | 364 | 3,03 – 3,54 | 4 | | | | |
| 12 | Irena | 7 | | | 28,9 | 2,40 | 0,73 | 385 |
| | | 217 | 3,40 – 3,50 | 4 | | | | |
| 13 | Jelfa | 7 | | | 26,4 | 2,20 | 0,62 | 258 |
| | | 203 | 3,40 – 3,50 | 4 | | | | |

| Lp | Nazwa spółki | Tau (dni) | Oczekiwany wymiar fraktalny | Liczba zmiennych | Długość cyklu w m-cach | Długość cyklu w latach | Wykładnik Hursta | Liczba danych (tygodniowych) |
|----|----------------|-----------|-----------------------------|------------------|------------------------|------------------------|------------------|------------------------------|
| 14 | Kable | 7 | | | 48 | 4,00 | 0,70 | 426 |
| | | 364 | 3,60 – 3,90 | 4 | | | | |
| 15 | Kredytb | 7 | | | 17,9 | 1,49 | 0,57 | 255 |
| | | 91 | 4,99 – 6,01 | 6 | | | | |
| 16 | Mostostal Exp. | 7 | | | 53,7 | 4,47 | 0,71 | 368 |
| | | 564 | 2,40 – 2,65 | 3 | | | | |
| 17 | Okocim | 7 | | | 43,6 | 3,6 | 0,64 | 383 |
| | | 441 | 2,80 – 3,10 | 3 | | | | |
| 18 | Rolimpex | 7 | | | 29,8 | 2,5 | 0,56 | 243 |
| | | 315 | 2,30 – 3,10 | 3 | | | | |
| 19 | Sokołów | 7 | | | 5,3 | 0,4 | 0,66 | 305 |
| | | 35 | 4,6 0 – 5,50 | 6 | | | | |
| 20 | Żywiec | 7 | | | 44,5 | 3,7 | 0,69 | 403 |
| | | 336 | 3,50 – 3,60 | 4 | | | | |
| 21 | Próchnik | 7 | | | 42,9 | 3,6 | 0,69 | 426 |
| | | 322 | 3,4 0 – 4,10 | 4 | | | | |
| 22 | Vistula | 7 | | | 28,2 | 2,35 | 0,65 | 298 |
| | | 287 | 3,10 – 3,50 | 4 | | | | |
| 23 | Swarzędz | 7 | | | 23,4 | 1,9 | 0,66 | 208 |
| | | 238 | 2,30 – 2,50 | 3 | | | | |
| 24 | Polifarb-CW | 7 | | | 36,7 | 3,06 | 0,62 | 317 |
| | | 280 | 3,10 – 3,40 | 4 | | | | |
| 25 | Rafako | 7 | | | 29,4 | 2,4 | 0,56 | 275 |
| | | 224 | 3,50 – 3,60 | 4 | | | | |
| 26 | Tonsil | 7 | | | 48 | 4 | 0,67 | 426 |
| | | 364 | 3,30 – 3,60 | 4 | | | | |
| 27 | WBK | 7 | | | 21,6 | 1,8 | 0,60 | 312 |
| | | 161 | 4,43 – 5,2 | 5 | | | | |
| 28 | Warta | 7 | | | 19,3 | 1,6 | 0,58 | 212 |
| | | 147 | 3,98 – 4,27 | 4 | | | | |
| 29 | Optimus | 7 | | | 18,8 | 1,5 | 0,60 | 254 |
| | | 147 | 4,31 – 4,54 | 5 | | | | |

Źródło: opracowanie własne.

Na temat analizy fraktalnej rynków kapitałowych można znaleźć niewiele literatury obcojęzycznej lub przełożonej na język polski, jak również prac autorów polskich wciąż jest jeszcze niewiele. W większości są to artykuły takie jak, cytowany wcześniej w pracy referat Jajugi K., Papli D. pod tytułem *Teoria chaosu w analizie finansowych szeregów cza-*

sowych – aspekty teoretyczne i badania empiryczne (Jajuga K., Papla D., 1997)¹⁰. Autorzy opracowania nie stwierdzili obecności zjawisk chaosu deterministycznego dla badanych przez siebie spółek giełdowych. Niniejsza praca stanowi więc alternatywę, względem ich wyników. Autorka niniejszego opracowania dysponowała większą ilością danych dla konkretnych spółek giełdowych, jak również precyzyjnymi programami komputerowymi FDA¹¹ i Recs¹², które pozwoliły przeprowadzić analizę z dużą dokładnością, co znacznie uprościło i przyspieszyło proces czysto matematycznych obliczeń. Zaokrąglenia i inne niedokładności upraszczające obliczenia mogły być przyczyną niepowodzenia przeprowadzonej przez wymienionych autorów analizy fraktalnej. Okazało się jednak, że polska giełda nie jest wyjątkiem w skali światowej i również nią rządzą zjawiska chaosu deterministycznego. Ze względu na młody wiek polskiej giełdy wszelkie porównania do giełd światowych mają duże znaczenie. Pozwala to na prognozowanie typowych zachowań notowań cen akcji, dla tak specyficznych sektorów jak bankowy, usług telekomunikacyjnych, czy informatycznych, wykorzystując analizę fraktalną polskiej giełdy, oraz korzystając ze zbadań już zjawisk na starszych, światowych rynkach papierów wartościowych.

Na podstawie przeprowadzonych badań można było przekonać się, jak bardzo analiza fraktalna zależna jest od dobrania odpowiedniej wartości przesunięcia czasowego. Obliczenia w większości okazały się wyjątkowo wrażliwe na zmiany τ . Jest to zjawisko normalne i oczywiste – kształtowanie się cen akcji nie jest całkowicie niezależne od poprzednich notowań – występuje tzw. pamięć krótkoterminowa, odpowiedzialna między innymi za występowanie trendu. Dla małych przesunięć czasowych nie sposób jej wyeliminować, co w rezultacie prowadzi do przekłamania wyniku analizy fraktalnej. Zwykle objawia się to niemożnością wyznaczenia wymiaru fraktalnego, ze względu na stały wzrost wymiarów korelacyjnych wraz ze wzrostem wymiaru zanurzenia. Wszelkie więc obliczenia prowadzono w dwóch fazach – najpierw dokonywano analizy fraktalnej dla tygodniowego przesunięcia czasowego ($\tau = 7$), po czym wyznaczano wartość τ zgodnie ze wzorem (2.40) i powtarzano obliczenia. Na wybór stałego przesunięcia równego 7 miało wpływ kilka czynników. Pierwszym jest fakt, iż na początku funkcjonowania giełdy notowania odbywały się z tygodniowym odstępem czasu, więc $\tau = 7$ gwarantuje wzięcie pod uwagę wszystkich danych. Drugą, równie istotną przesłanką, jest chęć wyeliminowania pamięci krótkoterminowej i porównania wyników dla różnych szeregów czasowych. Ponieważ, jednak duży procent badanych spółek funkcjonuje na giełdzie stosunkowo krótko, dysponowano więc niejednokrotnie krótkimi szeregami czasowymi. Wartość przesunięcia czasowego $\tau = 7$ wydawała się optymalna do porównania wyników analizy fraktalnej dla wszystkich, dłuższych i krótszych szeregów czasowych.

Do indywidualnej oceny każdej spółki posłużyły obliczenia wykonane dla τ obliczonego na podstawie wzoru (2.40). Wartości przesunięć czasowych tak wyznaczonych były w większości duże.

Jak się później okazało, szczególnie dla długich szeregów czasowych wyznaczony wymiar fraktalny przy $\tau = 7$ nie odbiegał zbytnio od wyznaczonego dla przesunięcia cza-

¹⁰ Jajuga K., Papla D.: op.cit.

