



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**SOBRE GRUPOS DE HOMOTOPÍA
DE PRODUCTOS SIMÉTRICOS DE
UN CONTINUO**

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

PRESENTA:

M. en C. Marco Antonio Castillo Rubí

COMITE DE TUTORES:

Dr. Enrique Castañeda Alvarado

Dr. Alfredo Cano Rodríguez

Dr. José Guadalupe Anaya Ortega



El Cerrillo, Piedras Blancas, México
Febrero 2019

Resumen

El n -ésimo producto simétrico de un continuo X , es el espacio $F_n(X)$ de los subconjuntos no vacíos de X de cardinalidad a lo más n , dotado con la topología de Vietoris. En este trabajo se describe la clasificación de los n -ésimos productos simétricos de gráficas finitas por medio de homotopía, teniendo como modelos universales los n -ésimos productos simétricos de la cuña de n -círculos. Introducimos un CW -complejo al que llamamos *toro binomial* que es homeomorfo a un espacio que es un retracto de deformación fuerte del segundo producto simétrico de la cuña de n -círculos. Aplicando lo anterior calculamos el grupo fundamental, característica de Euler, grupos de homología y cohomología del segundo producto simétrico de gráficas finitas. También consideramos el (n, m) -ésimo producto simétrico suspensión $SF_m^n(X)$ que está definido por el cociente $F_n(X)/F_m(X)$, para $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$. Mostramos que $SF_m^n(-)$ es un functor homotópico. Por lo tanto, obtenemos una clasificación por homotopía. En particular, estudiamos el tipo de homotopía de $SF_1^2(X)$ y, en general, calculamos la característica de Euler de $SF_m^n(X)$, cuando X es un gráfica finita.

Abstract

The n -fold symmetric product of a continuum X , is the space $F_n(X)$ of non-empty subsets of X of cardinality at most n , endowed with the Vietoris topology. This document describes the classification of the n -fold symmetric product of a finite graph by means of its type of homotopy, having as universal models the n -fold symmetric product of the wedge the n -circles. Introduce a CW-complex called *binomial torus*, which is homeomorphic to a space that is a strong deformation retract of the second symmetric products of the wedge of n -circles. Applying the above we calculate the fundamental group, Euler characteristic, homology and cohomology groups of the second symmetric product of finite graphs. We also consider the (n, m) -fold symmetric product suspension $SF_m^n(X)$ which is defined by the quotient $F_n(X)/F_m(X)$, for $m, n \in \mathbb{N}$ with $m < n$. In this work we will show that $SF_m^n(-)$ is a homotopic functor. Thus we will obtain a classification by homotopy. In particular, we will study the homotopy type of $SF_1^2(X)$ and in general we will calculate the Euler characteristic of $SF_m^n(X)$ when X is a finite graph.

Índice general

Lista de figuras	9
Agradecimientos	13
Introducción	15
Antecedentes	21
Hipótesis	23
Objetivos	25
Métodos	27
1. Construcciones Básicas	29
1.1. Notación y Conceptos Básicos	29
1.2. El Funtor π_1	32
1.3. Equivalencia Homotópica	38
1.4. Productos Simétricos	43
1.5. Característica de Euler de Gráficas Finitas	46
1.6. Presentación de Grupos	49
2. Homotopía del Segundo Producto Simétrico de Gráficas Finitas	53
2.1. El funtor $F_n(-)$	53
2.2. Clasificación	57
2.3. Toro binomial	62
2.4. Homología y Cohomología de $F_2(G)$	68
3. El (n, m)-ésimo Producto Simétrico Suspensión de Gráficas Finitas	77
3.1. El funtor $SF_m^n(-)$	77
3.2. Clasificación	80
3.3. El $SF_1^2(X)$ de una gráfica finita	82
3.4. La característica de Euler de $SF_m^n(G)$	87
3.5. Polinomio Simétrico	90

Resultados	97
Discusión	99
Conclusiones	101
Trabajo a Futuro	103
Bibliografía	105
A. Tablas de la característica de Euler de $SF_m^n(G)$	107
B. Raíces de $p(r, 400)$	113
C. Raíces de $p(r, 41)$	117

Índice de figuras

1.1. La cuña de $X \vee Y$.	30
1.2. El espacio $S^1 \vee S^1 \vee S^2$.	30
1.3. Funciones homotópicas.	33
1.4. Equivalencia homotópica entre $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y S^{n-1} .	39
1.5. El continuo $C_1 \vee C_2$.	46
1.6. Modelo de $F_2(C_1 \vee C_2)$.	46
1.7. Gráfica finita G .	47
1.8. Gráfica finita G/T .	48
2.1. Algunos continuos con el mismo tipo de homotopía.	56
2.2. Partición de \mathcal{GF}_n .	58
2.3. Continuos: Paleta, aceituna y medalla.	59
2.4. Modelo del continuo figura ocho.	60
2.5. La pesa y la letra theta.	61
2.6. Nueva partición de \mathcal{GF}_n .	61
2.7. Cuña de n -círculos digitalizado.	62
2.8. Toro ij .	63
2.9. Toro Binomial.	63
2.10. Toro Binomial $T_{\binom{3}{2}}$.	64
2.11. $T_{\binom{n}{2}}$ como un CW-complejo.	65
2.12. Un ejemplo de una gráfica finita X .	73
2.13. Números triangulares.	74
3.1. Partición de \mathcal{GSF}_m^n / \sim .	82
3.2. Diagrama de cocientes.	83
3.3. El modelo de $F_2(1)$.	83
3.4. El toro $\langle 1, 2 \rangle \approx 12$.	84
3.5. Modelo de $SF_1^2(i)$.	86
3.6. Gráfica de $p(r, 2)$.	92
3.7. Gráfica de $p(r, 4)$.	93
3.8. Gráfica de $p(r, 400)$.	94
3.9. Gráfica de $p(r, 41)$.	95
3.10. Algunas gráficas de polinomios simétricos de grado par.	95
3.11. Algunas gráficas de polinomios simétricos de grado impar.	96

B.1. Raíces de $p(r, 400)$	113
B.2. Raíces de $p(r, 400)$	114
B.3. Raíces de $p(r, 400)$	115
C.1. Raíces de $p(r, 41)$	117

*Dedicado a DIOS, a mi papá que esta
en el cielo y a tres mujeres especiales:
Yessenia, Regina y Antonia.*

Agradecimientos

Agradezco A JEHOVÁ por tantas bendiciones y estar a mi lado para fortalecer mi espíritu en cada momento de mi vida y además él es todo para mí.

Con infinito amor quiero agradecer a mi esposa Yessi por todo su amor, lo cual me ha motivado a seguir correctamente mi camino.

Agradezco a mi papá José Dolores Castillo Sánchez, principalmente por enseñarme el valor de la honestidad y el trabajo. "Te extraño mucho papá, gracias por todas las enseñanzas de la vida"

A mi mamá Antonia Rubí González especialmente agradezco todo su cariño, amor, comprensión y orientación que siempre me ha brindado incondicionalmente, ya que siempre ha estado a mi lado en las buenas y en las malas, no existen las palabras para agradecerle todo lo que ha hecho por mí...muchas gracias mami!

De igual forma agradezco a mis hermanos Ana, Víctor, Pedro, José, Magda, Felipe y Lot así como a todos mis sobrinos y cuñadas (que son un bien) por todo su cariño y llenarme de alegría cada momento.

También quiero agradecer a mis suegros Paty y Mario, por su todo su apoyo y estimación incondicional que me han ofrecido, así como a mis cuñados, que ahora forman parte de mi nueva familia.

Quiero agradecer a mi amigo Pablo Cajero Vázquez por su amistad, que lo largo mas de 20 años siempre he contado con su apoyo.

Un sincero agradecimiento a mi director de tesis, el Dr. Enrique Castañeda Alvarado por su aliento y exigencias para la realización de esta tesis.

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, conexo, compacto y no degenerado. Dados un continuo X , y $n \in \mathbb{N}$, consideramos los siguientes hiperespacios de X :

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado}\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene como máximo } n \text{ puntos}\}.$$

Dotamos a 2^X con la topología de Vietoris [11, Teorema 1.2, p. 3], que es generada por la base

$$\beta = \left\{ \langle U_1, \dots, U_k \rangle : U_i \text{ son abiertos en } X, \text{ para toda } i = 1, \dots, k \right\},$$

donde

$$\langle U_1, \dots, U_k \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i = 1, \dots, k \right\}.$$

La topología de Vietoris coincide con la métrica de Hausdorff [11, Teorema 3.2, p. 18] definida por

$$H(A, B) = \max\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\}.$$

En este trabajo los símbolos \approx , \simeq denotan homeomorfismos y mismo tipo de homotopía respectivamente. El hiperespacio $F_n(X)$ es llamado *n-ésimo producto simétrico* de X . La noción de *n-ésimo producto simétrico*, fue presentada por primera vez por K. Borsuk and S. Ulam en [4], donde demostraron que para el intervalo $I = [0, 1]$ y $n = 1, 2, 3$, $F_n(I) \approx I^n$, pero que $F_n(I)$ no puede ser encajado en \mathbb{R}^n para $n \geq 4$. R. Molski en [17] muestra que $F_2(I^2)$ es homeomorfo a I^4 pero que ni $F_n(I^2)$ ni $F_2(I^n)$ pueden ser encajados en \mathbb{R}^{2n} para cualquier $n \geq 3$. R. Bott en [5] demuestra que $F_3(S^1) \approx S^3$. En [19] R. M. Schori muestra que $F_n(I) \approx \text{cono}(D^{n-2}) \times I$, donde $D^{n-2} = \{A \in F_n(I) : 0, 1 \in A\}$ para toda $n \geq 2$, también demuestra que $F_2(I^m) \approx \text{cono}(\mathbb{R}P^{m-1}) \times I^m$ para todo $m \geq 1$. Luego S. Kallel and P. Salvatore en [12, Ejemplo, p. 6] muestran que $F_2(S^2) \approx \mathbb{C}P^2$ y $F_2(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{R}P^4$, donde $\mathbb{C}P^2$ es el plano proyectivo complejo, $\mathbb{R}P^2$ y $\mathbb{R}P^4$ son espacios proyectivos reales, tales espacios los definiremos de forma general en la Sección 1.4 de este trabajo.

Algunos resultados desde el punto de vista homotópico sobre $F_n(X)$: S. Macías en [14] muestra que para cualquier continuo X , el primer grupo de cohomología de Čech $H^1(F_n(X); \mathbb{Z})$ es cero para $n \geq 3$, y D. Handel en [9] prueba que para cualquier n -variedad conexa cerrada M^n (para $n \geq 2$), el grupo de cohomología singular $H^i(F_k(M^n); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $i = nk$, y 0 para $i > nk$. También muestra que las inclusiones $F_k(X, x_0) \hookrightarrow F_{2k-1}(X, x_0)$ y $F_k(X) \hookrightarrow F_{2k+1}(X)$ inducen la función cero en todos los grupos de homotopía para espacios de Hausdorff y conexos por arcos X . N. Chinen y A. Koyama en [7] muestran que para $n \in \mathbb{N}$, $F_{2n+1}(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que S^{2n+1} y $F_{2n}(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que S^{2n-1} .

Por otro lado, si $m, n \in \mathbb{N}$, con $m < n$, y X es un continuo, $SF_m^n(X)$ denota el espacio cociente $F_n(X)/F_m(X)$, obtenido indentificando $F_m(X)$ a un solo punto en $F_n(X)$, dotada con la topología cociente. El espacio $SF_m^n(X)$ es llamado (n, m) -ésimo *producto simétrico suspensión del continuo* X . Algunos resultados conocidos sobre estos espacios son: $SF_1^2(I)$ es homeomorfo a I^2 (ver [3, Ejemplo 3.1, p. 598]), $SF_1^2(S^1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^2$ (ver [3, Ejemplo 3.3, p. 599]). Sea $n \geq 3$ y sea X un n -odo simple con e_1, \dots, e_n sus puntos finales, entonces $SF_1^2(X)$ es homeomorfo al cono sobre Z , donde $Z = \{A \in F_2(X) : e_i \in A \text{ para alguna } i \in \{1, \dots, n\}\}$ (ver [6, Ejemplo 3.3, p. 313]). Si X es una gráfica finita, entonces $F_2(X)$ es homeomorfo a $SF_1^2(X)$ si y sólo si X es un arco o un n -odo simple (ver [6, Teorema 5.11, p. 322]). $SF_1^2(S^2)$ es el cociente de $\mathbb{C}P^2$ por la imagen del encaje de Veronese $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^2$, $z \mapsto [z^2 : -2z : 1]$, $\infty \rightarrow [1 : 0 : 0]$ (ver [13, Ejemplo 2.4, p. 233]). Para toda $n \geq 2$, $SF_{n-1}^n(S^1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-2}$ (ver [20, p. 3]).

Esta tesis está dividida en tres capítulos. El Capítulo 1 trata de los conceptos básicos como son: grupo fundamental, homotopía, característica de Euler de gráficas finitas y presentación finita de grupos. El lector que tenga conocimientos de Topología Algebraica, podrá omitir este capítulo y pasar directamente al Capítulo 2.

En el Capítulo 2 estudiamos los n -ésimos productos simétricos de gráficas finitas, de hecho proponemos una clasificación por medio de homotopía, aplicando el siguiente resultado que obtuvimos, donde $\chi(G)$ denota la característica de Euler de la gráfica finita G .

Teorema 2.2.1. *Sea G una gráfica finita, entonces*

$$F_n(G) \simeq F_n\left(\bigvee_{i=1}^{1-\chi(G)} S^1\right).$$

Por ello se tendrá representantes universales los cuales son la clase de los n -ésimos productos simétricos de la cuña de r -círculos. Un problema abierto es

hallar el tipo de homotopía de

$$F_n \left(\bigvee_{i=1}^{1-\chi(G)} S^1 \right),$$

para $n \geq 3$, pues el caso $n = 2$ es uno de nuestros resultados principales, a saber:

Teorema 2.4.6. *Sea G una gráfica finita, entonces*

$$F_2(G) \simeq T_{\binom{1-\chi(G)}{2}}.$$

Donde $T_{\binom{1-\chi(G)}{2}}$ es un CW -complejo, lo diseñamos “artesanalmente” y por su construcción le llamamos *toro binomial*. También en este capítulo calculamos el grupo fundamental, los grupos de homología y cohomología, así como la característica de Euler del toro binomial. Puesto que el tipo de homotopía es un invariante algebraico, así los últimos resultados del Capítulo 2 que obtuvimos fueron los siguientes que corresponden a los Teoremas 2.4.7, 2.4.9, 2.4.11 y 2.4.13, respectivamente.

Sea G es una gráfica finita y $\chi(G) \leq -1$, entonces las siguientes afirmaciones se satisfacen:

(i)

$$\pi_1(F_2(G)) \cong \mathbb{Z}^{1-\chi(G)}.$$

(ii)

$$H_q(F_2(G); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, \\ \mathbb{Z}^{1-\chi(G)} & \text{si } q = 1, \\ \mathbb{Z}^{\binom{1-\chi(G)}{2}} & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q \geq 3. \end{cases}$$

(iii)

$$\chi(F_2(G)) = \frac{\chi(G)^2 + \chi(G)}{2}.$$

(iv)

$$H^q(F_2(G); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, \\ \mathbb{Z}^{1-\chi(G)} & \text{si } q = 1, \\ \mathbb{Z}^{\binom{1-\chi(G)}{2}} & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q \geq 3. \end{cases}$$

En el Capítulo 3 estudiamos en particular el (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de gráficas finitas. Uno de los resultados vitales que se muestra en este capítulo es la funtorialidad de $SF_m^n(-)$ de la categoría de los continuos a la categoría de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de continuos.

Más aún, demostramos que el funtor $SF_m^n(-)$ es homotópico, por ello si X y Y son continuos tales que $X \simeq Y$, entonces $SF_m^n(X) \simeq SF_m^n(Y)$. En particular demostramos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1. *Sea G una gráfica finita y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, entonces*

$$SF_m^n(G) \simeq SF_m^n\left(\bigvee_{i=1}^r S^1\right),$$

donde $r = 1 - \chi(G)$.

De igual manera como en el Capítulo 2, es un problema abierto hallar el tipo de homotopía del espacio

$$SF_m^n\left(\bigvee_{i=1}^r S^1\right),$$

donde $r = 1 - \chi(G)$ y para $m, n \in \mathbb{N}$ con: $m < n$, $m \geq 1$ y $n \geq 3$, ya que en el caso $m = 1$ y $n = 2$ demostramos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.6. *Sea G una gráfica finita, con $\chi(G) \leq -1$. Entonces*

$$SF_1^2(G) \simeq \bigvee^{1-\chi(G)} \mathbb{R}P^2 \cup T_{(1-\frac{\chi(G)}{2})}.$$

Puesto que es bien conocida la característica de Euler del espacio proyectivo real y del toro binomial (calculada en el Capítulo 2) y aprovechando que la característica de Euler es un invariante homotópico, calculamos la característica de Euler de $SF_1^2(G)$, a saber

$$\chi(SF_1^2(G)) = \frac{\chi(G)^2 - \chi(G) + 2}{2}.$$

En general calculamos la característica de Euler de $SF_m^n(G)$.

Teorema 3.4.5. *Sea G una gráfica finita con $r = 1 - |V(G)| + |E(G)| \geq 2$ y $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Entonces la característica de Euler de $SF_m^n(G)$ es*

$$\begin{aligned} \chi(SF_m^n(G)) = & 1 + 2 \sum_{j=m}^{n-1} (-1)^j \binom{j+r-1}{r-1} \\ & + (-1)^n \binom{n+r-1}{r-1} - (-1)^m \binom{m+r-1}{r-1}. \end{aligned}$$

En la última sección abordamos el siguiente problema de homeomorfismo.

Problema: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, si X es un continuo tal que $SF_m^n(X)$ es homeomorfo a $F_n(X)$, entonces iX es contráctil?

El problema aún sigue abierto, sin embargo, en esta sección mostramos soluciones particulares cuando X es una gráfica finita, con ayuda de un polinomio que definimos y llamamos *polinomio simétrico* el cual está asociado a una gráfica finita, específicamente si G es una gráfica finita y $r = 1 - \chi(G)$, definamos el polinomio simétrico de grado m asociado a G como

$$p(r, m) = 2 \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} + (-1)^m \binom{r+m-1}{r-1}.$$

El resultado que relaciona $F_n(X)$, $SF_m^n(X)$ y el polinomio simétrico, cuando X es una gráfica finita, es el siguiente.

Lema 3.5.2. *Sean G una gráfica finita y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$. Si $SF_m^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces*

$$p(r, m) = 0,$$

donde $r = 1 - \chi(G) \geq 2$.

Cabe mencionar que calculamos varias raíces del polinomio simétrico en Mathematica 10.0, así como sus gráficas correspondientes, donde observamos que:

- Si el polinomio simétrico es de grado impar, solo tiene una raíz real y el resto son complejas. La raíz real en todos los polinomios simétricos es el cero, en consecuencia, al traducirlo en topología nos dice que la gráfica finita asociada al polinomio simétrico correspondiente tiene que ser un árbol. Sin embargo, aun es un problema abierto en el caso general.
- Si el polinomio simétrico es de grado par y además mayor o igual que cuatro, entonces solo tiene dos raíces reales y el resto son complejas. De las dos raíces reales se observa que solo una es entera, a saber, el número cero. Así la gráfica finita asociada al polinomio simétrico correspondiente debe ser un árbol. Sin embargo, aun es un problema abierto en el caso general.

Por medio del uso del Mathematica 10.0, concretamente al estudio de las raíces y de las gráficas de los polinomio simétrico, se concluyeron varios problemas abiertos.

Antecedentes

La Topología es la versión moderna de la Geometría, ésto es, el estudio de la naturaleza y propiedades de los espacios. Las diferentes clases de geometría (incluyendo aquí a la Topología como un caso especial de geometría) se distinguen básicamente por los diversos tipos de transformaciones que se permiten aplicar sin que los objetos considerados realmente cambien. En la Geometría Euclidiana, por ejemplo, se pueden trasladar, rotar y reflejar los objetos, pero son estirarlos ni doblarlos. De esta manera dos objetos son “congruentes” si, mediante estas transformaciones, uno se puede sobreponer en el otro, de manera que coincidan perfectamente.

En la Geometría Proyectiva, inventada durante el Renacimiento como respuesta a las necesidades de perspectiva en la pintura, dos representaciones se consideran iguales si son puntos de vista de un mismo objeto. Por ejemplo, no se distingue entre un círculo y una elipse, pues basta cambiar de punto de observación para llevar uno en el otro. En la Topología se permite cualquier cambio que pueda ser continuamente deshecho. Por ejemplo, un círculo es lo mismo que un triángulo o un cuadrado; el proceso de transformación de uno en el otro se puede hacer de tal manera que puntos cercanos de la figura original permanezcan cercanos en la figura final. Sin embargo, el círculo es diferente de la figura del número ocho, pues aunque se puede contraer el círculo a través de dos de sus puntos antipodales para formar al número ocho, el proceso inverso pierde continuidad ya que es necesario alejar considerablemente puntos que previamente estaban cercanos. En este sentido, la Topología es una de las formas más básicas de la geometría y se usa en casi todas las ramas de las matemáticas. Sin embargo, existe una forma aún más básica: la Homotopía, que es la teoría que aplicaremos a los llamados *n-ésimos productos simétricos de un continuo*. Usamos Topología para describir Homotopía; sin embargo, en esta última se permite una variedad tan grande de transformaciones que el resultado se asemeja más al Álgebra que a la Topología. La teoría resultante es particularmente conveniente por diversos motivos. Por una parte, el grado de algebrización que presenta permite efectuar cálculos de una manera eficiente y, por la otra, la experiencia ha mostrado que la solución de muchos problemas topológicos, geométricos y hasta diferenciales depende única y exclusivamente de las propiedades homotópicas de los objetos estudiados.

Aunque la Topología Algebraica es una rama de las matemáticas que surge

directamente en el siglo XX, sus orígenes se remontan bastante mas atrás. Por ejemplo, la determinación de los posibles sólidos regulares utiliza la llamada característica de Euler, que fue originalmente inventada para estudiar un problema en Teoría de Gráficas (*Puentes de Königsberg*). Posteriormente Gauss definió el concepto de *número de encadenamiento*, un invariante homotópico para decidir si dos círculos pueden ser separados o si, por el contrario, están anudados. Todas estas ideas se relacionan bajo la filosofía fundamental de que diversos tipos de fenómenos geométricos pueden ser entendidos en términos de invariantes discretos. Una de las mejores peculiaridades de la Topología Algebraica ha sido su amplio grado de aplicabilidad a otros campos científicos, por ejemplo en la Geometría Diferencial y Algebraica, en la Teoría de Números y en la Física. Como consecuencia de los métodos a desarrollarse en este trabajo, se obtendrá una clasificación de los objetos de la categoría de los n -ésimos productos simétricos de gráficas finitas y de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de gráficas finitas. por medio de homotopía.

La Topología Algebraica moderna es el estudio de propiedades globales de espacios por medio del álgebra. Actualmente hay una plétora de modelos algebraicos que se han construido para analizar diversas situaciones topológicas. Poincaré fue el primero en relacionar el estudio de espacios topológicos con el estudio de los correspondientes grupos fundamentales asociados. En el presente trabajo se aplica este último concepto, entendido como un modelo algebraico del mundo homotópico. Asimismo se extiende la idea al considerar los *grupos de homotopía*, modelos homotópicos que en la actualidad son objeto de investigación. Las técnicas a desarrollar serán aplicadas en el trabajo proyectado para obtener el grupo fundamental del segundo producto simétrico de una gráfica finita, donde diseñamos un *CW-complejo* finito que le llamamos *toro binomial* que fue vital para tal cálculo.

En conclusión, La Topología Algebraica es un área especializada en donde incluso el entender la terminología empleada implica una cantidad considerable de trabajo previo; sin embargo, lejos de perder atractivo, ésto hace que la teoría sea en extremo poderosa y versátil. El presente trabajo plantea desarrollar en detalle los requisitos necesarios para poder lograr una incursión cabal a la Teoría de Homotopía de ciertos hiperespacios. Por otra parte, las técnicas a ser desarrolladas permiten obtener diversas aplicaciones tangibles a problemas concretos de índole topológico.

Hipótesis

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. Un hiperespacio de un continuo X es una colección de subconjuntos de X que satisface ciertas condiciones específicas. Considerando un continuo X y $n \in \mathbb{N}$, donde \mathbb{N} es el conjunto de los números enteros positivos, el hiperespacio $F_n(X)$ es llamado el *n-ésimo producto simétrico de X* , y se define como

$$F_n = \{A \subset X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ tienen a lo más } n \text{ puntos}\}.$$

Por otro lado, el método de la topología algebraica consiste en la construcción de invariantes algebraicos de espacios topológicos, esto es funtores de la categoría de espacios topológicos en diversas categorías algebraicas, que permitan transformar problemas geométricos en problemas algebraicos posiblemente más fáciles de analizar. Existe una gran incertidumbre si será posible construir un invariante algebraico en la categoría de los n -ésimos productos simétricos de continuos. Específicamente tenemos las siguientes hipótesis:

1. Existe un funtor homotópico de la categoría de los continuos a la categoría de los n -ésimos productos simétricos de continuos.
2. El grupo fundamental del n -ésimo producto simétrico de una gráfica finita se puede calcular explícitamente.
3. Los grupos de homología y cohomología del n -ésimo producto simétrico de una gráfica finita son calculables.
4. Con la información algebraica del n -ésimo producto simétrico de una gráfica finita, se pueden resolver problemas abiertos.
5. Existe un funtor homotópico de la categoría de los continuos a la categoría de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de continuos.
6. Se puede calcular la característica de Euler de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de gráficas finitas.

Objetivos

Estudiar los grupos de homotopía de los productos simétricos de un continuo. De manera particular abordaremos los siguientes problemas:

1. Calcular los productos simétricos de $F_n\left(\bigvee_m S^1\right)$, para alguna (toda) $n \geq 3$ y toda $m \geq 2$.
2. Describir el grupo fundamental del segundo producto simétrico de una gráfica finita, explícitamente describir (o en tal caso clasificar)

$$\pi_1\left(F_2(G)\right)$$

donde G denota una gráfica finita.

3. Sea G una gráfica finita. Entonces ¿ G es un árbol si y sólo si $\pi_1\left(F_2(G)\right)$ es trivial?
4. Dado X un continuo. Hallar las condiciones necesarias y suficientes para que $\pi_1\left(F_2(X)\right)$ sea trivial.
5. Calcular $\pi_1\left(F_2(\mathbb{R}P^n)\right)$ para alguna (toda) $n \geq 2$.
6. Sea X un continuo tal que $\pi_1\left(F_2(X)\right)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Entonces ¿ X es homotópicamente equivalente a S^1 ?

Métodos

La mayor parte de la conducción del trabajo de investigación se realizará en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEMex), bajo la dirección del tutor académico Dr. Enrique Castañeda Alvarado y como tutores adjuntos, el Dr. José Guadalupe Anaya Ortega y el Dr. Alfredo Cano Rodríguez. La Facultad de Ciencias de la UAEMex, cuenta con una biblioteca de matemáticas, que incluye una colección de libros especializados en el área en que se va a realizar la investigación. El tesista podrá hacer uso de esta facilidad así como del laboratorio de cómputo con el que se cuenta, mismo que está equipado con diversas computadoras con acceso a la red y con paquetería diversa que permite, desde la preparación automatizada de textos matemáticos (\LaTeX), hasta la experimentación mediante el uso del programa *Mathematica 10.0*. El tesista tendrá acceso a una oficina compartida en la Facultad de Ciencias de la UAEMex, en donde podrá realizar su trabajo de tesis, bajo una supervisión cercana del tutor académico y tutores adjuntos. El tesista podrá hacer uso de las impresoras con que cuenta la Facultad de Ciencias de la UAEMex.

Al inicio de las actividades, el tesista llevará dos cursos que son fundamentales para la investigación los cuales son: Temas Selectos de Teoría de Continuos y Temas Selectos de Topología. Así mismo cursará Actividades de Investigación de Doctorado del I al VI, en tales se desarrollará el material que compondrá la tesis y en donde se indicará el trabajo matemático que el tesista tendrá que realizar por su propia cuenta con el fin de asimilar, depurar y aplicar correctamente los conceptos que conformarán su tesis de doctorado. Con el fin de que el tesista alcance la madurez matemática necesaria que le permita hacer mejor uso de las capacidades aprendidas, en la parte intermedia y final de su trabajo, el tesista realizará actividades de investigación que completen y complementen su trabajo de tesis. Estas actividades serán reportadas al tutor académico y tutores adjuntos en un seminario. Posteriormente los resultados de investigación se publicarán en revistas de arbitraje internacional.

