

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ**

**ESCUELA DE POSGRADO**



**TRANSFORMACIONES EN LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE LA  
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS EN ESTUDIANTES DE 4TO AÑO DE  
SECUNDARIA MEDIADO POR GEOGEBRA**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN ENSEÑANZA  
DE LAS MATEMÁTICAS**

**AUTOR**

JUAN AURELIO CRIBILLERO ACHING

**ASESOR**

TITO NELSON PEÑALOZA VARA

Octubre, 2021

## Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo analizar como los estudiantes de cuarto año comprenden la noción de semejanza de triángulos al resolver situaciones geométricas en una secuencia de actividades donde se requiere el uso de registros de representación semiótica en un ambiente de representaciones dinámicas como el GeoGebra. La investigación es de tipo cualitativa ya que el enfoque de nuestra investigación es describir comportamientos, opiniones actitudes e interacciones del estudiante al momento de resolver una actividad didáctica. Para sustentar esta investigación tomamos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica referidos a los tratamientos y conversiones de los registros lengua natural, algebraico y registro figural dinámico. Respecto a la parte experimental, la investigación se realiza con cuatro estudiantes de cuarto año de secundaria de un colegio privado, con edades que oscilan entre 14 y 16 años. Los resultados permitieron responder nuestra pregunta de investigación el cuál es: ¿Cómo los estudiantes de cuarto año de educación secundaria comprenden la noción de semejanza de triángulos mediante transformaciones en representaciones semióticas de dicho objeto en una secuencia didáctica mediada por GeoGebra? Asimismo, se muestra que los estudiantes logran movilizar sus conocimientos con relación a la noción de semejanza de triángulos con el uso de los registros de representación semiótica y las transformaciones que se dan en ellos.

*Palabras clave:* Transformaciones; Tratamiento y conversión; Semejanza de triángulos, GeoGebra.

## Abstract

The current research aims to analyze how the fourth-grade students understand the concept of similarity of triangles when solving geometrical situations through a variety of activities which require the use of semiotic representation registers in an atmosphere of dynamic representations such as GeoGebra. The research is qualitative since our approach is to describe the student's behavior, opinions, attitudes and interactions when solving a didactic activity. To support this research, we take areas of The Theory of Registers of Semiotic Representation regarding the treatments and conversion processes of natural language, algebraic and dynamic figural registers. Regarding the experimental part, the research is done with four fourth-grade high school students from a private school with the age range from 14 to 16 years. The results allowed us to answer our research question, which is: How do fourth-grade high school students understand the concept of similarity of triangles through transformations in semiotic representations of the object in a didactic sequence mediated by GeoGebra? Furthermore, it is shown that the students are able to mobilize their knowledge about the concept of similarity of triangles using the semiotic representation registers and the transformations that occur in them.

*Keywords:* Transformations; Treatment and conversion; Similarity of triangles; GeoGebra.



### ***Dedicatoria***

*A mi madre Juana Aching Ramírez por enseñarme a perseverar en esta vida, levantarme en circunstancias adversas y animarme a seguir superándome cada día.*

*A mis hermanos que de una u otra forma lograron apoyarme en mi desarrollo profesional como docente.*

## Agradecimientos

A Dios, por permitirme realizar esta noble profesión de enseñar y guiar mis pasos en la elaboración de esta investigación.

A mi asesor, Mg. Nelson Peñaloza Vara, por su disposición, paciencia, enseñanzas y sugerencias constante en el desarrollo de esta investigación.

A los miembros del jurado, Dra. Jesús Victoria Flores Salazar y Dra. Katia Vigo Ingar, por las sugerencias y observaciones realizadas en la elaboración de la presente tesis, las cuales me permitieron mejorar mi investigación.

A la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática TecVEM de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por el apoyo brindado al desarrollo de esta investigación.

A los docentes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, por compartir sus enseñanzas y experiencias durante los años de estudio.

A mis compañeros de clase, por la amistad, consejos y motivaciones brindados durante estos años de estudio.

A los estudiantes, que formaron parte de esta investigación, por su apoyo e interés en las actividades propuestas, así como su valioso tiempo.

A mis familiares, que siempre confiaron en mí y estuvieron pendientes en cada momento en el desarrollo de mi profesión.

## Índice

Introducción .....	12
<b>Capítulo I: Problemática.....</b>	<b>13</b>
1.1 Investigaciones de referencia.....	13
1.2 Justificación.....	22
1.3 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica .....	26
1.4 Pregunta y objetivos de la investigación .....	34
1.5 Metodología y procedimientos .....	35
<b>Capítulo II: Aspectos matemáticos y didácticos de la semejanza de triángulos.....</b>	<b>40</b>
2.1 Aspectos matemáticos .....	40
2.2 Aspectos de la semejanza de triángulos en los libros didácticos.....	42
2.3 Representaciones de la semejanza de triángulos en GeoGebra.....	45
<b>Capítulo III: Parte experimental y análisis de la investigación.....</b>	<b>52</b>
3.1 Escenario y sujetos de investigación .....	52
3.2 Descripción de las actividades .....	53
3.3 Análisis de las Actividades .....	54
<b>Conclusiones .....</b>	<b>109</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>111</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>114</b>

## Lista de figuras

<b>Figura 1.</b> Formación de representación de un triángulo .....	29
<b>Figura 2.</b> Cambio de posición de una figura .....	29
<b>Figura 3.</b> Cambio en la longitud de los lados de un triángulo y su posición .....	30
<b>Figura 4.</b> Modificación posicional de una figura semejante .....	30
<b>Figura 5.</b> Reconfiguración de una figura .....	31
<b>Figura 6.</b> Representación del problema .....	32
<b>Figura 7.</b> Transformaciones de una Representación Semiótica a otra. ....	33
<b>Figura 8.</b> Teorema de la semejanza de triángulos AAA.....	41
<b>Figura 9.</b> Teorema de la semejanza de triángulos LAL .....	41
<b>Figura 10.</b> Teorema de la semejanza de triángulos LLL.....	41
<b>Figura 11.</b> Mapa de progreso del aprendizaje en Geometría .....	42
<b>Figura 12.</b> La semejanza de triángulos y los casos de semejanza .....	43
<b>Figura 13.</b> Ejercicios resueltos relacionados a la semejanza de triángulos .....	44
<b>Figura 14.</b> Apariencia Geometría de la ventana GeoGebra.....	46
<b>Figura 15.</b> Barra de herramientas de la vista gráfica 2D en GeoGebra .....	46
<b>Figura 16.</b> Representación del triángulo ABC utilizando la herramienta Polígono.....	47
<b>Figura 17.</b> Representación del punto D utilizando la herramienta Punto .....	47
<b>Figura 18.</b> Representación de dos rectas paralelas a dos lados del triángulo ABC utilizando la herramienta Paralela.....	48
<b>Figura 19.</b> Representación del punto E utilizando la herramienta Punto en objeto .....	48
<b>Figura 20.</b> Representación de una recta paralela al tercer lado del triángulo ABC utilizando la herramienta Paralela.....	49
<b>Figura 21.</b> Representación del punto F utilizando la herramienta Intersección .....	49
<b>Figura 22.</b> Representación del triángulo DEF utilizando la herramienta Polígono.....	50
<b>Figura 23.</b> Medición de los ángulos de los triángulos ABC y DEF representados utilizando la herramienta Ángulo.....	50
<b>Figura 24.</b> Creación de un deslizador para el factor de homotecia.....	51
<b>Figura 25.</b> Uso de la herramienta Homotecia .....	51
<b>Figura 26.</b> Triángulos semejantes obtenidos por la herramienta Homotecia .....	51
<b>Figura 27.</b> Representación de las medidas de los ángulos utilizando la herramienta Ángulo ...	56
<b>Figura 28.</b> Representación de las medidas de los ángulos en sentido horario.....	57
<b>Figura 29.</b> Representación del llenado de la tabla del ítem a) – Bloque I.....	57

<b>Figura 30.</b> Representación esperada de la nueva posición del punto P .....	59
<b>Figura 31.</b> Razones entre los lados de dos triángulos semejantes.....	60
<b>Figura 32.</b> Representación de las medidas de los ángulos del Grupo I.....	60
<b>Figura 33.</b> Representación de las medidas de los ángulos del Grupo 1 en la tabla del ítem a) 61	
<b>Figura 34.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 a la pregunta del ítem b .....	61
<b>Figura 35.</b> Representación de la posición inicial y final del punto P – Grupo 1 .....	62
<b>Figura 36.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 a la pregunta del ítem c.....	62
<b>Figura 37.</b> Representación de la activación de las casillas de control del ítem d) – Bloque I – Grupo 1 .....	63
<b>Figura 38.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 a la pregunta del ítem c.....	64
<b>Figura 39.</b> Representación de las medidas de los ángulos del Grupo 2.....	65
<b>Figura 40.</b> Representación de las medidas de los ángulos del Grupo 2 en la tabla del ítem a) 65	
<b>Figura 41.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 2 a la pregunta del ítem b .....	66
<b>Figura 42.</b> Representación de la posición inicial y final del punto P – Grupo 2 .....	66
<b>Figura 43.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 2 a la pregunta del ítem c.....	67
<b>Figura 44.</b> Representación de la activación de las casillas de control del ítem d) – Bloque I – Grupo 2 .....	67
<b>Figura 45.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 2 a la pregunta del ítem c.....	68
<b>Figura 46.</b> Representación esperada del ítem a) – Bloque II.....	70
<b>Figura 47.</b> Representación del llenado de la tabla del ítem a) – Bloque II.....	71
<b>Figura 48.</b> Representación esperada del ítem c) – Bloque II.....	72
<b>Figura 49.</b> Representación de las medidas pedidas en la tabla del ítem a) por el Grupo I.....	72
<b>Figura 50.</b> Representación de las medidas de los ángulos del Grupo 1 en la tabla del ítem a) – Bloque II.....	73
<b>Figura 51.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 a la pregunta del ítem b) – Bloque II.....	73
<b>Figura 52.</b> Representación de la activación de las casillas de control del ítem c) – Bloque II – Grupo 1 .....	74
<b>Figura 53.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 del ítem c) – Bloque II .....	75
<b>Figura 54.</b> Representación de las medidas pedidas en la tabla del ítem a) por el Grupo 2.....	75
<b>Figura 55.</b> Representación de las medidas de los ángulos del Grupo 1 en la tabla del ítem a) – Bloque II.....	76
<b>Figura 56.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 a la pregunta del ítem b) – Bloque II.....	77
<b>Figura 57.</b> Representación de la activación de las casillas de control del ítem c) – Bloque II – Grupo 1 .....	77

<b>Figura 58.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 2 del ítem c) – Bloque II .....	78
<b>Figura 59.</b> Constante de proporcionalidad entre las longitudes de los lados.....	79
<b>Figura 60.</b> Representación esperada de la activación de las casillas de los grupos 1 y 2 .....	80
<b>Figura 61.</b> Representación esperada de la activación de las casillas de los grupos 1 y 2 .....	81
<b>Figura 62.</b> Representación esperada al manipular el deslizador hasta $k=0.5$ de los grupos 1 y 2 .....	82
<b>Figura 63.</b> Representación esperada al manipular el deslizador hasta $k=1$ de los grupos 1 y 2 .....	82
<b>Figura 64.</b> Representación de la activación de las casillas de control del ítem a) – Bloque III – Grupo 1 .....	83
<b>Figura 65.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 del ítem c) – Bloque II .....	83
<b>Figura 66.</b> Representación de las medidas de los ángulos del ítem b) – Bloque III – Grupo 1 .....	84
<b>Figura 67.</b> Respuesta del Grupo 1 a las preguntas del ítem b) – Bloque III .....	84
<b>Figura 68.</b> Representación del deslizador $k$ del ítem c) – Bloque III – Grupo 1 .....	85
<b>Figura 69.</b> Respuesta del Grupo 1 a las preguntas del ítem c) – Bloque III .....	86
<b>Figura 70.</b> Representación de la activación de las casillas de control del ítem a) – Bloque III – Grupo 2 .....	87
<b>Figura 71.</b> Respuesta de los estudiantes del Grupo 2 del ítem c) – Bloque II .....	88
<b>Figura 72.</b> Representación de las medidas de los ángulos del ítem b) – Bloque III – Grupo 2 .....	88
<b>Figura 73.</b> Respuesta del Grupo 2 a las preguntas del ítem b) – Bloque III .....	89
<b>Figura 74.</b> Representación del deslizador hasta $k=0.5$ del ítem c) – Bloque III – Grupo 2 .....	89
<b>Figura 75.</b> Respuesta del Grupo 2 a las preguntas del ítem c) – Bloque III .....	90
<b>Figura 76.</b> Representación esperada de los grupos 1 y 2 al medir los ángulos agudos en el ítem a .....	92
<b>Figura 77.</b> Representación esperada del llenado de la tabla del ítem a) – Actividad 2 .....	92
<b>Figura 78.</b> Representación esperada de los grupos 1 y 2 de la razón entre las longitudes de los lados e inradios de los triángulos semejantes .....	94
<b>Figura 79.</b> Respuesta esperada de los grupos 1 y 2 a la pregunta del ítem b).....	94
<b>Figura 80.</b> Representación de la medida de los ángulos agudos en el ítem a del Grupo 1 .....	95
<b>Figura 81.</b> Representación de las medidas de los ángulos agudos del Grupo 1 en la tabla del ítem a).....	95
<b>Figura 82.</b> Respuesta del Grupo 1 a la pregunta del ítem b) .....	96
<b>Figura 83.</b> Representación de las casillas de control activadas por el Grupo 1 .....	96
<b>Figura 84.</b> Respuesta a la pregunta del ítem c del Grupo 1 .....	97

<b>Figura 85.</b> Representación de la medida de los ángulos agudos en el ítem a del Grupo 2.....	97
<b>Figura 86.</b> Representación de las medidas de los ángulos agudos del Grupo 2 en la tabla del ítem a).....	98
<b>Figura 87.</b> Respuesta del Grupo 2 a la pregunta del ítem b) .....	98
<b>Figura 88.</b> Representación de las casillas de control activadas por el Grupo 2 .....	99
<b>Figura 89.</b> Respuesta a la pregunta del ítem c) del Grupo 2 .....	99
<b>Figura 90.</b> Representación esperada de los grupos 1 y 2 al medir los ángulos en el ítem a...	101
<b>Figura 91.</b> Representación esperada del llenado de la tabla del ítem a) – Actividad 3 .....	102
<b>Figura 92.</b> Representación esperada de los grupos 1 y 2 al activar las casillas de control en el ítem c) .....	103
<b>Figura 93.</b> Representación de la medida de los ángulos agudos en el ítem a del Grupo 1.....	103
<b>Figura 94.</b> Representación de las medidas de los ángulos agudos del Grupo 1 en la tabla del ítem a).....	104
<b>Figura 95.</b> Respuesta a la pregunta del ítem b del Grupo 1 .....	104
<b>Figura 96.</b> Representación de las casillas de control activadas en el ítem c) por el Grupo 1..	105
<b>Figura 97.</b> Representación de la medida de los ángulos agudos en el ítem a del Grupo 2.....	105
<b>Figura 98.</b> Representación de las medidas de los ángulos agudos del Grupo 1 en la tabla del ítem a).....	106
<b>Figura 99.</b> Respuesta a la pregunta del ítem b del Grupo 2 .....	106
<b>Figura 100.</b> Representación de las casillas de control activadas en el ítem c) por el Grupo 2	107

## Lista de tablas

<b>Tabla 1.</b> Representaciones semióticas de la semejanza de triángulos.....	27
<b>Tabla 2.</b> Objetivos de las actividades del experimento .....	53
<b>Tabla 3.</b> Herramientas del GeoGebra 6.0 .....	114



## Introducción

La presente investigación está orientada a analizar cómo los estudiantes de cuarto año de educación secundaria comprenden la noción de semejanza de triángulos mediante transformaciones en representaciones semióticas de este objeto matemático en una secuencia didáctica mediado en un ambiente de representaciones dinámicas como el GeoGebra.

El interés surge, basada en nuestra experiencia docente y en investigaciones de referencia donde se observa dificultades en algunos estudiantes en el proceso de aprendizaje de la semejanza de triángulos como el establecer la proporción correcta de los lados correspondientes y confundir la noción de semejanza con la noción de congruencia de triángulos.

La estructura de la tesis, está conformada por tres capítulos descritas en el siguiente orden.

En el primer capítulo se presenta la problemática de nuestra investigación, dentro del cual se realizó una revisión de investigaciones en torno a la semejanza de triángulos relacionado con el GeoGebra, presentaremos la justificación de nuestro trabajo, así como el marco teórico, considerando aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS). Luego, presentaremos la pregunta y objetivos de la investigación, además describiremos la metodología el cuál es del tipo cualitativo y los procedimientos metodológicos.

En el segundo capítulo presentamos el objeto matemático de estudio semejanza de triángulos, dentro del cual abordamos los aspectos matemáticos, históricos y epistemológicos de la semejanza de triángulos, aspectos del tema de la semejanza de triángulos en la Educación Básica Regular peruana, considerando el Diseño Curricular Nacional, así como la representación de la semejanza de triángulos en GeoGebra.

En el tercer capítulo, se presenta la parte experimental y análisis de la investigación, en el cual se describe el escenario y los sujetos de investigación, así como la descripción y análisis de la secuencia de actividades elaborada.

Finalmente, presentamos las conclusiones de nuestro trabajo de investigación y sugerencias para futuras investigaciones con el objeto matemático semejanza de triángulos.

## Capítulo I: Problemática

En este capítulo se presenta investigaciones en didáctica de la matemática relacionados con los problemas, dificultades y desafíos que surgen en la enseñanza y aprendizaje en estudiantes de educación secundaria sobre la semejanza y proporcionalidad de figuras geométricas, en caso particular la semejanza de triángulos, así como también aspectos teóricos en torno a la enseñanza de la geometría en entornos o medios de representación. Estas investigaciones contienen estudios realizados con estudiantes de diferentes países cuyas edades fluctúan entre los 12 y 15 años, relacionados con distintas representaciones de la semejanza de triángulos en las cuales utilizan en sus respectivas fases experimentales con ambientes de representaciones dinámicas tales como el GeoGebra, siendo nuestras fuentes de referencias páginas y sitios web, repositorios institucionales de universidades y textos físicos. Posteriormente, se presenta la justificación de nuestro trabajo de investigación, la formulación de la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos de investigación.

### 1.1 Investigaciones de referencia

La tesis de Ducuara y Quiza (2017), menciona que los estudiantes del grado noveno de la educación Básica Colombiana, cuyas edades están comprendidas entre catorce y quince años, donde el equivalente en el Perú es el tercer año de educación secundaria, tienen dificultades en diferenciar las definiciones de semejanza y congruencia de triángulos, una de las razones que indican es que no se tienen en cuenta en el currículo escolar contenidos importantes dentro del desarrollo de la semejanza de triángulos, como el concepto de variación.

El trabajo de investigación de los autores se basa en el Enfoque Instrumental, según el cual los instrumentos presentan una fuerte influencia en la construcción del saber y en sus modos de construcción, pero al mismo tiempo se nota la complejidad del instrumento como variable importante en una situación didáctica, haciendo viable la posibilidad que tiene el profesor de anticipar las acciones de los estudiantes en los desarrollos instrumentales.

Según Artigue (2007, citado en Ducuara y Quiza, 2017)

El instrumento se distingue del objeto, ya sea material o simbólico, en el cual se basa y para el cual utilizamos el término artefacto. Es una entidad mixta constituida por una parte de artefacto y por otra de los esquemas que lo convierten en instrumento (p. 21).

De acuerdo a lo anterior, Ducuara y Quiza (2017) presentan una secuencia didáctica como instrumento en los cuales se proponen actividades que movilicen la actividad matemática

del estudiante, para generar acciones que le permitan reconocer los criterios de semejanza de figuras geométricas, en especial de triángulos, y a su vez desarrollar técnicas instrumentales en el uso del artefacto que sería el ambiente de representaciones dinámica GeoGebra, permitiendo así que los estudiantes tengan una mejor comprensión del objeto matemático.