¹¹ Pełna nazwa programu brzmi *Fractal Dimension Analyser*, program opracowany został w Instytucie Informatyki, Politechniki Białostockiej pod kierunkiem Mosdorfa R., autorzy: Andryszewski J., Pietrewicz B., Białystok 1998

¹² Program *Recs* opracowany został w Instytucie Informatyki, Politechniki Białostockiej pod kierunkiem Mosdorfa R., autor Olsiewicz P., Białystok 2000

sowego danego wzorem (2.40). Niekiedy jednak wyznaczone w ten sposób τ było tak duże, że jego wartość pozwalała wyznaczyć niewielką liczbę krzywych $\ln C_2(l)$ w funkcji $\ln(l)$, przez co również ilość wyznaczonych wymiarów korelacyjnych w funkcji wymiaru zanurzenia była również mała. W ten sposób często istniała konieczność określania wymiaru fraktalnego na podstawie zaledwie 3 – 4 wartości wymiarów korelacyjnych, co pociągało za sobą wątpliwość, czy wymiar fraktalny rzeczywiście istnieje i czy został określony poprawnie. Przeprowadzone obserwacje doprowadziły do sformułowania reguły postępowania w takim przypadku. Nazwano ją regułą potwierdzania i uwiarygodniania wartości wymiaru fraktalnego dla dużych przesunięć czasowych. Dokładne jej omówienie znajduje się w podrozdziale 3.2.2, teraz zostanie jedynie krótko przypomniany jej schemat. Otóż jeżeli przeprowadzono analizę fraktalną dla wysokiej wartości τ i uzyskano niewielką liczbę wymiarów korelacyjnych na podstawie których można wyznaczyć wymiar fraktalny, należy analizę powtórzyć dla $\tau = 7$ (lub innej niewielkiej wartości τ , w zależności od długości szeregu czasowego, którym dysponujemy) i porównać uzyskane wyniki. Jeżeli wymiar fraktalny istnieje dla $\tau = 7$, i jego wartość jest zbliżona do wyznaczonej poprzednio, to można mieć pewność, co do istnienia oszacowanego wymiaru fraktalnego. Wybranie odpowiedniej wartości τ jest istotne, gdyż od wielkości τ zależy kształt atraktora. Można to nazwać jego rozwijaniem. Dla źle dobranego τ atraktor ulega spłaszczeniu.

W pracy wspomniano, że analiza fraktalna dostarcza odpowiedzi na pytanie o jakość danych. Pojęcie jakości danych giełdowych można rozumieć różnorako. Może to być na przykład stopień ryzyka inwestycji w akcje danej firmy. Wtedy istotne znaczenie ma badanie wartości wykładnika Hursta. Im wyższa jest jego wartość, tym mniejsze ryzyko pociąga za sobą kupno akcji danej spółki. I tak na przykład wykładnik Hursta wynoszący 0.8 mówi, że spółka jest mało ryzykowna, podczas gdy wykładnik ten równy 0.51 powinien być podstawą do ponownego przemyślenia decyzji o zakupie pakietu akcji takiej spółki. Jeżeli bowiem wykładnik Hursta zbliża się do liczby 0.5, szereg czasowy mu odpowiadający przypomina zaczątny sygnał stochastyczny. Gdy jednak mówiąc o jakości mamy na myśli raczej same dane w szeregu czasowym – a dokładniej stopień ich przekłamania np. szum, nie wystarczy już sama analiza R/S. Charakterystyczną cechą dla tej spółki jest możliwość rozróżnienia dwóch fragmentów wykresu krzywych $\ln C_2(l)$, dla których uzyskuje się różne wyniki analizy fraktalnej. Obszar dolny odpowiada przypadkowym zmianom wartości, za które odpowiedzialny jest szum. Za długookresowe zmiany badanych wartości odpowiada obszar górny wykresu. Dla dolnego obszaru, odpowiadającego szumowi nie można wyznaczyć wymiaru fraktalnego. Przypomnieć warto, co może być szumem dla danych giełdowych. Można tu uznać sztuczne manipulowanie cenami akcji, co w przypadku początków działania polskiej giełdy miało z pewnością miejsce (jest to zresztą naturalne zjawisko na początku funkcjonowania każdej giełdy). Jeżeli jednak takie działanie powtarza się w czasie powoduje zakłócenie naturalnego cyklu dla danej spółki. Analiza fraktalna może wykazać opisane wyżej działania.

Analizując poszczególne sektory nie zawsze można zauważyć pewne specyficzne dla niego cechy. I tak na przykład o sektorze przemysłu spożywczego można mówić, że spółki do niego zaklasyfikowane cechuje wysoka wartość wykładnika Hursta, dochodząca do 0.74, gdyby nie wyjątek jakim jest szereg czasowy spółki Rolimpex o wykładniku Hursta równym 0.56. Również wymiar fraktalny szacowany dla spółek tego sektora można by uznać za stosunkowo niski – około 2.7, 3.2 – gdyby nie spółka Sokołów o wymiarze fraktalnym około 5.5. Bardziej zbliżone wyniki osiągnięto dla podsektora przemysłu lekkiego.

Tu wykładnik Hursta był wyższy niż 0.65 dla obu badanych spółek, a wymiar fraktalny dla nich charakterystyczny to 3.5 – 3.9. Jeśli chodzi o sektor chemiczny, cechuje go wymiar fraktalny około 3.5 i wykładnik Hursta około 0.62. Podobne wyniki uzyskano dla sektora przemysłu materiałów budowlanych – wykładnik Hursta około 0.73 i wymiar fraktalny 3.77. Analiza fraktalna spółek sektora budownictwa dała tak różne wyniki, że nie można nawet próbować ich uogólnić. Jedynie sektor przemysłu elektromaszynowego cechuje wymiar fraktalny powyżej 3.5. Cały makrosektor przemysłu można uznać za stosunkowo zróżnicowany pod względem wyników analizy fraktalnej. Niemniej jednak jego analiza wykazała występowanie zjawiska chaosu deterministycznego. Identyczne zjawisko obserwować można dla pozostałych makrosektorów: finansów oraz usług.

Uogólniając można stwierdzić, iż przeprowadzona analiza fraktalna wybranych spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, jak również indeksu WIG wykryła występowanie pamięci długofalowej na polskiej giełdzie. Analiza powyższa pozwala na określenie długości „okresu” (wiadomo co jaki okres pojawia się joker). Dla giełdy polskiej wynosi on 56.9 miesięcy (tabela 3.2). Analiza fraktalna pozwala również określić wymiar układów dynamicznych jakimi są rynki kapitałowe – co może ułatwić budowę modeli, modele budowane dla polskiej giełdy mogą zawierać tylko 3 zmienne, dla giełdy np. japońskiej 4 zmienne (tabela 3.4). Analiza powyższa pozwala określić zasięg działania krótkoterminowej pamięci dla giełdy polskiej, który wynosi około 30 dni (rysunek nr 3.5, tabela 3.3). Przeprowadzona analiza dla polskiej giełdy, pokazuje, że jej cechy nie różnią się od giełd zachodnich (dłużej funkcjonujących). Teza o fraktalnych właściwościach polskiego rynku kapitałowego stoi w sprzeczności z hipotezą efektywności rynku oraz ze zbudowanymi na tej teorii modelami ilościowymi (model wyceny dóbr kapitałowych CAPM, teoria arbitrażu cenowego APT, itd. – modele zakładały rozkład normalny, zakładały przypadkowość zjawisk). Fakt ten potwierdza, że badanie empirycznych właściwości polskiego rynku kapitałowego za pomocą standardowej analizy statystycznej może być tu niewystarczające i konieczne jest poszukiwanie nowych modeli teoretycznych rynku kapitałowego w Polsce. Opierając się o wykładnik Hursta można stwierdzić, że im H jest większe tym szereg mniej chropowaty (mniej przypadkowy), co oznacza mniejsze ryzyko, ponieważ w takim szeregu jest mniej szumu. Wynikałoby stąd (tabela 3.2), że inwestowanie na rynku polskim jest obciążone mniejszym ryzykiem niż na innych porównywanych rynkach kapitałowych. Niemniej jednak z akcjami o wysokim wykładniku Hursta związane jest większe ryzyko gwałtownych zmian. Uzyskane rezultaty analizy pokazują, że analiza fraktalna polskiego rynku kapitałowego stanowi istotne uzupełnienie klasycznych metod analizy. Należy pamiętać, że analiza fraktalna nie przybliży nas do prognozowania wartości akcji na konkretny dzień, pozwala jednak ocenić prawdopodobieństwo określonych zachowań rynku i modelowania alternatywnych scenariuszy jego zachowań.