Capítulo 1

Construcciones Básicas

El objetivo de este primer capítulo es introducir todos los conceptos básicos que aparecerán de un modo significativo a lo largo de este trabajo. En particular introduciremos los conceptos de Categoría y Funtor, que jugaran un papel vital en la Teoría de Hiperespacios de Continuos. Así mismo dedicamos una sección como introducción al hiperespacio llamado n -ésimo producto simétrico, que es el espacio modelo a estudiar durante todo el trabajo de investigación. También en este capítulo se estudia detalladamente la característica de Euler de una gráfica finita. Por último, de forma muy breve se estudia las presentaciones de grupos, que se ocupará en el siguiente capítulo para calcular el grupo fundamental del segundo producto simétrico de una gráfica finita.

1.1. Notación y Conceptos Básicos

Denotaremos por \mathbb{R} al conjunto de los números reales, \mathbb{R}^n representa al espacio Euclidiano definido por

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Para $n \geq 0$, definimos los siguientes subespacios del espacio Euclidiano:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\} \text{ el } \textit{disco unitario de dimensión } n,$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} \text{ la } \textit{esfera unitaria de dimensión } n - 1,$$

$$I^n = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\} \text{ el } \textit{cubo unitario de dimensión } n.$$

A I^1 lo denotaremos simplemente por I y es llamado el intervalo unitario. Tomemos un elemento fijo x_0 en X . Al par (X, x_0) se le llama *espacio basado*. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios basados. Definimos el *la cuña* de X y Y como

$$X \vee Y = \{(x, y) \in X \times Y : x = x_0 \text{ o } y = y_0\},$$

es decir, $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ el cual es un subconjunto del producto $X \times Y$. Otra forma de definir la cuña de $X \vee Y$, es como el cociente de la unión disjunta $X \sqcup Y$ obtenido identificando x_0 y y_0 en un solo punto, como se muestra en la Figura 1.1

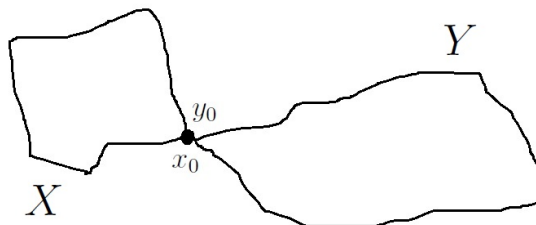


Figura 1.1: La cuña de $X \vee Y$.

En general, sea $\{(X_\alpha, x_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de espacios topológicos basados y consideremos la unión disjunta $\coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Definimos *la cuña* de $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ como el espacio cociente

$$\bigvee_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha := \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha / \{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\},$$

donde para cada α , $x_\alpha \in X_\alpha$ es punto base. Por ejemplo, $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ es homeomorfo a la 2-esfera pegadas con dos círculos, como se ilustra en la Figura 1.2.

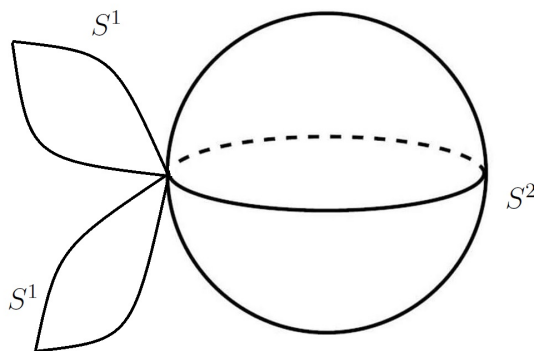


Figura 1.2: El espacio $S^1 \vee S^1 \vee S^2$.

Como ya se menciona en la introducción los hiperespacios de un continuo X son familias de subconjuntos de X . Existen muchos hiperespacios que de forma natural por su construcción definen un functor, en particular en este trabajo nos enfocaremos a los n -ésimos productos simétricos de un continuo. Todo esto lo veremos más adelante detalladamente. Es por ello que a continuación definiremos categoría y functor.

Definición 1.1.1. Una categoría \mathcal{C} consiste de una clase de objetos $Ob(\mathcal{C})$ y un conjunto de morfismos $Morf(A, B)$ con dominio A y codominio B , esto para cada par de objetos $A, B \in Ob(\mathcal{C})$. Para cada $f \in Morf(A, B)$, generalmente se escribe $f : A \rightarrow B$. Además se cumple que para todo $f \in Morf(A, B)$ y $g \in Morf(B, C)$, existe una función $h \in Morf(A, C)$ tal que $h = g \circ f$ que satisface los dos siguientes axiomas

1. **Asociatividad.** Si $f \in Morf(A, B)$, $g \in Morf(B, C)$, y $k \in Morf(C, D)$, entonces

$$k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f : A \rightarrow D.$$

2. **Identidad.** Para todo $A \in Ob(\mathcal{C})$, existe $1_A \in Morf(A, A)$ tal que

$$\begin{aligned} f \circ 1_A &= f, & \text{para todo } f \in Morf(A, B), \\ 1_C \circ g &= g, & \text{para todo } g \in Morf(C, A). \end{aligned}$$

Algunos ejemplos de categorías son los siguientes:

1. La categoría \mathcal{TOP} de espacios topológicos y funciones continuas.
2. La categoría \mathcal{GROUP} de grupos y homomorfismos.
3. La categoría \mathcal{EV} de espacios vectoriales de dimensión finita y transformaciones lineales.

Definición 1.1.2. Dadas dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} . Un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una función que satisface:

1. Si $A \in Ob(\mathcal{C})$, entonces $F(A) \in Ob(\mathcal{D})$.
2. Si $f \in Morf(A, B)$, entonces $F(f) \in Morf(F(A), F(B))$.
3. Para todo $A \in Ob(\mathcal{C})$ se tiene

$$F(id_A) = id_{F(A)}.$$

4. Regla de la cadena: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Un ejemplo clásico de funtor es π_1 , de la categoría de los espacios topológicos basados \mathcal{TOP}_0 a la categoría de los grupos \mathcal{GROUP} , como lo mostraremos en la siguiente sección.

1.2. El Funtor π_1

Denotaremos por $C(X, Y)$ al conjunto de funciones continuas de un espacio topológico X a un espacio topológico Y .

Definición 1.2.1. *Dados espacios topológicos X, Y y subconjuntos $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ definimos*

$$[A, B] = \{f \in C(X, Y) : f(A) \subseteq B\}.$$

Luego la *topología compacto-abierta* en $C(X, Y)$ es la generada por la familia siguiente, como subbase

$$\gamma = \{[K, U] : K \subseteq X, U \subseteq Y, \text{ con } K \text{ compacto y } U \text{ abierto}\}.$$

Dado un espacio topológico X y $A \subseteq X$, Denotamos por A° al interior de A .

Lema 1.2.2. [18, Lema 26.8, p. 191] *Sean X y Y espacios topológicos. Si $K \subseteq Y$ es compacto, $x \in X$ y $\{x\} \times K \subseteq W = W^\circ \subseteq X \times Y$, entonces existe $U = U^\circ \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $U \times K \subseteq W$.*

Definición 1.2.3. *Dada una función continua $f : X \times Y \rightarrow Z$ existe una correspondiente función $F : X \rightarrow C(Y, Z)$ definida por la ecuación*

$$[F(x)](y) = f(x, y) \tag{1.1}$$

donde $F(x) : Y \rightarrow Z$. Inversamente dada una función $F : X \rightarrow C(Y, Z)$, la ecuación anterior define una función correspondiente $f : X \times Y \rightarrow Z$ (en principio no continua). Las dos funciones

$$f : X \times Y \rightarrow Z \quad \text{y} \quad F : X \rightarrow C(Y, Z)$$

relacionadas por la ecuación anterior son llamadas *funciones asociadas*.

Enseguida estudiaremos la continuidad de las funciones asociadas y la importancia de la topología compacto-abierta en éstas.

Proposición 1.2.4. *Sean X, Y y Z espacios topológicos y dotemos a $C(X, Y)$ con la topología compacto-abierta. Si $f : X \times Y \rightarrow Z$ es continua, entonces $F : X \rightarrow C(Y, Z)$ también es continua.*

Demostración. Tomemos un punto x_0 en X y sea $[K, U]$ un subbásico de $C(Y, Z)$ que contiene a $F(x_0)$. Para concluir la continuidad de F basta encontrar un abierto V de X , vecindad de x_0 , tal que $F(V) \subset [K, U]$. Ya que $F(x_0) \in [K, U]$ entonces $F(x_0)(K) \subset U$ que es equivalente a que $f(\{x_0\} \times K) \subset U$ así $\{x_0\} \times K \subset f^{-1}(U)$ y luego por el Lema 1.2.2 existe un abierto V en X tal que

$$x_0 \in V \quad \text{y} \quad V \times K \subset f^{-1}(U)$$

entonces $f(V \times K) \subset U$ y así para todo $x' \in V$ se tiene $F(x')(K) \subset U$, es decir, para todo $x' \in V$ tenemos $F(x') \in [K, U]$ por ello $F(V) \subset [K, U]$, como se buscaba. \square

Definición 1.2.5. Sean X y Y espacios topológicos, las funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ se dicen ser funciones homotópicas si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) & \forall x \in X, \\ H(x, 1) &= g(x) & \forall x \in X, \end{aligned}$$

en este caso la aplicación H se llama una homotopía entre f y g , esto lo denotaremos por $f \simeq g$ (ver la Figura 1.3).

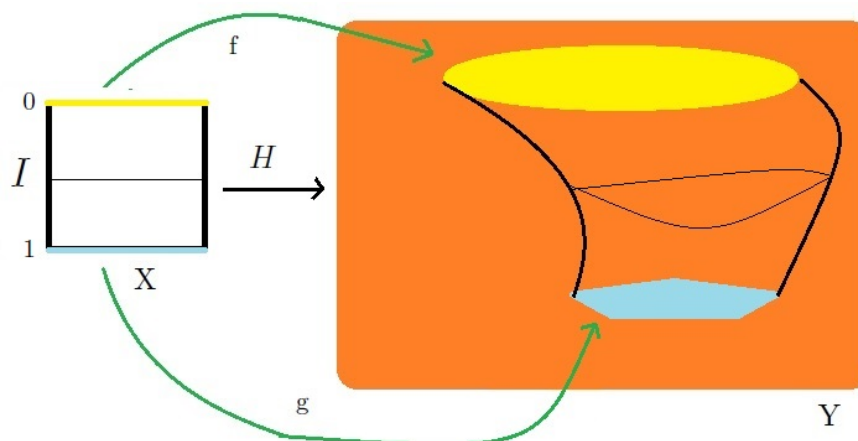


Figura 1.3: Funciones homotópicas.

La t -ésima rama de una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ es la función continua $H_t : X \rightarrow Y$ definida por $H_t(x) = H(x, t)$, la cual es la composición siguiente

$$X \xrightarrow{i} X \times \{t\} \subset X \times I \xrightarrow{H} Y.$$

Así H es una familia de funciones continuas que empiezan en f y terminan en g , es decir $H = \{H_t\}_{t \in I}$ donde $H_0 = f$ y $H_1 = g$, en el espacio de funciones continuas $C(X, Y)$ (ver la Proposición 1.2.4), por lo que podemos pensar la homotopía entre dos funciones f y g como un camino en el espacio $C(X, Y)$ de f a g donde el parámetro t es el tiempo. Entonces al tiempo $t = 0$ obtenemos la función f y cuando t varía, la función H_t varía continuamente de tal forma que al tiempo $t = 1$ obtenemos la función g . Por ello se dice que una homotopía es una deformación continua entre dos funciones.

Definición 1.2.6. Dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas relativamente a un subconjunto A de X si existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ entre f y g tal que

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \quad \forall a \in A, \forall t \in I,$$

en otras palabras podemos deformar f en g sin alterar los valores de f en A , es decir, para todo $a \in A$, $H(a, t)$ no depende de $t \in I$. Denotaremos esto por $f \simeq_{rel A} g$.

Notemos que la relación \simeq_{relA} es una relación de equivalencia en $C(X, Y)$.

Lema 1.2.7. Sean X, Y, Z espacios topológicos con $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Si $f \simeq_{relA} g$ entonces $h \circ f \simeq_{relA} h \circ g$, donde $h : Y \rightarrow Z$ es continua.

Demostración. Puesto que $f \simeq_{relA} g$, entonces existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ y $H(a, t) = f(a) = g(a)$, para todo $x \in X$ y todo $a \in A$. La función $F(x, t) = h(H(x, t)) : X \times I \rightarrow Z$ es continua, ya que es una composición de funciones continuas, y además para todo $x \in X$ y todo $a \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= h(H(x, 0)) = h(f(x)) = (h \circ f)(x), \\ F(x, 1) &= h(H(x, 1)) = h(g(x)) = (h \circ g)(x), \\ F(a, t) &= h(H(a, t)) = h(f(a)) = h(g(a)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $h \circ f \simeq_{relA} h \circ g$. □

Lema 1.2.8 (Lema del Pegado). Sean X y W espacios topológicos y supongamos que $W = A \cup B$, donde A y B son ambos subconjuntos cerrados de W . Si $f : A \rightarrow X$ y $g : B \rightarrow X$ son funciones continuas tales que $f(w) = g(w)$ para toda $w \in A \cap B$, entonces la función $h : W \rightarrow X$ definida por

$$h(w) = \begin{cases} f(w) & \text{si } w \in A, \\ g(w) & \text{si } w \in B, \end{cases}$$

es continua.

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de X , veamos que $h^{-1}(C)$ es cerrado en W , en efecto,

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C) \cap W \\ &= h^{-1}(C) \cap (A \cup B) \\ &= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B) \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C). \end{aligned}$$

Puesto que f es continua entonces $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y por lo tanto es cerrado en W , pues A es cerrado en W . Análogamente $g^{-1}(C)$ es cerrado en W . Por ello $h^{-1}(C)$ es cerrado en W y así h es continua. □

Un camino α en un espacio topológico X es una función continua $\alpha : I \rightarrow X$.

Definición 1.2.9. Dados dos caminos $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ tales que $\alpha(1) = \beta(0)$, definimos el camino producto $\alpha \cdot \beta : I \rightarrow X$ de la siguiente manera

$$(\alpha \cdot \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Notemos que $\alpha \cdot \beta$ es continua, por el Lema 1.2.8. Por otra parte, sea X un espacio topológico y $x_0 \in X$, considérese el conjunto siguiente

$$\Omega(X, x_0) = \{\alpha : I \rightarrow X \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}.$$

Los elementos de este conjunto los llamaremos *lazos con punto base* x_0 . A este conjunto le damos la relación de equivalencia de homotopía relativa a $\{0, 1\}$. Consideremos el conjunto de todas las clases de equivalencia, y la denotamos por $\pi_1(X, x_0)$, es decir

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0) / \simeq_{rel\{0,1\}}.$$

Los elementos de $\pi_1(X, x_0)$, los denotamos en la forma $[\alpha]$, donde $\alpha : I \rightarrow X$ es un lazo basado en x_0 .

Teorema 1.2.10. [1, Teorema 2.5.10, p. 34] *Sea (X, x_0) un espacio basado, entonces el conjunto*

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] : \alpha \text{ es un lazo basado en } x_0\}$$

es un grupo con respecto a la multiplicación $[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]$.

A $\pi_1(X, x_0)$ se le llama *grupo fundamental* de X con punto base x_0 , también se le conoce como *el primer grupo de homotopía*.

La notación $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es para decir que f es una *función basada*, donde f es una función continua de X a Y con $f(x_0) = y_0$.

Proposición 1.2.11. *Toda función basada $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induce un homomorfismo de grupos fundamentales*

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longmapsto [f \circ \alpha] \end{aligned}$$

además la asociación $f \rightsquigarrow f_$ satisface las siguientes propiedades funtoriales*

$$\begin{aligned} (a) \quad (1_X)_* &= 1_{\pi_1(X, x_0)} \\ (b) \quad g_* \circ f_* &= (g \circ f)_* \end{aligned}$$

donde $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ es una función basada.

Demostración. Primero observemos que f_* está bien definida, pues si α, β son dos lazos en X basados en x_0 con $\alpha \simeq_{rel\{0,1\}} \beta$ entonces por el Lema 1.2.7 tenemos

$$f \circ \alpha \simeq_{rel\{0,1\}} f \circ \beta.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} f_*([\alpha][\beta]) &= f_*([\alpha \cdot \beta]) = [f \circ (\alpha \cdot \beta)], \\ f_*([\alpha])f_*([\beta]) &= [f \circ \alpha][f \circ \beta] = [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)]. \end{aligned}$$

Observemos que $f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)$, pues:

$$(f \circ (\alpha \cdot \beta))(t) = f((\alpha \cdot \beta)(t)) = \begin{cases} f(\alpha(2t)) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(\beta(2t-1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

y

$$((f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta))(t) = \begin{cases} (f \circ \alpha)(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (f \circ \beta)(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Entonces $[f \circ (\alpha \cdot \beta)] = [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)]$ y así $f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha])f_*([\beta])$. Por lo tanto f_* determina un morfismo de grupos. Además,

- (a) $(1_X)_*([\alpha]) = [1_X \circ \alpha] = [\alpha]$,
 (b) $(g_* \circ f_*)([\alpha]) = g_*(f_*([\alpha])) = g_*([f \circ \alpha]) = [g \circ (f \circ \alpha)] = [(g \circ f) \circ \alpha] = (g \circ f)_*([\alpha])$. \square

Por lo anterior π_1 es un funtor entre la categoría de espacios topológicos basados y la categoría de grupos. Lo que implica de manera natural el siguiente resultado.

Corolario 1.2.12. *Consideremos los siguientes espacios basados (X, x_0) y (Y, y_0) . Si (X, x_0) y (Y, y_0) son espacios homeomorfos, entonces los grupos fundamentales $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ son isomorfos.*

Por lo tanto el grupo fundamental es un invariante topológico del espacio basado (X, x_0) , es decir, $\pi_1(X, x_0)$ es un modelo algebraico de (X, x_0) .

Por ejemplo, recordemos que un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si dados cualesquiera dos puntos $x, y \in C$, entonces para cualquier $t \in I$, $(1-t)x + ty \in C$, es decir, el segmento de línea recta que une x con y está contenido en C . Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto convexo, entonces para cada $x_0 \in C$, $\pi_1(C, x_0) = 0$, en efecto, tenemos que ver que cada lazo σ basado en x_0 es homotópico relativo a $\{0, 1\}$ a c_{x_0} (el lazo constante). La homotopía $H : I \times I \rightarrow C$ requerida está definida por $H(s, t) = tx_0 + (1-t)\alpha(s)$, donde $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = x_0 = c_{x_0}(s)$ y $H(0, t) = tx_0 + (1-t)x_0 = x_0 = H(1, t)$, para todo $s, t \in I$. Puesto que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, en tal caso se dice que su grupo fundamental es trivial, es decir cualquier lazo basado se deforma a un punto. En particular $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = 0$ y $\pi_1(D^n, x_0) = 0$.

El símbolo \cong denota el isomorfismo entre dos grupos.

Definición 1.2.13. *Si A y B son dos grupos, entonces*

$$A \oplus B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

el cual es un grupo abeliano respecto a la suma por coordenadas, es decir $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. A $A \oplus B$ se le llama suma directa de los grupos A y B .

Proposición 1.2.14. Si (X, x_0) y (Y, y_0) son espacios basados, entonces se tiene el siguiente isomorfismo

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$$

Demostración. Definamos

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$$

por $\varphi([\alpha]) = ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = (p_{1*}[\alpha], p_{2*}[\alpha])$, donde

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)} & X \times Y & \xrightarrow{p_1} & X \\ I & \xrightarrow{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)} & X \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \end{array}$$

donde p_1 y p_2 son las proyecciones correspondientes. Tenemos las siguientes afirmaciones.

- φ es un homomorfismo.

$$\begin{aligned} \varphi([\alpha][\beta]) &= \varphi([\alpha \cdot \beta]) = (p_{1*}[\alpha \cdot \beta], p_{2*}[\alpha \cdot \beta]) = (p_{1*}[\alpha]p_{1*}[\beta], p_{2*}[\alpha]p_{2*}[\beta]). \\ \varphi([\alpha])\varphi([\beta]) &= (p_{1*}[\alpha], p_{2*}[\alpha])(p_{1*}[\beta], p_{2*}[\beta]) = (p_{1*}[\alpha]p_{1*}[\beta], p_{2*}[\alpha]p_{2*}[\beta]). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi([\alpha][\beta]) = \varphi([\alpha])\varphi([\beta])$.

- φ es monomorfismo.

Si $\varphi([\alpha]) = e$ para alguna $[\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ donde $e = ([c_{x_0}], [c_{y_0}])$ es el elemento identidad en $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, entonces

$$(p_{1*}[\alpha], p_{2*}[\alpha]) = ([c_{x_0}], [c_{y_0}]),$$

es decir, $([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = ([c_{x_0}], [c_{y_0}])$, o sea $p_1 \circ \alpha \simeq_{rel\{0,1\}} c_{x_0}$ y $p_2 \circ \alpha \simeq_{rel\{0,1\}} c_{y_0}$, lo que significa que existen homotopías $H : I \times I \rightarrow X$ y $G : I \times I \rightarrow Y$ tales que para todo $s, t \in I$,

$$\begin{array}{ll} H(s, 0) = x_0, & G(s, 0) = y_0, \\ H(s, 1) = (p_1 \circ \alpha)(s), & G(s, 1) = (p_2 \circ \alpha)(s), \\ H(0, t) = x_0 = H(1, t), & G(0, t) = y_0 = G(1, t). \end{array}$$

Por lo que definimos una nueva homotopía $F : I \times I \rightarrow X \times Y$ dada por

$$F(s, t) = (H(s, t), G(s, t)),$$

de donde para todo $s, t \in I$,

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= (H(s, 0), G(s, 0)) = (x_0, y_0), \\ F(s, 1) &= (H(s, 1), G(s, 1)) = ((p_1 \circ \alpha)(s), (p_2 \circ \alpha)(s)) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = \alpha(s), \\ F(0, t) &= (H(0, t), G(0, t)) = (x_0, y_0) = F(1, t). \end{aligned}$$

Por ello $\alpha \simeq_{rel\{0,1\}} c_{(x_0, y_0)}$, que es equivalente a $[\alpha] = [c_{(x_0, y_0)}]$, es decir

$$Ker\varphi = 0,$$

por lo tanto φ es un monomorfismo.

- φ es un epimorfismo.

Sea $([\beta], [\gamma]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$; entonces $\beta : I \rightarrow X$, $\gamma : I \rightarrow Y$ son lazos basados en x_0, y_0 respectivamente. Consideremos

$$\alpha : I \rightarrow X \times Y \quad \text{definida por} \quad \alpha(t) = (\beta(t), \gamma(t)).$$

Por lo que $\varphi([\alpha]) = (p_{1*}[\alpha], p_{2*}[\alpha]) = ([p_1 \circ \alpha], [p_2 \circ \alpha]) = ([\beta], [\gamma])$. Por tanto φ es un epimorfismo. □

Por ejemplo, si denotamos por $1 = (1, 0) \in S^1$, se sabe que $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ([1, Teorema 2.6.6, p. 42]), entonces por el resultado anterior el grupo fundamental del toro $T = S^1 \times S^1$ basado en $(1, 1)$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, es decir $\pi_1(T, (1, 1)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

1.3. Equivalencia Homotópica

Definición 1.3.1. Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es llamada una equivalencia homotópica, si existe una función continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. En este caso, se dice que los espacios X y Y son homotópicamente equivalentes o que tienen el mismo tipo de homotopía, lo denotaremos por $X \simeq Y$.

Intuitivamente, dos espacios son del mismo tipo de homotopía si uno puede ser deformado en el otro “contrayendo” o “encogiendo”. Por otro lado, la relación \simeq es una relación de equivalencia en los objetos de la categoría de los espacios topológicos, donde $[X]$ denotara la clase de equivalencia del espacio topológico X .

Por ejemplo, la esfera S^{n-1} y el espacio $\mathbb{R}^n - \{0\}$ son homotópicamente equivalentes, en efecto, para la función inclusión $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ la inclusión y la función $g : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ dada por $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Tenemos que $g \circ f = 1$: $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ y $F : \mathbb{R}^n - \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ definida por $F(x, t) = \frac{x}{t(\|x\|-1)+1}$ es una homotopía (respecto a cualquier vector de norma unitaria) entre la identidad de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y $f \circ g$, como se muestra en la Figura 1.4. Por lo tanto

$$[S^{n-1}] = [\mathbb{R}^n - \{0\}].$$

Se dice que un espacio X es *contráctil* (o *contraíble*) si es del tipo de homotopía de un punto. Intuitivamente un espacio es contráctil si puede deformarse en sí mismo a un punto. Un espacio topológico se dice ser *simplemente conexo* o *1-conexo* si es conexo por arcos y $\pi_1(X, x_0) = 0$ para algún (y por lo tanto, para todo) $x_0 \in X$. Así por ejemplo, todo espacio contráctil es simplemente conexo.

Definición 1.3.2. Dado un camino $\alpha : I \rightarrow X$, definimos el camino inverso $\bar{\alpha}$ como $\bar{\alpha} : I \rightarrow X$, definido por $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$.

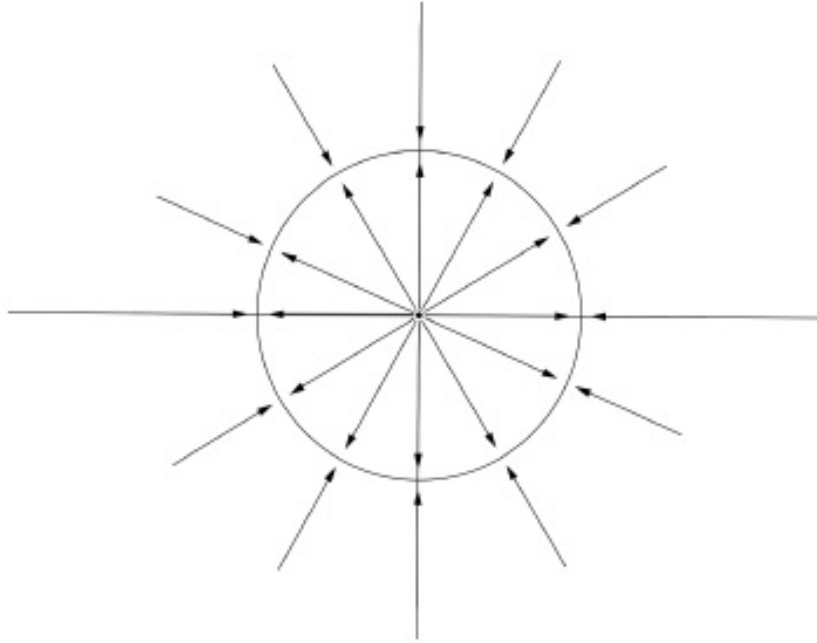


Figura 1.4: Equivalencia homotópica entre $\mathbb{R}^n - \{0\}$ y S^{n-1} .

Lema 1.3.3. Sean $\sigma, \sigma', \lambda, \lambda' \in C(I, X)$ y $A \subseteq X$ con:

$$\begin{aligned} a &= \sigma(0) = \sigma'(0), \\ b &= \sigma(1) = \sigma'(1) = \lambda(0) = \lambda'(0), \\ c &= \lambda(1) = \lambda'(1). \end{aligned}$$

Si además $\sigma \simeq_{relA} \sigma'$ y $\lambda \simeq_{relA} \lambda'$, entonces

$$\sigma \cdot \lambda \simeq_{relA} \sigma' \cdot \lambda'.$$

Demostración. Si $\sigma \simeq_{relA} \sigma'$, entonces existe una homotopía $H : I \times I \rightarrow X$ tal que para todo $s, t \in I$ se tiene $H(s, 0) = \sigma(s)$, $H(s, 1) = \sigma'(s)$, $H(0, t) = a$ y $H(1, t) = b$. Análogamente, puesto que $\lambda \simeq_{relA} \lambda'$, entonces existe una homotopía $G : I \times I \rightarrow X$ tal que para todo $s, t \in I$ se tiene $G(s, 0) = \lambda(s)$, $G(s, 1) = \lambda'(s)$, $G(0, t) = b$ y $G(1, t) = c$. Considérese la función $F : I \times I \rightarrow X$ definida por

$$F(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s - 1, t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Nótese que F es continua por el Lema 1.2.8 y

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \begin{cases} H(2s, 0) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s - 1, 0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \lambda(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \\ &= (\sigma \cdot \lambda)(s). \end{aligned}$$

Similarmente

$$F(s, 1) = (\sigma' \cdot \lambda')(s).$$

Además

$$F(0, t) = H(0, t) = a \quad y \quad F(1, t) = G(1, t) = c.$$

Por lo tanto $\sigma \cdot \lambda \simeq_{rel A} \sigma' \cdot \lambda'$. □

Proposición 1.3.4. *Sean $x, y \in X$. Si existe un camino en X de x a y , entonces los grupos $\pi_1(X, x)$, $\pi_1(X, y)$ son isomorfos.*

Demostración. Sea $\alpha : I \rightarrow X$ un camino tal que $\alpha(0) = y$ y $\alpha(1) = x$. Considérese la asociación

$$\beta \longmapsto \alpha \cdot (\beta \cdot \bar{\alpha}).$$

En la clase de homotopía relativa a $\{0, 1\}$ ésto determina una función

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x) &\xrightarrow{\alpha_{\#}} \pi_1(X, y) \\ [\beta] &\longmapsto [\alpha \cdot (\beta \cdot \bar{\alpha})], \end{aligned}$$

la cual está bien definida, en efecto: Si $[\beta], [\beta'] \in \pi_1(X, x)$ son tales que $[\beta] = [\beta']$, entonces $\beta \simeq_{rel\{0,1\}} \beta'$, luego por el Lema 1.3.3 $\beta \cdot \bar{\alpha} \simeq_{rel\{0,1\}} \beta' \cdot \bar{\alpha}$, del mismo modo por el Lema 1.3.3 $\alpha \cdot (\beta \cdot \bar{\alpha}) \simeq_{rel\{0,1\}} \alpha \cdot (\beta' \cdot \bar{\alpha})$, es decir $\alpha_{\#}([\beta]) = \alpha_{\#}([\beta'])$.