Así mismo, Ducuara y Quiza (2017) utilizan como metodología el estudio de caso para analizar primordialmente la relación y el desempeño que los estudiantes tienen al interactuar con el GeoGebra, y analizar de manera cualitativa las respuestas de los estudiantes a partir de la guía y la secuencia didáctica elaborado en GeoGebra junto con las tareas propuestas.

Los autores pretenden determinar el efecto que tiene el implementar una secuencia didáctica mediada por GeoGebra, propuesto por medio de instrucciones en una guía, en la construcción y aplicación de las propiedades de la semejanza de triángulos, es decir, desean establecer si el artefacto utilizado se convierte en un instrumento para construir conocimiento matemático a partir de conocimientos previos, lo cual en términos de Rabardel constituye una génesis instrumental del objeto matemático semejanza de triángulos. Los cinco estudiantes que participaron en la investigación fueron voluntarios.

En la parte experimental, en una de estas actividades, los investigadores plantean como objetivo reconocer el criterio ángulo-ángulo de semejanza de triángulos, para esta actividad el estudiante tendrá tres situaciones con las correspondientes preguntas, en las cuales se les presentan las medidas de dos de los ángulos de dos triángulos representados, conociendo las medidas de sus lados, con el fin de observar qué sucede al realizar las modificaciones de las medidas de dichos ángulos y describir qué condiciones deben cumplir, para que los dos triángulos representados sean semejantes.

Para los autores, la elaboración y aplicación de la guía fue beneficiosa para los estudiantes, pues se logró el desarrollo de habilidades en diversos niveles de competencias asociadas con el pensamiento espacial y sistemas geométricos referidas a la semejanza de triángulos, establecidos en los estándares básicos de competencia en matemáticas de Colombia.

Pensamos que, para nuestros propósitos, la parte experimental de la tesis de los investigadores facilita un mejor entendimiento de la semejanza de triángulos en los estudiantes a partir del desarrollo de las actividades propuestas en la guía, por eso la consideramos importante para la propuesta de las nuestras.

Una segunda investigación relacionada con la semejanza de triángulos es la de Julio (2014) orientada a estudiantes de grado séptimo en la educación colombiana, cuyo equivalente

en Perú es el primer año de educación secundaria, cuyos lineamientos y estándares curriculares son propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

El objetivo de la investigación de Julio (2014) consiste en que los estudiantes reconozcan figuras semejantes a partir de las transformaciones en el plano y la semejanza de triángulos.

La investigación de la autora se basa en el enfoque cualitativo el cual propone desarrollar aspectos disciplinares que justifican su investigación tales como congruencia de triángulos, transformaciones geométricas e isometrías en el plano, para luego abordar la semejanza de triángulos y homotecias. En cuanto a los aspectos didácticos, el autor considera necesario para su propuesta los siguientes aspectos: lineamientos y estándares curriculares, la tecnología en el aula, el modelo constructivista del aprendizaje, el modelo de aprendizaje de la geometría expuesto por Van Hiele, los errores y dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En tal sentido, la investigadora propone 8 actividades, todas ellas mediadas por el GeoGebra relacionadas con transformaciones en el plano tales como: traslaciones, rotaciones, simetrías, isometrías y congruencia, homotecias y finalmente semejanza de triángulos, esta última actividad permite a los estudiantes aproximarse, desde el punto de vista constructivista, a la definición de semejanza, utilizando las transformaciones en el plano mediante las herramientas del GeoGebra. En la última actividad se representan dos triángulos equiláteros con el objetivo de aplicar criterios de la semejanza de triángulos para calcular las medidas de los lados correspondientes a los triángulos semejantes, luego calcular el cociente entre las longitudes de dichos lados y así obtener la razón de semejanza. Para ello, la autora menciona que, para el desarrollo de esta actividad, el docente brinde explicaciones de triángulos, polígonos, proporcionalidad y otros que considere pertinentes para este caso.

Entre las conclusiones descritas en la investigación, la autora menciona que la enseñanza de la congruencia y la semejanza deben articularse con el estudio de las transformaciones geométricas. Para este propósito recomienda el uso de recursos tecnológicos como un software de representaciones dinámicas, ya que permiten un mejor entendimiento de las representaciones, además de verificar y desarrollar la comprensión de estos objetos matemáticos.

Consideramos pertinente el aporte de investigación de la autora, ya que nos presenta una forma alternativa de enseñanza de la semejanza de triángulos a los estudiantes, mediante transformaciones geométricas en el plano bajo recursos tecnológicos tales como el GeoGebra.

Una tercera referencia es la de Vanegas (2019), que tiene como objetivo caracterizar las correlaciones que establecen los estudiantes del grado séptimo con edades comprendidas entre doce y trece años de una institución educativa de Colombia, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de semejanza y congruencia de triángulos.

En la descripción del problema de investigación, el autor menciona que, dentro de la institución educativa en estudio, se lograron identificar dificultades en el tratamiento escolar y el aprendizaje de los estudiantes con respecto a las relaciones de semejanza y congruencia de triángulos, así como las correspondientes definiciones no están bien claras en la mayoría de los estudiantes como el hecho de confundir la semejanza y la congruencia con la igualdad.

El autor estableció un marco teórico conformado por aspectos de la Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico y la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), con el fin de implementar acciones dentro de la clase de geometría, con los estudiantes, y analizar, de manera posterior, el logro y nivel de aprendizaje de los estudiantes de estas relaciones que se dan entre la semejanza y congruencia de triángulos.

El marco metodológico del autor está enmarcado en la investigación cualitativa, bajo el enfoque Investigación-Acción Pedagógica, el cual propone al docente que asuma un rol de formulador, desarrollador y evaluador de su ejercicio docente, con el fin de alcanzar mejoras en cuanto a la efectividad de la enseñanza, por medio tres fases: Deconstrucción de la práctica, que corresponde a la identificación de dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las relaciones de semejanza y congruencia de triángulos, en el que se da cuenta en el planteamiento del problema y la formulación de la pregunta de investigación, la segunda fase que es la reconstrucción de la práctica que es lo que corresponde la construcción de materiales para la enseñanza de la semejanza y congruencia de triángulos y la respectiva aplicación a los estudiantes de la institución educativa, entre los cuales el autor plantea una prueba diagnóstica que dé cuenta de los saberes previos de los estudiantes y la tercera fase que es de evaluación en el cual se realiza una evaluación global de la propuesta a fin de valorar el éxito de la nueva practica por medio de una evaluación final de los estudiantes y su posterior análisis comparativo.

En una de las actividades de la investigación del autor, se presenta a los estudiantes las representaciones de dos árboles con las medidas de sus correspondientes sombras, se brinda como información la altura de uno de estos árboles, los estudiantes reconocen la semejanza en formas triangulares y calculan la medida de la altura del otro árbol. Según Vanegas (2019), los significados construidos por los estudiantes durante la actividad, con respecto a la semejanza de

triángulos fueron aquellos que desarrollaron a partir de la interacción con los materiales de enseñanza.

En las conclusiones de Vanegas (2019), se resalta que en el trabajo realizado por los estudiantes se evidencia poco conocimiento de las relaciones de congruencia y semejanza, además de la poca seguridad en la identificación y uso de dichos significados construidos previamente, desde el registro de lenguaje natural y el registro de las figuras geométricas y en el tratamiento de sus representaciones. Sin embargo, el autor señala que los estudiantes lograron establecer las relaciones de congruencia y semejanza de triángulos a partir de la interacción e intercambio de significados entre estudiantes, y estudiantes con materiales para la enseñanza.

Asimismo, el autor señala que el trabajo del docente y de los estudiantes al interior de las clases desde la teoría del aprendizaje significativo crítico y la teoría de registros de representación semiótica, hace que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea más completo en tanto que él estudiante es el principal responsable de su aprendizaje, cuando desde sus saberes previos, construye el saber geométrico.

Pensamos para el propósito de nuestra investigación considerar una de las actividades de la investigación del autor, el cual trata sobre dos problemas geométricos importantes dentro de la historia y el desarrollo del pensamiento espacial como el teorema de Thales y la altura de la pirámide de Keops, donde los estudiantes mediante un adecuado uso de los registros de representación semiótica permiten una mejor comprensión de la semejanza de triángulos.

Una cuarta investigación a considerar es la de Cabral (2019), tiene por objetivo verificar si una secuencia de actividades con enfoque en representaciones dinámicas sobre la semejanza de triángulos puede contribuir al desarrollo del conocimiento de los estudiantes del noveno grado de la educación básica de Brasil cuyo equivalente en Perú es el tercer año de educación secundaria.

El marco teórico en el que se basó la autora es desde la perspectiva de Duval (2008, citado en Cabral, 2019, p. 59) con respecto al aprendizaje en geometría, y la TRRS, para identificar y analizar que registros movilizados pueden contribuir al aprendizaje de la semejanza de triángulos. Asimismo, la autora resalta que, en la TRRS se considera que el aprendizaje en matemáticas no está condicionado a un solo tipo de registro, y que un mismo objeto matemático puede tener diferentes representaciones, según la necesidad y uso.

La metodología que optó Cabral (2019) fue la investigación cualitativa, ya que ésta se presenta acorde con los propósitos y concepciones metodológicas adecuadas al tipo de estudio y problemática.

El experimento que desarrolló la autora fue en dos etapas, en la primera etapa los ocho estudiantes de la educación básica de edades de trece y quince años se familiarizaron con el GeoGebra y la revisión de ciertas nociones geométricas sobre los conocimientos movilizados por los estudiantes relacionados con los contenidos básicos de la geometría plana y la segunda etapa dedicada a las propiedades de la semejanza de triángulos mediante tareas que promueven la coordinación entre registros discursivo, figural y lenguaje natural, considerando además las diferentes aprehensiones que una figura puede provocar.

En una de las actividades se incluyó una tarea que aborda casos de semejanza de triángulos, en donde los estudiantes puedan identificar y conjeturar en base a ampliaciones o reducciones, qué elementos (ángulos o lados) cambian o no y qué se modifican, a fin de identificar el criterio de semejanza de triángulos y su importancia para validar la proporcionalidad entre los lados correspondientes.

Entre las conclusiones de la secuencia de actividades desarrollada en GeoGebra por la autora, se menciona que estas actividades trajeron posibilidades para crear experiencias que hicieron posible que el conocimiento geométrico sucediera de un nivel básico de intuición y conjeturas, brindando condiciones para desarrollar estrategias de trabajo, en un proceso activo e interactivo de discusión y argumentación. También resalta que los estudiantes pudieron pensar geoméricamente, debido al papel heurístico de manipular el software y descubrir las propiedades de la semejanza de triángulos.

Consideramos importantes los aportes de la autora, por la secuencia de actividades presentadas en dos etapas, resaltando en la primera etapa las actividades de familiarización con el GeoGebra y en la segunda etapa las tareas, dado que buscamos desarrollar actividades que promuevan la coordinación entre los registros figural, algebraico y natural, asimismo considerar las aprehensiones de las representaciones figurales en relación al desarrollo de la semejanza de triángulos relacionando con nuestra propuesta de investigación.

Un quinto referente de investigación es de Torres y Matute (2018), cuyo objetivo es fortalecer los criterios de semejanza de triángulos a través de la implementación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para mejorar el componente geométrico. La investigación se desarrolla a través del diseño e implementación de una secuencia didáctica

compuesta por 7 sesiones con actividades variadas con material concreto y desarrollo de guías con el GeoGebra, además de la plataforma Edmodo. La secuencia de actividades se aplicó a 32 estudiantes con edades comprendidas entre catorce y dieciséis años de una institución educativa de Colombia.

La investigación de Torres y Matute (2018) se basa en la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel. Asimismo, los autores señalan que los nuevos conocimientos se logran con mayor éxito cuando se relacionan con los anteriormente adquiridos, manteniéndose la motivación en los estudiantes. También mencionan que para lograr el aprendizaje significativo se requiere que la información brindada al estudiante posea significado lógico y psicológico, esto es, la información clara, organizada y los contenidos deben encontrarse a nivel de desarrollo de los conocimientos previos para que se pueda relacionar e interpretar la información, sin dejar de lado la actitud favorable que debe mostrar el estudiante.

Los autores basan su investigación bajo el enfoque de investigación cualitativa y como método de investigación el enfoque investigación-acción educativa el cual se caracteriza por ser un proceso que se construye desde y para la práctica, en el que se pretende mejorar está practica a través de su transformación, al mismo tiempo que procura comprenderla; así como la participación de los sujetos en la mejora de sus propias prácticas, también exige una actuación grupal por la que los sujetos implicados colaboran coordinadamente en todas las fases del proceso de investigación.

Esta investigación propuesta por los autores consta de tres fases: la primera fase es la prueba diagnóstica cuyo objetivo es detectar los conocimientos previos y competencias geométricas que poseen los estudiantes sobre el concepto semejanza de triángulos, la segunda fase es la etapa de implementación de herramientas TIC y la tercera fase es la planificación y ejecución para dar respuesta a la problemática detectada desde la fase diagnóstica. En esta última fase, una de las actividades de desarrollo con GeoGebra consistía en comprender las modificaciones de las representaciones de dos triángulos cuando varían las medidas de las longitudes de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos al manipular los deslizadores asociados a tales medidas. Posteriormente, los estudiantes manipularán los deslizadores hasta obtener las representaciones de dos triángulos semejantes, para luego verificar la congruencia de los otros dos ángulos de los triángulos y la proporcionalidad entre sus lados correspondientes, comprobándose así el segundo criterio de semejanza lado-ángulo-lado.

Los autores concluyen que los resultados obtenidos satisfacen en buena medida el objetivo planteado al inicio del proyecto. Además, mencionan que los softwares de

representaciones dinámicas, tal como GeoGebra, brindan atributos necesarios para que los estudiantes puedan asimilar los conceptos geométricos de una forma significativa. Cabe resaltar en este caso que Torres y Matute (2018) evidencian mejoras en la comprensión de los criterios de semejanza lográndose capacidad de análisis y argumentación por los estudiantes de las situaciones planteadas en cada sesión propuesta.

Consideramos pertinente esta investigación de los autores, por las actividades mediados por GeoGebra en el cual el uso de la herramienta deslizador permite la manipulación de las representaciones de los triángulos a fin de poder observar las modificaciones en la Vista de grafica en el diseño de la secuencia de actividades de nuestra investigación.

La investigación de Brandt, Moretti y Lopes (2018), presenta resultados de una investigación cualitativa, donde el estudio contempló actividades propuestas a estudiantes del octavo año de la educación básica de una escuela pública en Ponta Grossa, Brasil, con un enfoque en el desarrollo de aprehensiones y deconstrucción. La investigación contempla un estudio que se centra en el pensamiento geométrico, y para ello los autores se apoyaron en la TRRS, mencionando además que la geometría depende de la coordinación simultanea del tratamiento de tres tipos de representación semiótica: el registro discursivo, en lenguaje natural y el registro figural.

Asimismo, los autores mencionan la importancia de un ambiente de representaciones dinámicas (ARD) como GeoGebra por las posibilidades que permite la exploración de representaciones figurales, arrastrándolas, modificándolas o reordenándolas por medio del mouse, ya que según los autores es un punto positivo en relación con una figura estática.

Los autores con esta investigación buscan responder la siguiente interrogante: ¿Qué actividades se pueden desarrollar en un entorno dinámico con el fin de promover la movilización de las operaciones cognitivas de aprehensiones y deconstrucción dimensional? En una de las actividades que involucran la construcción, visualización y conjeturas de una figura, se presenta la modificación óptica de un cuadrado, el cual posee como potencialidad facilitar conceptos de homotecia que se relaciona con la semejanza de figuras en un caso especial el de triángulos, esto es, al permitir una percepción en profundidad de una representación plana, se observa la concurrencia de las rectas que contienen a los vértices homólogos, determinándose así triángulos semejantes que permiten obtener la razón de homotecia.

Brandt, et al. (2018) concluyen que las posibilidades de desarrollar actividades en un ARD como el GeoGebra son amplias, así como la estimulación de la aprehensión perceptiva y

discursiva. Asimismo, sugieren proponer en futuras investigaciones, exploraciones más profundas con movilización de deconstrucción dimensional para resolver problemas geométricos que involucran el rol heurístico de figuras geométricas.

Consideramos importante la investigación de Brandt, et al. (2018), por la relevancia que presenta a los tratamientos en la representación figural de problemas geométricos y las posibilidades de desarrollar las mismas en un entorno de representaciones dinámicas como el GeoGebra, que es lo que pretendemos establecer con la semejanza de triángulos en nuestra investigación.

Finalmente, presentamos la investigación de Salazar y Almouloud (2015) cuyo objetivo es definir el registro figural dinámico, que tiene como base aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y en el empleo de ARD para la enseñanza y aprendizaje de geometría.

Al respecto los autores señalan:

[...] en la enseñanza de la geometría, la tecnología informática se utiliza cada vez más, especialmente en entornos de geometría dinámica (AGD), que permiten, mediante arrastre y manipulación directa, que los estudiantes puedan conjeturar sobre las propiedades de objetos matemáticos representados y, por ejemplo, descalificar construcciones erróneas. (p. 920)

Los investigadores consideran importante el uso de softwares y, en especial los ARD, para el manejo con figuras geométricas ya que da otra mirada a las mismas pues el uso de ello permite realiza agrupamiento por yuxtaposición como por superposición, algo que no es posible hacer de manera simultánea cuando se trabaja con otras herramientas.

Asimismo, los autores mencionan que los ARD como el Cabri y GeoGebra permiten la construcción de representaciones de objetos geométricos y que una característica fundamental de estas aplicaciones son la función de arrastre, que permite el movimiento, y la manipulación directa, que admite cambio de posición, de forma y de medidas de la figura. Además, los ARD facilitan la visualización geométrica de la figura como un engranaje de unidades figurales 0D, 1D o 2D.

Según Duval (1995b), los valores dimensionales se refieren a la dimensión 0 (0D) cuando se trata de puntos, la dimensión 1 (1D) corresponde a líneas o arcos y la dimensión 2 (2D) a polígonos. Por ejemplo, considere un triángulo, al analizar sus valores dimensionales se entiende que es una figura de dimensión 2 (2D) ya que está formada por la unión de segmentos que a su vez tienen dimensión 1 (1D) y los tres puntos de intersección de los segmentos que forman el triángulo tienen dimensión 0 (0D).

Salazar y Almouloud (2015) configuran el registro figural dinámico, cuando las tres actividades cognitivas que permiten configurar un registro de representación semiótica se desarrollan al interactuar con representaciones dentro de un ambiente de representaciones dinámica, esto es formación dinámica, tratamiento dinámico y conversión dinámica.

Como nuestra investigación aborda las transformaciones en los registros de representación semiótica, consideramos de importancia la investigación de los autores, ya que definir un registro figural dinámico en un ARD como el GeoGebra nos permitirá hacer tratamientos en dicho registro figural bajo la secuencia de actividades a desarrollar para la comprensión de nuestro objeto matemático.

Luego de haber revisado investigaciones, artículos y publicaciones, se evidencia la importancia de un ARD en la fase experimental de nuestra investigación cada investigación para tener una mejor comprensión del objeto de estudio semejanza de triángulos.

A continuación, presentamos, los aspectos relacionados con la justificación de nuestro trabajo de investigación.

## **1.2 Justificación**

El presente trabajo de investigación surgió por el interés de que los estudiantes de cuarto grado de secundaria superen sus dificultades en la comprensión de la noción de semejanza de triángulos y estudiar los tratamientos que ellos realizan en la representación de este objeto matemático, por medio de una secuencia didáctica mediada por GeoGebra, por lo cual aportaremos justificaciones sobre el estudio de este objeto matemático.

Según Gualdrón y Gutierrez (2006, citado en Briceño y Alamillo 2017, p. 2), uno de los temas de geometría que los estudiantes consideran haber tenido dificultad en el aprendizaje, es la semejanza de figuras planas y tridimensionales, cuando las medidas de las longitudes de los lados de las figuras no se expresan en valores enteros, y que recurren a la estrategia aditiva de forma errónea. Asimismo, los autores mencionan que la comprensión de la semejanza se verá reflejada en la concepción que tengan al respecto y que el aspecto visual de la razón, en la representación geométrica es de vital ayuda. Como resultado Gualdrón y Gutierrez (2006, citado en Briceño y Alamillo 2017, p. 2), describen que los estudiantes logran ver que la estrategia aditiva es incorrecta y que al finalizar la experimentación los estudiantes superaron las dificultades por medio de las actividades propuestas donde consiguen evidenciar la razón de semejanza.