Mimo wielu problemów związanych z wykorzystaniem algorytmów teorii chaosu deterministycznego w procesie analizy danych giełdowych, ich stosowanie jest w pełni uzasadnione. Stwierdzić to można na podstawie przeprowadzonej analizy fraktalnej wybranych spółek funkcjonujących na polskiej giełdzie. Ważny problem w analizie fraktalnej stanowi duża wrażliwość algorytmów na ilość danych eksperymentalnych na wejściu.

Powyższa praca stanowi próbę nowego podejścia do analizy danych finansowych. Uzyskane przez autorkę wyniki analiz dla polskiej giełdy są interesujące i stanowią jeden ze sposobów wypełnienia luki w zakresie wykorzystania teorii chaosu deterministycznego w procesie analizy danych giełdowych.

Przedstawione w pracy kierunki wykorzystania teorii chaosu deterministycznego nie wyczerpują na pewno wszystkich możliwości w tym zakresie. Rozważania te mają niewątpliwie charakter przyszłościowy, stąd oczywiście staje się sprawa ich dyskusyjności.

Problematyka zastosowań teorii chaosu deterministycznego w zagadnieniach ekonomicznych wymaga niewątpliwie dalszych prac badawczych.

Literatura

- [1] Achelis S.B.: *Analiza techniczna od A do Z*. LT&P, Warszawa 1998
- [2] Baker G.L., Gollub J.P.: *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*. PWN, Warszawa 1998.
- [3] Baryłko B., Mikos J.: *Gielda krok po kroku – Poradnik inwestora giełdowego*. Poltext, Warszawa 1994
- [4] Bernstein J.: *Cykle giełdowe*, Warszawa 1996
- [5] Bernstein Peter L.: *Intelektualna historia Wall Street*. WIG- Press, Warszawa 1998
- [6] Bień W.: *Rynek papierów wartościowych*. Delfin, Warszawa 1998
- [7] Brett M.: *Świat finansów*. Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa 1993
- [8] Buschgen H.E.: *Przedsiębiorstwo bankowe*. Poltext, Warszawa 1997
- [9] Chorafas D.N.: *Chaos Theory in the Financial Markets*. Irvin, Chicago 1994
- [10] Czekaj J.: *Kursy akcji notowanych na GPW w Warszawie w świetle współczesnej teorii rynku kapitałowego*, Kraków 1994
- [11] Czekala M.: *Analiza fundamentalna i techniczna*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 1998
- [12] Daniuluk M.: *Rynek kapitałowy. Papiery wartościowe, operacje giełdowe, strategie inwestowania*. Dom Wydawniczy Bellona, Warszawa 1998
- [13] Diedrigkeit R.: *Rynek pieniądza i papierów wartościowych. Biblioteka Menedżera i Bankowca*, Warszawa 1994
- [14] Domaszewicz R.: *Finanse w gospodarce rynkowej*. Akademia Ekonomiczna, Kraków 1993
- [15] Dusza M.: *Banki na rynku kapitałowym*. Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa 1992
- [16] Dusza M.: *Rynek kapitałowy w Polsce. Narodziny, pierwsze dziesięciolecie, perspektywy*. Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa 1999
- [17] Elton E.J., Gruber M.J.: *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*. Wig Press, Warszawa 1998
- [18] Fedorowicz Z.: *Rynek pieniądza i rynek kapitału*. Poltex, Warszawa 1997
- [19] Gately E.: *Cena i czas. Zarys metod analizy technicznej*. Wig Press, Warszawa 1999
- [20] Gierszewska G., Romanowska M.: *Analiza strategiczna przedsiębiorstw*. PWE, Warszawa 1995
- [21] Gleik J.: *Chaos. Narodziny nowej nauki*. Zys i S-ka, Poznań 1996
- [22] Głowacki M.: *Metody inwestycyjne na rynku papierów wartościowych*. Bank i Kredyt 7-8/95
- [23] Gregory L. Baker, Jerry P. Gollub: *Wstęp do dynamiki układów chaotycznych*. PWN, Warszawa 1998
- [24] Grzegorzczak W.: *Rynek papierów wartościowych*. Wydawnictwa U.Ł., Łódź 1995
- [25] Grzegorzczak W.: *Polski rynek papierów wartościowych*. Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa 1993

- [26] Haugen R.A.: *Teoria nowoczesnego inwestowania. Obszerny podręcznik analizy portfelowej*. WIG PRESS, Warszawa 1996
- [27] Heese V.: *Analiza fundamentalna rynku akcji stosowana w bankach niemieckich*. „Artex”, Gdańsk 1996
- [28] Jajuga K., Jajuga T.: *Jak inwestować w papiery wartościowe*. PWN, Warszawa 1994
- [29] Jajuga K., Jajuga T.: *Inwestycje*. PWN, Warszawa 1996
- [30] Jajuga K., Kuziak K., Markowski P.: *Inwestycje finansowe*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 1998
- [31] Jajuga K., Papla D.: *Teoria chaosu w analizie finansowych szeregów czasowych – aspekty teoretyczne i badania empiryczne*. V Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, nt. Dynamiczne Modele Ekonometryczne. 9-11 września 1997 Toruń, pp. 5-16
- [32] Janeczko S., Jastrzębski P.: *On interaction of classical fractals*. Preprint IMPW 1996
- [33] Hayes B.: *American scientist*, Vol 87, No 3, 1999; www.sigmaxi.org
- [34] Kapitaniak T., Wojewoda J.: *Bifurkacje i chaos*. Politechnika Łódzka, Łódź 1995
- [35] Karpio A.: *W stronę matematyki finansowej*. Wydawnictwa Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 1999, Optimum. Studia Ekonomiczne nr 3
- [36] Kasprzak T. (red.): *Modele informacyjne procesów gospodarczych*. Wydawnictwo Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski, Warszawa 1998
- [37] Kasprzak T.: *Ewolucja przedsiębiorstw ery informacji*. Wydawnictwo Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski, Warszawa 2000
- [38] Kijak Z.: *Jak racjonalnie grać na giełdzie papierów wartościowych*. PWN, Warszawa 1994
- [39] Klein P.J.: *Wstęp do analizy papierów wartościowych*. K.E. Liber, Warszawa 1999
- [40] Knap Ł.: *Teoria chaosu. Nowa koncepcja rynku kapitałowego ma coraz więcej zwolenników*. Gazeta Bankowa 13/30.03./1997
- [41] Krzyżkiewicz Z.: *Leksykon bankowo-giełdowy*. Poltekst, Warszawa 1998
- [42] Komar Z.: *Sztuka inwestowania*. PRET, Warszawa 1994
- [43] Kudrewicz J.: *Fraktale i chaos*. WNT, Warszawa 1993
- [44] Ladko A.: *Wybrane instrumenty rynku pieniężnego i kapitałowego. Kalkulacja i stosowanie*. Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa 1994
- [45] Lasek M.: *Wielokryterijna ocena kondycji ekonomicznej firm – klientów banku*. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 1996
- [46] Lasek M.: *Strategic Planning*. W: Zimmermann H. J. (red.): *Practical Applications of Fuzzy Technologies*, Wydawnictwo Kluwer, Boston (London) 1999
- [47] Lechowicz A., Mączka W.: *Rynek kapitałowy – Poradnik inwestora giełdowego*. BEST, Kraków 1994
- [48] Levy H., Sarnat M.: *Capital investment and financial decisions*. Prentice Hall, New York 1990
- [49] Little J.B., Rhodes L.: *Zrozumieć Wall Street*. Biblioteka Menedżera i Bankowca, Warszawa 1994
- [50] Łazor I., Tryuk M.: *Tajemnice kursu dnia na warszawskiej giełdzie*. Centrum Informatyki Menedżera, Warszawa 1995
- [51] Mandelbrot B.: *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, New York 1982
- [52] Martyn T.: *Fraktale i obiektowe algorytmy ich wizualizacji*. Nakom, Poznań 1996