Ahora veamos que $\alpha_{\#}$ es un homomorfismo,

$$\begin{aligned} \alpha_{\#}([\beta][\beta']) &= \alpha_{\#}([\beta \cdot \beta']) = [\alpha \cdot \beta \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha}] \\ &= [\alpha \cdot \beta \cdot (\bar{\alpha} \cdot \alpha) \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha}] \\ &= [\alpha \cdot \beta \cdot \bar{\alpha}] [\alpha \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha}] \\ &= \alpha_{\#}([\beta]) \alpha_{\#}([\beta']). \end{aligned}$$

Usando el camino $\bar{\alpha}$ de y a x podemos definir

$$\bar{\alpha}_{\#} : \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

$$[\beta] \longmapsto [\bar{\alpha} \cdot \beta \cdot \alpha],$$

por lo que:

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha}_{\#} \circ \alpha_{\#})([\beta]) &= \bar{\alpha}_{\#}(\alpha_{\#}([\beta])) \\ &= \bar{\alpha}_{\#}([\alpha \cdot \beta \cdot \bar{\alpha}]) \\ &= [\bar{\alpha} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \bar{\alpha} \cdot \alpha] \\ &= [\beta]. \end{aligned}$$

Por ello

$$(\bar{\alpha}_{\#} \circ \alpha_{\#}) = 1_{\pi_1(X, x)}.$$

Análogamente se demuestra que $(\alpha_{\#} \circ \bar{\alpha}_{\#}) = 1_{\pi_1(Y, y)}$. Por lo tanto $\alpha_{\#}$ es biyectiva y así $\pi_1(X, x)$, $\pi_1(X, y)$ son isomorfos. □

Proposición 1.3.5. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas, supóngase que $f \simeq g$, digamos a través de la homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$. Si $x_0 \in X$ entonces existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(Y, f(x_0)) & \\ & \nearrow f_* & \downarrow \alpha_{\#} \\ \pi_1(X, x_0) & & \pi_1(Y, g(x_0)) \\ & \searrow g_* & \end{array}$$

donde α es el camino de $g(x_0)$ a $f(x_0)$ definido por $\alpha(t) = H(x_0, 1 - t)$. En particular f_* es isomorfismo si y sólo si g_* lo es.

Demostración. Veamos que el diagrama propuesto es conmutativo, es decir que $\alpha_{\#} \circ f_* = g_*$. Sea $[\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces

$$(\alpha_{\#} \circ f_*)([\beta]) = \alpha_{\#}(f_*([\beta])) = \alpha_{\#}([f \circ \beta]) = [\alpha \cdot (f \circ \beta) \cdot \bar{\alpha}].$$

Por otro lado

$$g_*([\beta]) = [g \circ \beta].$$

Basta entonces demostrar que $(\alpha \cdot (f \circ \beta)) \cdot \bar{\alpha} \simeq_{rel\{0,1\}} g \circ \beta$ para concluir la conmutatividad del diagrama. Considérese la homotopía $G : I \times I \rightarrow Y$ definida por $G(s, t) = H(\beta(s), t)$ así como la homotopía $F : I \times I \rightarrow Y$ definida por

$$F(s, t) = \begin{cases} \bar{\alpha}(1 - 4s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{4}, \\ G\left(\frac{4s+t-1}{3t+1}, t\right) & \text{si } \frac{1-t}{4} \leq s \leq \frac{1+t}{2}, \\ \bar{\alpha}(2s - 1) & \text{si } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Nótese que F es continua por el Lema 1.2.8, además,

$$F(s, 1) = G\left(\frac{4s+1-1}{3+1}, 1\right) = G(s, 1) = H(\beta(s), 1) = (g \circ \beta)(s),$$

y

$$F(s, 0) = \begin{cases} \bar{\alpha}(1 - 4s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4}, \\ G(4s - 1, 0) & \text{si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \bar{\alpha}(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Pero notemos que

$$\begin{aligned} ((\alpha \cdot (f \circ \beta)) \cdot \bar{\alpha})(s) &= \begin{cases} (\alpha \cdot (f \circ \beta))(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \bar{\alpha}(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(4s) = \bar{\alpha}(1 - 4s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{4}, \\ (f \circ \beta)(4s - 1) = G(4s - 1, 0) & \text{si } \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \bar{\alpha}(2s - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$F(s, 0) = ((\alpha \cdot (f \circ \beta)) \cdot \bar{\alpha})(s).$$

Además

$$F(0, t) = \bar{\alpha}(1) = \alpha(0) = (\alpha \cdot (f \circ \beta) \cdot \bar{\alpha})(0) = (g \circ \beta)(0) = g(x_0)$$

y

$$F(1, t) = \bar{\alpha}(1) = \alpha(0) = (\alpha \cdot (f \circ \beta) \cdot \bar{\alpha})(1) = (g \circ \beta)(1) = g(x_0).$$

Así $(\alpha \cdot (f \circ \beta)) \cdot \bar{\alpha} \simeq_{rel\{0,1\}} g \circ \beta$, por lo tanto $[\alpha \cdot (f \circ \beta) \cdot \bar{\alpha}] = [g \circ \beta]$, es decir,

$$\alpha_{\#} \circ f_{*} = g_{*}.$$

□

Teorema 1.3.6. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica (no necesariamente basada), entonces $f_{*} : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ es un isomorfismo, para toda $x \in X$.*

Demostración. Puesto que f es una equivalencia homotópica existe una función continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq 1_Y$ y $g \circ f \simeq 1_X$. Denotaremos por $f_{*} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ al morfismo inducido por f y por $f'_{*} : \pi_1(X, g(f(x_0))) \rightarrow \pi_1(Y, f(g(f(x_0))))$ el inducido correspondiente; similarmente $g_{*} : \pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x_0)))$ es el inducido por g . De la Proposición 1.3.5 tenemos que la composición

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_{*}} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_{*}} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{\alpha_{\#}} \pi_1(X, x_0)$$

coincide con 1_{*} , el cual es un isomorfismo. Puesto que $\alpha_{\#}$ es también isomorfismo se sigue que f_{*} es monomorfismo y g_{*} es epimorfismo. De manera similar la composición

$$\pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_{*}} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f'_{*}} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{\beta_{\#}} \pi_1(Y, f(x_0))$$

es un isomorfismo en particular g_{*} es monomorfismo. Así es un isomorfismo y ahora la conclusión deseada se sigue directamente del hecho de que $g_{*} \circ f_{*}$ es un isomorfismo, como se observó primero. □

Como consecuencia del Teorema 1.3.6, $\pi_1(X, x_0)$ no sólo es un invariante topológico sino, de hecho, homotópico (y libre de puntos bases).

Definición 1.3.7. *Supongamos que $A \subset X$. Decimos que A es un retracto fuerte por deformación de X si existe una homotopía $h : X \times I \rightarrow X$ tal que*

$$(i) \quad h(x, 0) = x, \quad \text{si } x \in X,$$

$$(ii) \quad h(x, 1) \in A, \quad \text{si } x \in X,$$

(iii) $h(a, t) = a$, si $a \in A$, $t \in I$.

Un ejemplo importante de equivalencia homotópica es la de retracto fuerte por deformación, como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 1.3.8. *Si A es un retracto fuerte por deformación de X , entonces la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Si A es un retracto fuerte por deformación de X , entonces existe una homotopía $h : X \times I \rightarrow X$ tal que

$$(i) \quad h(x, 0) = x, \quad \text{si } x \in X,$$

$$(ii) \quad h(x, 1) \in A, \quad \text{si } x \in X,$$

$$(iii) \quad h(a, t) = a, \quad \text{si } a \in A, t \in I.$$

Sea $r : X \rightarrow A$ definida por $r(x) = h(x, 1)$. Notemos que r es una retracción. Ahora para todo $x \in A$ tenemos

$$(r \circ i)(x) = r(i(x)) = r(x) = h(x, 1) = x = 1_A(x),$$

es decir, $r \circ i = 1_A$. Por otro lado, notemos que para todo $x \in X$ tenemos que

$$(i \circ r)(x) = i(r(x)) = r(x) = h(x, 1).$$

Así podemos reescribir la homotopía $h : X \times I \rightarrow X$, donde $h(x, 0) = 1_x(x)$ y $h(x, 1) = (r \circ i)(x)$, para todo $x \in X$. Por lo tanto $r \circ i \simeq 1_x$. \square

Del Teorema 1.3.6, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.9. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un retracto fuerte por deformación de X , entonces los grupos fundamentales $\pi_1(X)$ y $\pi_1(A)$ son isomorfos.*

1.4. Productos Simétricos

Los espacios que estudiaremos en este trabajo son los llamados *productos simétricos de continuos*. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un *subcontinuo* es un continuo que está contenido en algún espacio topológico. Algunos ejemplos básicos de continuos son los siguientes:

1. El intervalo unitario $[0, 1]$ es un continuo. Un *arco* es un espacio homeomorfo a $[0, 1]$.
2. La circunferencia unitaria S^1 es un continuo. Cualquier continuo homeomorfo a S^1 se llama *curva cerrada simple*.

3. Sean I_1, \dots, I_n arcos. Definimos el n -odo simple T_n , como

$$T_n = I_1 \vee \dots \vee I_n.$$

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre con campo K . Consideremos la siguiente relación de equivalencia en $V - \{0\}$

$$u \sim v \iff \text{existe } \lambda \in K - \{0\} \text{ con } u = \lambda v.$$

Denotaremos $\mathbb{P}(V) = (V - \{0\}) / \sim$. Al espacio $\mathbb{P}(V)$ se le llama *espacio proyectivo asociado a V* . Cuando $V = \mathbb{R}^{n+1}$ y $K = \mathbb{R}$, denotamos $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}P^n$ se le conoce como el *espacio proyectivo real*. Si $V = \mathbb{C}^{n+1}$ y $K = \mathbb{R}$, denotamos $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{C}P^n$ se le conoce como el *espacio proyectivo complejo*.

Sea X un continuo, 2^X denota la clase de todos los subespacios cerrados de X . La topología que le dotaremos a 2^X es la topología de Vietoris [11, Theorem 1.2, p. 3], la cual esta generada por la base

$$\beta = \left\{ (U_1, \dots, U_k) : U_i \text{ son abiertos en } X, \text{ para todo } i = 1, \dots, k \right\},$$

donde

$$(U_1, \dots, U_k) = \left\{ A \in 2^X : A \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i = 1, \dots, k \right\}.$$

La topología de Vietoris coincide con la métrica de Hausdorff [11, Theorem 3.2, p. 18] definida por

$$H(A, B) = \max\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\}.$$

El hiperespacio $F_n(X) \subset 2^X$ es el espacio de los subconjuntos $\{x_1, \dots, x_d\} \subset X$, $d \leq n$. La topología que tiene $F_n(X)$ es la de subespacio heredada por 2^X . Al hiperespacio $F_n(X)$ se le llama *n -ésimo producto simétrico de X* . Se sabe que si X es un continuo, también lo son 2^X y $F_n(X)$ ([15, Sección 1.8]).

La siguiente tabla muestra algunos ejemplos de productos simétricos.

X	$F_2(X)$	$F_3(X)$	Referencias
I	I^2	I^3	Borsuk y Ulam [4]
I^2	I^4	—	Molski [17]
I^m	$cono(\mathbb{R}P^{m-1}) \times I^m$	—	Schori [19]
S^1	Banda de Moebius (cerrada)	S^3	Borsuk y Ulam [4]
S^2	$\mathbb{C}P^2$	—	Kallel y Salvatore [12]
$\mathbb{R}P^2$	$\mathbb{R}P^4$	—	Kallel y Salvatore [12]

Definición 1.4.1. Sean A y B continuos, tales que $A \cap B = \{p\}$. Se define

$$\langle A, B \rangle = \{\{a, b\} \in F_2(A \vee B) : a \in A, b \in B\}.$$

Note que $\langle A, B \rangle$ es homeomorfo al producto $A \times B$.

Lema 1.4.2. Sean A y B continuos tales que $A \cap B = \{p\}$. Entonces

$$F_2(A \vee B) = F_2(A) \cup F_2(B) \cup \langle A, B \rangle,$$

donde

- (1) $F_2(A) \cap F_2(B) = \{\{p\}\}$,
- (2) $F_2(A) \cap \langle A, B \rangle = \{\{x, p\} \in F_2(A \vee B) : x \in A\}$,
- (3) $F_2(B) \cap \langle A, B \rangle = \{\{p, y\} \in F_2(A \vee B) : y \in B\}$.

Demostración. Sea $\{x, y\} \in F_2(A \vee B)$, entonces se satisface una de las siguientes tres posibilidades

- (a) $\{x, y\} \subseteq A$,
- (b) $\{x, y\} \subseteq B$,
- (c) $x \in A$ y $y \in B$.

El conjunto de elementos de $F_2(A \vee B)$ que satisfacen (a) es

$$Z = \{\{x, y\} \in F_2(A \vee B) : x, y \in A\},$$

notamos que $Z = F_2(A)$. Análogamente, el conjunto de elementos de $F_2(A \vee B)$ que satisfacen (b) es

$$W = \{\{x, y\} \in F_2(A \vee B) : x, y \in B\},$$

observamos que $W = F_2(B)$. El conjunto de elementos de $F_2(A \vee B)$ que satisfacen (c) es

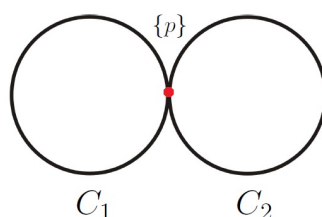
$$\langle 1, 2 \rangle = \{\{x, y\} \in F_2(A \vee B) : x \in A, y \in B\}.$$

Así $F_2(A \vee B) = F_2(A) \cup F_2(B) \cup \langle A, B \rangle$. Ahora probemos (1), (2) y (3). Para (1) tomemos un elemento arbitrario $\{x, y\} \in F_2(A) \cap F_2(B)$, entonces $\{x, y\} \in F_2(A)$ y $\{x, y\} \in F_2(B)$, lo cual implica que $x, y \in A$ y $x, y \in B$, pero como $A \cap B = \{p\}$, entonces $x = y = p$. Para (2) dado $\{x, y\} \in F_2(A) \cap \langle A, B \rangle$, se tiene que $x, y \in A$ y sin pérdida de generalidad supongamos $x \in A$ y $y \in B$, como $A \cap B = \{p\}$, obliga a que $y = p$. El inciso (3) es análogo. \square

Por ejemplo, consideremos dos curvas cerradas simples C_1 y C_2 , tales que $C_1 \cap C_2 = \{p\}$, como se ilustra en la Figura 1.5. Entonces por el Lema 1.4.2, tenemos

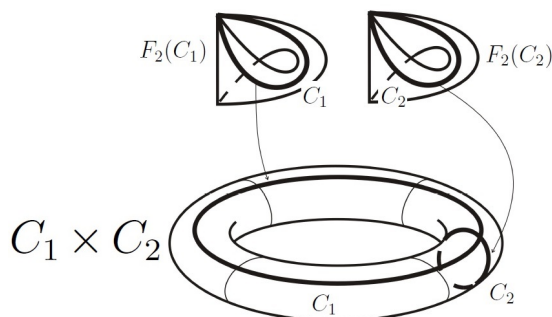
$$F_2(C_1 \vee C_2) = F_2(C_1) \cup F_2(C_2) \cup \langle C_1, C_2 \rangle,$$

tales que

Figura 1.5: El continuo $C_1 \vee C_2$.

- (1) $F_2(C_1) \cap F_2(C_2) = \{\{p\}\}$,
- (2) $F_2(C_1) \cap \langle C_1, C_2 \rangle = \{\{x, p\} \in F_2(C_1 \vee C_2) : x \in C_1\}$,
- (3) $F_2(C_2) \cap \langle C_1, C_2 \rangle = \{\{p, y\} \in F_2(C_1 \vee C_2) : y \in C_2\}$.

Puesto que C_1 y C_2 son homeomorfos a S^1 , entonces $F_2(C_1)$ y $F_2(C_2)$ son homeomorfos a una banda de Moebius y $\langle C_1, C_2 \rangle$ es homeomorfo al toro $C_1 \times C_2$. De los incisos (2) y (3), $F_2(C_1) \cap \langle C_1, C_2 \rangle = \{\{x, p\} \in F_2(C_1 \vee C_2) : x \in C_1\}$ es homeomorfo a C_1 y $F_2(C_2) \cap \langle C_1, C_2 \rangle = \{\{p, y\} \in F_2(C_1 \vee C_2) : y \in C_2\}$ es homeomorfo a C_2 . Por lo tanto el segundo producto simétrico de $C_1 \vee C_2$ es homeomorfo a la unión de dos bandas de Moebius y el toro $C_1 \times C_2$, donde una banda de Moebius se intersecta con el toro $C_1 \times C_2$ en $C_1 \times \{p\}$ (que es un meridiano del toro) y la otra banda de Moebius intersecta al toro $C_1 \times C_2$ en $\{p\} \times C_2$ (que es un paralelo del toro), como se muestra en la Figura 1.6.

Figura 1.6: Modelo de $F_2(C_1 \vee C_2)$.

1.5. Característica de Euler de Gráficas Finitas

Definición 1.5.1. Una gráfica finita es un continuo que se puede escribir como la unión de una cantidad finita de arcos, digamos e_1, \dots, e_n tales que e_i intersecta a e_j , si $i \neq j$ sólo en uno o en ambos puntos extremos, para $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Vamos a denotar por $E(G)$ el conjunto de arcos e_1, \dots, e_n , a los cuales les llamaremos conjunto de aristas de G . El conjunto de puntos donde se intersectan cualesquiera dos arcos lo denotamos por $V(G)$ y le llamamos conjunto de vértices de G .

Si G es una gráfica finita, vamos a denotar por $|V(G)|$ el número de vértices de G y por $|E(G)|$ el número de aristas de G .

Definición 1.5.2. *La característica de Euler de una gráfica finita G está definida por*

$$\chi(G) = |V(G)| - |E(G)|.$$

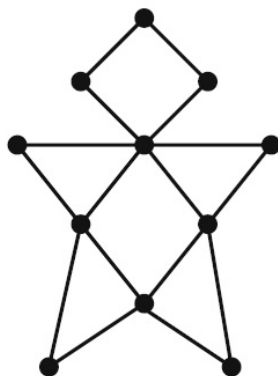


Figura 1.7: Gráfica finita G .

Por ejemplo, para la gráfica finita G de la Figura 1.7, el número de vértices $|V(G)|$ es 11 y el número de aristas $|E(G)|$ es 16, así $\chi(G) = -5$.

Una *subgráfica* de una gráfica finita G es una gráfica finita cuyo conjunto de vértices y conjunto de aristas son subconjuntos de $V(G)$ y $E(G)$ respectivamente. Un árbol es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples. Los árboles están caracterizados por la característica de Euler, como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 1.5.3. [16, Proposición 6.1 and 6.4, p. 201] *Sea G una gráfica finita. Entonces G es un árbol si y sólo si $\chi(G) = 1$.*

La característica de Euler también es un invariante homotópico, como se puede ver en el siguiente Lema.

Lema 1.5.4. [16, Corolario 6.3, p. 200] *Si dos gráficas finitas G_1 y G_2 tienen el mismo tipo de homotopía, entonces $\chi(G_1) = \chi(G_2)$.*

Por un árbol en una gráfica finita G queremos decir un subgráfica de G que es un árbol.

Definición 1.5.5. *Un árbol en una gráfica finita G se dice maximal si contiene todos los vértices de G .*

Proposición 1.5.6. [10, Proposición 1A.1, p. 84] *Toda gráfica finita contiene un árbol maximal.*

Teorema 1.5.7. *Sea G una gráfica finita. Entonces G es homotópicamente equivalente a $\bigvee_{i=1}^r C_i$, donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$ y C_i es homeomorfo a S^1 para todo $i = 1, \dots, r$.*

Demostración. Sea G una gráfica finita, y sea $T \subseteq G$ un árbol maximal con conjunto de aristas $E(T) = \{e_1, \dots, e_s\}$. Sea $E(G) - E(T) = \{a_1, \dots, a_r\}$ el conjunto de aristas que no están en T (este conjunto puede ser vacío).

Como T contiene todos los vértices de G , entonces el espacio cociente G/T es una gráfica finita con sólo un vértice. Por ello el conjunto de aristas de G/T lo podemos escribir como $E(G/T) = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r\}$, donde sus elementos \bar{a}_i para todo $i = 1, \dots, r$, son lazos basados en tal vértice. Por lo tanto G/T es un ramo de r -círculos, como se aprecia en la Figura 1.8.

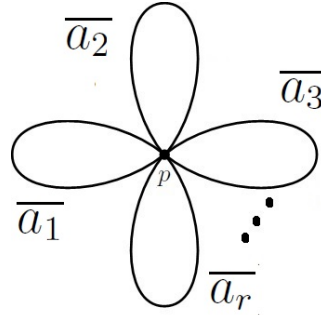


Figura 1.8: Gráfica finita G/T .

Luego la característica de Euler de la gráfica finita G/T es

$$\chi(G/T) = |V(G)| - |E(G)| = 1 - r.$$

Puesto que T es contraíble, entonces la función cociente $q : G \rightarrow G/T$ es una equivalencia homotópica ([10, Proposition 0.17]), así

$$G \simeq G/T \simeq \bigvee_{i=1}^r \bar{a}_i,$$

donde \bar{a}_i es homeomorfo a S^1 para todo $i = 1, \dots, r$. Por otro lado, ya que $G \simeq G/T$, entonces por el inciso (b) del Teorema 3.4.1 $\chi(G) = \chi(G/T)$. Así tenemos la siguiente igualdad

$$|V(G)| - |E(G)| = 1 - r,$$

despejando tenemos que $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$. □

El entero positivo r del teorema anterior le llamaremos *género* de G .

1.6. Presentación de Grupos

La propiedad universal de los grupos libres permite describir grupos arbitrarios en términos de generadores y relaciones. Esto nos será de gran utilidad en el siguiente capítulo para calcular el grupo fundamental del llamado *toro binomial* $T_{\binom{n}{2}}$.

Definición 1.6.1. Sea Γ un grupo, decimos que un subconjunto $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq \Gamma$ es un conjunto de generadores si todo elemento de Γ puede ser escrito como una composición de elementos de S y sus inversos. Escribimos $\Gamma = \langle S \rangle$

Por ejemplo, el conjunto \mathbb{Z} está generado por el elemento 1, es decir $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, en efecto: Pues todo elemento positivo $n > 0$ de \mathbb{Z} puede ser escrita como $1 + \dots + 1$ (n veces) y todo elemento negativo $-n$, $n > 0$ de \mathbb{Z} puede ser escrita $(-1) + \dots + (-1)$ (n veces).

Sea S un conjunto finito de k símbolos. Si $a \in S$ es un símbolo, entonces introducimos otro símbolo a^{-1} y denotamos el conjunto de tales símbolos por S^{-1} . Observamos todas las concatenaciones finitas de símbolos elegidos de $S \cup S^{-1}$, sujetos a la condición de que las concatenaciones de la forma aa^{-1} y $a^{-1}a$ son eliminados. Tal concatenación finita de n símbolos se llama una *palabra de longitud n* . Sea

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n &= \{\text{todas las palabras de longitud } n\} \\ &= \{w_n = a_1 \cdots a_n \mid a_j \in S \cup S^{-1}, a_{j\pm 1} \neq a_j^{-1} \quad \forall j = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Dejamos que e denote la palabra vacía (la palabra que consiste en no símbolos) y, por consistencia sea $\mathcal{W}_0 = \{e\}$. Si w_n y w_m son palabras, entonces podemos formar una nueva palabra $w_n w_m$ de longitud a lo más $n + m$ por concatenación si $w_n = a_1 \cdots a_n$ y $w_m = b_1 \cdots b_m$, entonces

$$w_n w_m = a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m.$$

Si $b_1 = a_n^{-1}$ entonces eliminamos el término $a_n b_1$ de este producto, y entonces tenemos que ver si $b_2 = a_{n-1}^{-1}$; si es así, eliminamos el término $a_{n-1} b_2$, y así sucesivamente. A este proceso le llamamos *concurrancia*.

Definición 1.6.2. Sea S un conjunto finito de k elementos. Definimos

$$\mathcal{F}_k = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{W}_n,$$

la colección de todas las palabras finitas (sujeto a la condición de que el símbolo a nunca sigue o es seguido por a^{-1}), para ser el grupo libre en k generadores.

Vamos a verificar que éste es un grupo donde la operación del grupo es concatenación de palabras.

- La operación del grupo está bien definida: como vimos anteriormente, la concatenación de dos palabras es otra palabra.
- La concatenación es asociativa.
- Existencia de una identidad: la palabra vacía e es el elemento de identidad; Si $w = a_1 \cdots a_n \in \mathcal{F}_k$, entonces $we = ew = w$.
- Existencia de inverso: si $w = a_1 \cdots a_n$ es un palabra, entonces la palabra $w = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$ es tal que $ww^{-1} = w^{-1}w = e$.

Llamamos a \mathcal{F}_k un *grupo libre*. Una *relación* es una palabra que declaramos que es igual a la identidad.

Definición 1.6.3. Sea $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ un conjunto finito de símbolos y sea $R = \{w_1, \dots, w_m\}$ un conjunto finito de palabras. Definimos el grupo

$$\langle a_1, \dots, a_k \mid w_1 = e, \dots, w_m = e \rangle,$$

que también lo podemos escribir como

$$\langle a_1, \dots, a_k \mid w_1, \dots, w_m \rangle,$$

el cual es el conjunto de todas las palabras de símbolos de $S \cup S^{-1}$ sujeto a las condiciones siguientes: (i) cualesquiera subpalabras de la forma aa^{-1} o $a^{-1}a$ son eliminadas y (ii) Cualquier concurrencia de las subpalabras w_1, \dots, w_m son eliminadas. Así cualesquier concurrencia de las palabras w_1, \dots, w_m son reemplazadas por la palabra vacía e , es decir, la identidad del grupo.