La investigación de Ducuara y Quiza (2017), evidencia que los estudiantes de edades entre catorce y quince años de la educación básica colombiana tienen dificultades en distinguir las definiciones de semejanza y congruencia de triángulos, esto debido a que en el currículo escolar generalmente se estudian los criterios de semejanza de triángulos, omitiendo el concepto de variación el cual, según los autores, es muy importante en distintos temas de la matemática.

Los autores señalan la importancia de involucrar un ARD como el GeoGebra ya que podría facilitar o contribuir a la comprensión de la semejanza de triángulos mediante actividades prácticas que permitan develar propiedades y relaciones propias de la semejanza de triángulos.

Por su parte, Julio (2014) señala en su investigación que los estudiantes, presentan dificultades cuando estudian las definiciones de semejanza y congruencia de triángulos. En tal sentido, la autora plantea en su investigación, una propuesta didáctica que tiene como propósito que estos estudiantes reconozcan figuras semejantes a partir de las transformaciones geométricas en el plano.

Vanegas (2019) en su investigación muestra los alcances en una propuesta de intervención desde la Teoría del Aprendizaje Significativo y la Teoría de Registros de Representación Semiótica para el aprendizaje en las relaciones de semejanza y congruencia de triángulos, en el que se evidenció mejoras en los estudiantes en la forma de aprender significados al momento de visualizar, modificar y transformar las representaciones de dos triángulos.

La investigación de Cabral (2019) señala la importancia sobre el uso de un ARD, como el GeoGebra, ya que este software permite la interacción de los estudiantes con el objeto en estudio y tener una mejor comprensión de la misma.

En la misma línea, la investigación de Torres y Matute (2018) propone fortalecer los criterios de la semejanza de triángulos a través de la implementación de las TIC tales como GeoGebra y Edmodo, observándose que los estudiantes obtuvieron mejores resultados tanto en el manejo de los conceptos como en el ámbito actitudinal y motivacional.

En la investigación de Brandt, Moretti y Lopez

(2018) se señala la relevancia de desarrollar actividades en un entorno de ARD como el GeoGebra ya que promueven la movilización de las operaciones cognitivas de aprehensión perceptiva y operativa, además de hacerse presente las modificaciones ópticas y posicionales simultáneamente, lo que lo hace diferente de un ambiente estático.

Pensamos que, el hecho de recabar información de cómo los estudiantes realizan tratamientos en el registro figural de la semejanza de triángulos en una actividad mediado por GeoGebra ayude a entender la problemática y así realizar propuestas sobre este objeto matemático, esto gracias a que el GeoGebra cuenta con las herramientas de arrastre y deslizadores, entre otros tal como mencionan Brandt, Moretti y Lopez (2018) y con modificaciones en dicha actividad, en un futuro pueda contribuir a entender mejor este objeto matemático.

Una de las competencias propuestas en el Currículo Nacional De Educación Básica del Ministerio de Educación (MINEDU, 2017), es *resuelve problemas de forma, movimiento y localización*, relaciona a los conocimientos de la Geometría y señala que:

Consiste que el estudiante se oriente describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando interpretando y relacionando las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales. Implica que realice mediciones directas e indirectas de la superficie, del perímetro, del volumen y de la capacidad de los objetos y que logre construir representaciones de las formas geométricas para diseñar objetos, planos y maquetas, usando instrumentos, estrategias y procedimientos de construcción y medida. Además, describa trayectorias y rutas, usando sistemas de referencia y lenguaje geométrico (Perú, Ministerio de Educación, 2016, p. 154).

En tal sentido, nuestro objeto de estudio que es la semejanza de triángulos es un contenido inmerso en la Geometría Plana que contribuye a la concreción de la competencia enunciada anteriormente por medio del estándar de aprendizaje en el nivel 6, tal como lo señala el MINEDU, a través del Currículo Nacional De Educación Básica, el cual se menciona como:

Resuelve problemas en los que modela las características de objetos mediante prismas, pirámides y polígonos, sus elementos y propiedades, y la semejanza y congruencia de formas geométricas; así como la ubicación y movimiento mediante coordenadas en el plano cartesiano, mapas y planos a escala, y transformaciones. Expresa su comprensión de las formas congruentes y semejantes, la relación entre una forma geométrica y sus diferentes perspectivas; usando dibujos y construcciones. Clasifica prismas, pirámides y polígonos, según sus propiedades. Selecciona y emplea estrategias, procedimientos y recursos para determinar la longitud, área o volumen de formas geométricas en unidades convencionales y para construir formas geométricas a escala. Plantea afirmaciones sobre la semejanza y congruencia de formas, relaciones entre áreas de formas geométricas; las justifica mediante ejemplos y propiedades geométricas (Perú, Ministerio de Educación, 2016, p. 157).

Asimismo, según Escudero (2005) los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas resaltan la importancia de la semejanza y el teorema de Thales, quien a su vez hace un análisis a los textos correspondientes a estudiantes cuyas edades varían entre 11 y 16

años durante la segunda mitad del siglo XX, distinguiendo tres momentos en la evolución histórica de la semejanza que le permitió identificar tres aproximaciones al concepto de semejanza cuando se considera como objeto de enseñanza.

La noción de semejanza en matemática está muy ligado a la noción de proporcionalidad tal como está indicado en las competencias del Currículo Nacional De Educación Básica, los estudiantes pueden relacionarlos en lo cotidiano por ejemplo dos fotografías de la misma persona, una que es la original y la otra que fue ampliada; también cuando una persona desea determinar la distancia entre dos ciudades utilizando para ello un mapa con la escala correspondiente, para luego medir con una regla la distancia entre las dos ciudades en el mapa y así obtener la distancia real entre las ciudades. Es importante, que los estudiantes realicen modelación matemática de la semejanza de triángulos aplicada a la vida cotidiana, ya que posibilitan el desarrollo de competencias críticas, comprensión de sus propios contextos y aspectos sociales en la formación como ciudadanos. Al respecto Villa-Ochoa (2015) menciona que:

Los planteamientos expuestos anteriormente ponen de relieve la necesidad de proponer mayores alternativas para establecer vínculos entre las matemáticas escolares y la vida cotidiana de los estudiantes; asimismo la indagación sobre los factores que pueden intervenir en las maneras en que los profesores establecen estos vínculos y los integran en los currículos escolares también debe seguir siendo objeto de estudio. (p. 135)

Gay, Tito y San Miguel (2014, citado en García y Izquierdo, 2017, p. 12), mencionan que GeoGebra facilita la conversión y la interacción con los registros de representación semiótica de un mismo objeto matemático, lo que hace posible el estudio y análisis de los conceptos de cada representación, lo que conlleva al desarrollo del pensamiento matemático de cada objeto.

Pensamos que, la enseñanza de la semejanza de triángulos al estar ligado al concepto de proporcionalidad, es importante en la educación básica regular porque sirve de base para otros conceptos de geometría como las relaciones métricas en el triángulo, relaciones métricas en la circunferencia, relaciones de áreas y volúmenes de figuras semejantes, etc.

Además, una propuesta didáctica por un medio ARD como el GeoGebra y el registro figural dinámico establecido, permitirá una mejor comprensión de la semejanza de triángulos por las herramientas con la que cuenta el software como lo son el arrastre y los deslizadores, así como la manipulación de las mismas, permitiendo así facilitar el aprendizaje de las propiedades de la semejanza de triángulos, interiorizarlas y aplicarlas luego en un contexto real.

A continuación, presentamos aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica que utilizaremos en nuestra investigación.

### **1.3 Aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica**

Nuestra presente investigación estudia los tratamientos y conversiones en los diferentes registros de representación semiótica por medio de la Teoría de Registros de Representaciones Semiótica y su ampliación al Registro Figural Dinámico (RFD).

Duval (2006) señala que la comunicación se establece en base a representaciones, ya sea escritura decimal o fraccional, símbolos, gráficos, esquemas de figuras, entre otros.

El autor también señala que los sistemas de representación semiótica deben cumplir tres actividades cognitivas inherentes a toda representación semiótica: formación, tratamiento y conversión.

- La formación de una representación compatible como representación de un registro dado, garantizando las condiciones para su identificación y reconocimiento, y la posibilidad de su uso para tratamientos.
- El tratamiento, según Duval (2006), consiste en una transformación interna a un registro de representación o, a un sistema, es decir, la transformación de esta representación en el mismo registro donde se formó.
- La conversión, por otro lado, puede entenderse como una transformación externa en relación con el registro de la representación de salida, es decir, el registro se cambia manteniendo el contenido en su totalidad.

Cambiar de un registro a otro no solo significa cambiar el tratamiento de un objeto, sino también explicar sus propiedades o aspectos sistémicos. El acceso a los diferentes registros de representación semiótica en una actividad matemática generalmente no ocurre de manera natural y el docente debe fomentar este acceso. En virtud a esto, se observa que el tratamiento es la transformación más priorizada en la enseñanza, privilegiando la forma sobre el contenido.

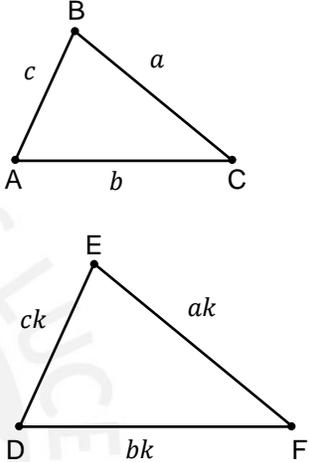
Así mismo no todos los sistemas de representación semiótico permiten todas las actividades cognitivas fundamentales como por ejemplo el código Morse.

De acuerdo con Duval (2006), en geometría se requiere de tres registros de representación: representación: figural, algebraico y el de lenguaje natural. Respecto al registro

numérico, si bien nuestra investigación incluye representaciones fraccionarias debido a la proporcionalidad de los lados, lo consideramos también como registro algebraico.

En la siguiente tabla 1, presentamos representaciones semióticas de la semejanza de triángulos (caso LLL) en los diferentes registros de representación semiótica.

**Tabla 1.** Representaciones semióticas de la semejanza de triángulos

Lenguaje natural	Algebraico	Figural
<p>Los lados representados por <math>\overline{DE}</math>, <math>\overline{EF}</math> y <math>\overline{DF}</math> del triángulo DEF son proporcionales a los lados representados por <math>\overline{AB}</math>, <math>\overline{BC}</math> y <math>\overline{AC}</math> del triángulo ABC, cuya constante de proporcionalidad es representada por <math>k</math></p>	$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k$	

Fuente. Adaptado de Duval, 1995b

En la tabla 1, se observa que en el registro natural se indican las representaciones de los triángulos semejantes ABC y DEF, con la definición de semejanza de triángulos se tiene en el registro algebraico la proporción entre las longitudes de los lados y en el registro figural se observa la representación de los triángulos semejantes ABC y DEF.

Para Duval (2006), es a través del registro de representación que el individuo declara conscientemente lo que se observa sobre un objeto. En el caso de la geometría, es posible tener la representación, por ejemplo, de dos triángulos semejantes en la forma: simbólico, lenguaje natural o figural.

Los requisitos cognitivos a tener en cuenta en los registros de representación semiótica son:

- La propiedad de transformación, porque el procesamiento matemático siempre implica alguna transformación de representaciones semióticas.

- El empleo de diversos sistemas de representación semiótica permita la elección de una según el propósito de la actividad que será construida mediante una coordinación interna con los demás.

Según Duval (2006), estas dos caras de la actividad matemática, no se pueden separar una de la otra, ya que son necesarias para comprender los problemas de aprendizaje, y a la vez proporcionan la idea clave para analizar procesos cognitivos que están involucrados en el pensamiento matemático. Asimismo, el autor menciona que se deben distinguir dos clases de transformaciones de los registros de representación semióticas: la conversión y el tratamiento. El tratamiento se refiere a las reglas de transformación que se hacen en un mismo registro, mientras que la conversión es un cambio de representación entre dos registros de representación distintos.

### **Registro Figural Dinámico**

De acuerdo con la investigación de Salazar y Almouloud (2015) quienes resaltan la importancia de los ambientes de representaciones dinámicas (ARD) al respecto afirman que:

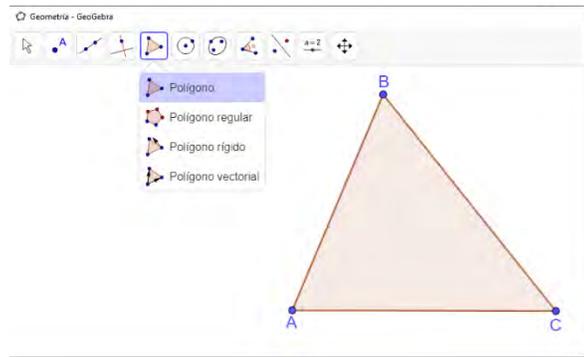
[...] cuando el sujeto interactúa con AGD, las tres actividades cognitivas fundamentales para la constitución de un registro, formación, tratamiento y conversión, específicamente en el registro figural, se realizan de manera diferente, ya que las funciones de arrastre y manipulación directa permiten construir relaciones entre los tratamientos figural y discursivo de la figura de una manera diferente en relación a cuando se trabaja en un entorno no dinámico. (p. 927)

Por ejemplo, cuando a partir de un triángulo se obtuvo otro triángulo semejante al primero mediante la herramienta homotecia con un factor  $k=0.44$ , si cambiamos el valor por  $k=0.5$  tendremos otro triángulo semejante al primero, estableciendo un tratamiento en la figura que es una manera diferente cuando uno trabaja con lápiz y papel.

Asimismo, los investigadores establecen tres actividades cognitivas esenciales para la constitución del registro figural en un ARD que son formación dinámica, tratamiento dinámico y conversión en ambientes de representaciones dinámicas.

- Una formación dinámica se da cuando el sujeto, para representar un objeto geométrico elige una herramienta del ARD que le permite crear una figura, para ello el sujeto moviliza conocimientos de geometría.

**Figura 1.** Formación de representación de un triángulo



En la figura 1, se observa la herramienta Polígono del ARD GeoGebra para representar al triángulo ABC.

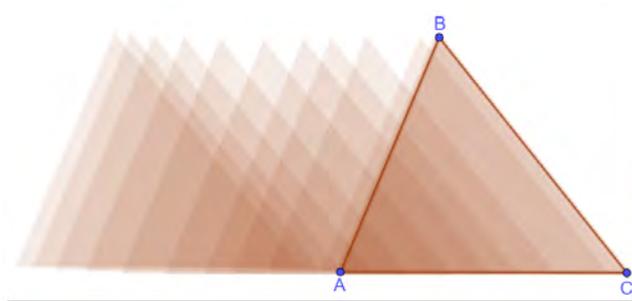
Salazar y Almouloud (2015) mencionan que las reglas de representación en un ARD dependen de la elección de unidades figurales elementales y su combinación.

- Una afirmación que refuerza la pertinencia de configurar lo que se denomina tratamiento dinámico, según Duval (2011) para un tratamiento es la siguiente

Las figuras se muestran en el monitor a la misma velocidad que la producción mental, pero con una potencia de tratamientos ilimitados frente a las posibilidades de la modalidad gráfico-visual. Obtenemos, de inmediato, mucho más que cualquier cosa que pudiéramos obtener a mano alzada después de, quizás, varios días de escritura y cálculo o construcción de figuras. (p. 137)

Al respecto, los autores señalan, que en el registro figural dinámico se aceleran los tratamientos y se pueden realizar variaciones de una figura, como el cambio de posición, el cambio del tamaño del lado de una figura o reconfigurarla lo cual en términos de Duval (2006) constituye una reconfiguración figural. También mencionan, que esta aceleración induce al sujeto a utilizar propiedades para construir una figura determinada.

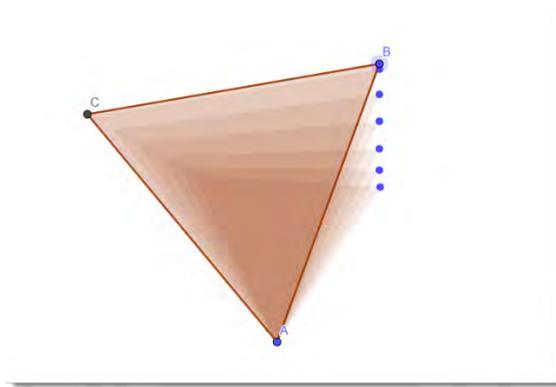
**Figura 2.** Cambio de posición de una figura



*Fuente.* Adaptado de Salazar y Almouloud, 2015

En la figura 2, se muestra la modificación posicional del triángulo ABC, al modificar de manera instantánea la posición de la figura en el área de trabajo del ARD GeoGebra, activando la opción rastro, el cual según Salazar (2018) es un tratamiento por manipulación directa.

**Figura 3.** Cambio en la longitud de los lados de un triángulo y su posición

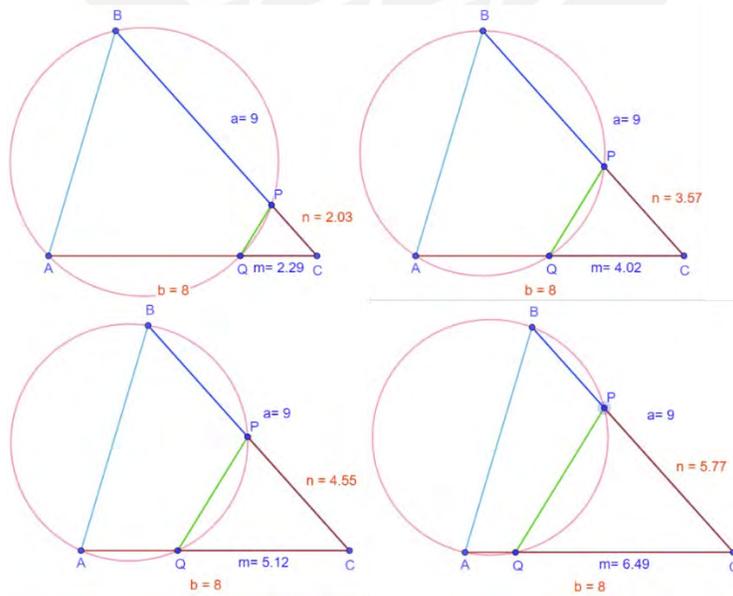


*Fuente.* Adaptado de Salazar y Almouloud, 2015

En la figura 3, se muestra al arrastrar el vértice B del triángulo equilátero ABC representado en un ARD GeoGebra, las longitudes de los lados del triángulo cambian de manera proporcional sin alterar la forma del triángulo.

En nuestro estudio, la modificación posicional de una figura semejante la realizaremos mediante la herramienta Mueve del ARD GeoGebra, tal como se muestra en la figura 4.

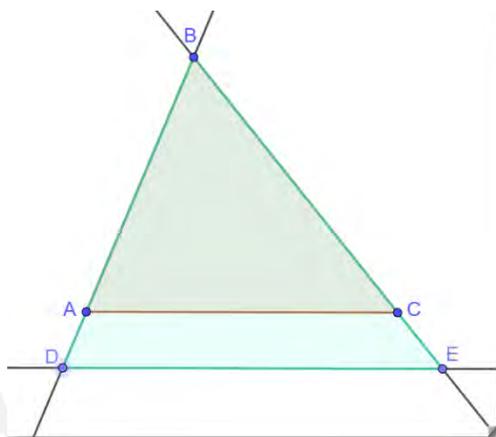
**Figura 4.** Modificación posicional de una figura semejante



*Fuente.* Adaptado de Salazar y Almouloud, 2015

En la figura 5, las diferentes posiciones en las que se ubicó el punto P por medio de la herramienta Mueve y por intersección de la circunferencia que contiene a los puntos A, B y P se determina el punto Q observándose la modificación posicional del triángulo QPC.