- [53] Morrison F.: *Sztuka modelowania układów dynamicznych – deterministycznych, chaotycznych*, Warszawa 1996
- [54] Mosdorf R.: *Dynamiczny model wrzenia na podstawie metody chaosu deterministycznego*. Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 1997
- [55] Mosdorf R., Siemieniuk N.: *Modelowanie wybranych aspektów zarządzania kapitałem całkowitym banku z zastosowaniem teorii chaosu deterministycznego*. Międzynarodowa konferencja naukowa nt. Zmiany w systemie finansowym w latach dziewięćdziesiątych na przykładzie wybranych krajów Europy, Wyższa Szkoła Finansów i Zarządzania, Wydział Finansów i Informatyki, Białystok 20-21 maja 1999
- [56] Mosdorf R., Nazarko J., Siemieniuk N.: *Basic algorithms of fractal analysis in economy*. In: International Conference on Computer Based Experiments, Learning and Teaching COMBELET'99, Wrocław 1999
- [57] Mosdorf R., Nazarko J., Siemieniuk N.: *Chaotyczneskoje powiedienije w prostoj modeli uprawlenija obszczym bankowskim kapitałom*. Sankt Petersburg 2000
- [58] Mosdorf R., Ulbrich R.: *Zastosowanie analizy fraktalnej do oceny struktury mieszaniny gaz – ciecz*. X Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy, Świeradów 1998
- [59] Murphy J. J.: *Analiza techniczna. Obszerny podręcznik metod i strategii inwestycyjnych stosowanych na rynku kapitałowym*. Wig Press, Warszawa 1995
- [60] Murphy J. J.: *Międzyrynkowa analiza techniczna*. Wig Press, Warszawa 1998
- [61] Nazarko J., Siemieniuk N., Mosdorf R.: *Teoria chaosu i polskij rynek kapitała*. In: Międzynarodowa konferencja: Uprawlenie – 98, Uprawlenie restrukturyzacji ekonomiki. Rosyjska Akademia Nauk, Moskwa 1998
- [62] Nazarko J., Siemieniuk N., Mosdorf R.: *Fractal Analysis of Polish Stock Market Behaviour*. In: Advanced Simulation Technologies Conference. Computer Simulation in Business. San Diego, CA, 1999
- [63] Nowak K.: *Polski rynek kapitałowy. Instrumenty, uczestnicy, inwestycje*. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, Poznań 1998
- [64] Olesiński Z. (red.): *Bezpośrednie inwestycje zagraniczne w Polsce*. PWE, Warszawa 1998
- [65] Ott E. (z ang. przetł. Jankowski S.): *Chaos w układach dynamicznych*. WNT, Warszawa 1997
- [66] Peitygen H.O., Jurgens H., Saupé D.: *Fraktale. Granice chaosu*. PWN, Warszawa 1995
- [67] Peters E.E.: *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*. Wig Press, Warszawa 1997
- [68] Pietrzak B., Polański Z. (red.): *System finansowy w Polsce. Lata dziewięćdziesiąte*. PWN, Warszawa 1997
- [69] Plummer T.: *Psychologia rynków finansowych u źródeł analizy technicznej*. Wig Press, Warszawa 1995
- [70] Pring M.J.: *Podstawy analizy technicznej*. Wig Press, Warszawa 1998
- [71] Ritchie J.C.: *Analiza fundamentalna*. Wig Press, Warszawa 1997
- [72] Schuster H.G.: *Chaos deterministyczny. Wprowadzenie*. PWN, Warszawa 1993
- [73] Siemieniuk N.: *Analiza inwestycji kapitałowych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie a teoria chaosu deterministycznego*. Konferencja naukowa nt. Technologie informacyjne w gospodarce rynkowej. Aktualne tendencje, Katedra Cybernetyki i Badań Operacyjnych, Wydział Nauk Ekonomicznych, Uniwersytet Warszawski, Warszawa 10-11 grudnia 1998

- [74] Siemieniuk N.: *Wybrane systemy komputerowe do analizy technicznej, fundamentalnej i portfelowej na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie*. Wydawnictwa Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 1999, Optimum. Studia Ekonomiczne nr 3
- [75] Siemieniuk N.: *Ocena banków notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie z wykorzystaniem narzędzi informatycznych z zakresu analizy układów dynamicznych*. IV Międzynarodowa Konferencja nt. Human – Computer Interaction'99, Gdańsk 1999
- [76] Sheimo M.B.: *Reguły gry na giełdzie*. Wig Press, Warszawa 1998
- [77] Smith Ch.W.: *The Mind of the Market*. Rowman & Littlefield, New York 1981
- [78] Sprott. J.C.: *Henon map corelation dimension*, <http://www.sprott.physics.wisc.edu>
- [79] Stewart I.: *Czy bóg gra w kości. Nowa matematyka chaosu*. PWN, Warszawa 1996
- [80] Stepnowski R.: *Bankowa ekonomiczna wartość dodana*. Polski rynek kapitałowy 1997/98. Parkiet, Gazeta Giełdy
- [81] Strahl D.: *Modele zarządzania bankiem (model Triada)*. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej, Wrocław 1996
- [82] Socha J.: *Zrozumieć giełdę*. Olympus, Warszawa 1994
- [83] Socha J.: *Rynek, giełda, inwestycje*. Olympus, Warszawa 1998
- [84] Sopoćko A.: *Giełda Papierów Wartościowych*. Mediabank S.A., Warszawa 1993
- [85] Sopoćko A.: *Giełda. Podstawowe strategie inwestowania*. Mediabank S.A., Warszawa 1995
- [86] Takens F.: *Detecting strange attractors in turbulence*. In Rand D.A., Young L.S. (eds.) *Dynamical Systems and Turbulence*. Springer Verlag, New York 1981
- [87] Tarczyński W., Holzer J., Galińska M., Wawrzyniak K.: *Analiza fundamentalna na giełdzie papierów wartościowych*. PTE, Szczecin 1995
- [88] Tarczyński W.: *Rynki kapitałowe*. Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa 1997
- [89] Trippi R.R.: *Chaos and Nonlinear Dynamics in the Markets*. Irvin, Chicago 1995
- [90] Weron A., Weron R.: *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*. WNT, Warszawa 1998
- [91] Wierzbiński M.: *Analiza portfelowa*. Motte, Łódź 1995
- [92] Wojewódka M.: *Jak się zarabia na giełdzie? Pierwsza książka o spekulacjach na polskiej giełdzie*. Z. Szczygiel Publishing, Kraków 1994
- [93] Wolny K.: *Chaos rządzi giełdą. Gospodarka*. Businessman 64/71 1997
- [94] Zawadzki H.: *Chaotyczne systemy dynamiczne*. AE, Katowice 1996
- [95] Zieliński J.S. (red.): *Inteligentne systemy w zarządzaniu. Teoria i praktyka*. PWN, Warszawa 2000
- [96] Zielonka P., Tyszka T.: *Nowoczesne finanse: efektywność rynku czy finanse behawioralne?* Bank i Kredyt 11/1999
- [97] Internet: <http://www.euro-info.com.pl>
- [98] Internet: <http://www.gpw.com.pl>
- [99] Internet: <http://www.kdpw.com.pl>
- [100] Internet: <http://www.amibroker.w.pl>
- [101] Internet: <http://www.motte.polbox.com>
- [102] Internet: <http://www.tp.lc.ehu.es>
- [103] Internet: <http://www.skyscraper.fortunecity.com>