Denotamos $\langle a_1, \dots, a_k \mid w_1, \dots, w_m \rangle$ por $\langle S \mid R \rangle$. Si G es un grupo y existe un isomorfismo $G \cong \langle S \mid R \rangle$, se dice que $\langle S \mid R \rangle$ es una *presentación finita* del grupo G . Las presentaciones proporcionan un método universal para describir grupos. Algunos ejemplos de presentaciones finitas son los siguientes:

1. Sea $w = e^{2\pi i/p}$. El grupo $G = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}\}$ de p -raíces de la unidad, usando $\omega \mapsto a$, tiene una presentación finita de la forma

$$\langle a \mid a^p = e \rangle.$$

2. El grupo aditivo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ tiene una presentación finita, a saber es isoformo al grupo

$$\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = e \rangle,$$

en efecto: Si tomamos una palabra en el grupo libre $\langle a, b \rangle$ en dos generadores, entonces será de la forma

$$a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} b^{m_2} \cdots a^{n_t} b^{m_t},$$

con $n_1, \dots, n_t, m_1, \dots, m_t \in \mathbb{Z}$. En particular, el grupo $\langle a, b \rangle$ no es abeliano, pues $ab \neq ba$. Sin embargo, agregando la relación $a^{-1}b^{-1}ab = e$ nos permite hacer que el grupo sea abeliano,

$$\begin{aligned} ba &= bae \\ &= ba(a^{-1}b^{-1})ab \\ &= ba(ab)^{-1}ab \\ &= b(a^{-1}a)b^{-1}ab \\ &= beb^{-1}ab \\ &= bb^{-1}ab \\ &= ab. \end{aligned}$$

Así en el grupo $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = e \rangle$ podemos usar la relación $a^{-1}b^{-1}ab$ para escribir la palabra

$$a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2} \dots a^{n_t}b^{m_t}$$

como

$$a^{n_1+\dots+n_t}b^{m_1+\dots+m_t}.$$

Por ello $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = e \rangle = \{a^n b^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$, luego usando la función $(m, n) \mapsto a^n b^m$, tenemos que $\{a^n b^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ es isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

3. Generalizando el inciso anterior, denotemos por

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1},$$

el cual se le llama el *conmutador*. Ahora consideremos la siguiente presentación finita

$$\begin{aligned} \langle s_1, \dots, s_n \mid [s_1, s_2] = e, [s_1, s_3] = e, [s_1, s_4] = e, \dots, [s_1, s_n] = e, \\ [s_2, s_3] = e, [s_2, s_4] = e, \dots, [s_2, s_n] = e, \\ [s_3, s_4] = e, \dots, [s_3, s_n] = e, \\ \vdots \\ [s_{n-1}, s_n] = e \rangle, \end{aligned}$$

tal presentación la podemos simplificar como:

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid [s_i, s_j], \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq n \rangle.$$

Luego por [22, Ejemplo 11.7, p. 347], tenemos

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid [s_i, s_j], \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq n \rangle \cong \mathbb{Z}^n,$$

donde \mathbb{Z}^n denota la suma directa

$$\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n\text{-veces}}.$$

Capítulo 2

Homotopía del Segundo Producto Simétrico de Gráficas Finitas

Hallar “modelos” de los n -ésimos productos simétricos de un continuo X , en general es un problema difícil para $n \geq 2$. Por ello usamos algo más débil que homeomorfismo, la “homotopía” en el siguiente sentido: Decimos que $F_n(X)$ tiene un *modelo homotópico* si existe un continuo Y tal que $F_n(X)$ tiene el mismo tipo de homotopía que Y . En particular, en este capítulo hallamos un modelo homotópico para el segundo producto simétrico de gráficas finitas. Algo que podemos explotar a los modelos homotópicos son los invariantes algebraicos, es decir, si Y es un modelo homotópico de $F_n(X)$, entonces: los grupos de homotopía, los grupos de homología y los grupos de cohomología de Y y $F_n(X)$ son isomorfos. En la última sección de este capítulo calculamos algunos invariantes algebraicos del segundo producto simétrico de gráficas finitas.

2.1. El funtor $F_n(-)$

La construcción de $F_n(X)$ es functorial como lo mostraremos. Dada $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre continuos, para toda $n \geq 1$ la *función inducida* $F_n(f) : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$ definida por $F_n(f)(A) = f(A)$ es continua ([11, Lemma 13.3, p. 106]. Ahora si X, Y, Z son continuos y $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son funciones continuas, entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & Z \\ f \uparrow & \nearrow g \circ f & \\ X & & \end{array}$$

induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F_n(Y) & \xrightarrow{F_n(g)} & F_n(Z) \\ F_n(f) \uparrow & \nearrow F_n(g \circ f) & \\ F_n(X) & & \end{array}$$

donde se cumple

$$F_n(g \circ f) = F_n(g) \circ F_n(f), \quad (2.1)$$

en efecto: sea $A \in F_n(X)$, entonces

$$\begin{aligned} F_n(g \circ f)(A) &= (g \circ f)(A) \\ &= g(f(A)) \\ &= F_n(g)(f(A)) \\ &= F_n(g)(F_n(f)(A)) \\ &= (F_n(g) \circ F_n(f))(A). \end{aligned}$$

Por otro lado, consideremos las funciones identidad correspondientes $1_X : X \rightarrow X$ definida por $1_X(x) = x$ y $id_{F_n(X)} : F_n(X) \rightarrow F_n(X)$ definida por $id_{F_n(X)}(A) = A$. Para toda $A = \{x_1, \dots, x_d\} \in F_n(X)$ con $d \leq n$, tenemos

$$\begin{aligned} F_n(1_X)(A) &= F_n(1_X)(\{x_1, \dots, x_d\}) \\ &= \{1_X(x_1), \dots, 1_X(x_d)\} \\ &= \{x_1, \dots, x_d\} \\ &= A \\ &= id_{F_n(X)}(A). \end{aligned}$$

Por ello

$$F_n(1_X) = id_{F_n(X)}. \quad (2.2)$$

Por lo tanto $F_n(-)$ define un funtor de la categoría de los continuos en ella misma, es decir

$$\begin{aligned} F_n : \{ \text{Continuos} \} &\longrightarrow \{ \text{Continuos} \}. \\ X &\longmapsto F_n(X) \end{aligned}$$

De hecho el funtor $F_n(-)$ es homotópico, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.1.1. *Sean X, Y continuos y $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Si $H : X \times I \rightarrow Y$ es una homotopía entre f y g . Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $H_n : F_n(X) \times I \rightarrow F_n(Y)$ definida por*

$$H_n(\{x_1, \dots, x_n\}, t) = \{H(x_1, t), \dots, H(x_n, t)\}$$

es una homotopía entre $F_n(f)$ y $F_n(g)$.

Demostración. Demostremos primeramente la continuidad de H_n . Para ello definamos las siguientes funciones continuas

1. $\Delta_n : I \rightarrow I^n$, definida por $\Delta_n(x) = (x, \dots, x)$.

2. $Per : X^n \times I^n \rightarrow (X \times I)^n$, definida por

$$Per((x_1, \dots, x_n), (t_1, \dots, t_n)) = ((x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)).$$

3. $H^n : (X \times I)^n \rightarrow Y^n$, definida por

$$H^n((x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)) = (H(x_1, t_1), \dots, H(x_n, t_n)).$$

Ahora consideremos las funciones cocientes naturales, $q_n^X : X^n \rightarrow F_n(X)$, definida por $q_n^X(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $q_n^Y : Y^n \rightarrow F_n(Y)$, definida por $q_n^Y(y_1, \dots, y_n) = \{y_1, \dots, y_n\}$. Así

$$\begin{aligned} H_n \circ (q_n^X \times 1_I)((x_1, \dots, x_n), t) &= H_n(\{x_1, \dots, x_n\}, t) \\ &= \{H(x_1, t), \dots, H(x_n, t)\}, \end{aligned}$$

donde 1_I es la función identidad en I . Del mismo modo evaluamos la siguiente composición de funciones

$$\begin{aligned} & q_n^Y \circ H^n \circ Per \circ (1_{X^n} \times \Delta)((x_1, \dots, x_n), t) \\ &= q_n^Y \circ H^n \circ Per((x_1, \dots, x_n), (t, \dots, t)) \\ &= q_n^Y \circ H^n((x_1, t), \dots, (x_n, t)) \\ &= q_n^Y(H(x_1, t), \dots, H(x_n, t)) \\ &= \{H(x_1, t), \dots, H(x_n, t)\}, \end{aligned}$$

donde 1_{X^n} es la función identidad en X^n . Por ello tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} X^n \times I & \xrightarrow{1_{X^n} \times \Delta_n} & X^n \times I^n & \xrightarrow{Per} & (X \times I)^n & \xrightarrow{H^n} & Y^n \\ \downarrow q_n^X \times 1_I & & & & & & \downarrow q_n^Y \\ F_n(X) \times I & \xrightarrow{H_n} & & & & & F_n(Y) \end{array}$$

Por lo que H_n es continua. Por otro lado, puesto que $H : X \times I \rightarrow Y$ es una homotopía entre f y g , entonces para todo $x \in X$, $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned} H_n(\{x_1, \dots, x_n\}, 0) &= \{H(x_1, 0), \dots, H(x_n, 0)\} \\ &= \{f(x_1), \dots, f(x_n)\} \\ &= F_n(f)(\{x_1 \dots x_n\}). \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} H_n(\{x_1, \dots, x_n\}, 1) &= \{H(x_1, 1), \dots, H(x_n, 1)\} \\ &= \{g(x_1), \dots, g(x_n)\} \\ &= F_n(g)(\{x_1 \dots x_n\}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $F_n(f) \simeq F_n(g)$. □

En consecuencia, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.2. Sean X, Y continuos. Si X tiene el mismo tipo de homotopía que Y , entonces para todo $n \geq 1$, $F_n(X)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $F_n(Y)$.

Demostración. Si X tiene el mismo tipo de homotopía que Y , entonces existen funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$, donde 1_X y 1_Y son las funciones identidad en X y Y respectivamente. Por el Teorema 2.1.1 tenemos $F_n(g \circ f) \simeq F_n(1_X)$ y $F_n(f \circ g) \simeq F_n(1_Y)$. Luego aplicando (2.1) y (2.2), $F_n(g) \circ F_n(f) \simeq 1_{F_n(X)}$ y $F_n(f) \circ F_n(g) \simeq 1_{F_n(Y)}$. Por lo tanto $F_n(X)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $F_n(Y)$. \square

Por ejemplo, los siguientes continuos, todos tienen el mismo tipo de homotopía (sin embargo cualquiera dos de ellos no son homeomorfos). Tales continuos se ilustran en la Figura 2.1.

- El círculo S^1 ,
- El cilindro $S^1 \times [0, 1]$,
- El anillo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$,
- El toro solido $S^1 \times D^2$,
- La banda de Moebius M .

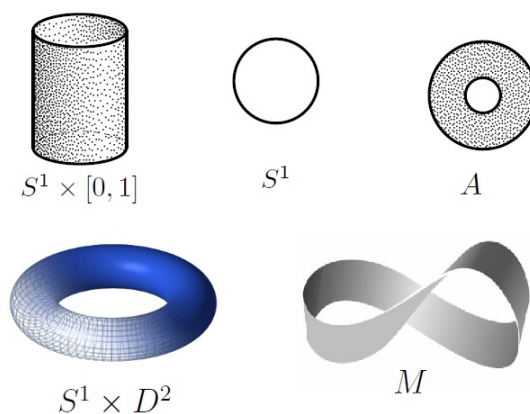


Figura 2.1: Algunos continuos con el mismo tipo de homotopía.

Aplicando el Corolario 2.1.2, para todo $n \geq 1$

$$F_n(S^1) \simeq F_n(S^1 \times [0, 1]) \simeq F_n(A) \simeq F_n(S^1 \times D^2) \simeq F_n(M).$$

En [7], N. Chinen y A. Koyama muestran que para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_{2n+1}(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que S^{2n+1} y $F_{2n}(S^1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que S^{2n-1} . Así para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$S^{2n+1} \simeq F_{2n+1}(S^1 \times [0, 1]) \simeq F_{2n+1}(A) \simeq F_{2n+1}(S^1 \times D^2) \simeq F_{2n+1}(M),$$

y

$$S^{2n-1} \simeq F_{2n}(S^1 \times [0, 1]) \simeq F_{2n}(A) \simeq F_{2n}(S^1 \times D^2) \simeq F_{2n}(M).$$

Corolario 2.1.3. *Sean X un continuo contráctil, entonces $F_n(X)$ es contráctil para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Si X es un continuo contráctil, entonces X tiene el mismo tipo de homotopía que un punto, digamos $\{p\}$, para algún $p \in X$. Aplicando el Corolario 2.1.2 $F_n(X)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $F_n(\{p\})$. Puesto que $F_n(\{p\}) = \{\{p\}\}$ para todo $n \geq 1$, se tiene que $F_n(X)$ es contráctil para todo $n \geq 1$. \square

Por ejemplo, sea X un continuo arbitrario, puesto que el $cono(X)$ es contráctil, entonces $F_n(cono(X))$ es contráctil para todo $n \geq 1$.

2.2. Clasificación

En esta sección vamos a clasificar los objetos de la categoría de los n -ésimos productos simétricos de gráficas finitas por medio de homotopía. Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos la familia

$$\mathcal{GF}_n = \left\{ F_n(G) : G \text{ es una gráfica finita} \right\}.$$

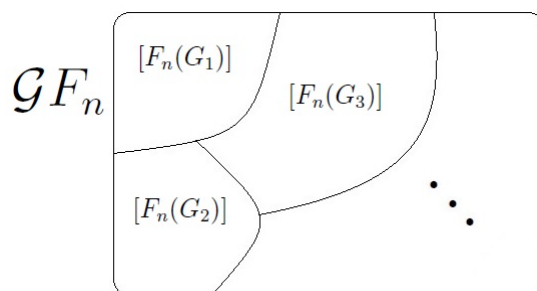
Definamos una relación en \mathcal{GF}_n como sigue: Dados $F_n(G_1), F_n(G_2) \in \mathcal{GF}_n$, $F_n(G_1) \sim F_n(G_2)$ si y sólo si $F_n(G_1)$ tienen el mismo tipo de homotopía que $F_n(G_2)$. Notemos que \sim es una relación de equivalencia. Consideremos el conjunto de todas las clases de equivalencia

$$\mathcal{GF}_n / \sim = \left\{ [F_n(G)] : F_n(G) \in \mathcal{GF}_n \right\},$$

donde $[F_n(G)]$ denota la clase de equivalencia del n -ésimo producto simétrico $F_n(G)$. Así tenemos una partición de \mathcal{GF}_n , como se ilustra en la Figura 2.2.

El siguiente resultado juega un papel primordial en nuestra clasificación, pues nos ayudará a encontrar representantes distinguidos.

Teorema 2.2.1. *Sea G una gráfica finita, entonces para todo $n \geq 1$, $F_n(G)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $F_n(\bigvee_{i=1}^r S^1)$, donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$.*

Figura 2.2: Partición de \mathcal{GF}_n

Demostración. Si G es una gráfica finita, entonces por el Teorema 1.5.7

$$G \simeq \bigvee_{i=1}^r S^1$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$. Ahora aplicando el Corolario 2.1.2, tenemos

$$F_n(G) \simeq F_n\left(\bigvee_{i=1}^r S^1\right).$$

□

Dadas dos gráficas finitas arbitrarias G_1 y G_2 en general es un problema difícil mostrar si $F_n(G_1)$ es homeomorfo a $F_n(G_2)$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo en el caso homotópico lo podemos resolver aplicando la característica de Euler, como lo muestra el siguiente resultado.

Corolario 2.2.2. Sean G_1 y G_2 dos gráficas finitas tales que $\chi(G_1) = \chi(G_2)$, entonces $F_n(G_1)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $F_n(G_2)$.

Demostración. Si G_1 y G_2 son dos gráficas finitas, entonces por el Teorema 1.5.7

$$G_1 \simeq \bigvee_{i=1}^{1-\chi(G_1)} S^1 \quad \text{y} \quad G_2 \simeq \bigvee_{i=1}^{1-\chi(G_2)} S^1.$$

Ya que $\chi(G_1) = \chi(G_2)$, entonces

$$G_1 \simeq \bigvee_{i=1}^{1-\chi(G_1)} S^1 = \bigvee_{i=1}^{1-\chi(G_2)} S^1 \simeq G_2.$$

Así, aplicando el Corolario 2.1.2, $F_n(G_1) \simeq F_n(G_2)$. □

Los siguientes ejemplos nos ilustran que en el conjunto \mathcal{GF}_n / \sim existen elementos distinguibles los cuales son representantes universales.

1. Si T es un árbol, entonces $\chi(T) = 1$ (por la Proposición 1.5.3), por ello

$$T \simeq \bigvee_{i=1}^{1-\chi(T)} S^1 = \bigvee_{i=1}^{1-1} S^1 = \bigvee_{i=1}^0 S^1 = \{p\},$$

para algún $p \in G$. Entonces por el Corolario 2.1.2, $F_n(T) \simeq F_n(\{p\}) = \{\{p\}\}$ para todo $n \geq 1$. Así la clase de $\{\{p\}\}$ representa a todos los n -ésimos productos simétricos de los árboles, es decir

$$[\{\{p\}\}] = \left\{ F_n(G) \in \mathcal{GF}_n : \chi(G) = 1 \right\}.$$

2. Si G es una gráfica finita tal que $\chi(G) = 0$, entonces por el Teorema 2.2.1 $F_n(G) \simeq F_n(S^1)$. Por lo tanto

$$[F_n(S^1)] = \left\{ F_n(G) \in \mathcal{GF}_n : \chi(G) = 0 \right\}.$$

Aplicando [7, Teorema 4.1 y Teorema 4.2, p. 2619], para todo $n \in \mathbb{N}$

$$[S^{2n+1}] = \left\{ F_{2n+1}(G) \in \mathcal{GF}_{2n+1} : \chi(G) = 0 \right\},$$

y

$$[S^{2n-1}] = \left\{ F_{2n}(G) \in \mathcal{GF}_{2n} : \chi(G) = 0 \right\}.$$

Por ello la clases de S^{2n+1} y S^{2n-1} son universales en el sentido que representan todos los n -ésimos productos simétricos de gráficas finitas con característica de Euler cero. Para ilustrar esto, consideremos la paleta P , la medalla M y la aceituna A (tales continuos se muestran en la Figura 2.3), su característica de Euler es: $\chi(P) = 2 - 2 = 0$, $\chi(M) = 3 - 3 = 0$ y $\chi(A) = 4 - 4 = 0$.

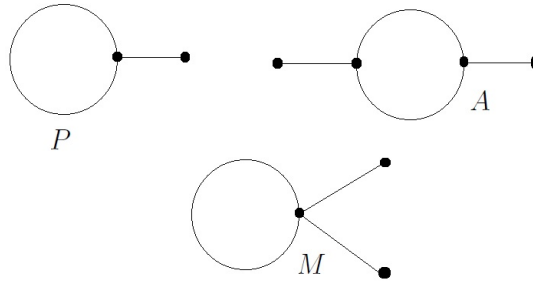


Figura 2.3: Continuos: Paleta, aceituna y medalla.

Por ello $F_{2n+1}(P), F_{2n+1}(M), F_{2n+1}(A) \in [S^{2n+1}]$ y $F_{2n}(P), F_{2n}(M), F_{2n}(A) \in [S^{2n-1}]$, es decir, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$S^{2n+1} \simeq F_{2n+1}(P) \simeq F_{2n+1}(M) \simeq F_{2n+1}(A)$$

y

$$S^{2n-1} \simeq F_{2n}(P) \simeq F_{2n}(M) \simeq F_{2n}(A).$$

3. Si G es una gráfica finita con característica de Euler igual a menos uno, es decir $\chi(G) = -1$, entonces por el Teorema 2.2.1, tenemos

$$F_n(G) \simeq F_n\left(\bigvee_{i=1}^2 S^1\right),$$

y por el Corolario 2.2.2

$$\left[F_n\left(\bigvee_{i=1}^2 S^1\right)\right] = \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = -1\right\}.$$

El modelo geométrico del segundo producto simétrico del continuo figura ocho $S^1 \vee S^1$ se ilustra en la Figura 2.4 y lo representamos por $F_2\left(\bigvee_{i=1}^2 S^1\right)$. Más adelante demostraremos que $F_2\left(\bigvee_{i=1}^2 S^1\right)$ tiene el mismo tipo de homotopía que el toro $S^1 \times S^1$ (Corolario 2.4.5). Así

$$[S^1 \times S^1] = \left\{F_2(G) \in \mathcal{G}F_2 : \chi(G) = -1\right\}.$$

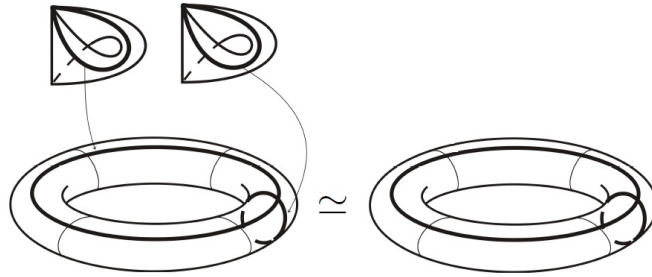


Figura 2.4: Modelo del continuo figura ocho.

En particular, consideremos los continuos: La pesa W y la letra theta Θ ilustrados en la Figura 2.5. Notemos que la característica de Euler de W y Θ es -1 . Por ello $F_2(W), F_2(\Theta) \in [S^1 \times S^1]$, es decir

$$F_2(W) \simeq F_2(\Theta) \simeq S^1 \times S^1.$$

Por lo que observemos que aunque no conozcamos los modelos geométricos explícitos de los hiperespacios $F_2(W)$ y $F_2(\Theta)$, si conocemos su tipo de homotopía.

En general los *modelos universales homotópicos* quedan codificados como

$$\left[F_n\left(\bigvee_{i=1}^k S^1\right)\right] = \left\{F_n(G) \in \mathcal{G}F_n : \chi(G) = 1 - k\right\},$$

es decir, tenemos representantes de clases de equivalencia distinguidos.

Como consecuencia del Teorema 2.2.1 tenemos el siguiente resultado.

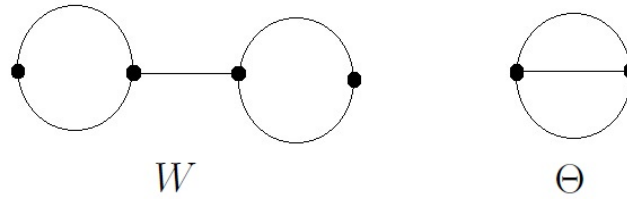


Figura 2.5: La pesa y la letra theta.

Corolario 2.2.3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de clases de equivalencia \mathcal{GF}_n / \sim podemos escribirlo como (vease la Figura 2.6)

$$\left\{ [F_n(\{p\})], [F_n(S^1)], [F_n(S^1 \vee S^1)], [F_n(S^1 \vee S^1 \vee S^1)], \dots \right\},$$

y de hecho existe una función biyectiva

$$\varphi : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathcal{GF}_n / \sim$$

definida por

$$\varphi(m) = \begin{cases} [F_n(\{p\})] & \text{si } m = 0, \\ [F_n(\bigvee_{i=1}^m S^1)] & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

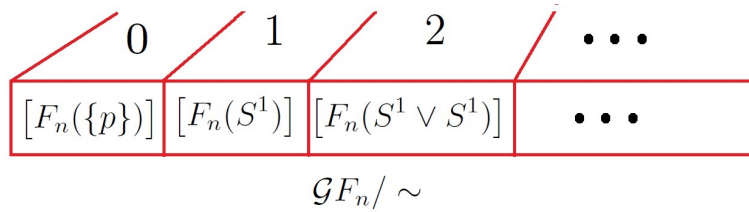


Figura 2.6: Nueva partición de \mathcal{GF}_n .

Observación 2.2.4. Un problema abierto es el de hallar el tipo de homotopía del n -ésimo producto simétrico de la cuña de k -círculos

$$F_n\left(\bigvee_{i=1}^k S^1\right),$$

para toda $n \geq 3$ y toda $k \geq 2$. Para el caso $k = 1$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, N. Chinen y A. Koyama en [7] lo demostraron. Para el caso $n = 2$ y para cualquier k se demostrará en el Corolario 2.4.5.

2.3. Toro binomial

En esta sección definimos un objeto geométrico al que hemos llamado *toro binomial*, el cual juega un papel fundamental en el estudio del tipo de homotopía del segundo producto simétrico de una gráfica finita.

Sean C_1, \dots, C_n espacios homeomorfos a la circunferencia S^1 tales que

$$C_1 \cap \dots \cap C_n = \{p\}.$$

Vamos a digitalizar la cuña de n -círculos como sigue: Denotaremos por 1 la curva cerrada simple C_1 , por 2 la curva cerrada simple C_2 , y así sucesivamente, denotamos por n la curva cerrada simple C_n . Entonces la cuña de n -círculos la podemos escribir como

$$\bigvee_{i=1}^n i,$$

la cual se ilustra en la Figura 2.7.

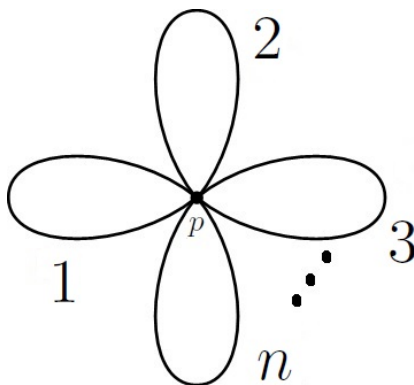


Figura 2.7: Cuña de n -círculos digitalizado.

De la misma manera, denotemos por 12 el toro $1 \times 2 = C_1 \times C_2 \approx S^1 \times S^1$, por 23 el toro $2 \times 3 = C_2 \times C_3 \approx S^1 \times S^1$, así sucesivamente, hasta que denotamos por $(n-1)n$ el toro $(n-1) \times n = C_{n-1} \times C_n \approx S^1 \times S^1$. En la Figura 2.8 i y j denotan las curvas cerradas $C_i \approx S^1$ y $C_j \approx S^1$ respectivamente, para $i, j = 1, \dots, n$. Donde ij denota el toro $i \times j = C_i \times C_j = S^1 \times S^1$.

Definición 2.3.1. Definimos el toro binomial, al cual denotamos por $T_{\binom{n}{2}}$, como la unión de los $\binom{n}{2}$ toros:

$$\begin{aligned} T_{\binom{n}{2}} &= (12 \cup 13 \cup \dots \cup 1n) \cup (23 \cup 24 \cup \dots \cup 2n) \cup \dots \cup (n-1)n \\ &= \bigcup_{i=1}^{n-1} \left(\bigcup_{j=i+1}^n ij \right), \end{aligned}$$

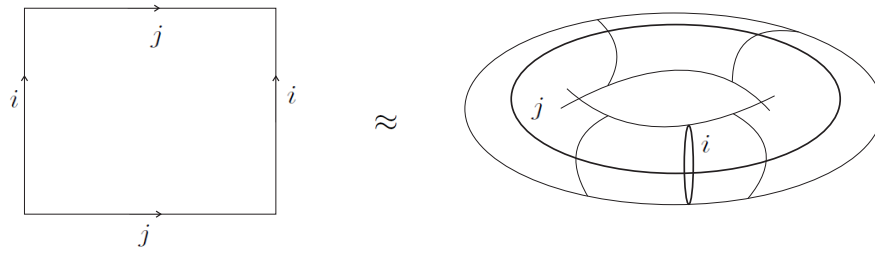


Figura 2.8: Toro ij .

con las siguientes intersecciones

$$\begin{aligned} 12 \cap 13 \cap \dots \cap 1n &= 1 \times \{p\}, \\ 21 \cap 23 \cap \dots \cap 2n &= 2 \times \{p\}, \\ &\vdots \\ n1 \cap n2 \cap \dots \cap n(n-1) &= n \times \{p\}. \end{aligned}$$

Geoméricamente el toro binomial puede ser representado como se ilustra en la Figura 2.9

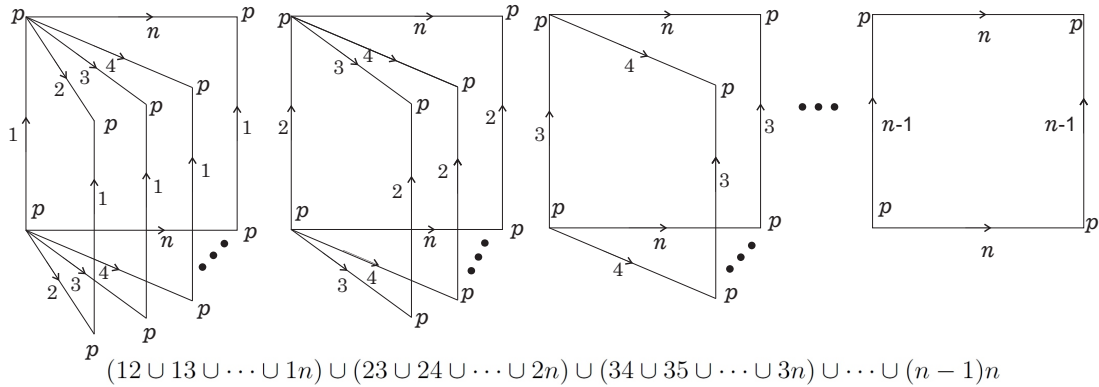


Figura 2.9: Toro Binomial.

De la Figura 2.8, donde primero identificamos los lados i 's y nos genera un cilindro, posteriormente identificamos las j 's y nos genera el toro, su grupo fundamental tiene la siguiente presentación finita

$$\langle i, j \mid iji^{-1}j^{-1} = e \rangle.$$

De manera simplificada, usando el conmutador tenemos

$$\langle i, j \mid iji^{-1}j^{-1} = e \rangle = \langle i, j \mid [i, j] = e \rangle.$$

En particular, cuando $n = 2$, $T_{\binom{2}{2}} = T_1 = 12$, por lo anterior

$$\pi_1\left(T_{\binom{2}{2}}, p\right) \cong \langle 1, 2 \mid [1, 2] = e \rangle.$$

Ahora consideremos el caso $n = 3$, entonces por definición

$$T_{\binom{3}{2}} = T_3 = (12 \cup 13) \cup 23,$$

como se ilustra en la Figura 2.10.

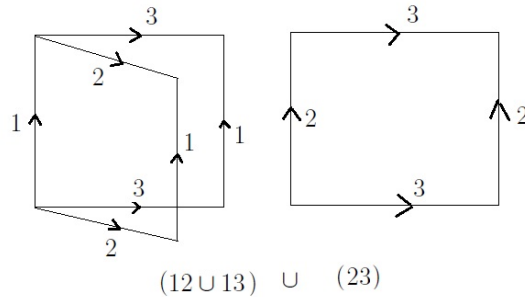


Figura 2.10: Toro Binomial $T_{\binom{3}{2}}$.