**Figura 5.** Reconfiguración de una figura



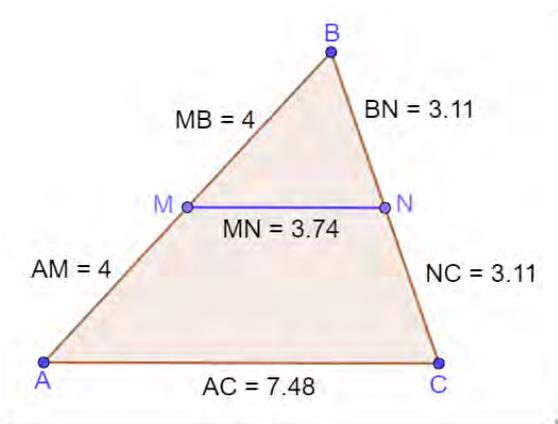
*Fuente.* Adaptado de Salazar y Almouloud, 2015

En la figura 5, se muestra la reconfiguración figural del triángulo ABC a partir del triángulo DEF, esto es dado el triángulo ABC representado en el ARD GeoGebra, mediante la herramienta Recta creamos rectas que contienen a los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ , luego con la herramienta Punto en objeto ubicamos el punto D y con la herramienta Paralela se crea la recta que contiene al punto D y es paralela al lado  $\overline{AC}$ , así con la herramienta Intersección determinamos el punto E para finalmente con la herramienta polígono crear el triángulo DBF. Al utilizar la herramienta Mueve, en el punto D, se observará triángulos semejantes al triángulo inicial ABC.

- Una conversión dinámica es una conversión que se realiza de lengua natural a representación figural en un ARD, donde en él se pueden realizar tratamientos dinámicos. Un ejemplo, se muestra en lo siguiente:

En un triángulo ABC, en los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  se ubican los puntos medios M y N.  
 Calcule la razón de proporcionalidad entre las longitudes de los lados  $\overline{MN}$  y  $\overline{AC}$ .

**Figura 6.** Representación del problema

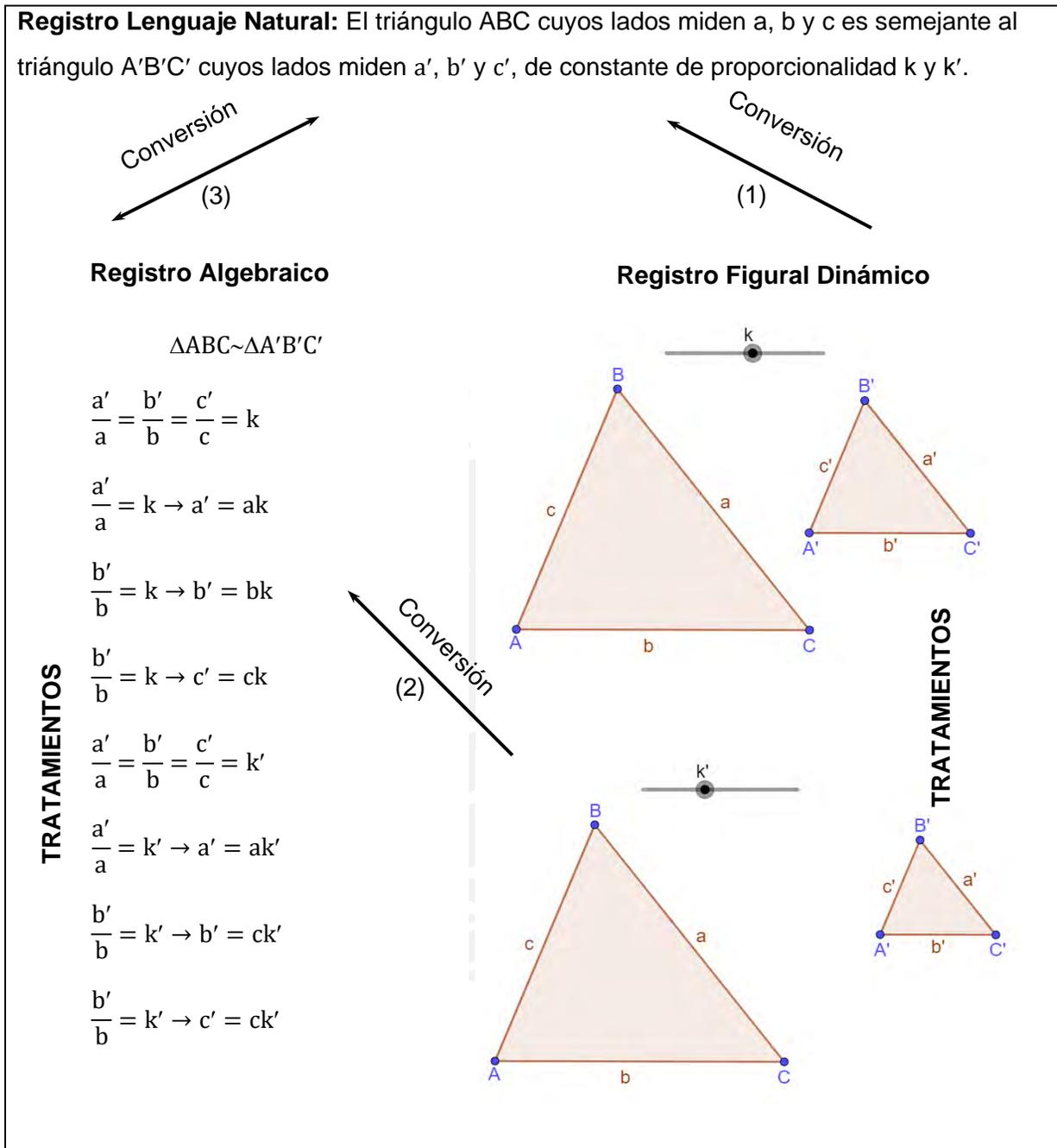


En la figura 6, se representa un triángulo ABC en el ARD GeoGebra, haciendo uso de la herramienta Polígono construimos el triángulo ABC, luego con la herramienta Medio o Centro ubicamos los puntos medios M y N de los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ . Luego, con la herramienta Distancia o longitud medimos los segmentos determinados y el lado  $\overline{AC}$ . Finalmente, con el criterio lado-lado-lado de la semejanza de triángulos afirmamos que los triángulos ABC y MBN son semejantes.

Una vez establecido las tres actividades cognitivas esenciales, afirmamos que el registro figural en el ARD se configura en lo que llamamos según Salazar y Almouloud (2015) registro figural dinámico (RFD).

En la figura 7, se muestra los dos tipos de transformaciones que son conversión y tratamiento de la semejanza de triángulos entre sus tres tipos de registros de representación semiótica

**Figura 7.** Transformaciones de una Representación Semiótica a otra.



Fuente: Adaptado de Duval 2006, p. 146

En la figura 7 se puede observar que la conversión (1) se realiza del RFD al registro de lengua natural y en solo una dirección debido a que el dinamismo no se da en este último registro, en cambio en el RFD la representación no se realiza en forma inmediata, para ello se realiza la representación de dos triángulos semejantes mediante la herramienta homotecia y el factor de homotecia k donde  $0 < k < 1$ , previamente hacemos uso de la herramienta deslizador. En este

último registro podemos realizar tratamientos como la reconfiguración figural del triángulo  $A'B'C'$  al hacer uso del deslizador  $k$  mediante la función arrastre.

La conversión (2) se realiza del registro figural dinámico al registro algebraico y en solo dirección, esto se efectúa mediante herramientas propias de ARD, por medio de la casilla de control y se puede validar tomando los valores de las longitudes de los lados obtenidos en la vista algebraica del ARD al efectuar el cociente de estos obteniéndose el factor de homotecia  $k$ . En este caso el ARD, mostrara cuando se realiza tratamiento con deslizador en el RFD, el cambio del valor de  $k$  al valor de  $k'$ .

La conversión (3) se realiza en doble sentido ya que se puede pasar del registro algebraico registro natural y viceversa. En la representación algebraica de la semejanza de triángulos la correspondencia entre los vértices es biunívoca, esto permite la conversión entre ambos registros.

En nuestra investigación estamos interesados en las transformaciones entre estos registros de representación semiótica de la semejanza de triángulos a fin de analizar como los estudiantes realizan estas transformaciones entre dichos registros.

A continuación, presentamos la pregunta y los objetivos de nuestra investigación.

#### **1.4 Pregunta y objetivos de la investigación**

El problema de investigación se resume en la siguiente pregunta: ¿Cómo los estudiantes de cuarto año de educación secundaria comprenden la noción de semejanza de triángulos mediante transformaciones en representaciones semióticas de dicho objeto en una secuencia didáctica mediada por GeoGebra?

##### **Objetivo General**

Analizar cómo los estudiantes de cuarto año de educación secundaria comprenden la semejanza de triángulos al realizar transformaciones en las representaciones semióticas de dicho objeto en una secuencia didáctica mediado por GeoGebra.

##### **Objetivos específicos**

1. Identificar los conocimientos de los estudiantes de cuarto año de educación secundaria para que puedan comprender mejor la noción de semejanza de triángulos.
2. Identificar las transformaciones que realizan los estudiantes de cuarto año de educación secundaria en las representaciones semióticas de semejanza de triángulos en una secuencia didáctica mediada por GeoGebra.

3. Identificar las conversiones entre los registros figural dinámico, lengua natural y algebraico en las representaciones de la semejanza de triángulos que realizan estudiantes de cuarto año de educación secundaria en una secuencia didáctica mediada por GeoGebra.

### **1.5 Metodología y procedimientos**

En nuestra investigación la metodología se basa en una investigación cualitativa, al respecto Martínez (2006) afirma que:

Pese a que las metodologías cualitativas están reservadas a la construcción o generación de teorías, a partir de una serie de observaciones de la realidad objeto de estudio, haciendo uso del método inductivo, según el cual se debe partir de un estado nulo de teoría [...] De esta manera, el marco teórico se constituye en una parte importante de una investigación –independientemente del tipo de metodología utilizado–, toda vez que ésta se beneficiará de sus aportaciones científicas. (p. 169)

Por otra parte, Hernández, Fernández y Baptista (2017) señala que la investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas, además de aportar un punto de vista “fresco natural y completo” de los fenómenos, así como la flexibilidad.

Asimismo, la investigación que estamos llevando a cabo tiene como foco de estudio el objeto matemático semejanza de triángulos cuyo objetivo es analizar como los estudiantes comprenden la semejanza de triángulos al realizar transformaciones en las representaciones semióticas de dicho objeto en una secuencia de actividades de la semejanza de triángulos, esto nos permite considerar nuestra investigación del tipo cualitativo descriptivo.

Hernández, et al (2017) señalan que la investigación cualitativa comienza con la idea de que es lo que el investigador va a estudiar y a su vez estar familiarizado con el tema en cuestión. En nuestra investigación, la experiencia docente adquirida en la enseñanza de la Geometría a estudiantes de cuarto año de secundaria, motivó el estudio de la semejanza de triángulos ya que en ella se dan representaciones semióticas en su estudio, así como aplicaciones de este objeto matemático en la vida real.

Según los autores, luego de tener claro el tema a investigar se plantean los objetivos de la investigación y como complemento a dichos objetivos se plantean las preguntas de investigación el cual se busca responder al final del estudio para lograr los objetivos.

Por otro lado, Hernández, et al (2017) mencionan que el proceso cualitativo resalta la importancia de la justificación del trabajo ya que debe tener criterios como la conveniencia,

relevancia social, relevancia académica y la viabilidad del mismo. En nuestra investigación, se justifica en investigaciones de referencia concerniente al aprendizaje y enseñanza de nuestro objeto matemático semejanza de triángulos, así como en el currículo básico nacional del Perú.

Hernández, et al (2017) señalan que, una vez que se tiene realizado el planteamiento del problema, se debe elegir un ambiente en el cual se empezará a responder la pregunta de investigación. En nuestro caso, se tramitó los permisos necesarios con el promotor de la institución educativa donde se aplica la actividad, debido al estado de emergencia en la que se encuentra el país por la situación del COVID-19 se realizará en forma remota en una sesión Zoom, siendo Zoom un servicio de videoconferencia basado en la nube que puede usarse para reunirse virtualmente con otras personas.

Asimismo, los autores indican que, una vez elegido el ambiente, el investigador debe decidir quienes formaran parte de la muestra en nuestro caso los sujetos son cuatro estudiantes del cuarto grado de educación secundaria del colegio Nikola Tesla del distrito de Villa María del Triunfo de la ciudad de Lima-Perú donde cada estudiante tiene una computadora personal. También los autores mencionan que se debe recabar información sobre lo relacionado a los participantes. La recolección de datos de los sujetos de estudio se puede realizar a través de diversas técnicas como entrevistas, grabaciones, análisis de documentos, entre otros.

Con la obtención de los datos, estos deberán ser analizados por el investigador el cuál a su vez toma una postura reflexiva y procura minimizar sus creencias y experiencias relacionadas con el problema de investigación. Para nuestra investigación, la obtención de datos, el cual es la secuencia didáctica, debido a la situación del COVID-19 en la que nos encontramos, los apuntes de observación se obtendrán de forma remota, las videograbaciones se obtendrán de las cuentas Zoom que se programe para la experimentación. Luego, con los datos obtenidos se procedió a analizarlos respaldándonos en la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

Los autores, señalan que en la investigación cualitativa no se cuenta con etapas estructuradas en un orden específico, ya que en algún punto a veces es necesario retomar ciertos puntos ya realizados con la finalidad de responder la pregunta de investigación.

Finalmente, para los autores los reportes de resultados cualitativo son más flexibles y lo que los diferencia es que se desarrollan mediante una forma y esquema narrativos. La estructura del reporte cualitativo más común en una investigación es el siguiente:

1. Portada
2. Índices

3. Resumen
4. Cuerpo de trabajo
  - Introducción: Incluye los antecedentes
  - Revisión de la literatura
  - Método
  - Análisis y resultados
  - Discusión
5. Referencias o bibliografía
6. Apéndices

Por todo lo expuesto, consideramos que nuestro estudio tiene las características de una investigación cualitativa.

### **Procedimientos metodológicos de la investigación**

Para analizar como los estudiantes de cuarto año de educación secundaria movilizan la noción de semejanza de triángulos en una secuencia de actividades que requieren los registros de lengua natural, algebraico y figural dinámico, se plantean las siguientes etapas:

#### a) Elección del tema

En esta primera etapa, decidimos llevar a cabo una investigación relacionada con la semejanza de triángulos en base a la Teoría de Registros de Representación Semiótica con estudiantes de cuarto de año de secundaria.

#### b) Levantamiento bibliográfico

Con la elección de nuestro tema de estudio, se realiza la búsqueda de investigaciones que están relacionadas con el objeto de estudio el cuál es la semejanza de triángulos, además de investigaciones relacionadas con el marco teórico que es nuestro caso es la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Asimismo, se revisaron los mapas de progreso del aprendizaje y el currículo nacional de educación básica, así como la revisión de libros didácticos a fin de obtener información referente a la semejanza de triángulos.

#### c) Formulación del problema

En nuestra investigación se estableció la pregunta de investigación el cuál es *¿cómo los estudiantes de cuarto año de educación secundaria comprenden la noción de semejanza de triángulos mediante transformaciones en representaciones semióticas de dicho objeto en una secuencia didáctica mediada por GeoGebra?*, luego se presenta el objetivo general el cual consiste en analizar cómo los estudiantes de cuarto año de educación secundaria

comprenden la semejanza de triángulos al realizar transformaciones en las representaciones semióticas de dicho objeto en una secuencia didáctica mediado por GeoGebra.

La justificación en nuestro estudio se da con las investigaciones de referencias, donde se evidencian su preocupación en el aprendizaje y enseñanza de la semejanza de triángulos en la educación básica regular.

d) Elaboración del plan provisional

Nuestro estudio se estructura de acuerdo al índice que está conformado por tres capítulos, como sigue:

Capítulo I: Problemática de la investigación. – En este capítulo se hace revisión de investigaciones de referencias respecto del objeto matemático semejanza de triángulos, se plantea la justificación a nuestra investigación. Asimismo, se revisan aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y la metodología de investigación, así como los procedimientos metodológicos.

Capítulo II: Aspectos matemáticos y didácticos. – En este capítulo se revisan aspectos históricos y matemáticos de la semejanza de triángulos, además del abordaje de este objeto matemático en el currículo nacional de educación básica regular del Perú, así como en libros didácticos. Asimismo, la representación de la semejanza de triángulos en un ambiente de representaciones dinámica como el GeoGebra.

Capítulo III: Parte experimental. – Finalmente, en este capítulo se presenta el análisis y descripción de la parte experimental de nuestra investigación.

e) Diseño y aplicación de la secuencia didáctica

Se diseña una secuencia de tres actividades, con la finalidad de promover que los estudiantes movilicen sus conocimientos respecto de la semejanza de triángulos para ello utilizaran los registros de representación semiótica de lengua natural, algebraico y registro figural dinámico. Cabe resaltar, que para el desarrollo de esta actividad se solicitaron al promotor de la institución educativa la participación de los cuatro estudiantes que realizaron esta secuencia de actividades.

f) Análisis de la secuencia didáctica

Luego de la aplicación de la secuencia de actividades, se analiza y describe la información obtenida respaldándonos en la Teoría de Registros de Representación Semiótica.

g) Redacción del informe

Finalmente, se formulan las conclusiones, reflexiones y consideraciones finales para futuras investigaciones.

En el capítulo siguiente se presentan aspectos matemáticos y didácticos de nuestro objeto de estudio semejanza de triángulos.



## Capítulo II: Aspectos matemáticos y didácticos de la semejanza de triángulos

En este capítulo presentaremos los aspectos matemáticos de la semejanza de triángulos, enunciamos primero la evolución histórica de la semejanza de triángulos, también presentaremos el objeto matemático en mención en un libro de geometría superior que nos permitirá realizar la descripción de la semejanza de triángulos desde el punto de vista formal y matemático, presentaremos además un estudio de nuestro objeto matemático en los libros de textos utilizados en las escuelas públicas de nuestro país en los últimos años, los Mapas de Progreso 2019, veremos cómo se presenta el objeto matemático en el libro de cuarto año de educación secundaria y finalmente describiremos como se representa la semejanza de triángulos en GeoGebra.

### 2.1 Aspectos matemáticos

En este apartado realizaremos un estudio de la semejanza de triángulos considerando su desarrollo histórico desde Euclides (citado en Ortiz, 2005, p.p. 117-206) quien escribió el libro “Los elementos”, dentro del cual en el libro VI, se hace presente la definición de figuras semejantes, previamente en el libro V se aborda la teoría de proporciones: “Figuras rectilíneas semejantes son aquellas figuras que tienen sus ángulos severamente iguales y los lados que conforman los ángulos son proporcionales”. (p. 164)

Podemos observar, que Euclides no define la semejanza de triángulos, sino que define figuras semejantes, sin embargo, el libro VI contiene además de 4 definiciones, 33 proposiciones, entre las cuales 8 hacen referencia a triángulos semejantes.

#### La semejanza de triángulos en el libro de geometría plana

En nuestra investigación consideramos la definición y los teoremas de la semejanza de triángulos propuestas por Moise y Downs (1966), en el cual aborda la definición de la semejanza entre dos triángulos como sigue: “Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia se llama *semejanza* y decimos que los triángulos son *semejantes*”. (p. 327)

Según el autor, la definición de semejanza exige dos cosas: primero los ángulos correspondientes deben ser congruentes, y segundo los lados correspondientes deben ser proporcionales. Para el caso de triángulos si se cumple una de las condiciones, también se

cumple la otra. Estas relaciones se presentan en los teoremas de semejanza AAA y LLL, el cual el autor los describe en los teoremas fundamentales de la semejanza:

**Teorema 1.** Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza.

**Figura 8.** Teorema de la semejanza de triángulos AAA

**O de otro modo:** Sea dada una correspondencia  $ABC \leftrightarrow DEF$  entre dos triángulos. Si  $\angle A \cong \angle D$ ,  $\angle B \cong \angle E$  y  $\angle C \cong \angle F$ , entonces  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

Fuente. Moise y Downs, 1966, p. 336

**Teorema 2.** Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los ángulos comprendidos son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza

**Figura 9.** Teorema de la semejanza de triángulos LAL

**De otro modo:** Se dan los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ , y la correspondencia

$$ABC \leftrightarrow DEF.$$

Si  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

y  $\angle A \cong \angle D$ ,

entonces  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .

Fuente. Moise y Downs, 1966, p. 342

**Teorema 3.** Se da una correspondencia entre dos triángulos. Si los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia es una semejanza.

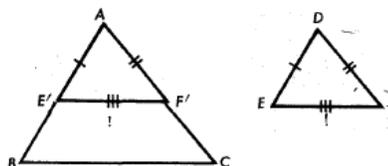
**Figura 10.** Teorema de la semejanza de triángulos LLL

**O de otro modo:** Se dan los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$ , y la correspondencia

$$ABC \leftrightarrow DEF.$$

Si  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ ,

entonces  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ .



Fuente. Moise y Downs (1966, p. 343)

Como podemos observar, la definición y los teoremas propuesta por Moise y Downs (1966) hace referencia a una correspondencia entre los triángulos dado por los vértices, la cual permite identificar los ángulos congruentes y los lados proporcionales. Estos teoremas, suelen llamarse criterios o casos de semejanza en la Currículo Nacional de Educación Básica del Perú y en desarrolla de la parte experimental de nuestra investigación va hacer de suma importancia ya que permitirá a los estudiantes el reconocimiento de dos triángulos semejantes.

A continuación, presentamos aspectos del objeto matemático semejanza de triángulo a investigar en libros de la educación básica regular.

## 2.2 Aspectos de la semejanza de triángulos en los libros didácticos

En este apartado presentamos los mapas de progreso y algunos textos didácticos que se utilizan para estudiantes de cuarto año de educación secundaria donde está inmerso nuestro objeto matemático.

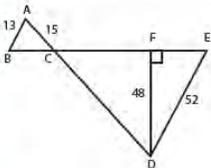
**Figura 11.** Mapa de progreso del aprendizaje en Geometría

**VII Ciclo**  
(3°, 4° y 5° de secundaria)

Construye y representa formas bidimensionales y tridimensionales considerando propiedades, relaciones métricas, relaciones de semejanza y congruencia entre formas. Clasifica formas geométricas estableciendo relaciones de inclusión entre clases y las argumenta. Estima y calcula áreas de superficies compuestas que incluyen formas circulares y no poligonales, volúmenes de cuerpos de revolución y distancias inaccesibles usando relaciones métricas y razones trigonométricas, evaluando la pertinencia de realizar una medida exacta o estimada. Interpreta y evalúa rutas en mapas y planos para optimizar trayectorias de desplazamiento. Formula y comprueba conjeturas relacionadas con el efecto de aplicar dos transformaciones sobre una forma bidimensional. Interpreta movimientos rectos, circulares y parabólicos mediante modelos algebraicos y los representa en el plano cartesiano.

Cuando un estudiante ha logrado este nivel, realiza desempeños como los siguientes:

- Resuelve situaciones en las que requiere generar información a partir de las propiedades de las formas en una construcción. Ejemplo:



En esta figura, es  $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$  y  $\overline{DF} \perp \overline{CE}$ .

Determina el perímetro del  $\triangle ABC$  y del  $\triangle CDE$ . Explica cómo has encontrado las respuestas y cómo sabes que son correctas.

Gráfico extraído de Principios y estándares para la educación matemática (Sevilla, 2000).

- Identifica propiedades comunes entre formas poligonales de la misma familia; por ejemplo, elabora un organizador visual respecto a la clasificación de cuadriláteros o triángulos donde se observe la inclusión de clases.
- Identifica las características de los cuerpos geométricos de revolución a partir de sus diferentes desarrollos.

Fuente. IPEBA, 2013, p. 32

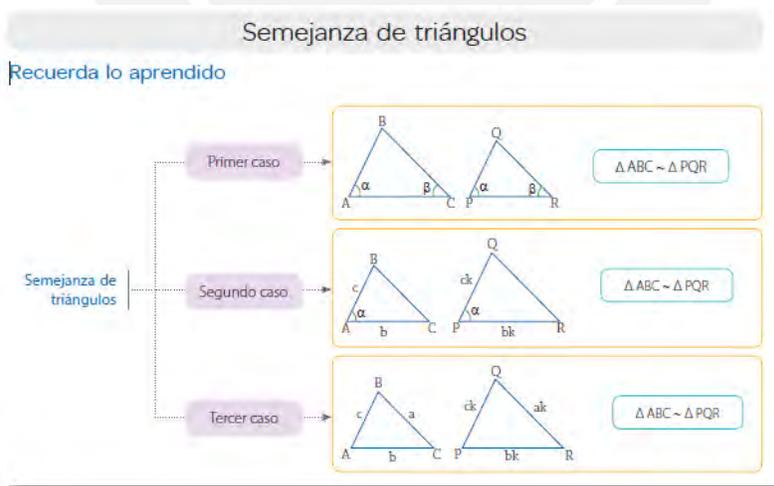
En la figura 11, podemos observar un discurso matemático en el cual se utilizan representaciones semióticas sin embargo en la representación de la figura no se representaron los vértices de los triángulos ABC y CDE como unidad figural OD ni tampoco el pie de la perpendicular F.

Este ejemplo, si bien es cierto a partir de la representación figural el estudiante obtendrá información, como el paralelismo de los lados AB y DE, permitirá a los estudiantes reconocer los ángulos congruentes en los triángulos ABC y CDE, de esta manera podrán identificar que los triángulos son semejantes.

Analizamos un texto de cuarto año de secundaria de la Editorial COREFO a fin de conocer cómo se aborda la enseñanza de la semejanza de triángulos.

En la figura 12, se muestra parte del libro de práctica, en el cual se hace referencia a los casos de semejanza que se plantean y se presentan las representaciones de los triángulos semejantes, cabe resaltar que en este libro de actividades no se ha tomado en consideración la definición de triángulos semejantes, solo se muestra a manera de recordatorio a fin de que los estudiantes puedan reconocer a dos triángulos semejantes en las tareas propuestas en este libro de actividades. Es decir, se presenta un discurso matemático mediante una representación simbólica en cada uno de los casos, de igual forma se puede observar que no se representaron los vértices de los triángulos semejantes como la unidad figural OD.

**Figura 12.** La semejanza de triángulos y los casos de semejanza



*Fuente.* Libro de Actividades Matemáticas IV (2019, p. 19)

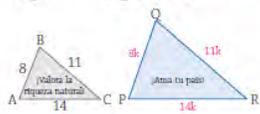
En la figura 13, en el mismo libro, se presentan ejercicios de modelación de la semejanza de triángulos, en el cuál aplican los casos de semejanza establecidos en la primera figura. En la

primera actividad se trata de que el estudiante aplique la definición de triángulos semejantes obteniéndose así los lados proporcionales para luego con el dato del perímetro del triángulo calcular la constante de proporcionalidad y obtener la longitud de los lados del triángulo. En la resolución se observa un discurso matemático mediante una representación simbólica de la semejanza de triángulos, entendiéndose la proporcionalidad de los lados, sin embargo, no hubo tratamientos en la representación algebraica para llegar a esa representación de las longitudes de los lados en el triángulo PQR. En la segunda actividad, el objetivo es reconocer triángulos rectángulos semejantes, para esto el estudiante deberá realizar un trazo que le permite obtener el criterio ángulo - ángulo de la semejanza de triángulos y calcular la longitud de uno de los lados del triángulo rectángulo para finalmente aplicar el teorema de Pitágoras y obtener la longitud pedida. Si bien la aplicación de uno de los criterios de la semejanza de triángulos permite que el estudiante reconozca los triángulos semejantes, en la actividad 2 se aplica el teorema de Pitágoras para obtener el resultado, que es un teorema situado en el siguiente capítulo del libro de actividades, lo cual contrasta con el objetivo de la actividad ya que el estudiante tendría que tener conocimientos previos sobre el teorema de Pitágoras.

**Figura 13.** Ejercicios resueltos relacionados a la semejanza de triángulos

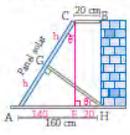
Aplica tus aprendizajes L. Área, Pág. 118

- En la imagen se muestran dos carteles de forma triangular que presentan mensajes alusivos a nuestra identidad nacional. Si los triángulos ABC y PQR son semejantes y el perímetro de PQR es 132 cm, ¿cuál es la longitud de  $\overline{QR}$ ?



**Resolución:**  
 Como  $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ , entonces  $PQ = 8k$ ,  
 $QR = 11k$ ,  $PR = 14k$ .  
 Por dato del perímetro se cumple:  
 $8k + 11k + 14k = 132$   
 $33k = 132 \rightarrow k = 4$   
 Piden:  
 $QR = 11k = 11 \times 4 = 44$   
**Rpta.** La longitud de  $\overline{QR}$  es 44 cm.

- En la imagen se muestra la vista lateral de la posición de un panel solar, el cual se sostiene por los trozos de madera  $\overline{BC}$  y  $\overline{GH}$ , tal que  $AG = GC$ . Analiza el gráfico y determina la longitud de  $\overline{GH}$ .



**Resolución:**  
 Traza  $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ . Luego,  $FH = 20$  y  $AF = 10$ . Como  $m\angle ACF = m\angle GHA = 60^\circ$ , entonces  $\Delta ACF \sim \Delta GHA$ .  
 Luego:  $\frac{10}{h} = \frac{20}{10} \rightarrow h^2 = 11200$   
 En el  $\Delta AGH$ , por el teorema de Pitágoras:  
 $GH^2 + h^2 = 100^2$   
 $GH^2 + 11200 = 25000$   
 $GH = 120$   
**Rpta.** La longitud de  $\overline{GH}$  es 120 cm.

© Ediciones Correo S.A. C. Prohibido reproducir. D. L. 822

Fuente. Libro de Actividades Matemáticas IV, 2019, p. 19

A continuación, presentamos aspectos del ambiente de representaciones dinámicas como lo es el GeoGebra, sus herramientas y algunas representaciones de la semejanza de triángulos.

## 2.3 Representaciones de la semejanza de triángulos en GeoGebra

El GeoGebra es un software matemático interactivo libre, es básicamente un procesador geométrico y un procesador algebraico, esto es un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, algebra, estadística y cálculo.

Según Álvarez, Almeida y Villegas (2014) plantean lo siguiente:

Uno de los asistentes matemáticos desarrollados como software libre más popular en los últimos años es GeoGebra, un recurso escrito en Java y disponible en múltiples plataformas. Este permite el dinamismo de las figuras geométricas, lo que facilita analizar la variación o no de sus propiedades y relaciones al modificarlas. Asimismo, posibilita examinar un objeto matemático en diferentes registros de representación, por medio de la articulación de su interfaz gráfica con una algebraica, una de cálculo simbólico y una hoja de cálculo, lo que favorece el establecimiento de relaciones y una comprensión más profunda de lo que se estudia. (p. 27)

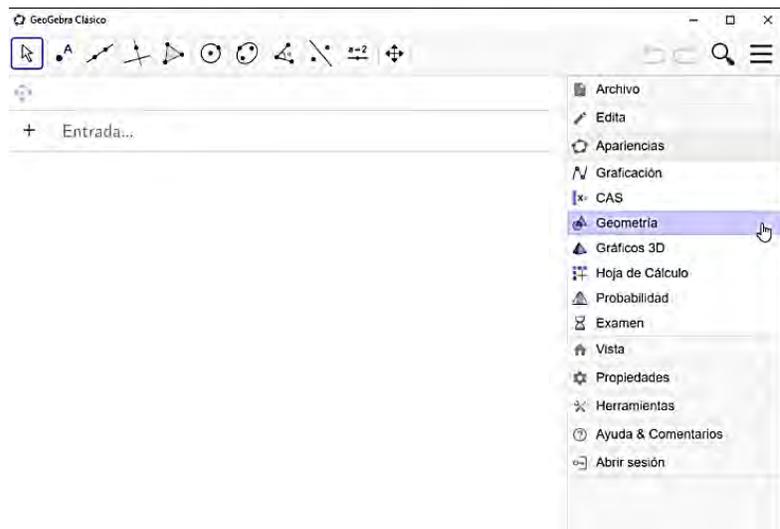
La versión 6 del GeoGebra Clásico ofrece las siguientes vistas que se vinculan dinámicamente: Vista gráfica 2D, Vista algebraica, Cálculo Simbólico (CAS), Vista gráfica 2, Vista gráfica 3D, Hoja de cálculo, Cálculos de probabilidad y Protocolo de construcción. Cada una de estas vistas puede ser ocultada, activada y/o desactivada, según el usuario y el tipo de situación propuesta.

Una de las ventajas que tiene el GeoGebra en la opción Geometría, es que incorpora herramientas de representación de figuras planas que se pueden manipular con la herramienta Mueve y también representa algunos lugares geométricos como por ejemplo mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo, también el hecho de representar paralelismo y perpendicularidad de rectas resulta de mucha ayuda al momento de diseñar las actividades para los estudiantes. También, el GeoGebra permite realizar cálculos entre las longitudes de segmentos una vez medidos con la herramienta Distancia o Longitud, mostrando el resultado con la cantidad de decimales que se elige en la configuración del GeoGebra.

Una de las limitaciones del GeoGebra son las representaciones de números fraccionarios e irracionales, los cuales son presentado mediante números decimales redondeados según el número de decimales que uno configura.

Para la parte experimental de nuestra investigación, usaremos la vista grafica 2D la cual se puede acceder desde el menú apariencia seleccionando la opción Geometría, tal como observamos en la figura 14.

**Figura 14.** Apariencia Geometría de la ventana GeoGebra



Las herramientas gráficas están organizadas en la barra de herramientas de la vista gráfica, la misma contiene una variedad de íconos que están organizadas en cajas de herramientas.

**Figura 15.** Barra de herramientas de la vista gráfica 2D en GeoGebra



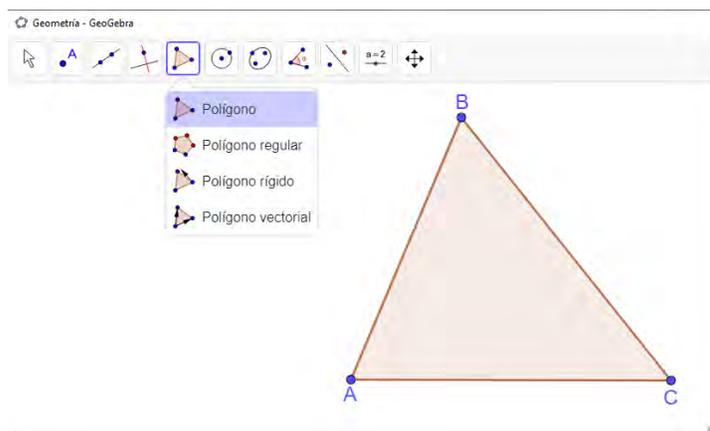
De acuerdo a la secuencia didáctica que proponemos en nuestra investigación, seleccionamos las siguientes herramientas tal como se presenta en la Tabla 3 de los anexos.

Estas herramientas permitirán la construcción y tratamiento de la representación del objeto matemático semejanza de triángulos en la elaboración de la propuesta de las actividades de nuestro trabajo de investigación.

A continuación, presentamos la construcción de un triángulo semejante a otro triángulo mediante las herramientas del GeoGebra.

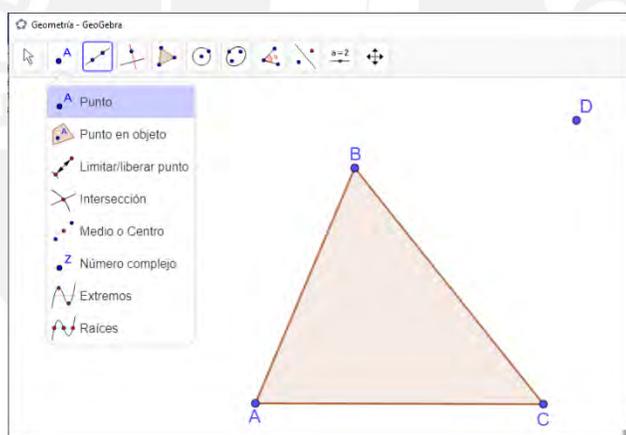
En la figura 16, utilizamos la herramienta Polígono, para representar un triángulo de vértices A, B y C, para esto hacemos click en un área del ARD en tres puntos distintos y no colineales y cerrando el polígono en el punto inicial.

**Figura 16.** Representación del triángulo ABC utilizando la herramienta Polígono



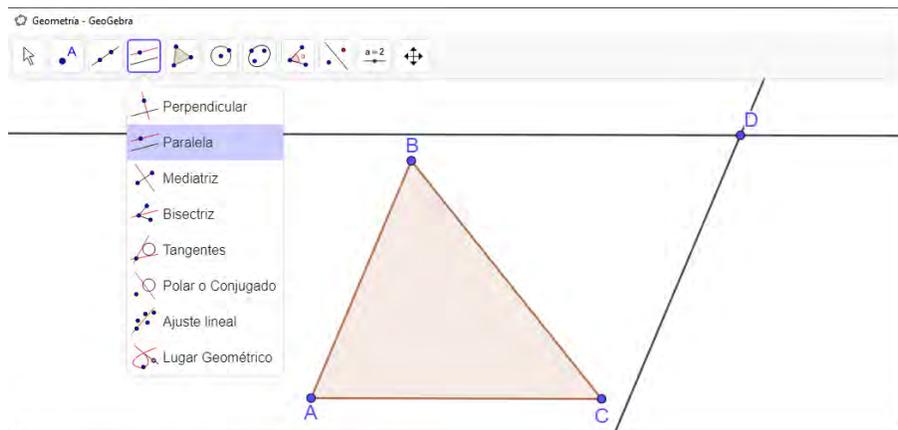
Luego, usaremos la herramienta punto, para representar el punto D, entendiéndose que es una conversión de una representación simbólica del punto a través del icono Punto con la ayuda del mouse al hacer click en un área del ARD, tal como se muestra en la figura 17.

**Figura 17.** Representación del punto D utilizando la herramienta Punto



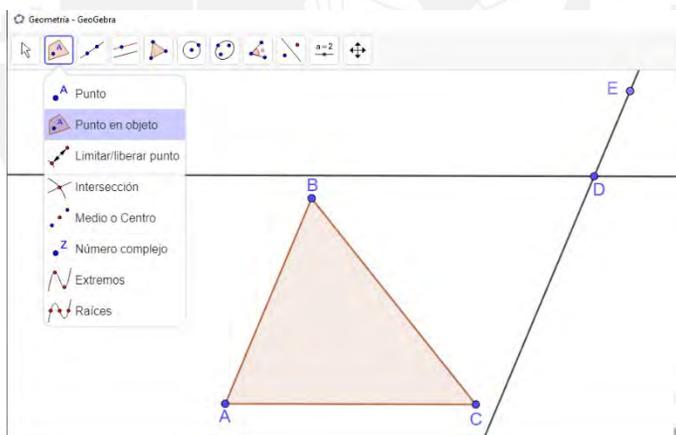
A continuación, utilizamos la herramienta Paralela para representar dos rectas que pasen por el punto D y sean paralelas a dos lados del triángulo ABC representados por los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ , el cual es una conversión de la representación algebraica de dos rectas que pasan por un punto y que tienen como vectores dirección a  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{BC}$  a través del ícono Paralela con ayuda del mouse al click en el punto y el lado al cual será paralelo, tal como se muestra en la figura 18.