Spis tabel

| | |
|-------------|---|
| Tabela 1.1 | Przykładowy portfel minimalnego ryzyka |
| Tabela 1.2 | Przykładowy portfel optymalny |
| Tabela 1.3 | Przykładowy portfel rynkowy |
| Tabela 1.4 | Przykładowe wartości ryzyka i współczynników beta i alfa w modelu Sharpe'a |
| Tabela 3.1 | Wyznaczanie wartości WIG dla dni nie objętych notowaniami |
| Tabela 3.2 | Wartości wykładnika Hursta dla wybranych rynków kapitałowych |
| Tabela 3.3 | Zmiany wartości wykładnika H w funkcji τ |
| Tabela 3.4 | Wymiar korelacyjny dla wybranych rynków kapitałowych |
| Tabela 3.5 | Wykładnik Lapunowa dla wybranych rynków kapitałowych |
| Tabela 3.6 | Klasyfikacja sektorowa polskiego rynku kapitałowego |
| Tabela 3.7 | Klasyfikacja wybranych do analizy spółek giełdowych, wg sektorów |
| Tabela 3.8 | Wybrane do analizy spółki sektora przemysłu spożywczego |
| Tabela 3.9 | Wykładnik Hursta dla wybranych spółek sektora przemysłu spożywczego |
| Tabela 3.10 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla wybranych spółek sektora spożywczego dla $\tau = 7$ |
| Tabela 3.11 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla wybranych spółek sektora spożywczego dla τ wg tabeli 3.12 |
| Tabela 3.12 | Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora przemysłu spożywczego |
| Tabela 3.13 | Ilość danych dla spółek sektora przemysłu lekkiego |
| Tabela 3.14 | Wykładnik Hursta dla spółek sektora przemysłu lekkiego. |
| Tabela 3.15 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu lekkiego dla $\tau = 7$ |
| Tabela 3.16 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu lekkiego dla τ wg tab. 3.17 |
| Tabela 3.17 | Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora przemysłu lekkiego |
| Tabela 3.18 | Wykładnik Hursta dla Swarzędza – spółki sektora przemysłu drzewnego |
| Tabela 3.19 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia spółki sektora przemysłu drzewnego dla $\tau = 7$ |
| Tabela 3.20 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia oraz inne dane dla spółki Swarzędz |
| Tabela 3.21 | Ilość danych dla spółek sektora przemysłu chemicznego |
| Tabela 3.22 | Wykładnik Hursta dla spółek sektora przemysłu chemicznego |
| Tabela 3.23 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu chemicznego dla $\tau = 7$ |
| Tabela 3.24 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu chemicznego dla τ wg tab. 3.25 |
| Tabela 3.25 | Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora przemysłu chemicznego |

| | |
|-------------|---|
| Tabela 3.26 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla sektora przemysłu materiałów budowlanych |
| Tabela 3.27 | Wartości τ oraz inne dane dla spółki sektora przemysłu materiałów budowlanych – Irena |
| Tabela 3.28 | Ilość danych dla spółek sektora budownictwo |
| Tabela 3.29 | Wykładnik Hursta dla spółek sektora przemysłu budowlanego. |
| Tabela 3.30 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu budowlanego |
| Tabela 3.31 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu budowlanego dla τ wg tab. 3.32 |
| Tabela 3.32 | Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora budownictwo |
| Tabela 3.33 | Ilość danych dla spółek sektora przemysłu elektromaszynowego |
| Tabela 3.34 | Wykładnik Hursta dla spółek sektora przemysłu elektromaszynowego |
| Tabela 3.35 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek przemysłu elektromaszynowego dla $\tau = 7$ |
| Tabela 3.36 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla τ wg tab. 3.37 |
| Tabela 3.37 | Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora przemysłu elektromaszynowego |
| Tabela 3.38 | Wybrane do analizy spółki sektora banków |
| Tabela 3.39 | Wykładnik Hursta dla wybranych spółek sektora banków |
| Tabela 3.40 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla wybranych spółek sektora banków dla $\tau = 7$ |
| Tabela 3.41 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora banków dla τ wg tab. 3.42 |
| Tabela 3.42 | Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora banków |
| Tabela 3.43 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla sektora ubezpieczenia dla $\tau = 7$ |
| Tabela 3.44 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora ubezpieczeń dla τ wg tab. 3.45 |
| Tabela 3.45 | Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora ubezpieczeń |
| Tabela 3.46 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Elektrim dla $\tau = 7$ |
| Tabela 3.47 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Elektrim dla τ wg tab. 3.48 |
| Tabela 3.48 | Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora telekomunikacja |
| Tabela 3.49 | Wykładnik Hursta dla spółek sektora informatyka |
| Tabela 3.50 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora informatyka dla $\tau = 7$ |
| Tabela 3.51 | Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora informatyka dla τ wg tab. 3.52 |
| Tabela 3.52 | Wartości τ oraz inne dane dla spółek sektora informatyka |
| Tabela 3.53 | Wartości τ oraz pozostałe charakterystyki dla wybranych spółek na polskiej giełdzie |

Spis rysunków

rozdział 1

- Rysunek 1.1 Przykład wykresu liniowego
- Rysunek 1.2 Wykres liniowy (linia czarna) cen giełdowych akcji spółki Elektrim
- Rysunek 1.3 Wykres słupkowy
- Rysunek 1.4 Wykres punktowo-symboliczny
- Rysunek 1.5 Wykres candlestick dla spółki ANIMEX od sierpnia 1997 do lipca 2000 dla okresów tygodniowych
- Rysunek 1.6 Podstawowy element schematu wykresu candlestick
- Rysunek 1.7 Ceny akcji spółki Irena w okresie od stycznia 2000 do sierpnia 2000 z zaznaczonymi okresami trendu wzrostowego (linia żółta)
- Rysunek 1.8 Ceny akcji spółki Bakoma w okresie od stycznia 2000 do sierpnia 2000 z zaznaczonym kanałem trendu spadkowego (linie żółte)
- Rysunek 1.9 Ceny akcji spółki Ocean w okresie od stycznia 2000 do sierpnia 2000 z zaznaczonym okresem trendu stagnacyjnego (linie żółte)
- Rysunek 1.10 Linie oporu i wsparcia w trendzie wzrostowym
- Rysunek 1.11 Ceny akcji spółki Bielbaw w okresie od stycznia 2000 do sierpnia 2000 z zaznaczoną zwolnioną linią trendu (linia żółta)
- Rysunek 1.12 Ceny akcji spółki Polifarb w okresie od stycznia 2000 do sierpnia 2000 z zaznaczonym wachlarzem linii trendu (linie żółte)
- Rysunek 1.13 Przykład kanału trendu spadkowego
- Rysunek 1.14 Przykład formacji odwróconej litery V dla spółki Boryszew
- Rysunek 1.15 Przykład formacji litery V dla spółki Compensa
- Rysunek 1.16 Przykład formacji głowy i ramion dla spółki Rafako
- Rysunek 1.17 Przykład formacji podwójnego szczytu dla spółki Famot
- Rysunek 1.18 Przykład formacji podwójnego dna dla spółki KGHM
- Rysunek 1.19 Przykład formacji spodka dla spółki Kredyt Bank
- Rysunek 1.20 Przykład formacji trójkąta zwyżkującego dla spółki CCS
- Rysunek 1.21 Przykład formacji trójkąta zniżkującego dla spółki Kruszwica
- Rysunek 1.22 Przykład formacji klina rosnącego dla spółki Permedia
- Rysunek 1.23 Przykład formacji flagi opadającej dla spółki Oborniki
- Rysunek 1.24 Przykład formacji chorągiewki opadającej dla spółki Cersanit
- Rysunek 1.25 Przykład formacji prostokąta dla spółki TPSA
- Rysunek 1.26 Przykład formacji diamentu dla spółki Prozmeat
- Rysunek 1.27 Przykład średnich ruchomych dla spółki Agora
- Rysunek 1.28 Przykład wstąg Bollingera dla spółki Agros
- Rysunek 1.29 Przykład linii MACD dla spółki BOŚ od grudnia 1999 roku do sierpnia 2000 roku przy $k_1 = 12$, $k_2 = 26$, $k = 9$ dla linii sygnału