El grupo fundamental de $T_{\binom{3}{2}}$ tiene la siguiente presentación finita

$$\pi_1\left(T_{\binom{3}{2}}, p\right) \cong \langle 1, 2, 3 \mid [1, 2] = e, [1, 3] = e, [2, 3] = e \rangle.$$

En general, el grupo fundamental del toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ basado en el punto p es:

$$\begin{aligned} \pi_1\left(T_{\binom{n}{2}}, p\right) &\cong \langle 1, \dots, n \mid [1, 2] = e, \dots, [1, n] = e, [2, 3] = e, \dots, [2, n] = e, \\ &\quad [3, 4] = e, \dots, [3, n] = e, \dots, [n-1, n] = e \rangle \\ &= \langle 1, \dots, n \mid [i, j], \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq n \rangle. \end{aligned}$$

Así por [22, Ejemplo 11.7, p. 347], tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.2. *El grupo fundamental del toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ es un grupo abeliano libre de rango n , es decir, es isomorfo a \mathbb{Z}^n .*

Por otro lado, el toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ es un CW-complejo, como se muestra en la Figura 2.11. Donde $e_1^0 = \{p\}$ es una 0-celda, las curvas cerradas simples $e_i^1 = i$, para todo $i = 1, \dots, n$ son las 1-celdas. Finalmente e_{ij}^2 son las 2-celdas para todo $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, n$ y $i < j$. Por lo tanto, la descomposición celular del toro binomial es,

$$T_{\binom{n}{2}} = e_1^0 \cup \left(\bigcup_{i=1}^n e_i^1 \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \left(\bigcup_{j=i+1}^n e_{ij}^2 \right) \right)$$

Las cadenas celulares de $T_{\binom{n}{2}}$ son:

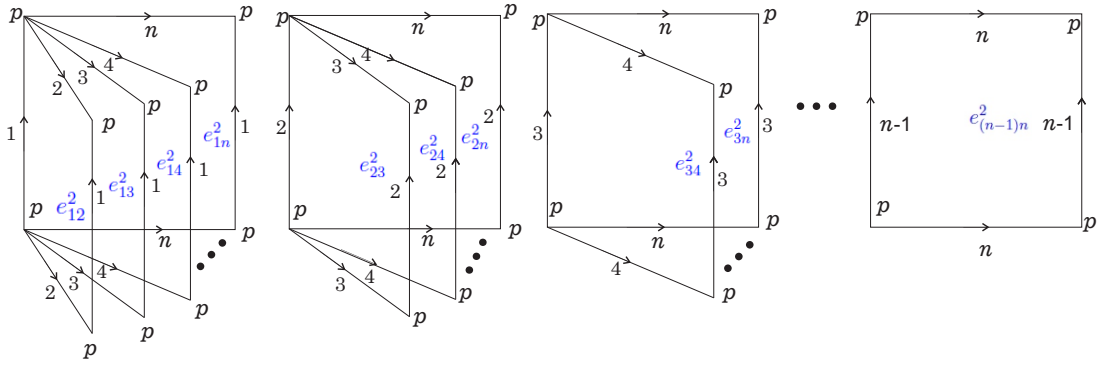


Figura 2.11: $T_{(2)}^{(n)}$ como un CW-complejo.

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \langle e_1^0 \rangle, \\
 C_1 &= \langle e_1^1, \dots, e_n^1 \rangle, \\
 C_2 &= \langle e_{12}^2, \dots, e_{1n}^2, e_{23}^2, \dots, e_{2n}^2, e_{34}^2, \dots, e_{3n}^2, \dots, e_{(n-1)n}^2 \rangle.
 \end{aligned}$$

Donde notamos que $C_0 \cong \mathbb{Z}$, $C_1 \cong \mathbb{Z}^n$ and $C_2 \cong \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}$. Por lo tanto, tenemos la siguiente sucesión de complejos de cadenas

$$0 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Notemos que

$$\partial_0(e_1^0) = 0.$$

$$\partial_1(e_i^1) = p - p = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

$$\partial_2(e_{ij}^2) = i + j - i - j = 0, \text{ for all } i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, n \text{ y } i < j.$$

Lo que implica que los ciclos son:

$$Z_0(T_{(2)}^{(n)}; \mathbb{Z}) = \ker(\partial_0) = \mathbb{Z},$$

$$Z_1(T_{(2)}^{(n)}; \mathbb{Z}) = \ker(\partial_1) = \mathbb{Z}^n,$$

$$Z_2(T_{(2)}^{(n)}; \mathbb{Z}) = \ker(\partial_2) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}.$$

Las fronteras son:

$$B_0(T_{(2)}^{(n)}; \mathbb{Z}) = \text{im}(\partial_1) = 0,$$

$$B_1(T_{(2)}^{(n)}; \mathbb{Z}) = \text{im}(\partial_2) = 0,$$

$$B_2(T_{(2)}^{(n)}; \mathbb{Z}) = \text{im}(\partial_3) = 0.$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.3. *Los grupos de homología del toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ con coeficientes en \mathbb{Z} son*

$$H_q(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, \\ \mathbb{Z}^n & \text{si } q = 1, \\ \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}} & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q \geq 3. \end{cases}$$

Por lo tanto, los números de Betti del toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ son:

$$b_0(T_{\binom{n}{2}}) = 1, \quad b_1(T_{\binom{n}{2}}) = n, \quad b_2(T_{\binom{n}{2}}) = \binom{n}{2}, \quad b_i(T_{\binom{n}{2}}) = 0 \quad \forall i \geq 3.$$

Por lo tanto, la característica de Euler del toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ es

$$\begin{aligned} \chi(T_{\binom{n}{2}}) &= b_0(T_{\binom{n}{2}}) - b_1(T_{\binom{n}{2}}) + b_2(T_{\binom{n}{2}}) \\ &= 1 - n + \binom{n}{2} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n-2)(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Los primeros valores de la característica de Euler del toro binomial se muestran en la siguiente tabla:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\chi(T_{\binom{n}{2}})$	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Note que si $k = n - 2$, entonces $\chi(T_{\binom{n}{2}}) = k(k+1)/2$. Así tenemos lo siguiente.

Teorema 2.3.4. *Para $n \geq 3$, la característica de Euler del toro binomial $\chi(T_{\binom{n}{2}})$, es un número triangular.*

Para calcular los grupos de cohomología del toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ usamos el Teorema del Coeficiente Universal para Cohomología ([21, Theorem 7.5, p. 66]), a saber:

Teorema 2.3.5. *Sea X un CW-complejo. Podemos calcular la cohomología sobre un grupo de coeficientes G , utilizando la homología integral correspondiente y el producto de extensión*

$$H^n(X; G) \cong \text{Hom}(H_n(X; \mathbb{Z}), G) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G).$$

Para cualquier grupo abeliano G , por [21, p. 63] tenemos:

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \cong G \quad \text{y} \quad \text{Ext}(\mathbb{Z}, G) = 0.$$

En particular $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ y $\text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0$. Además, para dos grupos abelianos A y B (ver [10, p. 195]), tenemos

$$\text{Hom}(A \oplus B, \mathbb{Z}) = \text{Hom}(A, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(B, \mathbb{Z})$$

y

$$\text{Ext}(A \oplus B, \mathbb{Z}) = \text{Ext}(A, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(B, \mathbb{Z}).$$

Proposición 2.3.6. *Para cualquier entero positivo r , tenemos*

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r, \quad \text{Ext}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) \cong 0.$$

Demostración. Por inducción sobre $r \in \mathbb{Z}^+$. El caso $r = 1$ se sigue inmediatamente de lo anterior. Supongamos que $\text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r$ es verdadero. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathbb{Z}^{r+1}, \mathbb{Z}) &= \text{Hom}(\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ &= \text{Hom}(\mathbb{Z}^r, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ &\cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z} \\ &\cong \mathbb{Z}^{r+1}. \end{aligned}$$

Similarmente, $\text{Ext}(\mathbb{Z}^{r+1}, \mathbb{Z}) = 0$. □

Por el Teorema 2.3.3, Teorema 2.3.5 y la Proposición 2.3.6, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} H^0\left(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}\right) &\cong \text{Hom}\left(H_0(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}\right) \oplus \text{Ext}\left(H_{-1}(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}\right) \\ &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(0, \mathbb{Z}) \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus 0 \\ &\cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^1\left(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}\right) &\cong \text{Hom}\left(H_1(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}\right) \oplus \text{Ext}\left(H_0(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}\right) \\ &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \\ &\cong \mathbb{Z}^n \oplus 0 \\ &\cong \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^2\left(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}\right) &\cong \operatorname{Hom}\left(H_2\left(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}\right), \mathbb{Z}\right) \oplus \operatorname{Ext}\left(H_1\left(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}\right), \mathbb{Z}\right) \\
&\cong \operatorname{Hom}\left(\mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}, \mathbb{Z}\right) \oplus \operatorname{Ext}\left(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}\right) \\
&\cong \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}} \oplus 0 \\
&\cong \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado;

Teorema 2.3.7. *Los grupos de cohomología del toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ con coeficientes en \mathbb{Z} son*

$$H^q\left(T_{\binom{n}{2}}; \mathbb{Z}\right) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, \\ \mathbb{Z}^n & \text{si } q = 1, \\ \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}} & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q \geq 3. \end{cases}$$

2.4. Homología y Cohomología de $F_2(G)$

Las siguientes dos proposiciones juegan un papel vital en el resultado central de esta sección, a saber el Teorema 2.4.3.

Proposición 2.4.1. *Sean X, Y espacios topológicos tales que X, Y son cerrados en $X \cup Y$ y $X \cap Y = \{p\}$. Si $Z \subset X$ y $W \subset Y$ son retracts fuertes por deformación, respectivamente y $Z \cap W = \{p\}$. Entonces $Z \cup W$ es un retracto fuerte por deformación de $X \cup Y$.*

Demostración. Si Z es un retracto fuerte por deformación de X , entonces existe una homotopía $h_1 : X \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned}
h_1(x, 0) &= x, & \text{si } x \in X, \\
h_1(x, 1) &\in Z, & \text{si } x \in X, \\
h_1(a, t) &= a, & \text{si } a \in Z, t \in I.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si W es un retracto fuerte por deformación de Y , entonces existe una homotopía $h_2 : X \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned}
h_2(y, 0) &= y, & \text{si } y \in Y, \\
h_2(y, 1) &\in W, & \text{si } y \in Y, \\
h_2(b, t) &= b, & \text{si } b \in W, t \in I.
\end{aligned}$$

Sea $h : X \cup Y \times I \rightarrow X \cup Y$ definida por

$$h(x, t) = \begin{cases} h_1(x, t) & \text{si } x \in X, \\ h_2(x, t) & \text{si } x \in Y. \end{cases}$$

Ya que $Z \cap W = \{p\}$ y $h_1(p, t) = h_2(p, t) = p$, entonces por el Lema 1.2.8 h es continua. Ahora

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= x, & \text{si } x \in X \cup Y, \\ h(x, 1) &\in Z \cup W, & \text{si } x \in X \cup Y, \\ h(a, t) &= a, & \text{si } a \in Z \cup W, t \in I. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Z \cup W$ es un retracto fuerte por deformación de $X \cup Y$. \square

Proposición 2.4.2. *Sea Z un retracto fuerte por deformación de X . Sea W un espacio topológico tal que $X \cap W$ es un subespacio de Z . Entonces $Z \cup W$ es un retracto fuerte por deformación de $X \cup W$.*

Demostración. Ya que Z es un retracto fuerte por deformación de X , entonces existe una homotopía $h : X \times I \rightarrow X$ tal que $h(x, 0) = x$, $h(x, 1) \in Z$ para todo $x \in X$ y $h(a, t) = a$ para todo $a \in Z$ y $t \in I$. Sea $\bar{h} : (X \cup W) \times I \rightarrow X \cup W$ definida por

$$\bar{h}(x, t) = \begin{cases} h(x, t) & \text{si } x \in X, \\ x & \text{si } x \in W. \end{cases}$$

Como $X \cap W$ es un subespacio de Z , entonces $h(y, t) = y$ para todo $y \in X \cap W$, entonces por el Lema 1.2.8, \bar{h} es continua. Ahora, obsérvese que

$$\begin{aligned} \bar{h}(x, 0) &= x, & \text{si } x \in X \cup W, \\ \bar{h}(x, 1) &\in Z \cup W, & \text{si } x \in X \cup W, \\ \bar{h}(a, t) &= a, & \text{si } a \in Z \cup W, t \in I. \end{aligned}$$

Por lo tanto $Z \cup W$ es un retracto fuerte por deformación de $X \cup W$. \square

Consideremos las curvas cerradas simples $1, \dots, n$, tales que $1 \cap \dots \cap n = \{p\}$, como se muestra en la Figura 2.7. Con esto tenemos el resultado central de este capítulo.

Teorema 2.4.3. *Para todo $n \geq 2$, $F_2(\bigvee_{i=1}^n i)$ contiene un subconjunto T homeomorfo al toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ que es un retracto fuerte por deformación de $F_2(\bigvee_{i=1}^n i)$.*

Demostración. Por inducción sobre n . Para $n = 2$, sean $1, 2$ dos curvas cerradas simples tales que $1 \cap 2 = \{p\}$. Si $\{x, y\} \in F_2(1 \vee 2)$, entonces satisfacen una de las siguientes tres posibilidades:

- (a) $\{x, y\} \subseteq 1$,
- (b) $\{x, y\} \subseteq 2$ o
- (c) $x \in 1$ y $y \in 2$.

El conjunto de elementos de $F_2(1 \vee 2)$ que satisface (a) es

$$B_1 = \{\{x, y\} \in F_2(1 \vee 2) : x, y \in 1\},$$

y se puede representar como una Banda de Moebius. Análogamente, el conjunto de elementos de $F_2(1 \vee 2)$ que satisface (b) es

$$B_2 = \{\{x, y\} \in F_2(1 \vee 2) : x, y \in 2\},$$

se puede representar como otra banda de Moebius. El conjunto de puntos que satisfacen (c) es

$$\langle 1, 2 \rangle = \{\{x, y\} \in F_2(1 \vee 2) : x \in 1, y \in 2\},$$

y es homeomorfo al toro \mathbb{T}^2 . Ahora

$$F_2(1 \vee 2) = B_1 \cup B_2 \cup \langle 1, 2 \rangle.$$

Denotamos por $\bar{1} = \{\{x, p\} \in F_2(1 \vee 2) : x \in 1\}$ y $\bar{2} = \{\{x, p\} \in F_2(1 \vee 2) : x \in 2\}$. Notemos que $\bar{1}$ es un retracto fuerte por deformación de B_1 , y $\bar{2}$ es un retracto fuerte por deformación de B_2 . Obsérvese que $B_1 \cap B_2 = \{p\}$, luego por la Proposición 2.4.1 $\bar{1} \cup \bar{2}$ es un retracto fuerte por deformación de $B_1 \cup B_2$. Por otra parte

$$(B_1 \cup B_2) \cap \langle 1, 2 \rangle = (B_1 \cap \langle 1, 2 \rangle) \cup (B_2 \cap \langle 1, 2 \rangle) = \bar{1} \cup \bar{2}.$$

Consideremos $Z = \bar{1} \cup \bar{2}$, $W = \langle 1, 2 \rangle$ y $X = B_1 \cup B_2$, Entonces por la Proposición 2.4.2 $Z \cup W = (\bar{1} \cup \bar{2}) \cup \langle 1, 2 \rangle$ es un retracto fuerte por deformación de

$$(B_1 \cup B_2) \cup \langle 1, 2 \rangle.$$

Ya que $(\bar{1} \cup \bar{2}) \cup \langle 1, 2 \rangle = \langle 1, 2 \rangle$, así $\langle 1, 2 \rangle$ es un retracto fuerte por deformación de $F_2(1 \vee 2)$. Por lo tanto, el toro binomial $T_1 = \langle 1, 2 \rangle \approx T_{\binom{2}{2}}$ es un retracto fuerte por deformación de $F_2(\bigvee_{i=1}^2 i)$.

Supongamos que $F_2(\bigvee_{i=1}^n i)$ contiene un subconjunto T_2 homeomorfo al toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ tal que T_2 es un retracto fuerte por deformación de $F_2(\bigvee_{i=1}^n i)$.

Si $\{x, y\} \in F_2(\bigvee_{i=1}^{n+1} i)$, entonces satisface una de las siguientes tres posibilidades:

- (a) $\{x, y\} \subset \bigvee_{i=1}^n i$,
- (b) $\{x, y\} \subset (n+1)$ o
- (c) $x \in \bigvee_{i=1}^n i$ y $y \in (n+1)$.

El conjunto de elementos de $F_2(\bigvee_{i=1}^{n+1} i)$ que satisfacen (a) es homeomorfo a $F_2(\bigvee_{i=1}^n i)$. El conjunto de elementos de $F_2(\bigvee_{i=1}^{n+1} i)$ que satisface (b) puede ser representado como una banda de Moebius, denotado por B_{n+1} . El conjunto de puntos que satisfacen (c) es

$$\{\{x, y\} \in F_2\left(\bigvee_{i=1}^{n+1} i\right) : x \in \bigvee_{i=1}^n i, y \in (n+1)\},$$

que es homeomorfo a $(\bigvee_{i=1}^n i) \times (n+1)$. Así

$$F_2\left(\bigvee_{i=1}^{n+1} i\right) \approx F_2\left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \cup B_{n+1} \cup \left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \times (n+1).$$

Denotamos por $\overline{n+1} = \{\{x, p\} \in F_2(\bigvee_{i=1}^{n+1} i) : x \in (n+1)\}$. Note que $\overline{n+1}$ es un retracto fuerte por deformación de B_{n+1} . Ya que $F_2(\bigvee_{i=1}^n i) \cap B_{n+1} = \{p\}$, entonces por la Proposición 2.4.1 $T_2 \cup \overline{n+1}$ es un retracto fuerte por deformación de $F_2(\bigvee_{i=1}^n i) \cup B_{n+1}$.

Haciendo

$$\begin{aligned} Z &= T_2 \cup \overline{n+1}, \\ X &= F_2\left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \cup B_{n+1}, \\ W &= \left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \times (n+1). \end{aligned}$$

Tenemos que $X \cap W \approx \bigvee_{i=1}^{n+1} i$, así $X \cap W \subset Z$. Por la Proposición 2.4.2, $Z \cup W = T_2 \cup \overline{n+1} \cup \left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \times (n+1)$ es un retracto fuerte por deformación de $X \cup W = F_2\left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \cup B_{n+1} \cup \left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \times (n+1)$.

Ya que $\overline{n+1}$ es homeomorfo a $(n+1)$ y $(n+1) \subseteq \left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \times (n+1)$, entonces

$$T_2 \cup \overline{n+1} \cup \left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \times (n+1) \approx \left(T_2 \cup \left(\bigvee_{i=1}^n i\right)\right) \times (n+1).$$

Así concluimos que $T_3 = \left(T_2 \cup \left(\bigvee_{i=1}^n i\right)\right) \times (n+1)$ es un retracto fuerte por deformación de $F_2(\bigvee_{i=1}^{n+1} i)$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \times (n+1) &= (1 \times n+1) \vee \cdots \vee (n \times n+1) \\ &= 1(n+1) \vee \cdots \vee n(n+1). \end{aligned}$$

Observe que tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} T_{\binom{n}{2}} \cup \left(\bigvee_{i=1}^n i\right) \times (n+1) &= T_{\binom{n}{2}} \cup \left(1(n+1) \vee \cdots \vee n(n+1)\right) \\ &= T_{\binom{n}{2}} \cup \left(1(n+1) \cup \cdots \cup n(n+1)\right) \\ &= T_{\binom{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $T_3 \approx T_{\binom{n+1}{2}}$ es un retracto fuerte por deformación de $F_2(\bigvee_{i=1}^{n+1} i)$. \square

Del Teorema 2.4.3 y la Proposición 1.3.8 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.4.4. *Para todo $n \geq 2$, la inclusión $i : T \hookrightarrow F_2(\bigvee_{i=1}^n i)$ es una equivalencia homotópica, donde T es homeomorfo al toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$.*

Si X y Y son dos espacios topológicos tales que tienen el mismo tipo de homotopía, y si existe un espacio Z que es homeomorfo a Y , entonces Y y Z tienen el mismo tipo de homotopía, luego como el tipo de homotopía es transitiva, X tiene el mismo tipo de homotopía que Z . Así por el Teorema 2.4.3 y el Corolario 2.4.4, tenemos.

Corolario 2.4.5. *Para todo $n \geq 2$, el toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $F_2(\bigvee_{i=1}^n i)$.*

El siguiente resultado juega un papel importante en los cálculos de invariantes algebraicos del segundo producto simétrico de una gráfica finita.

Teorema 2.4.6. *Sea G una gráfica finita, entonces $F_2(G)$ tiene el mismo tipo de homotopía que el toro binomial $T_{\binom{r}{2}}$, donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$.*

Demostración. Si G es una gráfica finita, por el Teorema 2.2.1 para todo $n \geq 1$, $F_n(G)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $F_n(\bigvee_{i=1}^r S^1)$, donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$. En particular para $n=2$ y por el Corolario 2.4.5,

$$F_2(G) \simeq F_2\left(\bigvee_{i=1}^r S^1\right) \simeq T_{\binom{r}{2}}.$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$. □

Por ejemplo, si consideramos la gráfica finita X de la Figura 2.12. Observamos que $r = 5$. No se conoce un modelo geométrico de $F_2(X)$, más aún es un problema difícil hallarlo. Sin embargo, por el Teorema 2.4.6 podemos saber su tipo de homotopía, a saber

$$F_2(X) \simeq T_{\binom{5}{2}},$$

donde

$$T_{\binom{5}{2}} = T_{10} = (12 \cup 13 \cup 14 \cup 15) \cup (23 \cup 24 \cup 25) \cup (34 \cup 35) \cup (45).$$

Ahora nos preguntamos, ¿cuál es el grupo fundamental de $F_2(X)$? Para responder esta pregunta, notemos que el grupo fundamental es un invariante homotópico (por el Teorema 1.3.6), es decir, puesto que $F_2(X)$ y $T_{\binom{5}{2}}$ tienen el mismo tipo de homotopía, entonces sus grupos fundamentales correspondientes son isomorfos. Pero en la sección anterior ya calculamos el grupo fundamental del toro binomial (ver Teorema 2.3.2), por lo tanto

$$\pi_1(F_2(X)) \cong \pi_1(T_{\binom{5}{2}}) \cong \mathbb{Z}^5.$$

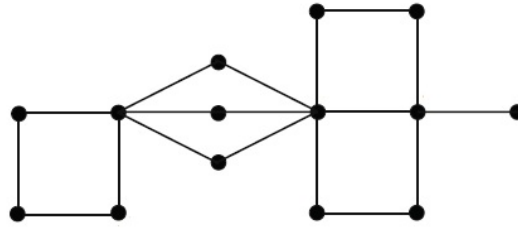


Figura 2.12: Un ejemplo de una gráfica finita X .

Entonces de manera general, aplicando el Teorema 1.3.6 y el Teorema 2.3.2, calculamos el grupo fundamental del segundo producto simétrico de una gráfica finita por medio del cálculo del grupo fundamental del toro binomial, así tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.7. *Sea G una gráfica finita, entonces*

$$\pi_1(F_2(G)) \cong \mathbb{Z}^r,$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$.

Cabe mencionar que C. Tuffley en [23, Teorema 3, p. 883], calcula el grupo fundamental de $F_n(G)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, utilizando otro tipo de herramienta de Topología Algebraica.

Por otro lado, sabemos que si T es un árbol, entonces T es contráctil, así para todo $n \geq 1$, $\pi_1(F_n(T))$ es el grupo trivial. Aplicando el Teorema 2.4.7 observamos que el recíproco es cierto cuando $n = 2$, como lo muestra el siguiente resultado.

Corolario 2.4.8. *Sea G una gráfica finita, entonces G es un árbol si y sólo si*

$$\pi_1(F_2(G)) = 0.$$

Puesto que el toro binomial $T_{\binom{n}{2}}$ tiene el mismo tipo de homotopía que $F_2(G)$, donde G es una gráfica finita, entonces sus grupos de homología y cohomología son isomorfos. Así aplicando el Teorema 2.4.6 and Teorema 2.3.3, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.9. *Sea G una gráfica finita. Los grupos de homología de $F_2(G)$ con coeficientes en \mathbb{Z} están dados por*

$$H_q(F_2(G); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, \\ \mathbb{Z}^r & \text{si } q = 1, \\ \mathbb{Z}^{\binom{r}{2}} & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q \geq 3. \end{cases}$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$.

Observación 2.4.10. 1. Cuando $r = 1$, entonces G tienen el mismo tipo de homotopía que S^1 , entonces $F_2(G)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $F_2(S^1)$. Puesto que $F_2(S^1)$ es homeomorfo a la banda de Moebius y una banda de Moebius tienen el mismo tipo de homotopía que S^1 . Así $F_2(G)$ tiene el mismo tipo de homotopía que S^1 . Por lo tanto la característica de Euler es

$$\chi(F_2(G)) = \chi(S^1) = 0.$$

2. Cuando $r = 2$, entonces G tiene el mismo tipo de homotopía que $S^1 \vee S^1$, entonces $F_2(G)$ tiene el mismo tipo de homotopía que $F_2(S^1 \vee S^1)$, y este hiperespacio a su vez tiene el mismo tipo de homotopía que el toro binomial $T_{\binom{2}{2}} = T_1 = 12$. Así su característica de Euler es $\chi(12) = \chi(1)\chi(2) = 0$. Por lo tanto

$$\chi(F_2(G)) = \chi(F_2(S^1 \vee S^1)) = \chi(T_{\binom{2}{2}}) = 0.$$

La característica de Euler de $F_2(G)$ coincide con la característica de Euler del toro binomial $T_{\binom{r}{2}}$ donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$, ya que tienen el mismo tipo de homotopía. Por lo tanto tenemos lo siguiente.

Teorema 2.4.11. Sea G una gráfica finita, entonces la característica de Euler de $F_2(G)$ es

$$\chi(F_2(G)) = \frac{r^2 - 3r + 2}{2},$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$.

En la siguiente tabla se muestran algunos valores de la característica de Euler del segundo producto simétrico de una gráfica finita G , donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$.

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\chi(F_2(G))$	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

Los primeros números triangulares de forma geométrica se muestran en la Figura 2.13

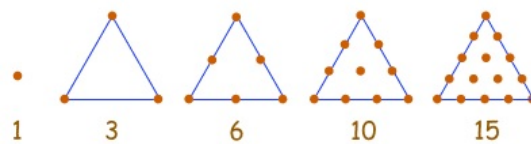


Figura 2.13: Números triangulares.

Por el Teorema 3.4, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.12. *Sea G una gráfica finita y $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$. Entonces la característica de Euler de $F_2(G)$ pertenece al conjunto de los números triangulares, si $r \geq 3$. Para el caso $r = 1$ y $r = 2$, $\chi(F_2(G)) = 0$.*

Para finalizar este capítulo, aplicando el Teorema 2.4.6 y el Teorema 2.3.7, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.4.13. *Sea G una gráfica finita. Los grupos de cohomología de $F_2(G)$ con coeficientes en \mathbb{Z} son*

$$H^q(F_2(G); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0, \\ \mathbb{Z}^r & \text{si } q = 1, \\ \mathbb{Z}^{\binom{r}{2}} & \text{si } q = 2, \\ 0 & \text{si } q \geq 3. \end{cases}$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$.

Capítulo 3

El (n, m) -ésimo Producto Simétrico Suspensión de Gráficas Finitas

En este capítulo construimos un funtor de la categoría de los continuos a la categoría de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de continuos, el cual lo denotaremos por $SF_m^n(-)$. Tal funtor tiene la virtud de ser homotópico, como lo mostraremos. Posteriormente clasificamos los objetos de la categoría de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de gráficas finitas por medio de homotopía, obteniendo representantes universales, sin embargo, es un problema abierto hallar explícitamente el tipo de homotopía de cada representante universal para $n, m \in \mathbb{N}$, con $n > m$, $m \geq 1$ y $n \geq 3$, ya que para $n = 2$ y $m = 1$ en este capítulo se halla el tipo de homotopía del representante universal de la clase de los $(2, 1)$ -productos simétricos suspensión de gráficas finitas. Así mismo calculamos la característica de Euler de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de gráficas finitas. Por último, definimos un polinomio asociado a una gráfica finita, para dar soluciones particulares al siguiente problema: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, si X un continuo tal que $SF_m^n(X)$ es homeomorfo a $F_n(X)$, entonces ¿ X es contráctil?