**Figura 18.** Representación de dos rectas paralelas a dos lados del triángulo ABC utilizando la herramienta Paralela



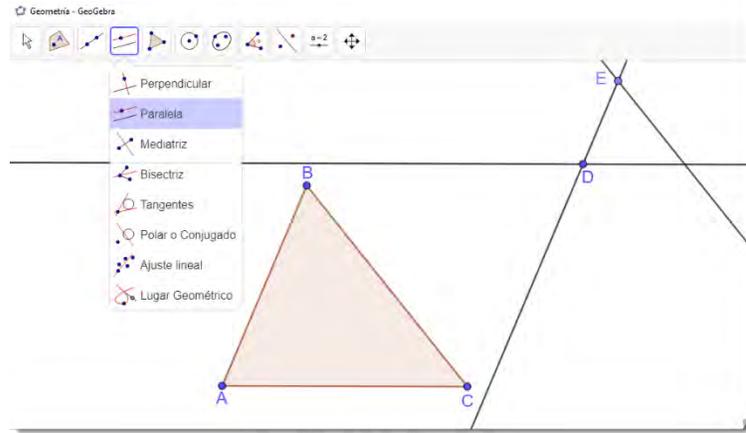
Luego, usaremos la herramienta Punto en objeto, para representar el punto E en cualquiera de las rectas mostradas en el paso anterior, entendiéndose que es una conversión simbólica de un punto en la recta a través del ícono Punto objeto con ayuda del mouse al hacer click sobre un punto cualquiera de la recta, tal como presentamos en la figura 19.

**Figura 19.** Representación del punto E utilizando la herramienta Punto en objeto



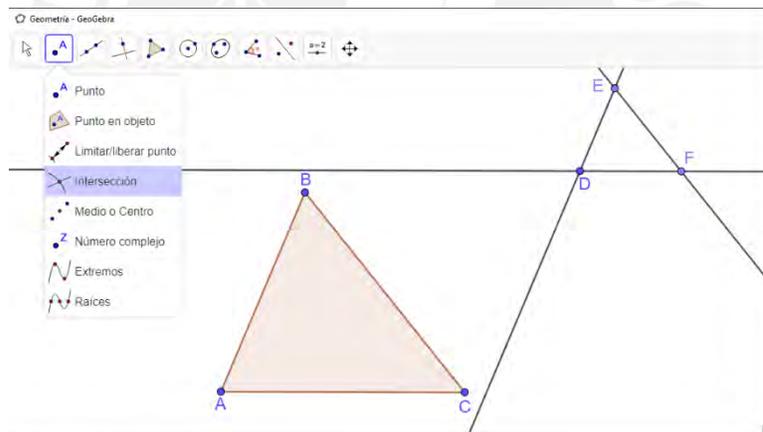
A continuación, utilizamos nuevamente la herramienta paralela, para representar una recta que pase por el punto E y sea paralela al tercer lado del triángulo ABC representado por el segmento  $\overline{BC}$  tal como se muestra en la figura 20.

**Figura 20.** Representación de una recta paralela al tercer lado del triángulo ABC utilizando la herramienta Paralela



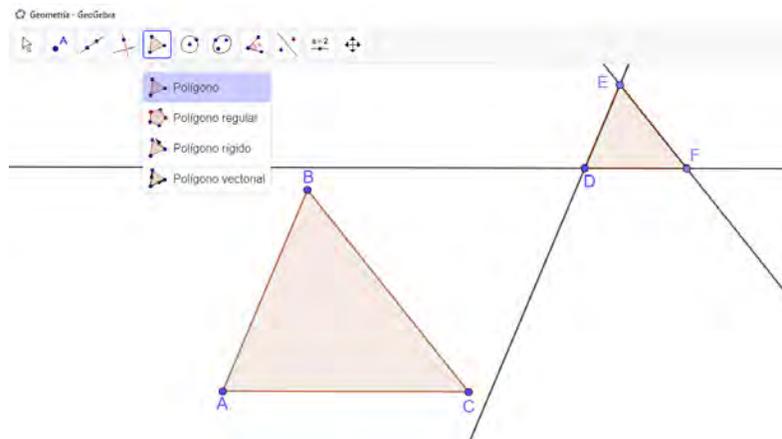
Luego, utilizamos la herramienta Intersección para representar el punto F el cual será uno de los vértices del triángulo determinado DEF tal como se muestra en la figura 21.

**Figura 21.** Representación del punto F utilizando la herramienta Intersección



Finalmente, usamos la herramienta Polígono para representar el triángulo de vértices D, E y F tal como se muestra en la figura 22.

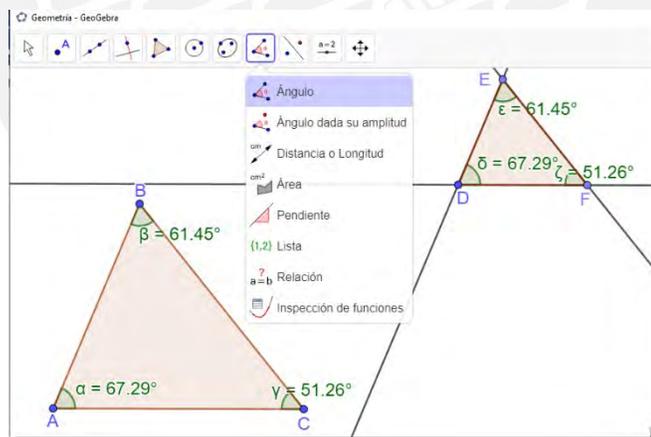
**Figura 22.** Representación del triángulo DEF utilizando la herramienta Polígono



Para validar la representación de la semejanza de triángulos, justificamos mediante el teorema 1 presentado en los aspectos matemáticos de nuestra investigación.

A continuación, utilizaremos la herramienta Ángulo a fin de conocer las medidas de los ángulos determinados por las representaciones de los triángulos ABC y DEF tal como se muestra en la figura 23.

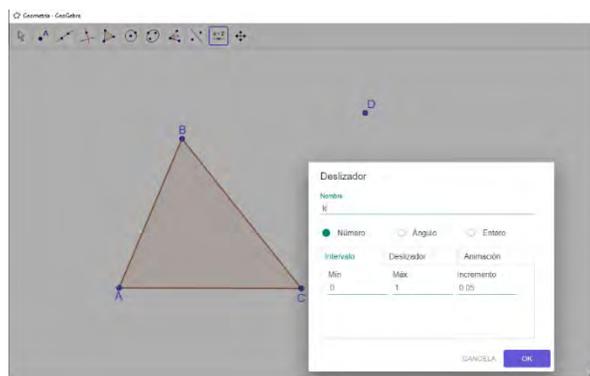
**Figura 23.** Medición de los ángulos de los triángulos ABC y DEF representados utilizando la herramienta Ángulo



Podemos observar que los triángulos representados tienen los ángulos congruentes respectivamente, lo cual permite justificar la semejanza de triángulos.

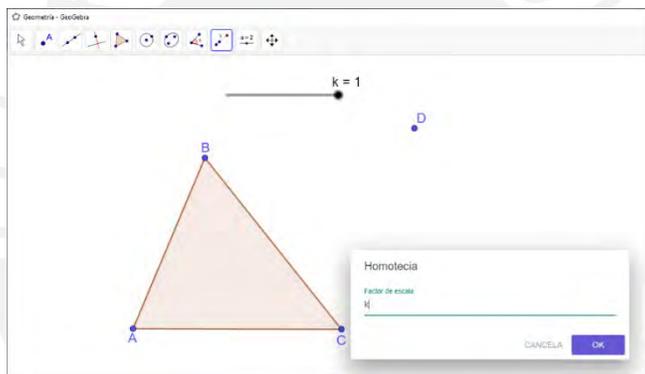
También podemos obtener triángulos semejantes mediante transformación a través de un deslizador. Para ello, a partir de la representación del triángulo ABC y el punto D, utilizamos la herramienta Deslizador con un valor  $k$  que va desde 0 hasta 1 y con un incremento en el valor de 0.05 tal como se muestra en la figura 24.

**Figura 24.** Creación de un deslizador para el factor de homotecia



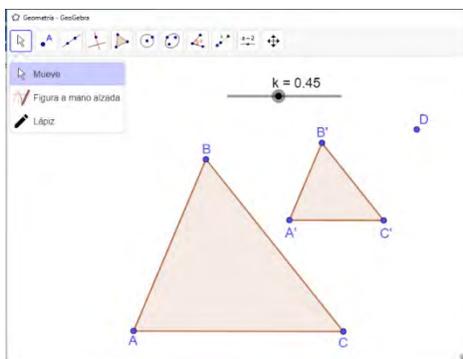
Luego, utilizamos la herramienta homotecia con factor de homotecia  $k$  creado con el deslizador tal como se observa en la figura 25.

**Figura 25.** Uso de la herramienta Homotecia



Finalmente, con la función arrastre obtenemos el triángulo  $A'B'C'$  semejante al triángulo ABC al variar el deslizador  $k$ , tal como se muestra en la figura 26.

**Figura 26.** Triángulos semejantes obtenidos por la herramienta Homotecia



A continuación, en el próximo capítulo se presenta la parte experimental y el análisis de nuestra investigación.

## **Capítulo III: Parte experimental y análisis de la investigación**

En este capítulo, presentaremos el desarrollo de la parte experimental de la investigación, así como los sujetos de investigación y la descripción de las actividades seguidas del análisis de cada actividad diseñada e implementada para los estudiantes con la finalidad de obtener nuestro objetivo y así responder la pregunta de nuestra investigación.

### **3.1 Escenario y sujetos de investigación**

En nuestro trabajo de investigación participaron 04 estudiantes del curso de Geometría del cuarto año de educación secundaria del colegio Nikola Tesla, ubicado en el distrito de Villa el Salvador de la provincia de Lima, cuyas edades fluctúan entre los catorce y quince años. Además, se obtuvieron los permisos requeridos por parte del promotor de la institución educativa para el desarrollo de la parte experimental de nuestro estudio.

Cabe resaltar que los estudiantes llevarán a cabo las actividades en casa debido a la situación de pandemia que atraviesa el país, la interacción con los estudiantes es mediante la plataforma de videoconferencia Zoom, el cual cuenta con la opción Archivo mediante el cual se enviarán a los estudiantes los archivos de GeoGebra con el cuál identificarán transformaciones en las representaciones semióticas de la semejanza de triángulos. Además, los estudiantes han llevado el curso de Geometría en tercero de secundaria de acuerdo al syllabus revisado, el cual nos permite afirmar que tienen nociones sobre los temas de triángulos, circunferencia, proporcionalidad de segmentos y semejanza de triángulos. Asimismo, los estudiantes tienen conocimiento de las herramientas básicas del GeoGebra ya que el profesor del aula ha realizado ejercicios con situaciones geométricas en el GeoGebra.

En la sesión Zoom se crearán 2 grupos de 2 estudiantes por grupo, tal agrupación fue establecida por el profesor del curso de Geometría quien se unirá a la sesión, ya que tiene conocimiento de la participación en clase de cada estudiante y además el investigador.

Para la recolección de información, se diseñó 3 actividades en GeoGebra y una ficha en Word para que los estudiantes manipulen los archivos y llenen la ficha, las cuales se les enviarán por la opción Archivo de la plataforma Zoom, el cual descargarán y se les pedirá que abran los archivos según el orden de las tareas programadas en la sesión.

El registro de información sobre lo realizado por cada grupo se hará mediante la grabación de la sesión Zoom, además uno de los estudiantes de cada grupo presentará su pantalla mediante la opción Compartir pantalla del Zoom, para así interactuar en tiempo real con

cada grupo. Cada grupo, estará en una de las salas Zoom que el investigador en forma aleatoria distribuirá a los estudiantes, en cada sala uno de los estudiantes comparte su pantalla mediante la herramienta compartir del Zoom mientras que el otro estudiante llena la ficha.

La recepción de la ficha de cada grupo se hará mediante la opción Archivo de Zoom luego de que los estudiantes hallan llenado la ficha.

### 3.2 Descripción de las actividades

En esta parte de la investigación, presentamos los análisis de tres actividades, que tiene por finalidad identificar las transformaciones que realizan los estudiantes en los registros de representación semiótica de la semejanza de triángulos.

En base al marco teórico, los aportes de investigaciones de referencia y la experiencia obtenida como docente, proponemos tres actividades en una ficha cuya finalidad es lograr los objetivos específicos de nuestra investigación.

Las actividades propuestas están orientadas al cumplimiento de nuestros objetivos de investigación teniendo como objeto de estudio a la semejanza de triángulos, donde cada una de estas actividades es una concatenación con respecto a la anterior.

En la siguiente tabla 2 presentamos los objetivos de cada una de las tres actividades las cuales se desarrollarán en una sola sesión de 1 hora de duración:

**Tabla 2.** Objetivos de las actividades del experimento

Actividad	Objetivo	Descripción
Actividad 1	Reconocer si las representaciones de dos triángulos son semejantes mediante los criterios de la semejanza de triángulos.	La primera actividad está compuesta de tres bloques, cada uno de ellos consta de ítems donde los estudiantes movilizan conocimientos previos para poder reconocer los criterios de la semejanza de triángulos y hacen transformaciones entre los registros figural dinámico, algebraico y lengua natural.

Actividad 2	Comprobar que los inradios de dos triángulos semejantes son proporcionales a los lados homólogos.	La segunda actividad está compuesta por ítems de modo que los estudiantes movilicen conocimientos previos para reconocer el criterio ángulo-ángulo de la semejanza de triángulos, así como realizar tratamientos en el registro figural dinámico y responder a las preguntas de dos ítems.
Actividad 3	Comprobar que las áreas de las regiones triangulares determinados por dos triángulos semejantes son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de los lados homólogos.	La tercera actividad, que consta de tres ítems, los estudiantes movilizan conocimientos previos para reconocer el criterio ángulo-ángulo de la semejanza de triángulos, así como realizar tratamientos en el registro figural dinámico y responder a las preguntas de dos ítems.

El campo numérico en que se lleva todas las actividades es el conjunto de números reales, considerando que en unas de las actividades propuestas aparece una razón de constante proporcionalidad igual a  $\sqrt{3}$  que es un número irracional, donde el GeoGebra por defecto considera con un redondeo de 2 cifras, es decir 1.73, también podemos establecer la cantidad de cifras decimales a considerar en el menú contextual en propiedades del GeoGebra.

### 3.3 Análisis de las Actividades

A continuación, se presenta el análisis de las tres actividades desarrollada en forma virtual, donde cada actividad fue diseñada a través de la Teoría de Registros de Representación Semiótica en el ARD GeoGebra.

La secuencia de actividades se planificó con el objetivo de que los estudiantes realicen tratamientos en el registro figural dinámico, así como la coordinación con los registros lengua natural y algebraico.

En consecuencia, presentamos el análisis de dos grupos compuesto por 2 estudiantes cada uno a los que llamaremos Grupo 1 y Grupo 2.

A continuación, presentamos el análisis de la actividad 1, esta actividad se encuentra en la parte de anexos en una ficha donde se describe la secuencia de actividades que los estudiantes van a desarrollar durante la experimentación.

### **Actividad 1**

La actividad 1 consta de tres bloques, en cada uno de ellos se pide a los estudiantes que abran los archivos en GeoGebra donde se representan situaciones geométricas a fin de que los estudiantes reconozcan dos triángulos semejantes mediante los criterios de la semejanza de triángulos.

#### **Bloque I**

En esta parte de la actividad se da la representación de un triángulo ABC y un punto P sobre el lado  $\overline{BC}$  del triángulo, luego se representa una circunferencia que contiene a P y a los vértices A y B, determinándose un punto Q por la intersección entre la circunferencia y el lado  $\overline{AC}$ .

Este primer bloque está conformado por 4 ítems y tiene por finalidad que los estudiantes movilicen conceptos previos identifiquen el objeto matemático semejanza de triángulos mediante una secuencia de instrucciones por medio de la ficha en el ARD, las cuales les permitirá, luego realizar la conversión del registro figural dinámico al registro algebraico mediante las casillas de control y obtener la constante de proporcionalidad.

#### **Análisis del bloque I**

Se espera que los estudiantes al abrir el archivo *Tarea\_1-Bloque\_I.ggb* en GeoGebra, reconozcan las representaciones del triángulo ABC y el triángulo PCQ determinado por la cuerda  $\overline{PQ}$  de la circunferencia.

#### **Análisis del ítem a**

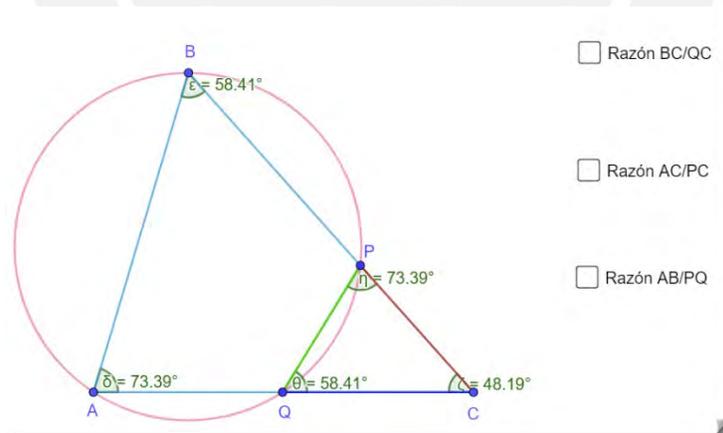
- a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y QPC. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

	<table border="1"> <tr> <td><math>m\angle CAB</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>m\angle ABC</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>m\angle BCA</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>m\angle QPC</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>m\angle CQP</math></td> <td></td> </tr> </table>	$m\angle CAB$		$m\angle ABC$		$m\angle BCA$		$m\angle QPC$		$m\angle CQP$	
$m\angle CAB$											
$m\angle ABC$											
$m\angle BCA$											
$m\angle QPC$											
$m\angle CQP$											

Una vez que reconocen los ángulos de los triángulos a medir, cada grupo comienza la formación de los ángulos en el ARD, para esto utiliza la herramienta Ángulo y comienzan a medir los ángulos de los triángulos ABC y PCQ, considerando el punto inicial, vértice, punto del lado final y el sentido antihorario, representando las medidas de los ángulos en la tabla correspondiente a este ítem.

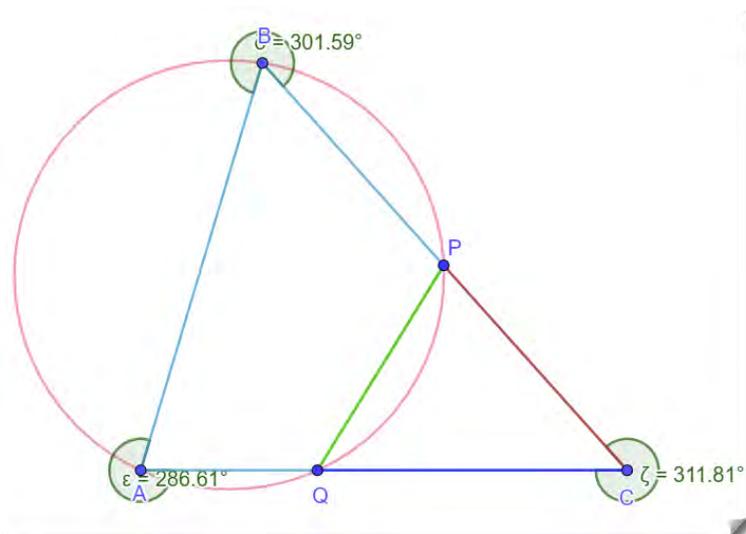
A continuación, presentamos una posible acción que se espera de los grupos con respecto al ítem a)

**Figura 27.** Representación de las medidas de los ángulos utilizando la herramienta Ángulo



Puede ocurrir que un estudiante mida uno de los ángulos en sentido horario, lo cual se representara en el ARD como una medida mayor a  $180^\circ$ , en este caso el investigador podría intervenir en la actividad y recordar al estudiante que la medida de un ángulo es mayor que  $0^\circ$  y menor que  $180^\circ$  eso le permitirá justificar el sentido antihorario en la medición del ángulo. A continuación, en la figura 28 se muestra la medición de ángulos en sentido horario

**Figura 28.** Representación de las medidas de los ángulos en sentido horario



Es por esta razón, que se pide a los estudiantes que realicen las mediciones según el orden de vértices establecido en la notación de cada ángulo en la tabla a llenar, tal como se muestra en la figura 29.

**Figura 29.** Representación del llenado de la tabla del ítem a) – Bloque I

$m\angle CAB$	$73.39^\circ$
$m\angle ABC$	$58.41^\circ$
$m\angle BCA$	$48.19^\circ$
$m\angle QPC$	$73.39^\circ$
$m\angle CQP$	$58.41^\circ$

### Análisis del ítem b

b) De acuerdo a lo anterior, ¿los triángulos PQC y ABC son semejantes? Justifique su respuesta.