- Rysunek 1.30 Przykład wskaźnika szybkości zmian ROC dla spółki giełdowej Computerland dla $k = 5$ i $k = 10$
- Rysunek 1.31 Przykład wskaźnika RSI dla spółki giełdowej Dębica od grudnia 1999 do sierpnia 2000 dla $k = 9$
- Rysunek 1.32 Przykład wskaźnika OBV dla spółki Grajewo grudnia 1999 do sierpnia 2000
- Rysunek 1.33 Kształtowanie się kursu giełdowego akcji i jej wewnętrznej wartości
- Rysunek 1.34 Procentowe ujęcie Produktu Krajowego Brutto w poszczególnych kwartałach w Polsce
- Rysunek 1.35 Schemat analizy wskaźnikowej według Du Ponta
- Rysunek 1.36 Wykres zysk-ryzyko dla wybranych akcji
- Rysunek 1.37 Zależność pomiędzy ilością akcji w portfelu i związanym z nim ryzykiem
- Rysunek 1.38 Przykładowy rozkład udziałów w portfelu złożonym z akcji dwóch spółek
- Rysunek 1.39 Wariancja portfela papierów wartościowych w funkcji udziału akcji w portfelu
- Rysunek 1.40 Przykładowy wykres ryzyko-dochód dwóch akcji w portfelu
- Rysunek 1.41 Przykładowy wykres ryzyko-dochód dwu akcji w portfelu w przypadku korelacji ujemnej
- Rysunek 1.42 Zbiór możliwości portfeli akcji firm A i B
- Rysunek 1.43 Przybliżony zbiór możliwych portfeli
- Rysunek 1.44 Ryzyko portfela w funkcji różnorodności akcji w portfelu
- Rysunek 1.45 Rozkład portfeli papierów wartościowych w układzie zysk-ryzyko
- Rysunek 1.46 Mapa ryzyko-zysk przykładowego portfela papierów wartościowych z naniesioną krzywą portfeli efektywnych
- Rysunek 1.47 Zbiór możliwych portfeli w przypadku walorów obarczonych ryzykiem i walorów bez ryzyka
- Rysunek 1.48 Graficzna prezentacja zależności ryzyka globalnego akcji od poszczególnych składników ryzyka
- Rysunek 1.49 Rozkład portfeli ze względu na stopę zwrotu i współczynnik β
- Rysunek 1.50 Zmiany wskaźnika efektywności Sharpe'a dla przykładowych inwestycji
- Rysunek 1.51 Wskaźnik efektywności Jensena w ujęciu graficznym

rozdział 2

- Rysunek 2.1 Scenariusz dojścia do chaosu w równaniu logistycznym $z_{n+1} = rz_n(1 - z_n)$
- Rysunek 2.2 Wahania szybkości cyrkulacji cieczy w zjawisku Benarda opisanym modelem Lorenza
- Rysunek 2.3 Przykład graficznej prezentacji zmiany ceny akcji opisanej równaniem logistycznym przy współczynniku wzrostu cen $p = 2$ i wartości początkowej akcji $c_0 = 0.15$
- Rysunek 2.4 Oscylacja cen przy współczynniku popytu $p = 3.3$. między $c = 0.82$ (sprzedaż) a $c = 0.48$ (zakup)
- Rysunek 2.5 Iteracja odwzorowania logistycznego dla ruchu chaotycznego przy $p = 3.8$
- Rysunek 2.6 Cykliczne przebiegi oscylacyjne odwzorowania logistycznego. Okres oscylacji wynosi 4 i występuje między wartościami $c = 0.3688$, $c = 0.8212$, $c = 0.5170$, $c = 0.8814$
- Rysunek 2.7 Wykresy trzeciej iteracji równania logistycznego z naniesioną trajektorią oraz obraz zmian wartości c_n wraz ze wzrostem n dla różnych wartości parametru p
- Rysunek 2.8 Diagram bifurkacyjny odwzorowania logistycznego i odpowiadający mu przebieg wykładnika Lapunowa.
- Rysunek 2.9 Atraktor Henona i powiększenia zaznaczonych obszarów
- Rysunek 2.10 Zachowanie układu Henona w zależności od wartości parametrów a i b

- Rysunek 2.11 Diagram bifurkacyjny (a) i wykładnik Lapunowa (b) mapy Henona
- Rysunek 2.12 Atraktor układu Lorenza
- Rysunek 2.13 Efekt motyla
- Rysunek 2.14 Kolejne maksyma zmiennej z w modelu Lorenza
- Rysunek 2.15 Schemat bifurkacji węzeł-siodło w zależności od zmian parametru p
- Rysunek 2.16 Schemat bifurkacji podwajania okresu: a) superkrytycznej, b) subkrytycznej w zależności od zmian parametru p
- Rysunek 2.17 Schemat bifurkacji transkrytycznej w zależności od zmian parametru p
- Rysunek 2.18 Rozkład wyrazów ciągu dla odwzorowania kwadratowego (2.6) w funkcji zmiany parametru p (diagram bifurkacji)
- Rysunek 2.19 Rozciągnięty fragment wykresu bifurkacji z Rysunek 2.18 z wyraźnie widocznymi oknami i punktami podwajania okresu w oknach
- Rysunek 2.20 Czasowy przebieg zmiennej Y w modelu Lorenza (2.5) w zależności od wartości parametru
- Rysunek 2.21 Zachowanie wartości własnych odwzorowania Poincaré w przypadku intermitencji typu I
- Rysunek 2.22 Powstawanie intermitencji typu I w odwzorowaniu logistycznym $x_{n+1} = (p+\sigma)(x_n - x_n^2)$
- Rysunek 2.23 Intermitencja typu II; a) zachowanie się wartości własnych odwzorowania Poincarégo w przypadku intermitencji typu II; b) schematyczny przebieg trajektorii i odwzorowania Poincarégo
- Rysunek 2.24 Intermitencja typu III
- Rysunek 2.25 Przykładowe wahania szybkości przepływu w funkcji czasu mierzone podczas turbulencji
- Rysunek 2.26 Zmiana rozmiaru w przestrzeni euklidesowej D -wymiarowej
- Rysunek 2.27 Demonstracja wymiaru fraktalnego na przykładzie kwadratu euklidesowego
- Rysunek 2.28 Przykład konstrukcji krzywej Kocha
- Rysunek 2.29 Przykład trójkąta Sierpińskiego, dywanu Sierpińskiego, gąbki Mengera
- Rysunek 2.30 Przykład krzywej Hilberta
- Rysunek 2.31 Odległości między zbiorami $o(X, Y)$ i $o(Y, X)$
- Rysunek 2.32 Liść paproci – atraktor układu IFSP opisanego układem czterech odwzorowań
- Rysunek 2.33 „Gałązka” – atraktor układu IFSP opisanego układem czterech odwzorowań
- Rysunek 2.34 Schematyczny portret fazowy posiadający dwa atraktory
- Rysunek 2.35 Portret fazowy tłumionego wahadła
- Rysunek 2.36 Trajektorie ruchu i atraktor wahadła z napędem
- Rysunek 2.37 Schematyczny przekrój Poincaré – kropki w układzie cyklu granicznego
- Rysunek 2.38 Odwzorowanie Poincaré dla układu w przestrzeni 3-wymiarowej
- Rysunek 2.39 Schematyczny model odwzorowania Poincaré
- Rysunek 2.40 Zrekonstruowany atraktor Henona z zaznaczeniem kilku kolejnych iteracji w celu pokazania nieregularnego charakteru ruchu
- Rysunek 2.41 Zasada wyznaczania wykładnika Hursta
- Rysunek 2.42 Wykładnik Hursta
- Rysunek 2.43 Wyznaczanie wymiaru fraktalnego w oparciu o funkcję $\ln C_2(l)$
- Rysunek 2.44 Zmiany entropii K_2 w funkcji wymiaru zanurzenia
- Rysunek 2.45 Zmiany funkcji $C_2(l)$ i wymiaru korelacyjnego D_2 dla szeregu czasowego $x_n = \sin(0.1n) + \sigma - \sigma$