3.1. El funtor $SF_m^n(-)$

Dado $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, y X un continuo, $SF_m^n(X)$ denota el espacio cociente $F_n(X)/F_m(X)$, que se obtiene identificando $F_m(X)$ a un punto en $F_n(X)$. Los espacios $SF_m^n(X)$ son llamados los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión del continuo X . La función continua $\rho_{m,n}^X : F_n(X) \rightarrow SF_m^n(X)$ denota la función cociente natural.

Dada una función continua $f : X \rightarrow Y$ entre continuos y las funciones cociente natural $\rho_{m,n}^X : F_n(X) \rightarrow SF_m^n(X)$ y $\rho_{m,n}^Y : F_n(Y) \rightarrow SF_m^n(Y)$. Definimos

la función inducida $SF_m^n(f) : SF_m^n(X) \longrightarrow SF_m^n(Y)$, por

$$SF_m^n(f)(\rho_{m,n}^X(A)) = \rho_{m,n}^Y(F_n(f)(A)), \quad \text{para todo } A \in F_n(X);$$

en otras palabras, $SF_m^n(f)$ puede ser definida de tal manera que el siguiente diagrama sea conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F_n(X) & \xrightarrow{F_n(f)} & F_n(Y) \\ \rho_{m,n}^X \downarrow & & \downarrow \rho_{m,n}^Y \\ SF_m^n(X) & \xrightarrow{SF_m^n(f)} & SF_m^n(Y) \end{array}$$

Por [8, Teorema 4.3, p. 126], $SF_m^n(f)$ es una función continua.

Lema 3.1.1. *La construcción $SF_m^n(-)$ tiene las siguientes propiedades funtoriales:*

(a) *Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son funciones continuas entre continuos, entonces*

$$SF_m^n(g \circ f) = SF_m^n(g) \circ SF_m^n(f) : SF_m^n(X) \longrightarrow SF_m^n(Z).$$

(b) *Si $id_X : X \longrightarrow X$ es la función identidad, entonces*

$$SF_m^n(id_X) = 1_{SF_m^n(X)} : SF_m^n(X) \longrightarrow SF_m^n(X).$$

Demostración. Para probar la parte (a), consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} F_n(X) & \xrightarrow{F_n(f)} & F_n(Y) & \xrightarrow{F_n(g)} & F_n(Z) \\ \rho_{m,n}^X \downarrow & & \downarrow \rho_{m,n}^Y & & \downarrow \rho_{m,n}^Z \\ SF_m^n(X) & \xrightarrow{SF_m^n(f)} & SF_m^n(Y) & \xrightarrow{SF_m^n(g)} & SF_m^n(Z) \end{array}$$

es decir

$$SF_m^n(g) \circ SF_m^n(f) \circ \rho_{m,n}^X = \rho_{m,n}^Z \circ F_n(g) \circ F_n(f). \quad (3.1)$$

Por otro lado, por definición, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F_n(X) & \xrightarrow{F_n(g \circ f)} & F_n(Z) \\ \rho_{m,n}^X \downarrow & & \downarrow \rho_{m,n}^Z \\ SF_m^n(X) & \xrightarrow{SF_m^n(g \circ f)} & SF_m^n(Z) \end{array}$$

es decir,

$$SF_m^n(g \circ f) \circ \rho_{m,n}^X = \rho_{m,n}^Z \circ F_n(g \circ f). \quad (3.2)$$

Dado que $F_n(g \circ f) = F_n(g) \circ F_n(f)$, por (3.1) y (3.2) se tiene que

$$SF_m^n(g \circ f) = SF_m^n(g) \circ SF_m^n(f).$$

(b) La identidad $1_{SF_m^n(X)} : SF_m^n(X) \rightarrow SF_m^n(X)$, está definida por

$$1_{SF_m^n(X)}(\rho_{m,n}^X(A)) = \rho_{m,n}^X(A) \text{ para todo } A \in F_n(X).$$

Si $id_X : X \rightarrow X$ es la identidad, es decir, $id_X(x) = x$, entonces $F_n(id_X)(A) = A : F_n(X) \rightarrow F_n(X)$. Así para todo $A \in F_n(X)$, tenemos

$$\begin{aligned} SF_m^n(id_X)(\rho_{m,n}^X(A)) &= \rho_{m,n}^X(F_n(id_X)(A)) \\ &= \rho_{m,n}^X(A) \\ &= 1_{SF_m^n(X)}(\rho_{m,n}^X(A)). \end{aligned}$$

□

Denotamos por \mathcal{SF}_m^n la categoría de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de continuos, que tiene como objetos la clase

$$\left\{ SF_m^n(X) : X \text{ es un continuo} \right\}$$

y por flechas funciones continuas. Por el Lema 3.1.1, $SF_m^n(-)$ es un funtor de la categoría de los continuos a \mathcal{SF}_m^n . Más aún, el funtor $SF_m^n(-)$ es homotópico, como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.1.2. Sean X, Y continuos y $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Si $f \simeq g$ entonces $SF_m^n(f) \simeq SF_m^n(g)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$.

Demostración. Sea $h : X \times I \rightarrow Y$ una función continua tal que $h(x, 0) = f(x)$ y $h(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Entonces por el Teorema 2.1.1, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ $h_n : F_n(X) \times I \rightarrow F_n(Y)$ definida por

$$h_n(\{x_1, \dots, x_d\}, t) = \{h(x_1, t), \dots, h(x_d, t)\}, \text{ donde } d \leq n$$

es una función continua tal que $h_n(A, 0) = F_n(f)(A)$ y $h_n(A, 1) = F_n(g)(A)$ para todo $A \in F_n(X)$.

Sean $\rho_{m,n}^X : F_n(X) \rightarrow SF_m^n(X)$ y $\rho_{m,n}^Y : F_n(Y) \rightarrow SF_m^n(Y)$ las funciones cociente naturales y $id : I \rightarrow I$ la función identidad. Note que la función $\rho_{m,n}^X \times id : F_n(X) \times I \rightarrow SF_m^n(X) \times I$ definida por $\rho_{m,n}^X \times id(A, t) = (\rho_{m,n}^X(A), t)$ es una identificación. Entonces para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, definimos $H_m^n : SF_m^n(X) \times I \rightarrow SF_m^n(Y)$ por

$$H_m^n(\rho_{m,n}^X(A), t) = \rho_{m,n}^Y(h_n(A, t)).$$

Por [8, Teorema 4.3, p. 126], H_m^n es una función continua y el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} F_n(X) \times I & \xrightarrow{h_n} & F_n(Y) \\ \rho_{m,n}^X \times 1 \downarrow & & \downarrow \rho_{m,n}^Y \\ SF_m^n(X) \times I & \xrightarrow{H_m^n} & SF_m^n(Y) \end{array}$$

Así para todo $A \in F_n(X)$, tenemos

$$\begin{aligned} H_m^n(\rho_{m,n}^X(A), 0) &= \rho_{m,n}^Y(h_n(A, 0)) \\ &= \rho_{m,n}^Y(F_n(f)(A)) \\ &= SF_m^n(f)(\rho_{m,n}^X(A)). \end{aligned}$$

Análogamente $H_m^n(\rho_{m,n}^X(A), 1) = SF_m^n(g)(\rho_{m,n}^X(A))$ para todo $A \in F_n(X)$. Por lo tanto $SF_m^n(f) \simeq SF_m^n(g)$. \square

Teorema 3.1.3. *Si X y Y son continuos homotópicamente equivalentes, entonces $SF_m^n(X)$ y $SF_m^n(Y)$ son continuos homotópicamente equivalentes, para todo $m, n \in \mathbb{N}$ with $m < n$.*

Demostración. Si X es homotópicamente equivalente a Y , entonces existen funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$. Por la Proposición 3.1.2, $SF_m^n(g \circ f) \simeq SF_m^n(1_X)$ y $SF_m^n(f \circ g) \simeq SF_m^n(1_Y)$. Por lo tanto por el Lema 3.1.1, $SF_m^n(g) \circ SF_m^n(f) \simeq 1_{SF_m^n(X)}$ y $SF_m^n(f) \circ SF_m^n(g) \simeq 1_{SF_m^n(Y)}$. \square

En consecuencia, tenemos.

Corolario 3.1.4. *Si X un continuo contraíble, entonces $SF_m^n(X)$ es contraíble para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$.*

3.2. Clasificación

El siguiente resultado nos permitirá clasificar la clase de cocientes de productos simétricos de gráficas finitas.

Teorema 3.2.1. *Sea G una gráfica finita, y sea $r = 1 - \chi(G)$. Entonces para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, $SF_m^n(G)$ es homotópicamente equivalente a $SF_m^n(\bigvee_{i=1}^r C_i)$, donde C_i es homeomorfo a S^1 para todo $i = 1, \dots, r$.*

Demostración. Si G es una gráfica finita, entonces por el Teorema 1.5.7 G es homotópicamente equivalente a $\bigvee_{i=1}^r C_i$, donde $r = 1 - \chi(G)$ and C_i es homeomorfo a S^1 para todo $i = 1, \dots, r$. Por lo tanto por el Teorema 3.1.3 $SF_m^n(G) \simeq SF_m^n(\bigvee_{i=1}^r C_i)$. \square

Una consecuencia inmediata es el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2. Sean G_1, G_2 dos gráficas finitas tales que $\chi(G_1) = \chi(G_2)$, entonces $SF_m^n(G_1)$ es homotópicamente equivalente a $SF_m^n(G_2)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$, con $m < n$.

Tenemos los ingredientes para clasificar la clase de cocientes de productos simétricos de gráficas finitas

$$\mathcal{GSF}_m^n = \left\{ SF_m^n(G) : G \text{ es una gráfica finita} \right\},$$

de la siguiente manera: $SF_m^n(G_1) \sim SF_m^n(G_2)$ si y sólo si $SF_m^n(G_1)$ tiene el mismo tipo de homotopía de $SF_m^n(G_2)$. Dado que la equivalencia homotópica es una relación de equivalencia, entonces podemos considerar el conjunto de todas las clases de equivalencia

$$\mathcal{GSF}_m^n / \sim = \left\{ [SF_m^n(G)] : SF_m^n(G) \in \mathcal{GSF}_m^n \right\},$$

donde $[SF_m^n(G)]$ denota la clase de equivalencia del espacio $SF_m^n(G)$. Como consecuencia del Teorema 3.2.1, Tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.3. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, el conjunto de clases de equivalencia \mathcal{GSF}_m^n / \sim lo podemos escribir como (véase la Figura 3.1)

$$\left\{ [SF_m^n(\{p\})], [SF_m^n(C_1)], [SF_m^n(C_1 \vee C_2)], [SF_m^n(C_1 \vee C_2 \vee C_3)], \dots \right\},$$

y de hecho existe una función biyectiva

$$\varphi : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathcal{GSF}_m^n / \sim$$

definida por

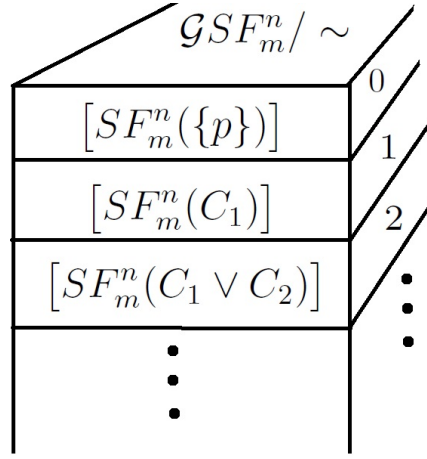
$$\varphi(r) = \begin{cases} [SF_m^n(\{p\})] & \text{si } r = 0, \\ [SF_m^n(C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_r)] & \text{si } r \neq 0. \end{cases}$$

Este resultado muestra que tenemos *modelos universales homotópicos*, es decir, tenemos representantes de clases de equivalencia distinguidas, para $k \geq 1$, a saber

$$\left[SF_m^n \left(\bigvee_{i=1}^k C_i \right) \right] = \left\{ SF_m^n(G) \in \mathcal{GSF}_m^n : \chi(G) = 1 - k \right\}.$$

Por ejemplo, ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, $SF_{n-1}^n(S^1) \approx \mathbb{RP}^n / \mathbb{RP}^{n-2}$ (ver [20, p. 3]), entonces $SF_{n-1}^n(S^1) \simeq \mathbb{RP}^n / \mathbb{RP}^{n-2}$, así $[SF_{n-1}^n(S^1)] = [\mathbb{RP}^n / \mathbb{RP}^{n-2}]$. Por lo tanto,

$$[\mathbb{RP}^n / \mathbb{RP}^{n-2}] = \left\{ SF_{n-1}^n(G) \in \mathcal{GSF}_{n-1}^n : \chi(G) = 0 \right\}.$$

Figura 3.1: Partición de $\mathcal{G}SF_m^n / \sim$.

3.3. El $SF_1^2(X)$ de una gráfica finita

En esta sección estudiaremos el tipo de homotopía de $SF_1^2(X)$, cuando X es una gráfica finita.

Lema 3.3.1. Sean X, Y, Z, D_1 y D_2 continuos tales que $D_1 \subseteq X$, $D_2 \subseteq Y$, $D_1 \cap D_2 = \{p\}$, $X \cap Y = \{p\}$, $Z \cap D_1 = \{p\}$ y $Z \cap D_2 = \{p\}$, entonces

$$\frac{(X \cup Y \cup Z)}{D_1 \cup D_2} \approx (X/D_1) \cup (Y/D_2) \cup Z.$$

Demostración. Consideremos las funciones cocientes

$$\rho : X \cup Y \cup Z \longrightarrow X \cup Y \cup Z / D_1 \cup D_2,$$

$$\pi : X \longrightarrow X/D_1,$$

$$\sigma : Y \longrightarrow Y/D_2.$$

La función $h : X \cup Y \cup Z / D_1 \cup D_2 \rightarrow X/D_1 \cup Y/D_2 \cup Z$ dada por

$$h(\rho(x)) = \begin{cases} \pi(x) & \text{si } x \in X, \\ \sigma(x) & \text{si } x \in Y \\ x & \text{si } x \in Z \end{cases}$$

es un homeomorfismo (ver la Figura 3.2). □

Proposición 3.3.2. Sean A y B continuos tales que $A \cap B = \{p\}$, entonces

$$SF_1^2(A \vee B) \approx SF_1^2(A) \cup SF_1^2(B) \cup \langle A, B \rangle.$$

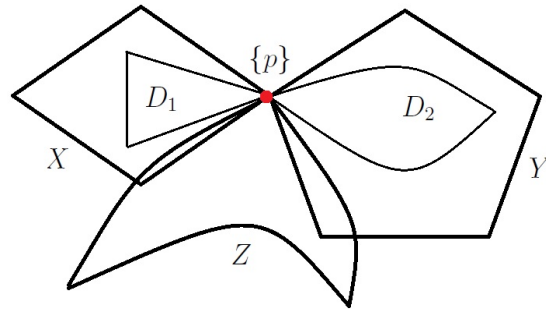


Figura 3.2: Diagrama de cocientes.

Demostración. Ya que $A \cap B = \{p\}$, entonces $F_1(A) \cap F_1(B) = \{\{p\}\}$, $F_2(A) \cap F_2(B) = \{\{p\}\}$, $F_1(A) \cap \langle A, B \rangle = \{\{p\}\}$ y $F_1(B) \cap \langle A, B \rangle = \{\{p\}\}$. Consideramos los espacios $X = F_2(A)$, $Y = F_2(B)$, $Z = \langle A, B \rangle$, $D_1 = F_1(A)$ and $D_2 = F_1(B)$. Aplicando el Lema 3.3.1, obtenemos el resultado deseado. \square

Utilizando la notación de la Sección 2.3 tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.3.

$$SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^r i\right) \approx \bigcup_{i=1}^r SF_1^2(i) \cup T_{\binom{r}{2}} \quad \text{para todo } r \geq 2.$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre r . Para el caso $r = 2$, observemos que $F_2(1)$ es homeomorfo a una banda de Moebius (por ejemplo ver [11, Ejercicio 1.26, p. 9]). Recordemos que $F_2(1)$ se puede ver como un cuadrado en el que dos de sus lados opuestos se identifican apropiadamente. Además, los otros dos lados constituyen $F_1(1)$ como se muestra en la Figura 3.3.

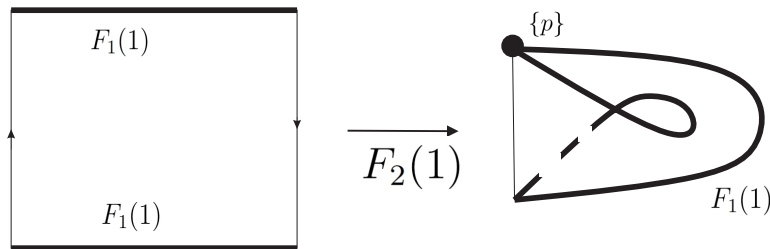
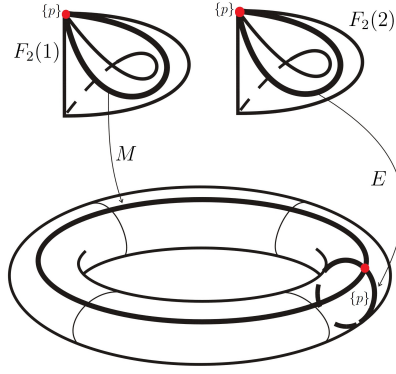


Figura 3.3: El modelo de $F_2(1)$.

Por otro lado, el espacio $M = \{\{x, p\} : x \in 1\}$ es homeomorfo a S^1 y es un "meridiano" del toro $\langle 1, 2 \rangle \approx \mathbb{Z}$. El espacio $E = \{\{p, x\} : x \in 2\}$ es homeomorfo a S^1 y es un "paralelo" del toro $\langle 1, 2 \rangle$, donde $F_2(1) \cap \langle 1, 2 \rangle = M$ y $F_2(2) \cap \langle 1, 2 \rangle = E$, como la ilustración de la Figura 3.4.

Puesto que $F_1(1)$ es homeomorfo a la frontera de la banda de Moebius, entonces $F_1(1) \cap \langle 1, 2 \rangle = \{\{p\}\}$. Análogamente, $F_1(2) \cap \langle 1, 2 \rangle = \{\{p\}\}$. Haciendo

Figura 3.4: El toro $\langle 1, 2 \rangle \approx 12$.

$A = 1$ y $B = 2$, entonces por la Proposición 3.3.2 tenemos

$$\begin{aligned}
 SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^2 i\right) &= SF_1^2(1 \vee 2) \\
 &\approx SF_1^2(1) \cup SF_1^2(2) \cup \langle 1, 2 \rangle \\
 &\approx SF_1^2(1) \cup SF_1^2(2) \cup 12 \\
 &= SF_1^2(1) \cup SF_1^2(2) \cup T_{(2)} \\
 &= \bigcup_{i=1}^2 SF_1^2(i) \cup T_{(2)}.
 \end{aligned}$$

Ahora supongamos que

$$SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^r i\right) \approx \bigcup_{i=1}^r SF_1^2(i) \cup T_{(r)} \quad \text{para } r > 2. \quad (3.3)$$

Siguiendo las ideas de las ilustraciones anteriores, tenemos lo siguiente:

1. $F_1\left(\bigvee_{i=1}^r i\right) \cap \left\langle \bigvee_{i=1}^r i, r+1 \right\rangle = \{\{p\}\},$
2. $F_1(r+1) \cap \left\langle \bigvee_{i=1}^r i, r+1 \right\rangle = \{\{p\}\}.$

Haciendo

$$A = \bigvee_{i=1}^r i \quad \text{y} \quad B = r+1,$$

aplicando la Proposición 3.3.2, obtenemos

$$\begin{aligned}
 SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^{r+1} i\right) &= SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^r i \vee (r+1)\right) \\
 &\approx SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^r i\right) \cup SF_1^2(r+1) \cup \left\langle \bigvee_{i=1}^r i, r+1 \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Por (3.3)

$$SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^r i\right) \approx \bigcup_{i=1}^r SF_1^2(i) \cup T_{\binom{r}{2}},$$

así

$$SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^{r+1} i\right) \approx \left(\bigcup_{i=1}^r SF_1^2(i) \cup T_{\binom{r}{2}}\right) \cup SF_1^2(r+1) \cup \left\langle \bigvee_{i=1}^r i, r+1 \right\rangle \quad (3.4)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{r+1} SF_1^2(i) \cup T_{\binom{r}{2}} \cup \left\langle \bigvee_{i=1}^r i, r+1 \right\rangle. \quad (3.5)$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \left\langle \bigvee_{i=1}^r i, r+1 \right\rangle &\approx \bigvee_{i=1}^r i \times (r+1) \\ &= 1 \times (r+1) \vee \cdots \vee r \times (r+1) \\ &= 1(r+1) \vee \cdots \vee r(r+1). \end{aligned}$$

Ahora

$$T_{\binom{r}{2}} \cup \left\langle \bigvee_{i=1}^r i, (r+1) \right\rangle \approx T_{\binom{r}{2}} \cup \left(1(r+1) \vee \cdots \vee r(r+1)\right) \quad (3.6)$$

$$= T_{\binom{r+1}{2}}. \quad (3.7)$$

Sustituyendo (3.7) en (3.5), se tiene que

$$SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^{r+1} i\right) \approx \bigcup_{i=1}^{r+1} SF_1^2(i) \cup T_{\binom{r+1}{2}}.$$

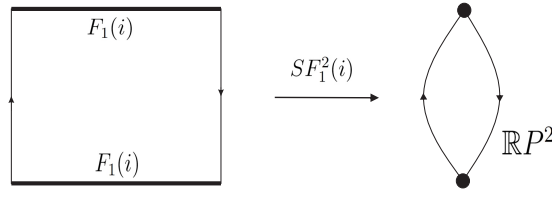
□

Observación 3.3.4. Del Teorema 3.3.3, notamos que

$$\left(\bigcup_{i=1}^r SF_1^2(i)\right) \cap T_{\binom{r}{2}} \approx \bigvee_{i=1}^r i.$$

Por definición, tenemos que $SF_1^2(i) = F_2(i)/F_1(i)$ para todo $i = 1, \dots, r$, donde i es homeomorfo a S^1 . Esto significa que si identificamos la frontera de la banda de Moebius a un punto, obtenemos el plano proyectivo real, como lo muestra la Figura 3.5.

Por lo tanto $SF_1^2(i)$ es homeomorfo a \mathbb{RP}^2 para todo $i = 1, \dots, r$. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Figura 3.5: Modelo de $SF_1^2(i)$.

Corolario 3.3.5. Para todo $r \geq 2$

$$SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^r i\right) \approx \bigvee \mathbb{RP}^2 \cup T_{\binom{r}{2}}.$$

Por otro lado, si G es una gráfica finita, entonces por el Teorema 1.5.7 G tiene el mismo tipo de homotopía que $\bigvee_{i=1}^r i$, donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$. Aplicando el Teorema 3.2.1 para $n = 2$ y $m = 1$, tenemos

$$SF_1^2(G) \simeq SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^r i\right).$$

Ya que $SF_1^2\left(\bigvee_{i=1}^r i\right)$ es homeomorfo a $\bigvee^r \mathbb{RP}^2 \cup T_{\binom{r}{2}}$ para todo $r \geq 2$ (Corolario 3.3.5), entonces tienen el mismo tipo de homotopía. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.6. Sea G una gráfica finita, entonces

$$SF_1^2(G) \simeq \bigvee^r \mathbb{RP}^2 \cup T_{\binom{r}{2}},$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$ y $r \geq 2$.

Observación 3.3.7. Cuando $\chi(G) = 1$ entonces G es un árbol, por lo tanto es contraíble, así $SF_1^2(G)$ es contraíble. Por otro lado, cuando $\chi(G) = 0$ entonces G tiene el mismo tipo de homotopía que S^1 , por ello $SF_1^2(G) \simeq SF_1^2(S^1) \approx \mathbb{RP}^2$.

Por la observación anterior tenemos un representante universal de la clase de los $(2, 1)$ -productos simétricos suspensión de gráficas finitas, es decir

$$\left[SF_1^2(G) \right] = \left[\mathbb{RP}^2 \cup T_{\binom{r}{2}} \right],$$

así tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.8. Sea G una gráfica finita, entonces

$$\left[\bigvee^r \mathbb{RP}^2 \cup T_{\binom{r}{2}} \right] = \left\{ SF_1^2(G) \in \mathcal{GSF}_1^2 : \chi(G) = 1 - r \right\},$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)| \geq 2$.

Un problema abierto es encontrar los representantes universales de las clases del (n, m) -ésimo producto simétrico de una gráfica finita $[SF_m^n(G)]$, en otras palabras hallar el tipo de homotopía de $SF_m^n(G)$, para algunas (luego para toda) $n, m \in \mathbb{N}$, con $n > m$, $m \geq 1$ y $n \geq 3$.

3.4. La característica de Euler de $SF_m^n(G)$

En esta sección calcularemos la característica de Euler de $SF_1^2(X)$, y en general la característica de Euler de $SF_m^n(X)$, cuando X es una gráfica finita.

Así como los grupos de homología son tanto invariantes topológicos como homotópicos, también lo es la característica de Euler, como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 3.4.1. [10, Teorema 2.44, p. 146] Sean X y Y dos CW-complejos finitos.

- (a) Si $X \approx Y$, entonces $\chi(X) = \chi(Y)$.
- (b) Si $X \simeq Y$, entonces $\chi(X) = \chi(Y)$.

Consideremos las siguientes propiedades básicas de la característica de Euler de un CW-complejo finito X .

Lema 3.4.2. Sea X un CW-complejo finito

- (a) Si X es la unión de subcomplejos A y B , entonces

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

- (b) Si A y B son dos subcomplejos de X , entonces

$$\chi(A - B) = \chi(A) - \chi(B).$$

- (c) Si A es un subcomplejo de X , entonces

$$\chi(X/A) = \chi(X) - \chi(A) + 1.$$

Demostración. (a) y (b) ver [10, Ejercicio 21, p. 157]. (c) Ya que $X/A = (X - A) \cup \{A\}$, entonces

$$\begin{aligned} \chi(X/A) &= \chi((X - A) \cup \{A\}) \\ &= \chi(X - A) + \chi(\{A\}) - \chi(\emptyset) \\ &= \chi(X) - \chi(A) + 1 - 0. \end{aligned}$$

□

Aplicando el inciso (a) del Lema 3.4.2, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.4.3. *Si X_1, \dots, X_n son CW-complejos finitos, entonces*

$$\chi\left(\bigvee_{i=1}^n X_i\right) = \chi(X_1) + \dots + \chi(X_n) + 1 - n.$$

Es bien conocido que $\chi(S^1) = 0$ y $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$, así por el Lema 3.4.3

$$\chi\left(\bigvee^n \mathbb{R}P^2\right) = 1, \quad (3.8)$$

y

$$\chi\left(\bigvee_{i=1}^n i\right) = 1 - n. \quad (3.9)$$

Teorema 3.4.4. *Sea G una gráfica finita, entonces la característica de Euler de $SF_1^2(G)$ es*

$$\chi(SF_1^2(G)) = \frac{r^2 - r + 2}{2},$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|r \geq 2$.

Demostración. Por el Teorema 3.3.6 y el inciso (b) del Teorema 3.4.1, tenemos

$$\chi(SF_1^2(G)) = \chi\left(\bigvee^r \mathbb{R}P^2 \cup T_{\binom{r}{2}}\right).$$

Aplicando el inciso (a) del Lema 3.4.2,

$$\chi\left(\bigvee^r \mathbb{R}P^2 \cup T_{\binom{r}{2}}\right) = \chi\left(\bigvee^r \mathbb{R}P^2\right) + \chi\left(T_{\binom{r}{2}}\right) - \chi\left(\bigvee^r \mathbb{R}P^2 \cap T_{\binom{r}{2}}\right).$$

Usando la igualdad (3.8),

$$\chi\left(\bigvee^r \mathbb{R}P^2\right) = 1. \quad (3.10)$$

Por [2, Teorema 4.4, p. 21], tenemos lo siguiente

$$\chi\left(T_{\binom{r}{2}}\right) = \frac{r^2 - 3r + 2}{2}. \quad (3.11)$$

Por la Observación 3.3.4 y el inciso (a) del Teorema 3.4.1

$$\chi\left(\bigvee^r \mathbb{R}P^2 \cap T_{\binom{r}{2}}\right) = \chi\left(\bigvee_{i=1}^r i\right),$$

usando la igualdad (3.9)

$$\chi\left(\bigvee^r \mathbb{R}P^2 \cap T_{\binom{r}{2}}\right) = \chi\left(\bigvee_{i=1}^r i\right) = 1 - r \quad (3.12)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3.10), (3.11) y (3.12), tenemos

$$\begin{aligned}\chi\left(\bigvee^r \mathbb{R}P^2 \cup T_{\binom{r}{2}}\right) &= 1 + \frac{r^2 - 3r + 2}{2} - (1 - r) \\ &= \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}r + 1.\end{aligned}$$

□

En general, calcularemos la característica de Euler de $SF_m^n(G)$, como muestra el siguiente resultado.