En este ítem, se pretende que los grupos, al tener la información de que los triángulos representados en el ítem anterior presentan por lo menos dos ángulos congruentes, los estudiantes apliquen el criterio ángulo-ángulo de la semejanza de triángulos y de esta manera

reconocer que los triángulos ABC y PCQ son semejantes y respondan la pregunta la pregunta a este ítem, esto permitirá evidenciar la conversión del registro figural dinámico al registro de lengua natural de la semejanza de triángulos.

A continuación, presentamos una posible respuesta que se espera de los grupos con respecto al ítem b)

Si son semejantes, porque los triángulos PQC y ABC tienen por lo menos dos ángulos congruentes y por el criterio ángulo-ángulo de la semejanza de triángulos, los triángulos son semejantes.

### Análisis del ítem c

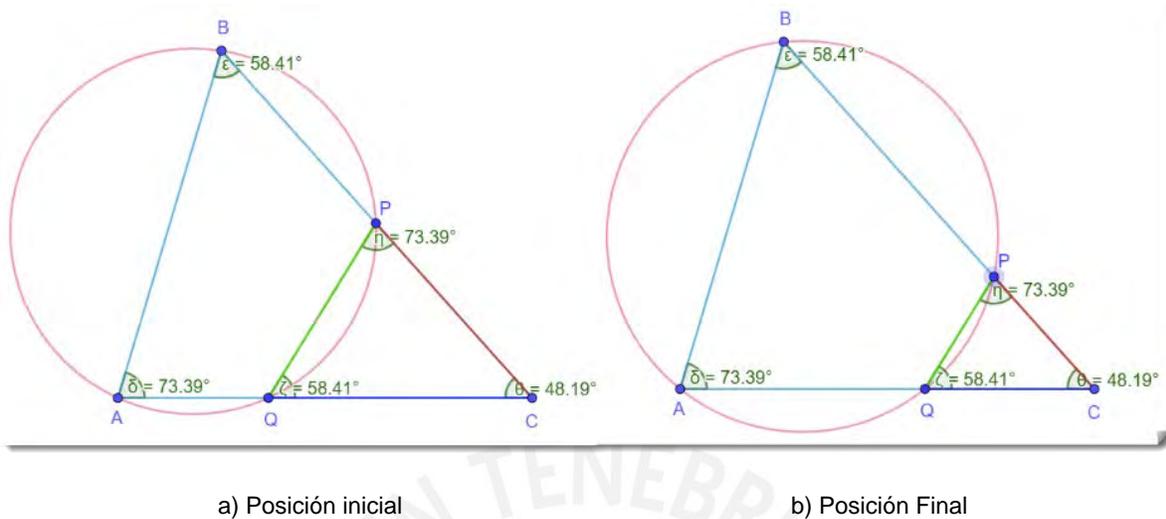
c) Con la herramienta Mueve, desplace el punto P a otra ubicación sobre el mismo lado  $\overline{BC}$ . ¿El triángulo determinado en la nueva posición de P es semejante al triángulo ABC? Explique.

En este ítem, se pide a los estudiantes de cada grupo que utilicen la herramienta Mueve y ubiquen el punto P en una nueva posición sobre el lado  $\overline{BC}$ , de este modo evidenciar el tratamiento dinámico el cual es la modificación posicional del triángulo PQC en el RFD y así determinar la nueva ubicación del punto Q para luego ver si, el nuevo triángulo PQC determinado, es semejante al triángulo ABC.

A continuación, se presentan algunas acciones que se espera de los grupos:

- Que los grupos reconozcan que las medidas de los ángulos permanecen invariantes y por el criterio de la semejanza ángulo-ángulo el nuevo triángulo PQC determinado sigue siendo semejante al triángulo ABC.
- Que los grupos reconozcan que la nueva cuerda PQ determinada en la circunferencia es paralelo a la anterior cuerda PQ observándose por el paralelismo que las nuevas medidas de los ángulos QPC y CQP son iguales a las anteriores medidas y por el criterio ángulo-ángulo el nuevo triángulo PQC determinado seguirá siendo semejante al triángulo ABC.

**Figura 30.** Representación esperada de la nueva posición del punto P



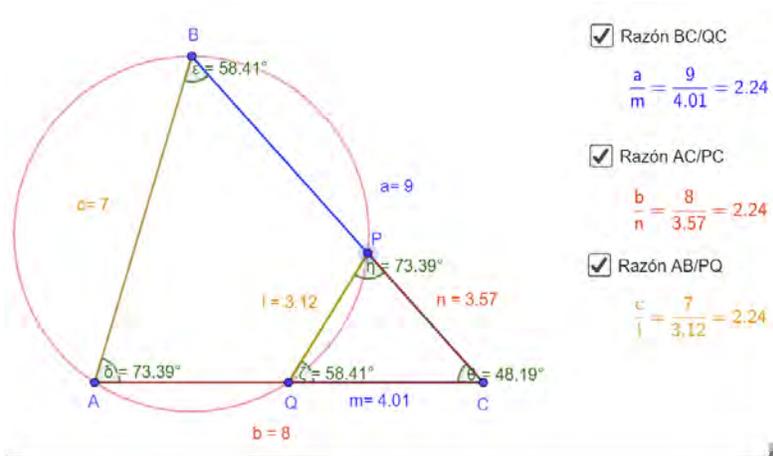
En la figura 30, con la herramienta Mueve se espera que los grupos desplacen el punto P a una nueva posición y reconozcan que las medidas de los ángulos representados en el RFD permanecen invariantes. Finalmente, por el criterio de la semejanza de triángulos ángulo-ángulo reconozcan que el nuevo triángulo PQC y ABC siguen siendo semejantes y de este modo responder la pregunta a este ítem.

#### Análisis del ítem d

- a) Active las casillas de control para calcular la constante de proporcionalidad entre las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes. Escriba esas razones. ¿Por qué las razones son iguales? Justifique su respuesta.

Finalmente, en este ítem se pide a los estudiantes de cada grupo que activen las casillas de control a fin de tener una representación algebraica de la constante de proporcionalidad entre los lados correspondiente luego de haber reconocido la semejanza de triángulos, indicándoles que las longitudes de los lados correspondientes al activar las casillas se calcularon con la herramienta Distancia o Longitud, para luego escribir esas razones y de esta manera de acuerdo a la definición de semejanza responder a la pregunta de este ítem. Esta activación de las casillas hace que el ARD realice una conversión interna del registro figural dinámico al registro algebraico, tal como se muestra en la figura 31.

**Figura 31.** Razones entre los lados de dos triángulos semejantes

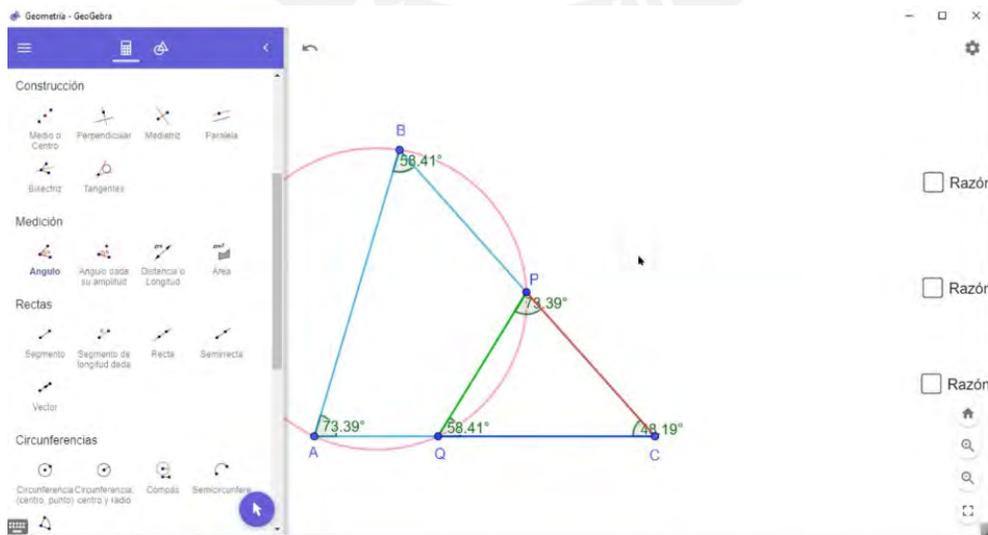


Puede ocurrir que un estudiante, active las casillas de control y vea la representación algebraica de la proporcionalidad entre los lados homólogos de los triángulos ABC y PQC, y utilizar el criterio lado-lado-lado de la semejanza de triángulos para responder la pregunta del ítem b, en este caso el investigador puede intervenir y pedir al estudiante que realice los tratamientos y modificaciones en el orden establecido en el bloque I.

**Resultados Bloque I – Actividad 1 – Grupo 1**

Con respecto al ítem a), el Grupo 1 realizó la formación de cada uno de los ángulos de los triángulos ABC y PQC representados en el RFD, donde en este registro se representaron las medidas de los ángulos, tal como se muestra en la figura 32.

**Figura 32.** Representación de las medidas de los ángulos del Grupo I



Este procedimiento permitió a los estudiantes obtener información de las medidas de los ángulos de los triángulos a fin de observar que se tenían ángulos de igual medida. A partir de esta información los estudiantes llenaron la tabla del ítem a) tal como se muestra en la figura 33.

**Figura 33.** Representación de las medidas de los ángulos del Grupo 1 en la tabla del ítem a)

$m\angle CAB$	73.39
$m\angle ABC$	58.41
$m\angle BCA$	48.19
$m\angle QPC$	73.39
$m\angle CQP$	58.41

En la figura 33, se observa que el Grupo 1 realizó una conversión de las representaciones de las medidas de los ángulos en el RFD al registro algebraico, además observamos que en la tabla completada por el Grupo 1, no escribieron la unidad de medida angular lo cual nos hace pensar que tienen sobreentendido que el sistema de unidad angular utilizado es el sistema sexagesimal. Sin embargo, debido a los conocimientos impartidos en Geometría, esto no es correcto, porque a cada representación de la medida de un ángulo está asociado la unidad angular que en nuestro caso es el sistema sexagesimal, siendo este sistema comúnmente utilizado en el curso de Geometría que imparte en la institución educativa a la cual pertenecen los estudiantes. Cabe resaltar que, al realizar la formación del ángulo, el ARD representa las medidas de los ángulos con la correspondiente unidad angular que es el sistema sexagesimal configurada por defecto en el GeoGebra tal como se muestra en la figura 33.

En cuanto al ítem b), con la información obtenida en el ítem a) los estudiantes del Grupo 1, respondieron a la pregunta tal como se muestra en la figura 34.

**Figura 34.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 a la pregunta del ítem b

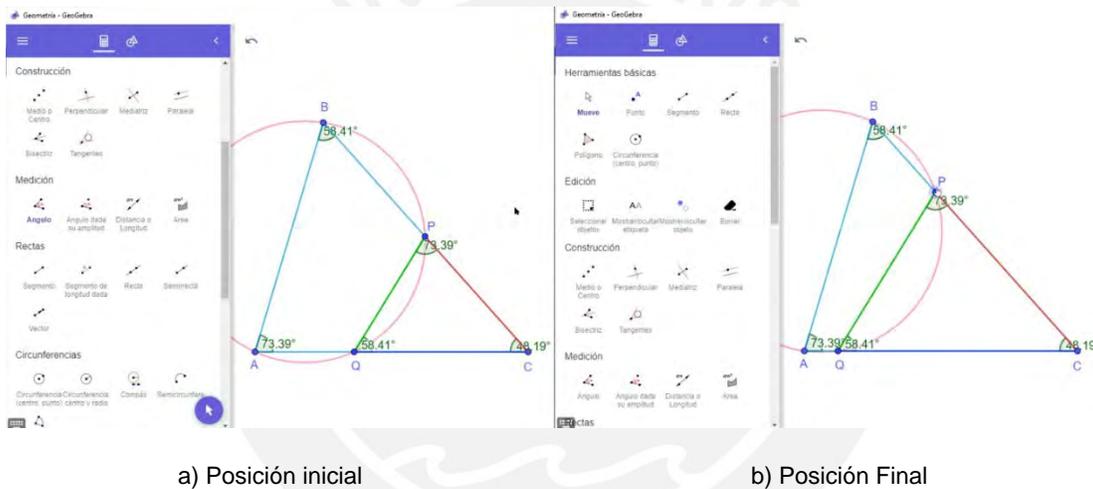
b) De acuerdo a lo anterior, ¿los triángulos PQC y ABC son semejantes? Justifique su respuesta.

Sí, diferente tamaño, pero igual medida de ángulos.

En la figura 34, se puede observar en la respuesta del Grupo 1 están familiarizados con la idea de que dos triángulos semejantes tienen las longitudes de sus lados distintas pero proporcionales y que tienen ángulos congruentes. Los estudiantes evidenciaron la conversión de la representación de los triángulos semejantes del registro figural dinámico al registro de lengua natural.

Con respecto al ítem c), el Grupo 1 con la herramienta Mueve desplazó el punto P a una nueva posición no como la representación esperada en la figura 30, si no a una posición por encima de la posición inicial del punto P tal como se muestra en la figura 35. Lo cual evidencia que los estudiantes realizaron un tratamiento de la representación del triángulo PQC en el RFD mediante modificación posicional.

**Figura 35.** Representación de la posición inicial y final del punto P – Grupo 1



A continuación, el Grupo 1 respondió a la pregunta del ítem c) tal como se muestra en la figura 36.

**Figura 36.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 a la pregunta del ítem c

- c) Con la herramienta Mueve, desplace el punto P a otra ubicación sobre el mismo lado  $\overline{BC}$ . ¿El triángulo determinado en la nueva posición de P es semejante al triángulo ABC? Explique.

Sí es semejante en las razones el denominador cambia pero siguen conservando la misma respuesta también PQC y ABC tienen igualdad de ángulos.

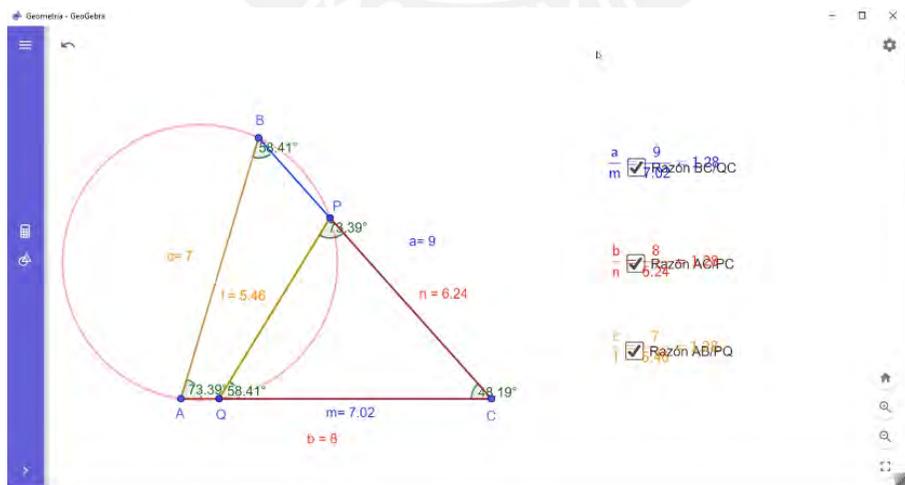
Las respuestas del Grupo 1 en la ficha, indican que los estudiantes reconocen que los triángulos PQC y ABC son semejantes, justificando que ambos triángulos tienen ángulos iguales, lo cual nos muestra que los estudiantes no tienen claro la definición de ángulos congruentes ya que confunden la congruencia con la igualdad. Además, justificaron activando las casillas de control y observaron que, en las razones, el denominador cambia sin embargo siguen conservando la misma respuesta refiriéndose al valor de las razones. Es claro que los estudiantes validaron esta conjetura reconociendo la constante de proporcionalidad, pero esta parte de la actividad correspondía al ítem d).

Por otro lado, el Grupo 1 reconoce la semejanza de los triángulos justificándose en el hecho que las medidas de los ángulos de los triángulos siguen siendo las mismas medidas, observándose nuevamente que no tienen claro el concepto de congruencia de ángulos. Esto nos lleva a pensar, que reconocen los triángulos semejantes mediante el criterio ángulo-ángulo, pero la justificación no es muy clara.

Asimismo, el Grupo 1 evidenció la conversión de la representación de los triángulos semejantes en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

En cuanto al ítem d), el Grupo 1 activa las casillas de control para obtener la representación algebraica de las razones entre las longitudes de los lados homólogos de los triángulos ABC y PQC, tal como se muestra en la figura 37.

**Figura 37.** Representación de la activación de las casillas de control del ítem d) – Bloque I – Grupo 1



En la figura 37, se puede observar que el Grupo 1 al activar las casillas de control, las razones salieron superpuestas a los nombres de las razones, esto se debe a la configuración de pantallas de los ordenadores en donde fue diseñada la actividad y donde fue abierto el archivo que contiene la actividad.

Al activar la casilla control se evidenció una conversión de la representación de las razones de las longitudes de los lados en el registro figural dinámico al registro algebraico propio del ARD.

A continuación, los estudiantes respondieron a la pregunta del ítem d) tal como se muestra en la figura 38.

**Figura 38.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 a la pregunta del ítem c

d) Active las casillas de control para calcular la constante de proporcionalidad entre las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes. Escriba esas razones. ¿Por qué las razones son iguales? Justifique su respuesta.

$$a/m=9/7.02=1.28$$

$$b/n=8/6.24=1.28$$

$$c/l=7/5.46=1.28$$

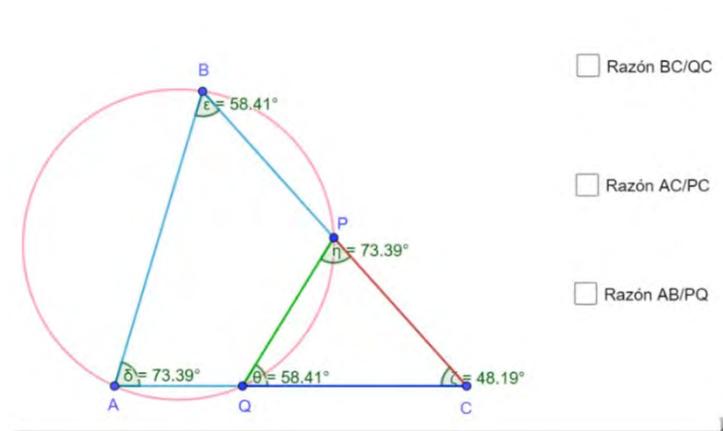
Los triángulos PQC y ABC tienen igualdad de ángulos, por ende las razones son iguales.

El Grupo 1, presenta en sus respuestas las representaciones de las razones de las longitudes del registro figural al registro algebraico, además responde a la pregunta del ítem correspondiente, evidenciando una conversión de la representación de las razones de las longitudes de los lados del registro algebraico al registro de lengua natural, justifica su respuesta porque los triángulos ABC y PQC son semejantes con la igualdad entre los ángulos del triángulo, de la misma manera como en los ítems anteriores los estudiantes interpretan la definición de congruencia de ángulos con la igualdad.

### Resultados Bloque I – Actividad 1 – Grupo 2

En el ítem a), el Grupo 2 realizó en el ARD la formación de los ángulos de los triángulos ABC y PQC cuyas medidas se representaron las medidas de los ángulos en el RFD, tal como se muestra en la figura 39.

**Figura 39.** Representación de las medidas de los ángulos del Grupo 2



A partir de esta información el Grupo 2 presentó la tabla del ítem a) tal como se muestra en la figura 40.

**Figura 40.** Representación de las medidas de los ángulos del Grupo 2 en la tabla del ítem a)

- a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y QPC. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

$m\angle CAB$	73.39
$m\angle ABC$	58.41
$m\angle BCA$	48.19
$m\angle QPC$	73.39
$m\angle CQP$	58.41

En la figura 40 observamos que el Grupo 2, realizó una conversión de las representaciones de las medidas de los ángulos en el RFD al registro algebraico, tal como ocurrió con el Grupo 1, que los estudiantes no escribieron la unidad de medida angular correspondiente a los ángulos el cual es el sistema sexagesimal.