- Rysunek 2.46 Zmiany wartości największego wykładnika Lapunowa wyznaczonego z zależności (2.45) w funkcji czasu ewolucji układu
- Rysunek 2.47 Algorytm rekonstrukcji atraktora dla przesunięcia τ
- Rysunek 2.48 Rekonstrukcja atraktora z szeregu czasowego $x_n = \sin(0.1 \cdot n\tau) + \cos(0.3 \cdot n\tau) + \sigma$

rozdział 3

- Rysunek 3.1 Szereg czasowy notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000
- Rysunek 3.1a Szereg czasowy przyrostów notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 (dane tygodniowe)
- Rysunek 3.1b Szereg czasowy notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000, pozbawiony trendu, przez usunięcie pierwszych trzech składowych częstotliwości widma mocy danego szeregu (dane tygodniowe)
- Rysunek 3.2 Widmo mocy szeregu czasowego notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 (dane tygodniowe)
- Rysunek 3.3 Wykładnik Hursta dla szeregu czasowego przyrostów notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 (dane tygodniowe)
- Rysunek 3.3a Wykładnik Hursta dla szeregu czasowego notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000, po usunięciu trzech pierwszych częstotliwości (dane tygodniowe)
- Rysunek 3.4 Zmiany wartości zmiennej losowej dla $H = 0,9$ i $H = 0,5$
- Rysunek 3.5 Zmiany wartości wykładnika Hursta w funkcji τ
- Rysunek 3.6 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla szeregu czasowego przyrostów notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 przy $\tau = 7$
- Rysunek 3.6a Wymiary korelacyjne dla szeregu czasowego przyrostów notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000 przy $\tau = 7$
- Rysunek 3.6b Krzywe $\ln C_2(l)$ dla szeregu czasowego notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000, z usuniętymi 3 pierwszymi częstotliwościami, przy $\tau = 7$
- Rysunek 3.6c Wymiary korelacyjne dla szeregu czasowego notowań WIG w okresie 16.04.1991 – 16.11.2000, z usuniętymi 3 pierwszymi częstotliwościami, przy $\tau = 7$
- Rysunek 3.7 Agros – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.8 Agros – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.9 Animex – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.10 Animex – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.11 Okocim – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.12 Rolimpex – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.13 Sokołów – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.14 Żywiec – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.15 Analiza R/S dla spółki Agros dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.16 Analiza R/S dla spółki Animex dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.17 Analiza R/S dla spółki Okocim dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.18 Analiza R/S dla spółki Rolimpex dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.19 Analiza R/S dla spółki Sokołów dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.20 Analiza R/S dla spółki Żywiec dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.21 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Agros dla $\tau = 7$

- Rysunek 3.22 Wymiary korelacyjne dla spółki Agros dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.23 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Animex dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.24 Wymiary korelacyjne dla spółki Animex dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.25 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Okocim dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.26 Wymiary korelacyjne dla spółki Okocim dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.27 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Rolimpex dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.28 Wymiary korelacyjne dla spółki Rolimpex dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.29 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Sokołów dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.30 Wymiary korelacyjne dla spółki Sokołów dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.31 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Żywiec dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.32 Wymiary korelacyjne dla spółki Żywiec dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.33 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla wybranych spółek sektora spożywczego dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.34 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Agros dla $\tau = 196$
- Rysunek 3.35 Wymiary korelacyjne dla spółki Agros dla $\tau = 196$
- Rysunek 3.36 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Animex dla $\tau = 168$
- Rysunek 3.37 Wymiary korelacyjne dla spółki Animex dla $\tau = 168$
- Rysunek 3.38 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Okocim dla $\tau = 441$
- Rysunek 3.39 Wymiary korelacyjne dla spółki Okocim dla $\tau = 441$
- Rysunek 3.40 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Rolimpex dla $\tau = 315$
- Rysunek 3.41 Wymiary korelacyjne dla spółki Rolimpex dla $\tau = 315$
- Rysunek 3.42 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Sokołów dla $\tau = 35$
- Rysunek 3.43 Wymiary korelacyjne dla spółki Sokołów dla $\tau = 35$
- Rysunek 3.44 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Żywiec dla $\tau = 336$
- Rysunek 3.45 Wymiary korelacyjne dla spółki Żywiec dla $\tau = 336$
- Rysunek 3.46 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu spożywczego
- Rysunek 3.47 Próchnik – szereg czasowy przyrostów dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.48 Vistula – szereg czasowy przyrostów dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.49 Analiza R/S dla spółki Próchnik dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.50 Analiza R/S dla spółki Vistula dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.51 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Próchnik dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.52 Wymiary korelacyjne dla spółki Próchnik dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.53 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Vistula dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.54 Wymiary korelacyjne dla spółki Vistula dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.55 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Próchnik dla $\tau = 322$
- Rysunek 3.55a Wymiary korelacyjne dla spółki Próchnik dla $\tau = 322$
- Rysunek 3.56 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Vistula dla $\tau = 287$
- Rysunek 3.57 Wymiary korelacyjne dla spółki Vistula dla $\tau = 287$
- Rysunek 3.58 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu lekkiego
- Rysunek 3.59 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Sokołów przy $\tau = 7$ i $\tau = 35$
- Rysunek 3.60 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Próchnik przy $\tau = 7$ i $\tau = 322$

- Rysunek 3.61 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Vistula przy $\tau = 7$ i $\tau = 287$
- Rysunek 3.62 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Rolimpex przy $\tau = 7$ i $\tau = 315$
- Rysunek 3.63 Swarzędz – szereg czasowy przyrostów dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.64 Analiza R/S dla spółki Swarzędz dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.65 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Swarzędz dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.66 Wymiary korelacyjne dla spółki Swarzędz dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.67 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Swarzędz dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.68 Wymiary korelacyjne dla spółki Swarzędz dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.69 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Swarzędz dla $\tau = 238$
- Rysunek 3.70 Wymiary korelacyjne dla spółki Swarzędz dla $\tau = 238$
- Rysunek 3.71. Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Swarzędz
- Rysunek 3.72 Jelfa – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.73 Jelfa – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.74 Polifarb-CW – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.75 Analiza R/S dla spółki Jelfa dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.76 Analiza R/S dla spółki Polifarb-CW dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.77 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Jelfa dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.78 Wymiary korelacyjne dla spółki Jelfa dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.79 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Polifarb-CW dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.80 Wymiary korelacyjne dla spółki Polifarb-CW dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.81 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu chemicznego dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.82 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Jelfa dla $\tau = 203$
- Rysunek 3.83 Wymiary korelacyjne dla spółki Jelfa dla $\tau = 203$
- Rysunek 3.84 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Polifarb-CW dla $\tau = 280$
- Rysunek 3.85 Wymiary korelacyjne dla spółki Polifarb-CW dla $\tau = 280$
- Rysunek 3.86 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla sektora przemysłu chemicznego, wraz z powiększeniem wykresu dla $\tau = 203$ (Jelfa) i $\tau = 280$ (Polifarb-CW)
- Rysunek 3.87 Irena – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.88 Irena – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.89 Analiza R/S dla spółki Irena dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.90 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Irena dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.91 Wymiary korelacyjne dla spółki Irena dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.92 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Irena dla $\tau = 217$
- Rysunek 3.93 Wymiary korelacyjne dla spółki Irena dla $\tau = 217$
- Rysunek 3.94 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki sektora przemysłu materiałów budowlanych
- Rysunek 3.95 Budimex – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.96 Budimex – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.97 Exbud – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.98 Exbud – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.99 Mostostal-Exp – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.100 Mostostal-Exp – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$