Teorema 3.4.5. *Sean G una gráfica finita y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$. Entonces la característica de Euler de $SF_m^n(G)$ es*

$$\begin{aligned}\chi(SF_m^n(G)) &= 1 + 2 \sum_{j=m}^{n-1} (-1)^j \binom{j+r-1}{r-1} \\ &\quad + (-1)^n \binom{n+r-1}{r-1} - (-1)^m \binom{m+r-1}{r-1},\end{aligned}$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$.

Demostración. Aplicando el Teorema 3.2.1, el inciso (b) del Teorema 3.4.1 y el inciso (c) del Lema 3.4.2, tenemos

$$\begin{aligned}\chi(SF_m^n(G)) &= \chi\left(SF_m^n\left(\bigvee_{i=1}^r i\right)\right) \\ &= \chi\left(F_n\left(\bigvee_{i=1}^r i\right)\right) - \chi\left(F_m\left(\bigvee_{i=1}^r i\right)\right) + 1,\end{aligned}$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$. Aplicamos [23, Ecuación (2.1), p. 880], a saber

$$\chi\left(F_k\left(\bigvee_{j=1}^l i\right)\right) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \binom{l+j-1}{l-1} + (-1)^k \binom{l+k-1}{l-1}. \quad (3.13)$$

Así

$$\begin{aligned}
\chi(SF_m^n(G)) &= \chi\left(F_n\left(\bigvee_{i=1}^r i\right)\right) - \chi\left(F_m\left(\bigvee_{i=1}^r i\right)\right) + 1 \\
&= 1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} + (-1)^n \binom{r+n-1}{r-1} \\
&\quad - 1 - 2 \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} - (-1)^m \binom{r+m-1}{r-1} + 1 \\
&= 1 + 2 \sum_{j=m}^{n-1} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} + (-1)^n \binom{r+n-1}{r-1} \\
&\quad - (-1)^m \binom{r+m-1}{r-1}.
\end{aligned}$$

□

En el Apéndice A aparecen como tablas los valores de la característica de Euler $\chi(SF_m^n(G))$, para $2 \leq n \leq 6$, $1 \leq m \leq 5$ y $0 \leq r \leq 20$.

3.5. Polinomio Simétrico

Para concluir este capítulo vamos a analizar el siguiente problema, cuando X es una gráfica finita.

Problema 3.5.1. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, si X es un continuo tal que $SF_m^n(X)$ es homeomorfo a $F_n(X)$, entonces ¿ X es contráctil?*

Primeramente nótese que si $SF_m^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces por el inciso (a) del Teorema 3.4.1 tienen la misma característica de Euler, es decir,

$$\chi(SF_m^n(G)) = \chi(F_n(G)).$$

Aplicando el inciso (c) del Lema 3.4.2, tenemos

$$\chi(F_n(G)) - \chi(F_m(G)) + 1 = \chi(F_n(G)),$$

es decir

$$\chi(F_m(G)) = 1. \tag{3.14}$$

Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.5.2. *Sean G una gráfica finita y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$. Si $SF_m^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces*

$$\chi(F_m(G)) = 1.$$

Por otro lado, si G es una gráfica finita, entonces por el Teorema 1.5.7

$$G \simeq \bigvee_{i=1}^r i,$$

donde $r = 1 - \chi(G)$. Luego por el Teorema 2.2.1

$$F_m(G) \simeq F_m\left(\bigvee_{i=1}^r i\right),$$

como la característica de Euler también es un invariante homotópico, por el inciso (b) del Teorema 3.4.1, se tiene que

$$\chi(F_m(G)) = \chi\left(F_m\left(\bigvee_{i=1}^r S^1\right)\right). \quad (3.15)$$

Por (3.13), (3.14) y (3.15), tenemos

$$1 + 2 \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} + (-1)^m \binom{r+m-1}{r-1} = 1,$$

es decir,

$$2 \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} + (-1)^m \binom{r+m-1}{r-1} = 0.$$

Por lo tanto tenemos el siguiente lema.

Lema 3.5.3. *Sean G una gráfica finita y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$. Si $SF_m^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces*

$$2 \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} + (-1)^m \binom{r+m-1}{r-1} = 0,$$

donde $r = 1 - \chi(G)$.

Definición 3.5.4. *Sea G una gráfica finita y $r = 1 - \chi(G)$, definamos el polinomio simétrico de grado m asociado a G como*

$$p(r, m) = 2 \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} + (-1)^m \binom{r+m-1}{r-1}.$$

Desarrollando el polinomio simétrico de grado m asociado a la gráfica finita G , tenemos

$$\begin{aligned}
p(r, m) &= 2 \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} + (-1)^m \binom{r+m-1}{r-1} \\
&= -\frac{2r}{1!} + \frac{2r(r+1)}{2!} + \dots + \frac{2(-1)^{m-1} r(r+1) \cdots (r+m-2)}{(m-1)!} \\
&\quad + \frac{(-1)^m r(r+1) \cdots (r+m-1)}{m!}.
\end{aligned}$$

Analizamos algunos homeomorfismos entre los espacios $SF_m^n(G)$ y $F_n(G)$, cuando G es una gráfica finita y m es par.

Teorema 3.5.5. *Sea G una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Si $SF_2^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces G es un árbol ó*

$$G \simeq \bigvee_{i=1}^3 i.$$

Demostración. Si $SF_2^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces por el Lema 3.5.3,

$$p(r, 2) = -\frac{2r}{1!} + \frac{r(r+1)}{2!} = 0,$$

donde $r = 1 - \chi(G)$. Las raíces de $p(r, 2)$ son $r_1 = 0$ y $r = 3$. La gráfica de $p(r, 2)$ se ilustra en la Figura 3.6.

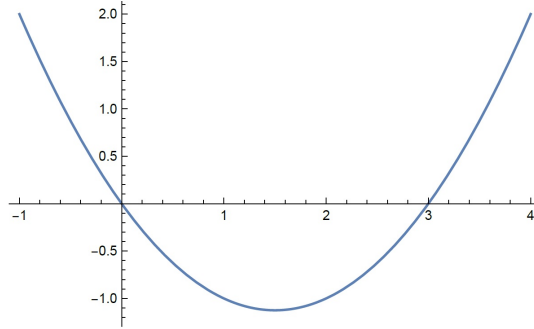


Figura 3.6: Gráfica de $p(r, 2)$.

Si $r = 0$, entonces por el Lema 3.5.6, G es un árbol.

Si $r = 3$, entonces

$$G \simeq \bigvee_{i=1}^r i = \bigvee_{i=1}^3 i.$$

□

La siguiente observación es consecuencia de la Proposición 1.5.3.

Observación 3.5.6. Sea G una gráfica finita tal que $r = 1 - \chi(G)$. Si $r = 0$, entonces G es un árbol.

Teorema 3.5.7. Sea G una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 5$. Si $SF_4^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces G es un árbol.

Demostración. Si $SF_4^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces por el Lema 3.5.3,

$$p(r, 4) = -\frac{2r}{1!} + \frac{2r(r+1)}{2!} - \frac{2r(r+1)(r+2)}{3!} + \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{4!} = 0,$$

donde $r = 1 - \chi(G)$. Las raíces de $p(r, 4)$ son

$$\begin{aligned} r_1 &= -0,33162 - 3,5576i, \\ r_2 &= -0,33162 + 3,5576i, \\ r_3 &= 2,6632, \\ r_4 &= 0. \end{aligned}$$

La gráfica de $p(r, 4)$ se ilustra en la Figura 3.7.

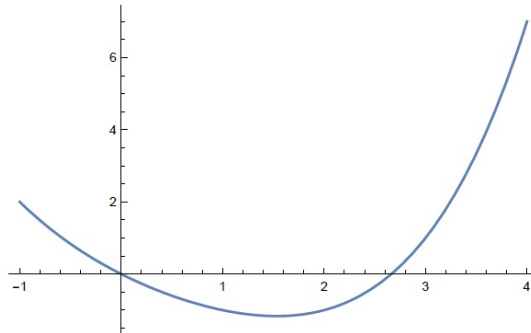


Figura 3.7: Gráfica de $p(r, 4)$.

Ya que $r = 1 - \chi(G)$ y puesto que la característica de Euler es un número entero, entonces sólo consideramos la raíz $r = 0$. Ahora si $r = 0$, entonces por el Observación 3.5.6, G es un árbol. \square

El siguiente ejemplo se analiza una potencia par más grande para m (a saber $m = 400$) nótese que calcular las raíces del polinomio simétrico usando métodos clásicos es un problema difícil, por ello hacemos uso del programa Mathematica 10.0.

Ejemplo 3.5.8. Sea G una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 401$. Si $SF_{400}^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces G es un árbol, en efecto: Si $SF_{400}^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces por el Lema 3.5.3, el polinomio simétrico de grado cuatrocientos asociado a la gráfica finita G es cero, es decir

$$p(r, 400) = 0.$$

Las raíces de $p(r, 400)$ se calcularon en el programa Mathematica versión 10.0, como se puede ver en el Apéndice B. Nótese que 398 raíces son complejas y dos son raíces reales. Las raíces reales son $r = 0$ y $r = 2,17651$. Ya que $r = 1 - \chi(G)$ y puesto que la característica de Euler es un número entero, entonces sólo consideramos la raíz $r = 0$. Si $r = 0$, entonces por la Observación 3.5.6, G es un árbol. La gráfica de $p(r, 400)$ se ilustra en la Figura 3.8.

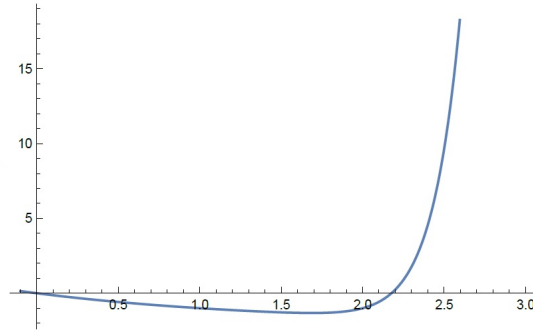


Figura 3.8: Gráfica de $p(r, 400)$.

Ahora analicemos algunos homeomorfismos entre los espacios $SF_m^n(G)$ y $F_n(G)$, cuando G es una gráfica finita y m es impar.

Teorema 3.5.9. *Sea G una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Si $SF_1^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces G es un árbol.*

Demostración. Si $SF_1^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces por el Lema 3.5.2

$$\chi(F_1(G)) = 1.$$

Puesto que $F_1(G)$ es homeomorfo a G , entonces por el inciso (a) del Teorema 3.4.1

$$\chi(F_1(G)) = \chi(G) = 1,$$

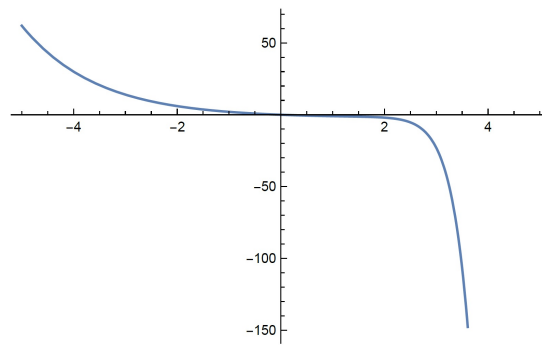
luego por la Proposición 1.5.3, G es un árbol. □

Cuando el grado del polinomio simétrico asociado a una gráfica finita es impar, se discierne que sólo tiene una raíz real, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5.10. *Sea G una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 42$. Si $SF_{41}^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces G es un árbol, en efecto: Si $SF_{41}^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces por el Lema 3.5.3*

$$p(r, 41) = 0.$$

Las raíces de $p(r, 41)$ se calcularon en el programa Mathematica versión 10.0, como se puede ver en el Apéndice C. Nótese que 40 raíces son complejas y una real, a saber $r = 0$. Ahora si $r = 0$, entonces por la Observación 3.5.6, G es un árbol. La gráfica de $p(r, 41)$ se ilustra en la Figura 3.9.

Figura 3.9: Gráfica de $p(r, 41)$.

Como hemos visto el polinomio simétrico juega un papel importante en el Problema 3.5.1. Cabe mencionar que se realizaron más ejemplos para analizar las raíces del polinomio simétrico, por falta de espacio no se incluyeron aquí, sin embargo, en la Figura 3.10 se muestran las gráficas de polinomios de grado par de los polinomios:

$$p(r, 2), p(r, 4), p(r, 32), p(r, 100), p(r, 1000), p(r, 10000),$$

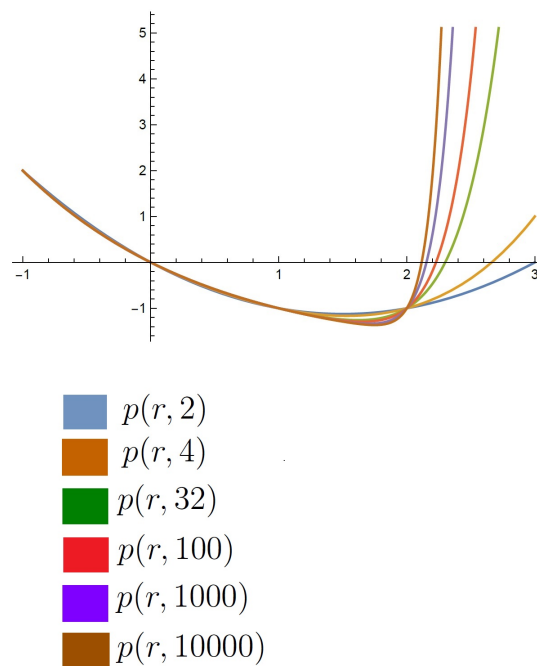


Figura 3.10: Algunas gráficas de polinomios simétricos de grado par.

donde notamos que $p(r, 2)$ tiene dos raíces enteras ($r = 0$ y $r = 3$) y los demás polinomios sólo tienen una raíz entera, a saber $r = 0$.

Ahora consideramos los siguientes polinomios simétricos de grado impar:

$$p(r, 3), p(r, 5), p(r, 33), p(r, 101), p(r, 1001), p(r, 10001),$$

donde sus gráficas se ilustran en la Figura 3.11. Donde observamos que los polinomios tienen sólo una raíz entera $r = 0$.

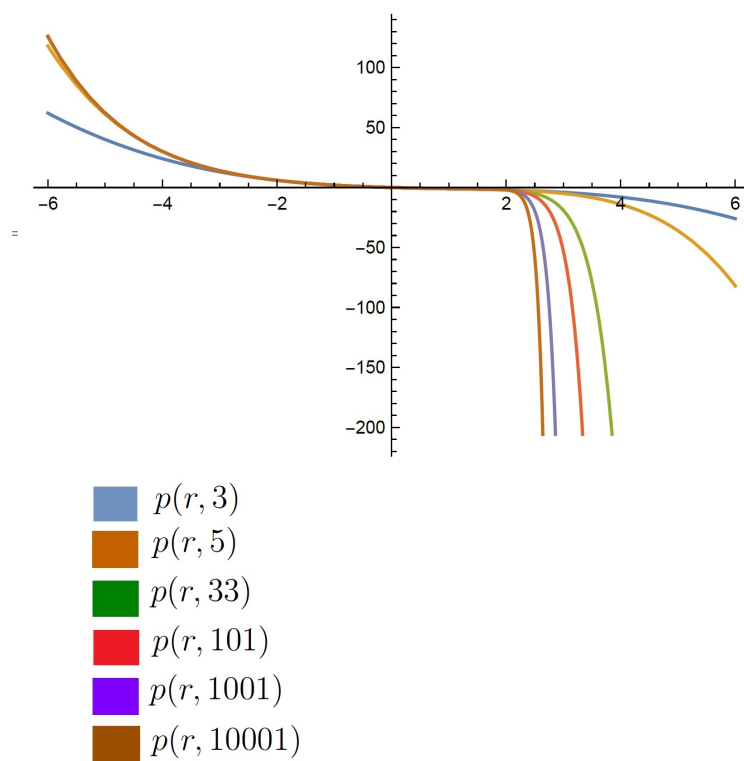


Figura 3.11: Algunas gráficas de polinomios simétricos de grado impar.

Por lo tanto se intuye que el polinomio simétrico $p(r, m)$ sólo tiene una raíz entera, a saber $r = 0$, para $m \in \mathbb{N}$ y $m \geq 3$. Sin embargo aún no se tiene una demostración formal.

Resultados

Por medio de los funtores homotópicos $F_n(-)$ y $SF_m^n(-)$ se logró construir y calcular invariantes algebraicos para el segundo producto simétrico de gráficas finitas, así como la característica de Euler de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de gráficas finitas. Específicamente, logramos lo siguiente.

1. Se clasificó por medio de homotopía los objetos de la categoría de los n -ésimos producto simétricos de gráficas finitas por medio de homotopía, donde mostramos que el conjunto de todas las clases de equivalencia es numerable y cada clase tiene un representante “universal”.
2. Se construyó un CW -complejo de dimensión finita, que le llamamos *toro binomial* y lo denotamos por $T_{\binom{n}{2}}$.
3. Se demostró que el toro binomial y el segundo producto simétrico de una gráfica finita, tienen el mismo tipo de homotopía.
4. Se calcularon los siguientes invariantes algebraicos:
 - Grupo fundamental del segundo producto simétrico de gráficas finitas.
 - Grupos de homología del segundo producto simétrico de gráficas finitas.
 - Grupos de cohomología del segundo producto simétrico de gráficas finitas.
5. Se calcularon los números de Betti y la característica de Euler del segundo producto simétrico de gráficas finitas
6. Demostramos que la asociación $SF_m^n(-)$ de es un funtor homotópico.
7. Clasificamos los objetos de la categoría de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de gráficas finitas, por medio de homotopía. En cada clase de equivalencia mostramos que tiene un representante distinguido el cual es un “modelo universal”.
8. Demostramos que el $(2, 1)$ -ésimo producto simétrico suspensión de gráficas finitas tiene el mismo tipo de homotopía que la cuña de espacios proyectivos (tantos como uno menos la característica de Euler de la gráfica finita correspondiente) unión el toro binomial.

9. Se halló el modelo universal de la clase de los $(2, 1)$ -ésimo producto simétrico suspensión de gráficas finitas.
10. Se calculó la característica de Euler de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de gráficas finitas.
11. Definimos un polinomio, llamado *polinomio simétrico*, asociado a una gráfica finita, para dar soluciones particulares al problema: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, si X es un continuo tal que $SF_m^n(X)$ es homeomorfo a $F_n(X)$, entonces ¿ X es contráctil?

Discusión

Tras describir los diferentes resultados obtenidos con la aplicación de la teoría de homotopía a los n -ésimos productos simétricos de gráficas finitas y a los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de gráficas finitas, procede ahora realizar unas discusiones que sirvan para consolidar lo obtenido, al tiempo que suponga una futura línea para nuevas investigaciones.

Aplicar la teoría de homotopía a los n -ésimos productos simétricos fue de gran ayuda pues por una parte se enriqueció la teoría y por otra parte logramos construir un puente entre lo topológico y lo algebraico. Por otra parte, decidir si dos espacios topológicos arbitrarios son homeomorfos es un problema difícil, sin embargo, decidir si dos espacios son homotópicamente equivalentes es más manejable y es más débil que homeomorfismos. En concreto, demostramos que si dos gráficas finitas tienen la misma característica de Euler, entonces sus respectivos n -ésimos productos simétricos son homotópicamente equivalentes. Luego ser homotópicamente equivalente es un invariante algebraico, por lo tanto sí dos gráficas finitas tienen la misma característica de Euler, entonces sus grupos de homotopía, homología y cohomología de sus n -ésimos productos simétricos respectivamente, son isomorfos. Así notamos que la característica de Euler de una gráfica finita jugó un papel importante en toda la investigación que se realizó. Cabe mencionar que las gráficas que trabajamos solo consideramos sus vértices y sus aristas, básicamente un CW -complejo de dimensión uno. Sin embargo, aún no se han estudiado los n -ésimos producto simétricos de gráficas que consideren tanto aristas, vértices como caras.

La primera hipótesis que se planteó efectivamente es verdadera, es decir, mostramos que $F_n(-)$ es un funtor homotópico. La segunda hipótesis planteada se cumplió parcialmente, pues solo calculamos explícitamente el grupo fundamental del segundo producto simétrico de una gráfica, aún queda abierto calcular explícitamente el grupo fundamental de los n -ésimos productos simétricos de continuos que no son contraíbles (salvo las curvas cerradas simples). La tercera hipótesis también fue verdadera parcialmente, pues solo calculamos los grupos de homología y cohomología de los segundos productos simétricos de una gráfica finita. Al menos para un caso logramos comprobar la cuarta hipótesis planteada, a saber, resolvimos afirmativamente el siguiente problema, con información algebraica: *Sea G una gráfica finita. Entonces G es un árbol si y sólo si el grupo*

fundamental del segundo producto simétrico de G es trivial. La hipótesis cinco planteada comprobamos que es verdadera, ya que mostramos que $SF_m^n(-)$ es un funtor homotópico. Por último, La sexta hipótesis se demostró que es verdadera, pues calculamos explícitamente la característica de Euler de los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión de gráficas finitas.

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo fue la innovación en aplicar la Topología Algebraica a los Hiperespacios de Continuos, tal como se planteó en los objetivos del Anteproyecto de Investigación. Específicamente, fue el de lograr la incursión de la teoría de homotopía en los n -ésimos productos simétricos de un continuo X ($F_n(X)$) y en los (n, m) -ésimos productos simétricos suspensión del continuo X ($SF_m^n(X)$), consiguiendo una clasificación por medio de homotopía de los objetos de sus categorías respectivamente.

Trabajo a Futuro

La investigación que se realizó, abrió nuevos problemas abiertos y conjeturas para el trabajo a futuro, como se mencionan a continuación.

Problema 3.5.11. *Hallar el tipo de homotopía de $F_n(G)$, para $n \geq 3$ y G una gráfica finita.*

Problema 3.5.12. *Hallar el tipo de homotopía del n -ésimo producto simétrico de la cuña de k -círculos,*

$$F_n\left(\bigvee_{i=1}^k i\right),$$

para toda $n \geq 3$ y toda $k \geq 2$.

Problema 3.5.13. *Hallar el tipo de homotopía del espacio*

$$SF_m^n\left(\bigvee_{i=1}^r i\right),$$

para $r, m, n \in \mathbb{N}$ con: $m < n$, $m \geq 1$, $n \geq 3$ y $r \geq 2$.

Problema 3.5.14. *Encontrar los representantes universales de las clases del (n, m) -ésimo producto simétrico de una gráfica finita $[SF_m^n(G)]$, en otras palabras hallar el tipo de homotopía de $SF_m^n(G)$, para algunas (luego para toda) $n, m \in \mathbb{N}$, con $n > m$, $m \geq 1$ y $n \geq 3$.*

Problema 3.5.15. *Calcular el grupo fundamental de los (n, m) -ésimo producto simétrico de gráficas finitas, es decir, calcular:*

$$\pi_1(SF_m^n(G)),$$

donde G es una gráfica finita y $n, m \in \mathbb{N}$, con $n > m$.

Problema 3.5.16. *Calcular los grupos de homología con coeficientes en los números enteros de los (n, m) -ésimos productos simétricos de gráficas finitas, es decir, calcular:*

$$H_n(SF_m^n(G), \mathbb{Z}),$$

donde G es una gráfica finita y $n, m \in \mathbb{N}$, con $n > m$.

Problema 3.5.17. *Calcular los grupos de cohomología con coeficientes en los números enteros de los (n, m) -ésimos productos simétricos de gráficas finitas, es decir, calcular:*

$$H^n(SF_m^n(G), \mathbb{Z}),$$

donde G es una gráfica finita y $n, m \in \mathbb{N}$, con $n > m$.

Problema 3.5.18. *Sea G una gráfica finita. Calcular los números de Betti de $SF_m^n(G)$.*

Conjetura 3.5.19. *El polinomio simétrico $p(r, m)$ asociado a una gráfica finita G de grado par, solo tiene dos raíces reales, para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Conjetura 3.5.20. *Consideremos el polinomio simétrico $p(r, m)$ asociado a una gráfica finita G de grado par. Si $\{r_m\}$ es la sucesión de raíces reales diferentes de cero de los polinomios simétricos $p(r, m)$, para cada $m \in \mathbb{N}$, es decir, para todo $m \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$p(r_m, m) = 0,$$

entonces la sucesión $\{r_m\}$ converge a 2.

Conjetura 3.5.21. *Todas las gráficas de los polinomios simétricos asociados a una gráfica finita G de grado par se intersectan en los puntos:*

$$(-1, 2), (0, 0), (1, -1) \text{ y } (2, 1).$$

Conjetura 3.5.22. *Consideremos el polinomio simétrico $p(r, m)$ asociado a una gráfica finita G de grado impar. La única raíz real de $p(r, m)$, para todo $m \in \mathbb{N}$, es $r = 0$.*

Conjetura 3.5.23. *Sea G una gráfica finita y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$. Si $SF_m^n(G)$ es homeomorfo a $F_n(G)$, entonces G es un árbol.*

Conjetura 3.5.24. *Sea G una gráfica finita tal que $F_n(G)$ es un espacio contractil, entonces G es un árbol.*

Conjetura 3.5.25. *Sea G una gráfica finita y $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$. Si $SF_m^n(G)$ es un espacio contráctil, entonces G es un árbol.*

Bibliografía

- [1] M. Aguilar, S. Gitler and C. Prieto *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*. Springer, 2002.
- [2] J. G. Anaya, A. Cano, E. Castañeda-Alvarado and M. A. Castillo-Rubí, *The second symmetric product of finite graph from a homotopical viewpoint*, Khayyam J. Math. Vol 4, No.1. Wrinten and spring (2018), 13–27.
- [3] F. Barragán, *On the n -fold symmetric product suspensions of a continuum*, Topology Appl. **157** (2010) 597–604.
- [4] K. Borsuk and S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **37** (1931), 235–244.
- [5] R. Bott, *On the third symmetric potency of S^1* , Fund. Math. **39** (1952), 364–368.
- [6] E. Castañeda-Alvarado and J. Sánchez-Martínez *On the Unicoherence of $F_n(X)$ and $SF_m^n(X)$ of continua*, Topology Proc., Vol. **42** (2013), p. 309–326.
- [7] N. Chinen and A. Koyama, *On the simmetric hyperspace of the circle*, Topology Appl. **157** (2010), 2613–2621.
- [8] J. Dugundji, *Topology*. Boston, Mass.: Allyn and Bacon, Inc., 1966.
- [9] D. Handel, *Some homotopy properties of spaces of finite subsets of topological spaces*, Houston J. of Math. **26** (2000) 747–764.
- [10] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [11] A. Illanes and S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*. Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics 216, Marcel Dekker, New York, 1999.
- [12] S. Kallel and P. Salvatore, *Symmetric products of two dimensional complexes*, Contemp. Math. **407** (2006), 147–161.

- [13] S. Kallel and D. Sjerve, *Remarks on finite subset spaces*, Homology, Homotopy and Applications, Vol **11** (2009), 229–250.
- [14] S. Macías, *On symmetric products of continua*, Topology Appl. **92** (1999) 173–182.
- [15] S. Macías, *Topics on Continua*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2005.
- [16] W. S. Massey *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer-Verlag 1967.
- [17] R. Molski, *On symmetric products*, Fund. Math. **44** (1957), 165–170.
- [18] J. R. Munkres, *Topology*. Second edition, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1999.
- [19] R. M. Schori, *Hyperspaces and symmetric products of topological spaces*, Fund. Math. **63** (1968), 77–87.
- [20] S. Rose, *A hyperbolic approach to $\exp_3(S^1)$* , arXiv:0708.2085.
- [21] H. Sato *Algebraic Topology: An Intuitive Approach*. Translations of Mathematical Monographs Vol. 183. American Mathematical Soc. Iwanami series in modern Mathematics, 1999.
- [22] J. J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics vol. 148. Springer-Verlag, New York, fourth edition 1995.
- [23] C. Tuffley, *Finite subset spaces of graphs and punctured surfaces*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003) 873—904.