- Rysunek 3.101 Analiza R/S dla spółki Budimex dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.102 Analiza R/S dla spółki Exbud dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.103 Analiza R/S dla spółki Mostostal-Exp dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.104 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Budimex dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.105 Wymiary korelacyjne dla spółki Budimex dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.106 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Exbud dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.107 Wymiary korelacyjne dla spółki Exbud dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.108 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Mostostal-Exp dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.109 Wymiary korelacyjne dla spółki Mostostal-Exp dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.110 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu budowlanego
- Rysunek 3.111 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Budimex dla $\tau = 49$
- Rysunek 3.112 Wymiary korelacyjne dla spółki Budimex dla $\tau = 49$
- Rysunek 3.113 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Exbud dla $\tau = 364$
- Rysunek 3.114 Wymiary korelacyjne dla spółki Exbud dla $\tau = 364$
- Rysunek 3.115 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Mostostal-Exp dla $\tau = 564$
- Rysunek 3.116 Wymiary korelacyjne dla spółki Mostostal-Exp dla $\tau = 564$
- Rysunek 3.117 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora budownictwo
- Rysunek 3.118 Kable – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.119 Kable – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.120 Rafako – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.121 Tonsil – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.122 Analiza R/S dla spółki Kable dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.123 Analiza R/S dla spółki Rafako dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.124 Analiza R/S dla spółki Tonsil dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.125 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Kable dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.126 Wymiary korelacyjne dla spółki Kable dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.127 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Rafako dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.128 Wymiary korelacyjne dla spółki Rafako dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.129 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Tonsil dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.130 Wymiary korelacyjne dla spółki Tonsil dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.131 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek przemysłu elektromaszynowego
- Rysunek 3.132 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Kable dla $\tau = 364$
- Rysunek 3.133 Wymiary korelacyjne dla spółki Kable dla $\tau = 364$
- Rysunek 3.134 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Rafako dla $\tau = 224$
- Rysunek 3.135 Wymiary korelacyjne dla spółki Rafako dla $\tau = 224$
- Rysunek 3.136 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Tonsil dla $\tau = 364$
- Rysunek 3.137 Wymiary korelacyjne dla spółki Tonsil dla $\tau = 364$
- Rysunek 3.138 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora przemysłu elektromaszynowego dla τ wg tab. 3.37
- Rysunek 3.139 Liczba danych dla wybranych spółek sektora banków
- Rysunek 3.140 Amerbank – dane oryginalne z trendem

- Rysunek 3.141 Amerbank – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.142 BIG – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.143 BIG – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.144 BPH – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.145 BPH – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.146 BRE – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.147 BRE – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.148 BŚK – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.149 BŚK – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.150 Kredyt Bank PBI – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.151 Kredyt Bank PBI – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.152 WBK – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.153 Analiza R/S dla spółki Amerbank dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.154 Analiza R/S dla spółki BIG dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.155 Analiza R/S dla spółki BPH dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.156 Analiza R/S dla spółki BRE dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.157 Analiza R/S dla spółki BŚK dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.158 Analiza R/S dla spółki Kredyt Bank PBI dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.159 Analiza R/S dla spółki WBK dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.160 Porównanie wartości wykładników Hursta i długości cyklu dla badanych spółek sektora bankowego
- Rysunek 3.161 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Amerbank dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.162 Wymiary korelacyjne dla spółki Amerbank dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.163 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki BIG dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.164 Wymiary korelacyjne dla spółki BIG dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.165 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki BPH dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.166 Wymiary korelacyjne dla spółki BPH dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.167 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki BRE dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.168 Wymiary korelacyjne dla spółki BRE dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.169 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki BŚK dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.170 Wymiary korelacyjne dla spółki BŚK dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.171 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Kredyt Bank PBI dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.172 Wymiary korelacyjne dla spółki Kredyt Bank PBI dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.173 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki WBK dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.174 Wymiary korelacyjne dla spółki WBK dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.175 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru dla wybranych spółek sektora bankowego dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.176 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki Amerbank dla $\tau = 154$
- Rysunek 3.177 Wymiary korelacyjne dla spółki Amerbank dla $\tau = 154$
- Rysunek 3.178 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki BIG dla $\tau = 217$
- Rysunek 3.179 Wymiary korelacyjne dla spółki BIG dla $\tau = 217$
- Rysunek 3.180 Krzywe $\ln C_2(l)$ dla spółki BPH dla $\tau = 189$

- Rysunek 3.181 Wymiary korelacyjne dla spółki BPH dla $\tau = 189$
- Rysunek 3.182 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki BRE dla $\tau = 217$
- Rysunek 3.183 Wymiary korelacyjne dla spółki BRE dla $\tau = 217$
- Rysunek 3.184 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki BŚK dla $\tau = 224$
- Rysunek 3.185 Wymiary korelacyjne dla spółki BŚK dla $\tau = 224$
- Rysunek 3.186 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Kredyt Bank PBI dla $\tau = 91$
- Rysunek 3.187 Wymiary korelacyjne dla spółki Kredyt Bank PBI dla $\tau = 91$
- Rysunek 3.188 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki WBK dla $\tau = 161$
- Rysunek 3.189 Wymiary korelacyjne dla spółki WBK dla $\tau = 161$
- Rysunek 3.190 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora bankowego
- Rysunek 3.191 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Amerbank przy $\tau = 7$ i $\tau = 154$
- Rysunek 3.192 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki WBK przy $\tau = 7$ i $\tau = 161$
- Rysunek 3.193 Warta – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.194 Analiza R/S dla spółki Warta dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.195 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Warta dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.196 Wymiary korelacyjne dla spółki Warta dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.197 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Warta dla $\tau = 147$
- Rysunek 3.198 Wymiary korelacyjne dla spółki Warta dla $\tau = 147$
- Rysunek 3.199 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora ubezpieczeń
- Rysunek 3.200 Elektrim – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.201 Elektrim – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.202 Analiza R/S dla spółki Elektrim dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.203 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Elektrim dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.204 Wymiary korelacyjne dla spółki Elektrim dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.205 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Elektrim dla $\tau = 315$
- Rysunek 3.206 Wymiary korelacyjne dla spółki Elektrim dla $\tau = 315$
- Rysunek 3.207 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółki Elektrim
- Rysunek 3.208 Computerland – dane oryginalne z trendem
- Rysunek 3.209 Computerland – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.210 Optimus – szereg czasowy przyrostów cen dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.211 Analiza R/S dla spółki Computerland dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.212 Analiza R/S dla spółki Optimus dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.213 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Computerland dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.214 Wymiary korelacyjne dla spółki Computerland dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.215 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Optimus dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.216 Wymiary korelacyjne dla spółki Optimus dla $\tau = 7$
- Rysunek 3.217 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Computerland dla $\tau = 98$
- Rysunek 3.218 Wymiary korelacyjne dla spółki Computerland dla $\tau = 98$
- Rysunek 3.219 Krzywe $\ln C_2(I)$ dla spółki Computerland dla $\tau = 98$
- Rysunek 3.220 Wymiary korelacyjne dla spółki Computerland dla $\tau = 98$
- Rysunek 3.221 Wymiary korelacyjne w funkcji wymiaru zanurzenia dla spółek sektora informatyka