Apéndice A

Tablas de la característica de Euler de $SF_m^n(G)$

Recordemos que la característica de Euler del (n, m) -ésimos producto simétrico suspensión de una gráfica finita G es:

$$\begin{aligned}\chi(SF_m^n(G)) &= 1 + 2 \sum_{j=m}^{n-1} (-1)^j \binom{j+r-1}{r-1} \\ &\quad + (-1)^n \binom{n+r-1}{r-1} - (-1)^m \binom{m+r-1}{r-1},\end{aligned}$$

donde $r = 1 - |V(G)| + |E(G)|$. Por otro lado, si G es una gráfica finita, entonces por el Teorema 1.5.7

$$G \simeq \bigvee_{i=1}^r S^1,$$

luego $SF_m^n(-)$ es un funtor homotópico, así por el Teorema 3.2.1

$$SF_m^n(G) \simeq SF_m^n\left(\bigvee_{i=1}^r S^1\right),$$

además la característica de Euler es un invariante homotópico (ver el Teorema 3.4.1 (b)), por ello

$$\chi(SF_m^n(G)) = \chi\left(SF_m^n\left(\bigvee_{i=1}^r S^1\right)\right).$$

La tabla siguiente muestra la característica de Euler de $SF_m^n(G)$, cuando:

$$n = 2, \quad m = 1, \quad y \quad 0 \leq r \leq 20.$$

r	$m = 1$
0	1
1	1
2	2
3	4
4	7
5	11
6	16
7	22
8	29
9	37
10	46
11	56
12	67
13	79
14	92
15	106
16	121
17	137
18	154
19	172
20	191

La tabla siguiente muestra la característica de Euler de $SF_m^n(G)$, cuando:

$$n = 3, \quad 1 \leq m \leq 2, \quad y \quad 0 \leq r \leq 20.$$

r	$m = 1$	$m = 2$
0	1	1
1	1	1
2	1	0
3	0	-3
4	-3	-9
5	-9	-19
6	-19	-34
7	-34	-55
8	-55	-83
9	-83	-119
10	-119	-164
11	-164	-219
12	-219	-285
13	-285	-363
14	-363	-454
15	-454	-559
16	-559	-679
17	-679	-815
18	-815	-968
19	-968	-1139
20	-1139	-1329

La tabla siguiente muestra la característica de Euler de $SF_m^n(G)$, cuando:

$$n = 4, \quad 1 \leq m \leq 3, \quad y \quad 0 \leq r \leq 20.$$

r	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
0	1	1	1
1	1	1	1
2	2	1	2
3	5	2	6
4	12	6	16
5	26	16	36
6	51	36	71
7	92	71	127
8	155	127	211
9	247	211	331
10	376	331	496
11	551	496	716
12	782	716	1002
13	1080	1002	1366
14	1457	1366	1821
15	1926	1821	2381
16	2501	2381	3061
17	3197	3061	3877
18	4030	3877	4846
19	5017	4846	5986
20	6176	5986	7316

La tabla siguiente muestra la característica de Euler de $SF_m^n(G)$, cuando:

$$n = 5, \quad 1 \leq m \leq 4, \quad y \quad 0 \leq r \leq 20.$$

r	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	1	0	1	0
3	-1	-4	0	-5
4	-9	-15	-5	-20
5	-30	-40	-20	-55
6	-75	-90	-55	-125
7	-160	-181	-125	-251
8	-307	-335	-251	-461
9	-545	-581	-461	-791
10	-911	-956	-791	-1286
11	-1451	-1506	-1286	-2001
12	-2221	-2287	-2001	-3002
13	-3288	-3366	-3002	-4367
14	-4731	-4822	-4367	-6187
15	-6642	-6747	-6187	-8567
16	-9127	-9247	-8567	-11627
17	-12307	-12443	-11627	-15503
18	-16319	-16472	-15503	-20348
19	-21317	-21488	-20348	-26333
20	-27473	-27663	-26333	-33648

La siguiente tabla muestra la característica de Euler de $SF_m^n(G)$, cuando:

$$n = 6, \quad 1 \leq m \leq 5, \quad y \quad 0 \leq r \leq 20.$$

r	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2
3	6	3	7	2	8
4	19	13	23	8	29
5	54	44	64	29	85
6	135	120	155	85	211
7	302	281	337	211	463
8	617	589	673	463	925
9	1171	1135	1255	925	1717
10	2092	2047	2212	1717	3004
11	3554	3949	3719	3004	5006
12	5787	5721	6007	5006	8009
13	9088	9010	9374	8009	12377
14	13833	13742	14197	12377	18565
15	20490	20385	20945	18565	27133
16	29633	29513	30193	27133	38761
17	41947	41821	42637	38761	54265
18	58294	58141	50110	54265	74614
19	79630	79459	80599	74614	100948
20	107123	106933	108263	100948	134597

Apéndice B

Raíces de $p(r, 400)$

El polinomio simétrico de grado 400 es el siguiente

$$p(r, 400) = 2 \sum_{j=1}^{399} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} + \binom{r+399}{r-1}.$$

Sus raíces de $p(r, 400)$ se calcularon en el programa Mathematica versión 10.0. Las 400 raíces se muestran en las Figuras [B.1](#), [B.2](#) y [B.3](#).

```
NSolve[2 Sum[(-1)^j Binomial[r+j-1, r-1], {j, 1, 399}] +  
(-1)^400 (Binomial[r+399, r-1]) == 0, r]
```

```
{r → -743.694 - 74.3335 i}, {r → -743.694 + 74.3335 i},  
{r → -710.506 - 96.086 i}, {r → -710.506 + 96.086 i}, {r → -686.102 - 111.665 i},  
{r → -686.102 + 111.665 i}, {r → -665.956 - 123.985 i},  
{r → -665.956 + 123.985 i}, {r → -648.442 - 134.199 i}, {r → -648.442 + 134.199 i},  
{r → -632.758 - 142.908 i}, {r → -632.758 + 142.908 i}, {r → -618.443 - 150.472 i},  
{r → -618.443 + 150.472 i}, {r → -605.2 - 157.129 i}, {r → -605.2 + 157.129 i},  
{r → -592.827 - 163.042 i}, {r → -592.827 + 163.042 i}, {r → -581.179 - 168.334 i},  
{r → -581.179 + 168.334 i}, {r → -570.145 - 173.095 i}, {r → -570.145 + 173.095 i},  
{r → -559.643 - 177.397 i}, {r → -559.643 + 177.397 i}, {r → -549.606 - 181.298 i},  
{r → -549.606 + 181.298 i}, {r → -539.98 - 184.842 i}, {r → -539.98 + 184.842 i},  
{r → -530.722 - 188.068 i}, {r → -530.722 + 188.068 i}, {r → -521.794 - 191.009 i},  
{r → -521.794 + 191.009 i}, {r → -513.166 - 193.692 i}, {r → -513.166 + 193.692 i},  
{r → -504.813 - 196.138 i}, {r → -504.813 + 196.138 i}, {r → -496.71 - 198.37 i},  
{r → -496.71 + 198.37 i}, {r → -488.84 - 200.404 i}, {r → -488.84 + 200.404 i},  
{r → -481.184 - 202.255 i}, {r → -481.184 + 202.255 i}, {r → -473.728 - 203.937 i},  
{r → -432.531 + 211.075 i}, {r → -426.169 - 211.85 i}, {r → -426.169 + 211.85 i},  
{r → -419.931 - 212.525 i}, {r → -419.931 + 212.525 i}, {r → -413.812 - 213.106 i},  
{r → -413.812 + 213.106 i}, {r → -407.807 - 213.596 i}, {r → -407.807 + 213.596 i},  
{r → -401.909 - 214.001 i}, {r → -401.909 + 214.001 i}, {r → -396.115 - 214.325 i},
```

Figura B.1: Raíces de $p(r, 400)$.

$\{r \rightarrow -396.115 + 214.325 i\}$, $\{r \rightarrow -390.42 - 214.573 i\}$, $\{r \rightarrow -390.42 + 214.573 i\}$,
 $\{r \rightarrow -384.82 - 214.747 i\}$, $\{r \rightarrow -384.82 + 214.747 i\}$, $\{r \rightarrow -379.312 - 214.851 i\}$,
 $\{r \rightarrow -379.312 + 214.851 i\}$, $\{r \rightarrow -373.892 - 214.889 i\}$, $\{r \rightarrow -373.892 + 214.889 i\}$,
 $\{r \rightarrow -368.557 - 214.864 i\}$, $\{r \rightarrow -368.557 + 214.864 i\}$, $\{r \rightarrow -363.304 - 214.778 i\}$,
 $\{r \rightarrow -363.304 + 214.778 i\}$, $\{r \rightarrow -358.131 - 214.633 i\}$, $\{r \rightarrow -358.131 + 214.633 i\}$,
 $\{r \rightarrow -353.034 - 214.433 i\}$, $\{r \rightarrow -353.034 + 214.433 i\}$, $\{r \rightarrow -348.011 - 214.18 i\}$,
 $\{r \rightarrow -348.011 + 214.18 i\}$, $\{r \rightarrow -343.06 - 213.876 i\}$, $\{r \rightarrow -343.06 + 213.876 i\}$,
 $\{r \rightarrow -338.179 - 213.523 i\}$, $\{r \rightarrow -338.179 + 213.523 i\}$, $\{r \rightarrow -333.365 - 213.122 i\}$,
 $\{r \rightarrow -333.365 + 213.122 i\}$, $\{r \rightarrow -328.617 - 212.677 i\}$, $\{r \rightarrow -328.617 + 212.677 i\}$,
 $\{r \rightarrow -323.933 - 212.188 i\}$, $\{r \rightarrow -323.933 + 212.188 i\}$, $\{r \rightarrow -319.311 - 211.657 i\}$,
 $\{r \rightarrow -319.311 + 211.657 i\}$, $\{r \rightarrow -314.749 - 211.086 i\}$, $\{r \rightarrow -314.749 + 211.086 i\}$,
 $\{r \rightarrow -310.246 - 210.477 i\}$, $\{r \rightarrow -310.246 + 210.477 i\}$, $\{r \rightarrow -305.801 - 209.83 i\}$,
 $\{r \rightarrow -305.801 + 209.83 i\}$, $\{r \rightarrow -301.412 - 209.147 i\}$, $\{r \rightarrow -301.412 + 209.147 i\}$,
 $\{r \rightarrow -297.077 - 208.429 i\}$, $\{r \rightarrow -297.077 + 208.429 i\}$, $\{r \rightarrow -292.796 - 207.678 i\}$,
 $\{r \rightarrow -292.796 + 207.678 i\}$, $\{r \rightarrow -288.567 - 206.895 i\}$, $\{r \rightarrow -288.567 + 206.895 i\}$,
 $\{r \rightarrow -284.39 - 206.08 i\}$, $\{r \rightarrow -284.39 + 206.08 i\}$, $\{r \rightarrow -280.262 - 205.236 i\}$,
 $\{r \rightarrow -280.262 + 205.236 i\}$, $\{r \rightarrow -276.183 - 204.362 i\}$, $\{r \rightarrow -276.183 + 204.362 i\}$,
 $\{r \rightarrow -272.152 - 203.461 i\}$, $\{r \rightarrow -272.152 + 203.461 i\}$, $\{r \rightarrow -268.167 - 202.532 i\}$,
 $\{r \rightarrow -268.167 + 202.532 i\}$, $\{r \rightarrow -264.229 - 201.577 i\}$, $\{r \rightarrow -264.229 + 201.577 i\}$,
 $\{r \rightarrow -260.336 - 200.596 i\}$, $\{r \rightarrow -260.336 + 200.596 i\}$, $\{r \rightarrow -256.487 - 199.591 i\}$,
 $\{r \rightarrow -256.487 + 199.591 i\}$, $\{r \rightarrow -252.681 - 198.562 i\}$, $\{r \rightarrow -252.681 + 198.562 i\}$,
 $\{r \rightarrow -248.919 - 197.51 i\}$, $\{r \rightarrow -248.919 + 197.51 i\}$, $\{r \rightarrow -245.198 - 196.436 i\}$,
 $\{r \rightarrow -245.198 + 196.436 i\}$, $\{r \rightarrow -241.518 - 195.341 i\}$, $\{r \rightarrow -241.518 + 195.341 i\}$,
 $\{r \rightarrow -237.879 - 194.224 i\}$, $\{r \rightarrow -237.879 + 194.224 i\}$, $\{r \rightarrow -234.279 - 193.087 i\}$,
 $\{r \rightarrow -234.279 + 193.087 i\}$, $\{r \rightarrow -230.719 - 191.931 i\}$, $\{r \rightarrow -230.719 + 191.931 i\}$,
 $\{r \rightarrow -227.197 - 190.756 i\}$, $\{r \rightarrow -227.197 + 190.756 i\}$, $\{r \rightarrow -223.713 - 189.562 i\}$,
 $\{r \rightarrow -223.713 + 189.562 i\}$, $\{r \rightarrow -220.267 - 188.351 i\}$, $\{r \rightarrow -220.267 + 188.351 i\}$,
 $\{r \rightarrow -216.857 - 187.122 i\}$, $\{r \rightarrow -216.857 + 187.122 i\}$, $\{r \rightarrow -213.484 - 185.876 i\}$,
 $\{r \rightarrow -213.484 + 185.876 i\}$, $\{r \rightarrow -210.146 - 184.614 i\}$, $\{r \rightarrow -210.146 + 184.614 i\}$,
 $\{r \rightarrow -206.844 - 183.337 i\}$, $\{r \rightarrow -206.844 + 183.337 i\}$, $\{r \rightarrow -203.577 - 182.044 i\}$,
 $\{r \rightarrow -203.577 + 182.044 i\}$, $\{r \rightarrow -200.343 - 180.737 i\}$, $\{r \rightarrow -200.343 + 180.737 i\}$,
 $\{r \rightarrow -197.144 - 179.415 i\}$, $\{r \rightarrow -197.144 + 179.415 i\}$, $\{r \rightarrow -193.978 - 178.08 i\}$,
 $\{r \rightarrow -193.978 + 178.08 i\}$, $\{r \rightarrow -190.845 - 176.73 i\}$, $\{r \rightarrow -190.845 + 176.73 i\}$,
 $\{r \rightarrow -187.745 - 175.368 i\}$, $\{r \rightarrow -187.745 + 175.368 i\}$, $\{r \rightarrow -184.677 - 173.994 i\}$,
 $\{r \rightarrow -184.677 + 173.994 i\}$, $\{r \rightarrow -181.64 - 172.607 i\}$, $\{r \rightarrow -181.64 + 172.607 i\}$,
 $\{r \rightarrow -178.635 - 171.208 i\}$, $\{r \rightarrow -178.635 + 171.208 i\}$, $\{r \rightarrow -175.661 - 169.798 i\}$,
 $\{r \rightarrow -175.661 + 169.798 i\}$, $\{r \rightarrow -172.718 - 168.377 i\}$, $\{r \rightarrow -172.718 + 168.377 i\}$,
 $\{r \rightarrow -169.806 - 166.945 i\}$, $\{r \rightarrow -169.806 + 166.945 i\}$, $\{r \rightarrow -166.923 - 165.502 i\}$,
 $\{r \rightarrow -166.923 + 165.502 i\}$, $\{r \rightarrow -164.07 - 164.05 i\}$, $\{r \rightarrow -164.07 + 164.05 i\}$,
 $\{r \rightarrow -161.246 - 162.587 i\}$, $\{r \rightarrow -161.246 + 162.587 i\}$, $\{r \rightarrow -158.452 - 161.116 i\}$,
 $\{r \rightarrow -158.452 + 161.116 i\}$, $\{r \rightarrow -155.686 - 159.635 i\}$, $\{r \rightarrow -155.686 + 159.635 i\}$,
 $\{r \rightarrow -144.907 - 153.627 i\}$, $\{r \rightarrow -144.907 + 153.627 i\}$, $\{r \rightarrow -142.282 - 152.105 i\}$,
 $\{r \rightarrow -142.282 + 152.105 i\}$, $\{r \rightarrow -139.684 - 150.575 i\}$, $\{r \rightarrow -139.684 + 150.575 i\}$,
 $\{r \rightarrow -137.113 - 149.039 i\}$, $\{r \rightarrow -137.113 + 149.039 i\}$, $\{r \rightarrow -134.568 - 147.496 i\}$,
 $\{r \rightarrow -134.568 + 147.496 i\}$, $\{r \rightarrow -132.05 - 145.946 i\}$, $\{r \rightarrow -132.05 + 145.946 i\}$,
 $\{r \rightarrow -129.559 - 144.39 i\}$, $\{r \rightarrow -129.559 + 144.39 i\}$, $\{r \rightarrow -127.094 - 142.828 i\}$,
 $\{r \rightarrow -127.094 + 142.828 i\}$, $\{r \rightarrow -124.655 - 141.26 i\}$, $\{r \rightarrow -124.655 + 141.26 i\}$,
 $\{r \rightarrow -122.241 - 139.686 i\}$, $\{r \rightarrow -122.241 + 139.686 i\}$, $\{r \rightarrow -119.853 - 138.107 i\}$,
 $\{r \rightarrow -119.853 + 138.107 i\}$, $\{r \rightarrow -117.49 - 136.523 i\}$, $\{r \rightarrow -117.49 + 136.523 i\}$,
 $\{r \rightarrow -115.153 - 134.934 i\}$, $\{r \rightarrow -115.153 + 134.934 i\}$, $\{r \rightarrow -112.84 - 133.341 i\}$,
 $\{r \rightarrow -112.84 + 133.341 i\}$, $\{r \rightarrow -110.553 - 131.742 i\}$, $\{r \rightarrow -110.553 + 131.742 i\}$,

Figura B.2: Raíces de $p(r, 400)$.

$r \rightarrow -81.0462 + 109.019 i$, $\{r \rightarrow -79.1133 - 107.379 i\}$, $\{r \rightarrow -79.1133 + 107.379 i\}$,
 $r \rightarrow -77.203 - 105.738 i$, $\{r \rightarrow -77.203 + 105.738 i\}$, $\{r \rightarrow -75.3153 - 104.096 i\}$,
 $r \rightarrow -75.3153 + 104.096 i$, $\{r \rightarrow -73.4501 - 102.453 i\}$, $\{r \rightarrow -73.4501 + 102.453 i\}$,
 $r \rightarrow -71.6072 - 100.809 i$, $\{r \rightarrow -71.6072 + 100.809 i\}$, $\{r \rightarrow -69.7866 - 99.1647 i\}$,
 $r \rightarrow -69.7866 + 99.1647 i$, $\{r \rightarrow -67.9882 - 97.5202 i\}$, $\{r \rightarrow -67.9882 + 97.5202 i\}$,
 $r \rightarrow -66.2119 - 95.8755 i$, $\{r \rightarrow -66.2119 + 95.8755 i\}$, $\{r \rightarrow -64.4576 - 94.231 i\}$,
 $r \rightarrow -64.4576 + 94.231 i$, $\{r \rightarrow -62.7252 - 92.5867 i\}$, $\{r \rightarrow -62.7252 + 92.5867 i\}$,
 $r \rightarrow -61.0147 - 90.9428 i$, $\{r \rightarrow -61.0147 + 90.9428 i\}$, $\{r \rightarrow -59.326 - 89.2996 i\}$,
 $r \rightarrow -59.326 + 89.2996 i$, $\{r \rightarrow -57.6591 - 87.6572 i\}$, $\{r \rightarrow -57.6591 + 87.6572 i\}$,
 $r \rightarrow -56.0138 - 86.0159 i$, $\{r \rightarrow -56.0138 + 86.0159 i\}$, $\{r \rightarrow -54.3901 - 84.3757 i\}$,
 $r \rightarrow -54.3901 + 84.3757 i$, $\{r \rightarrow -52.788 - 82.7369 i\}$, $\{r \rightarrow -52.788 + 82.7369 i\}$,
 $r \rightarrow -51.2074 - 81.0996 i$, $\{r \rightarrow -51.2074 + 81.0996 i\}$, $\{r \rightarrow -49.6482 - 79.4642 i\}$,
 $r \rightarrow -49.6482 + 79.4642 i$, $\{r \rightarrow -48.1104 - 77.8307 i\}$, $\{r \rightarrow -48.1104 + 77.8307 i\}$,
 $r \rightarrow -46.594 - 76.1993 i$, $\{r \rightarrow -46.594 + 76.1993 i\}$, $\{r \rightarrow -45.0989 - 74.5703 i\}$,
 $r \rightarrow -45.0989 + 74.5703 i$, $\{r \rightarrow -43.6251 - 72.9438 i\}$, $\{r \rightarrow -43.6251 + 72.9438 i\}$,
 $r \rightarrow -42.1725 - 71.3201 i$, $\{r \rightarrow -42.1725 + 71.3201 i\}$, $\{r \rightarrow -40.7411 - 69.6993 i\}$,
 $r \rightarrow -40.7411 + 69.6993 i$, $\{r \rightarrow -39.3309 - 68.0816 i\}$, $\{r \rightarrow -39.3309 + 68.0816 i\}$,
 $r \rightarrow -37.9419 - 66.4673 i$, $\{r \rightarrow -37.9419 + 66.4673 i\}$, $\{r \rightarrow -36.5741 - 64.8565 i\}$,
 $r \rightarrow -36.5741 + 64.8565 i$, $\{r \rightarrow -35.2274 - 63.2495 i\}$, $\{r \rightarrow -35.2274 + 63.2495 i\}$,
 $r \rightarrow -33.9018 - 61.6465 i$, $\{r \rightarrow -33.9018 + 61.6465 i\}$, $\{r \rightarrow -32.5973 - 60.0476 i\}$,
 $r \rightarrow -32.5973 + 60.0476 i$, $\{r \rightarrow -31.3139 - 58.4532 i\}$, $\{r \rightarrow -31.3139 + 58.4532 i\}$,
 $r \rightarrow -30.0517 - 56.8635 i$, $\{r \rightarrow -30.0517 + 56.8635 i\}$, $\{r \rightarrow -28.8106 - 55.2786 i\}$,
 $r \rightarrow -28.8106 + 55.2786 i$, $\{r \rightarrow -27.5907 - 53.6989 i\}$, $\{r \rightarrow -27.5907 + 53.6989 i\}$,
 $r \rightarrow -26.3919 - 52.1245 i$, $\{r \rightarrow -26.3919 + 52.1245 i\}$, $\{r \rightarrow -25.2143 - 50.5557 i\}$,
 $r \rightarrow -25.2143 + 50.5557 i$, $\{r \rightarrow -24.0579 - 48.9928 i\}$, $\{r \rightarrow -24.0579 + 48.9928 i\}$,
 $r \rightarrow -22.9228 - 47.436 i$, $\{r \rightarrow -22.9228 + 47.436 i\}$, $\{r \rightarrow -21.8089 - 45.8857 i\}$,
 $r \rightarrow -21.8089 + 45.8857 i$, $\{r \rightarrow -20.7164 - 44.342 i\}$, $\{r \rightarrow -20.7164 + 44.342 i\}$,
 $r \rightarrow -19.6453 - 42.8053 i$, $\{r \rightarrow -19.6453 + 42.8053 i\}$, $\{r \rightarrow -18.5957 - 41.2758 i\}$,
 $r \rightarrow -18.5957 + 41.2758 i$, $\{r \rightarrow -17.5676 - 39.754 i\}$, $\{r \rightarrow -17.5676 + 39.754 i\}$,
 $r \rightarrow -16.561 - 38.24 i$, $\{r \rightarrow -16.561 + 38.24 i\}$, $\{r \rightarrow -15.5762 - 36.7343 i\}$,
 $r \rightarrow -15.5762 + 36.7343 i$, $\{r \rightarrow -14.6132 - 35.2371 i\}$, $\{r \rightarrow -14.6132 + 35.2371 i\}$,
 $r \rightarrow -13.6721 - 33.7489 i$, $\{r \rightarrow -13.6721 + 33.7489 i\}$, $\{r \rightarrow -12.7529 - 32.2701 i\}$,
 $r \rightarrow -12.7529 + 32.2701 i$, $\{r \rightarrow -11.8559 - 30.8009 i\}$, $\{r \rightarrow -11.8559 + 30.8009 i\}$,
 $r \rightarrow -10.9813 - 29.3418 i$, $\{r \rightarrow -10.9813 + 29.3418 i\}$, $\{r \rightarrow -10.1293 - 27.8933 i\}$,
 $r \rightarrow -10.1293 + 27.8933 i$, $\{r \rightarrow -9.3 - 26.4562 i\}$, $\{r \rightarrow -9.3 + 26.4562 i\}$,
 $r \rightarrow -8.49328 - 25.031 i$, $\{r \rightarrow -8.49328 + 25.031 i\}$, $\{r \rightarrow -7.70878 - 23.6179 i\}$,
 $r \rightarrow -7.70878 + 23.6179 i$, $\{r \rightarrow -6.94695 - 22.2161 i\}$, $\{r \rightarrow -6.94695 + 22.2161 i\}$,
 $r \rightarrow -6.20986 - 20.8257 i$, $\{r \rightarrow -6.20986 + 20.8257 i\}$, $\{r \rightarrow -5.50037 - 19.4489 i\}$,
 $r \rightarrow -5.50037 + 19.4489 i$, $\{r \rightarrow -4.81874 - 18.0916 i\}$, $\{r \rightarrow -4.81874 + 18.0916 i\}$,
 $r \rightarrow -4.15865 - 16.7583 i$, $\{r \rightarrow -4.15865 + 16.7583 i\}$, $\{r \rightarrow -3.51042 - 15.4444 i\}$,
 $r \rightarrow -3.51042 + 15.4444 i$, $\{r \rightarrow -2.87423 - 14.1351 i\}$, $\{r \rightarrow -2.87423 + 14.1351 i\}$,
 $r \rightarrow -2.26541 - 12.8198 i$, $\{r \rightarrow -2.26541 + 12.8198 i\}$, $\{r \rightarrow -1.70777 - 11.5003 i\}$,
 $r \rightarrow -1.70777 + 11.5003 i$, $\{r \rightarrow -1.23591 - 10.1977 i\}$, $\{r \rightarrow -1.23591 + 10.1977 i\}$,
 $r \rightarrow -0.868172 - 9.0175 i$, $\{r \rightarrow -0.868172 + 9.0175 i\}$, $\{r \rightarrow -0.378278 - 8.0049 i\}$,
 $r \rightarrow -0.378278 + 8.0049 i$, $\{r \rightarrow 0.\}$, $\{r \rightarrow 0.217002 - 6.88394 i\}$,
 $r \rightarrow 0.217002 + 6.88394 i$, $\{r \rightarrow 0.745379 - 5.69194 i\}$, $\{r \rightarrow 0.745379 + 5.69194 i\}$,
 $r \rightarrow 1.19553 - 4.49249 i$, $\{r \rightarrow 1.19553 + 4.49249 i\}$, $\{r \rightarrow 1.57097 - 3.30833 i\}$,
 $r \rightarrow 1.57097 + 3.30833 i$, $\{r \rightarrow 1.8711 - 2.15335 i\}$, $\{r \rightarrow 1.8711 + 2.15335 i\}$,
 $r \rightarrow 2.08745 - 1.04548 i$, $\{r \rightarrow 2.08745 + 1.04548 i\}$, $\{r \rightarrow 2.17651\}$

Figura B.3: Raíces de $p(r, 400)$.

Apéndice C

Raíces de $p(r, 41)$

El polinomio simétrico de grado 41 es el siguiente

$$p(r, 41) = 2 \sum_{j=1}^{40} (-1)^j \binom{r+j-1}{r-1} - \binom{r+40}{r-1}.$$

Sus raíces de $p(r, 41)$ se calcularon en el programa Mathematica versión 10.0, la cuales se muestran en las Figuras C.1.

```
p[m_] := 2 Sum[(-1)^j Binomial[r+j-1, r-1], {j, 1, m-1}] +  
          (-1)^m (Binomial[r+m-1, r-1])  
NSolve[p[41] == 0, r]  
  
{r → -62.5736 - 20.3324 i}, {r → -62.5736 + 20.3324 i},  
{r → -51.8999 - 23.2639 i}, {r → -51.8999 + 23.2639 i}, {r → -44.2327 - 24.3358 i  
{r → -44.2327 + 24.3358 i}, {r → -38.0433 - 24.4673 i}, {r → -38.0433 + 24.4673 i  
{r → -32.7894 - 24.0243 i}, {r → -32.7894 + 24.0243 i}, {r → -28.208 - 23.1967 i}  
{r → -28.208 + 23.1967 i}, {r → -24.1489 - 22.0979 i}, {r → -24.1489 + 22.0979 i}  
{r → -20.5179 - 20.8019 i}, {r → -20.5179 + 20.8019 i}, {r → -17.2514 - 19.3606 i  
{r → -17.2514 + 19.3606 i}, {r → -14.3046 - 17.8118 i}, {r → -14.3046 + 17.8118 i  
{r → -11.6449 - 16.185 i}, {r → -11.6449 + 16.185 i}, {r → -9.24751 - 14.5045 i},  
{r → -9.24751 + 14.5045 i}, {r → -7.09165 - 12.7891 i}, {r → -7.09165 + 12.7891 i  
{r → -5.16595 - 11.0468 i}, {r → -5.16595 + 11.0468 i}, {r → -3.49259 - 9.29589 i  
{r → -3.49259 + 9.29589 i}, {r → -2.06614 - 7.64244 i}, {r → -2.06614 + 7.64244 i  
{r → -0.696488 - 6.09242 i}, {r → -0.696488 + 6.09242 i}, {r → 0.},  
{r → 0.590732 - 4.41844 i}, {r → 0.590732 + 4.41844 i}, {r → 1.59182 - 2.6225 i},  
{r → 1.59182 + 2.6225 i}, {r → 2.19249 - 0.844019 i}, {r → 2.19249 + 0.844019 i}
```

Figura C.1: Raíces de $p(r, 41)$.