Con respecto al ítem b), el Grupo 2 con la información de las medidas de los ángulos obtenida en el ítem a), respondieron la pregunta del ítem b) tal como se muestra en la figura 41.

**Figura 41.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 2 a la pregunta del ítem b

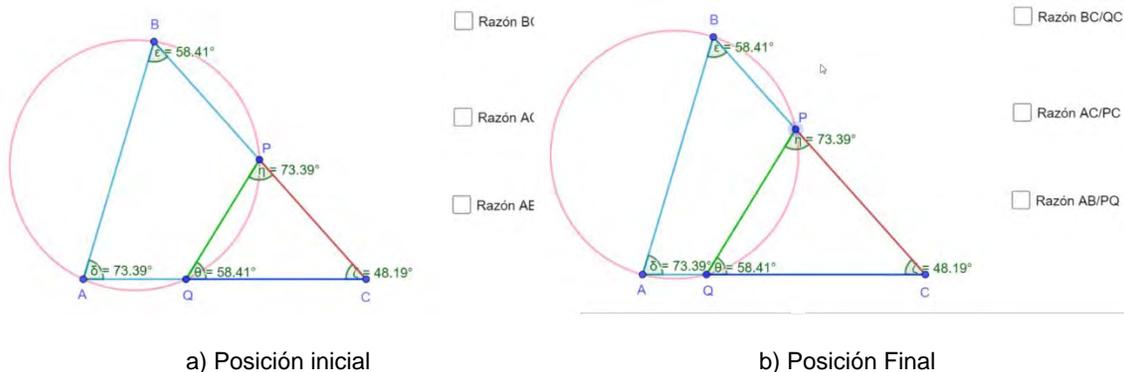
b) De acuerdo a lo anterior, ¿los triángulos PQC y ABC son semejantes? Justifique su respuesta.

Si son semejantes. Los ángulos de ambos triángulos son iguales.

Podemos observar en la figura 41, que el Grupo 2 responde que los triángulos son semejantes y justificaron en base a que los ángulos de los triángulos eran congruentes. Por otro lado, el Grupo 2 consideró la igualdad de ángulos en vez de la congruencia de ángulos, pero entienden los ángulos de los triángulos ABC y PCQ tienen medidas iguales. Asimismo, los estudiantes evidenciaron la conversión de la representación de los triángulos semejantes ABC y PCQ del registro figural dinámico al registro de lengua natural. En tal sentido, podemos afirmar que, en el sentido de Duval, el Grupo 2 coordinó el registro figural dinámico y el registro de lengua natural cuando escribieron la respuesta en la ficha.

En cuanto al ítem c), el Grupo 2 ubicó la nueva posición del punto P mediante la herramienta Mueve tal como se muestra en la figura 42 la posición inicial y la posición final.

**Figura 42.** Representación de la posición inicial y final del punto P – Grupo 2



En la figura 42b, el Grupo 2 representó la posición final del punto P por arriba de la posición inicial que tenía el punto P en la figura 42a, no es como se esperaba, sin embargo, la representación en la posición final muestra las representaciones de las medidas de los ángulos en el RFD de manera clara. Esto evidencia que los estudiantes realizaron un tratamiento de la representación del triángulo PQC en el RFD mediante modificación posicional.

A continuación, el Grupo 2 respondió a la pregunta del ítem c) tal como se muestra en la figura 43.

**Figura 43.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 2 a la pregunta del ítem c

- c) Con la herramienta Mueve, desplace el punto P a otra ubicación sobre el mismo lado  $\overline{BC}$ . ¿El triángulo determinado en la nueva posición de P es semejante al triángulo ABC? Explique.

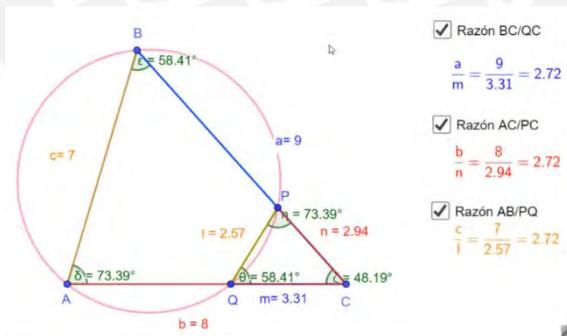
Si es semejante porque la medida de los ángulos no varía.

En la figura 43, podemos observar que el Grupo 2 reconocen que los triángulos PQC y ABC son semejantes, justificando que las medidas de los ángulos no han variado que es lo que se esperaba en este ítem c).

Por otro lado, el Grupo 2 evidenció la conversión de la representación de los triángulos semejantes ABC y PQC en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

Con respecto al ítem d), el Grupo 2 activa las casillas de control para obtener la representación de las razones entre las longitudes de los lados homólogos de los triángulos ABC y PQC, tal como se muestra en la figura 44.

**Figura 44.** Representación de la activación de las casillas de control del ítem d) – Bloque I – Grupo 2



En la figura 44, podemos observar que el Grupo 2 al activar las casillas de control en el ARD, que las representaciones de las razones de los lados homólogos de los triángulos semejantes ABC y PQC no están superpuestas con las etiquetas de las casillas de control, como ocurrió con el Grupo 1, esto les permite tener una lectura clara de estas razones.

Al activar la casilla control los estudiantes evidenciaron una conversión de la representación de las razones de las longitudes de los lados en el registro figural dinámico al registro algebraico propio del ARD.

A continuación, los estudiantes respondieron a la pregunta del ítem d) tal como se muestra en la figura 45.

**Figura 45.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 2 a la pregunta del ítem c

- d) Active las casillas de control para calcular la constante de proporcionalidad entre las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes. Escriba esas razones. ¿Por qué las razones son iguales? Justifique su respuesta.

Porque los triángulos son semejantes, y los ángulos iguales.

En la figura 45, el Grupo 2, no escribió las razones representadas en el ARD en la ficha, sin embargo, justifica de manera clara porque los triángulos son semejantes. Por otro lado, el Grupo 2 agregaron como parte de su justificación que los ángulos son iguales, si bien esto ya lo mencionaron en el ítem a) del bloque I, se puede apreciar aun, que siguen confundiendo la igualdad con la congruencia de ángulos.

El Grupo 2 evidenció una conversión de la representación de las razones de las longitudes de los lados de los triángulos ABC y PQC del registro figural dinámico al registro de lengua natural.

Se puede observar que el Grupo 2 también reconoce en el RFD y en la representación algebraica del ARD la noción de semejanza de triángulos, justificando la igualdad entre las razones de las longitudes de los lados homólogos cuyo valor es la constante de proporcionalidad.

Al finalizar el desarrollo del Bloque I, el profesor investigador, consolidó los aportes y la representación que desarrollaron los grupos 1 y 2. Los estudiantes reconocieron los ángulos a medir de los triángulos ABC y QPC representados en el RFD, realizándose una de las actividades cognitivas que es la formación de los ángulos representados por las medidas en el RFD del ARD, el cual les permitió tener información de que los triángulos ABC y PQC presentan ángulos de igual medida.

Se realizó la consolidación sobre la representación de dos triángulos semejantes en el registro figural dinámico, mediante el criterio de la semejanza ángulo-ángulo con la información obtenida en el ítem a) estableciéndose la conversión del registro figural dinámico al registro de lengua natural de la semejanza de triángulos, el cual es parte de uno de los objetivos específicos de nuestro trabajo de investigación.

Además se consolidó de que el nuevo triángulo PQC es semejante al triángulo ABC según el criterio ángulo-ángulo de la semejanza de triángulos, validando esta conjetura mediante las medidas de los ángulos, pues permanecen invariante cuando se desplaza el punto P sobre el lado  $\overline{BC}$  utilizando para ello la herramienta Mueve del ARD, este tratamiento con deslizador en el RFD se realizó mediante modificación posicional del triángulo PQC por manipulación indirecta tal como lo señala Salazar & Almouloud (2015). Por otro lado, se identificó la conversión entre los registros, figural dinámico, algebraico y lengua natural.

Finalmente se verificó que las razones entre las longitudes de los lados homólogos de los triángulos ABC y PQC son iguales, justificándolo por la definición de triángulos semejantes, observándose así la constante de proporcionalidad. La conversión de las representaciones de las razones de las longitudes de los lados de los triángulos ABC y PQC del registro figural dinámico al registro algebraico propio del ARD permitió a los grupos 1 y 2 responder la pregunta del ítem correspondiente con la igualdad de las razones de las longitudes de los lados homólogos de los triángulos semejantes ABC y PQC.

## Bloque II

En esta parte de la tarea se muestra la representación de dos triángulos equiláteros ABC y DCE con sus correspondientes centros F y G.

Esta actividad está conformada por 3 ítems y tiene como finalidad que los estudiantes realicen tratamientos en el registro figural con el objetivo de que reconozcan el criterio LAL de la semejanza de triángulos y verificar la constante de proporcionalidad. Asimismo, se indica a los estudiantes que el GeoGebra brinda valores de números irracionales en forma aproximada, según la cantidad de decimales a redondear.

## Análisis del bloque II

Se espera que los estudiantes al abrir el archivo *Tarea\_1-Bloque\_II.ggb* reconozcan los triángulos equiláteros ABC y BEF con sus respectivos centros F y G.

## Análisis del ítem a

- a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos BCA y GCF de los triángulos AEB y FGB y a continuación con la herramienta Distancia o Longitud mida los lados  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{FC}$  y  $\overline{CG}$ . Escriba las medidas de los ángulos y lados en la siguiente tabla.

m∠DCA	
m∠GCF	

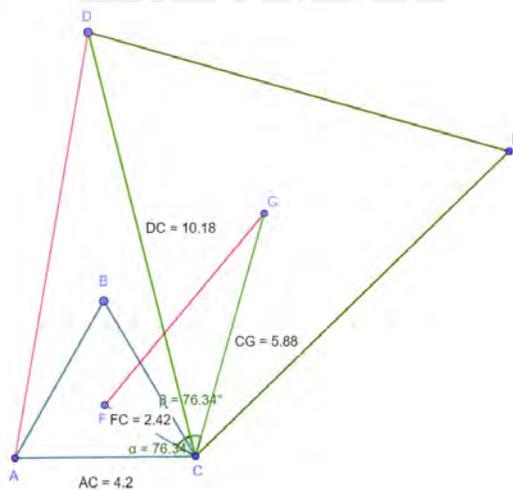
  

AC	
DC	
FC	
CG	

En este ítem, se pide a los estudiantes que utilicen la herramienta Ángulo y midan los ángulos ACD y FCG, y escriban en la tabla correspondiente al ítem las medidas de estos ángulos. Luego se les pide que utilicen la herramienta Longitud o Distancia y midan los lados  $\overline{AC}$ ,  $\overline{DC}$ ,  $\overline{FC}$  y  $\overline{CG}$  y a continuación escriban en la tabla correspondiente. Estas mediciones realizadas en el RFD están relacionadas con la formación de las representaciones de los ángulos y lados de los triángulos ACD y FCG.

A continuación, presentamos una posible acción que se espera de los grupos con respecto al ítem a) tal como se muestra en la figura 46.

**Figura 46.** Representación esperada del ítem a) – Bloque II



Después los estudiantes llenan en la ficha la tabla correspondiente al ítem a) del bloque y se espera que el llenado de la tabla tal como se muestra en la figura 48.

**Figura 47.** Representación del llenado de la tabla del ítem a) – Bloque II

m $\angle$ DCA	76.34°
m $\angle$ GCF	76.34°
AC	4.2
DC	10.18
FC	2.42
CG	5.88

Esto permitirá evidenciar una conversión de las representaciones de las medidas de los ángulos y lados de los triángulos ACD y FCG representados en el registro figural dinámico al registro de algebraico.

#### **Análisis del ítem b**

b) A parte de que los triángulos equiláteros son semejantes y de acuerdo a lo anterior, ¿reconoce dos triángulos semejantes? Justifique su respuesta.

En este ítem, una vez que los estudiantes hayan obtenido las medidas requeridas en el ítem anterior, utilizan el criterio lado-ángulo-lado de la semejanza de triángulos para afirmar que los triángulos AEB y FGB son semejantes. De igual manera, nos permitirá identificar la conversión que realizan los estudiantes de las representaciones de dos triángulos semejantes en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

A continuación, presentamos una posible acción que se espera de los grupos con respecto a la pregunta del ítem b)

Si, los triángulos ACD y FCG son semejantes, por el criterio ángulo – lado – ángulo de la semejanza de triángulos, ya que tienen un par de ángulos congruentes y los lados que determinan a dichos ángulos son proporcionales.

#### **Análisis del ítem c**

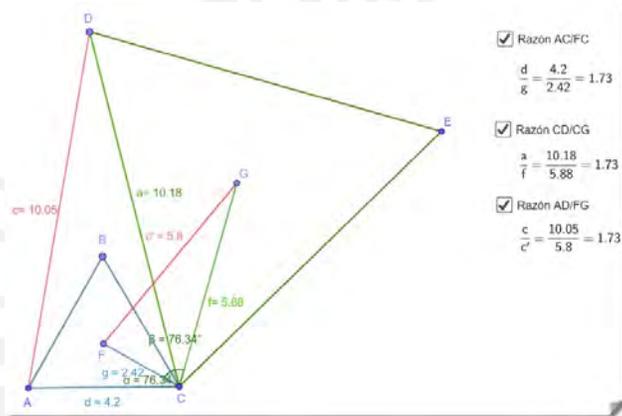
a) Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de los lados de los triángulos ADC y FCG.

Finalmente, en este ítem, se pide a los estudiantes que activen las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de los lados que no se midieron en los triángulos ADC y FCG con el fin de verificar la constante de proporcionalidad de la semejanza de triángulos.

Al activar las casillas de control se pondrá en evidencia la conversión de la representación de las razones de las longitudes de los lados en el registro figural dinámico al registro algebraico propio del ARD.

A continuación, presentamos una posible acción que se espera de los grupos con respecto al ítem c) tal como se muestra en la figura 48.

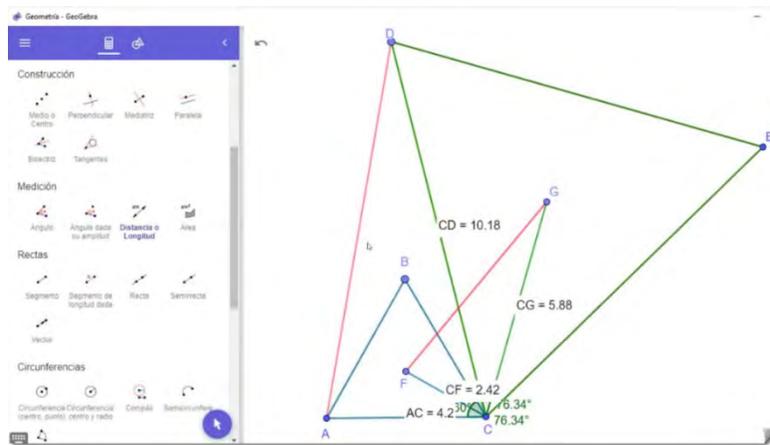
**Figura 48.** Representación esperada del ítem c) – Bloque II



### Resultados Bloque II – Actividad 1 – Grupo 1

En este ítem a), el Grupo 1 empieza a realizar las mediciones de los ángulos y lados establecidos tal como se muestra en la figura 49.

**Figura 49.** Representación de las medidas pedidas en la tabla del ítem a) por el Grupo I



En la figura 49, observamos que los estudiantes midieron lo que se les pidió en la tabla correspondiente del ítem a) tal como se esperaba, aunque se puede observar que hicieron una medida del ángulo ACB innecesaria. A continuación, procedieron con el llenado de la tabla tal como se muestra en la figura 50.

**Figura 50.** Representación de las medidas de los ángulos del Grupo 1 en la tabla del ítem a) – Bloque II

$m\angle DCA$	76.34
$m\angle GCF$	76.34
AC	4.2
DC	10.18
FC	2.42
CG	5.88

En la figura 50, observamos nuevamente que el Grupo 1 no representaron bien las medidas de los ángulos, pues no escribieron la unidad angular que es el sistema sexagesimal. Por otra parte, las longitudes de los lados de los triángulos ACD y FCG lo realizaron tal como se esperaba.

Asimismo, el desarrollo de es ítem a) nos permitió evidenciar la conversión de las representaciones de las medidas de los ángulo y lados de los triángulos ACD y FCG representados en el registro figural dinámico al registro algebraico.

Con respecto al ítem b), el Grupo 1 al obtener la información requerida en el ítem a) del Bloque II, los estudiantes responden la pregunta del ítem b) tal como se muestra en la figura 51.

**Figura 51.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 a la pregunta del ítem b) – Bloque II

b) A parte de que los triángulos equiláteros son semejantes y de acuerdo a lo anterior, ¿reconoce dos triángulos semejantes? Justifique su respuesta.

Los triángulos ADC y FGC son semejantes ya que sus ángulos son idénticos y por ello son congruentes.

En la figura 51, observamos que los estudiantes logran identificar que los triángulos ADC y FGC son semejantes, sin embargo, no identifica el criterio ángulo–lado–ángulo de la semejanza

de triángulos. Por otro lado, observaron la congruencia de los ángulos DCA y GCF mas no la proporcionalidad de los lados  $\overline{AC}$  y  $\overline{DC}$  con los lados  $\overline{FC}$  y  $\overline{CG}$ .

Los estudiantes justificaron su respuesta tal como se muestra en la siguiente transcripción

**Grupo 1:** Si, si veo triángulos semejantes, los cuales son ADC y FGC.

**Investigador:** ¿Por qué serian semejantes? Según su apreciación.

**Grupo 1:** Por sus ángulos.

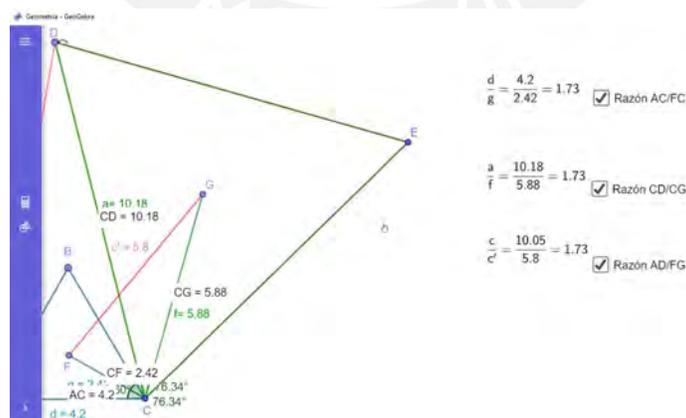
**Investigador:** ¿Y qué puede decir de los lados?

**Grupo 1:** Los lados su tamaño pueden variar, pueden ser más chiquitos o más grandes, pero la razón siempre tendrá una proporción entre los tres lados.

Observamos que el Grupo 1, reconoce que los triángulos ADC y FGC son semejantes y la justificación según la transcripción se basa en que observa dos ángulos de igual medida, pero no llega a deducir la razón entre los lados que determinan a estos ángulos congruentes, pues pensamos que como las longitudes están expresados con decimales no es inmediata la apreciación de que las longitudes de los lados del triángulo ADC son las longitudes de los lados del triángulo FGC multiplicados por el factor  $\sqrt{3}$ .

En el ítem c), el Grupo 1 al tener la información en el RFD de las representaciones de las medidas de los ángulos y lados, activan las casillas de control, tal como se muestra en la figura 52.

**Figura 52.** Representación de la activación de las casillas de control del ítem c) – Bloque II – Grupo 1



Luego, los estudiantes escriben en la ficha las razones obtenidas en el ARD con la finalidad de obtener la constante de proporcionalidad de la semejanza de triángulos, tal como se muestra en la figura 53.

**Figura 53.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 del ítem c) – Bloque II

- c) Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de los lados de los triángulos ADC y FCG.

Razón AC/FC:  $4.2/2.42=1.73$  Razón CD/CG:  $10.18/5.88=1.73$  Razón AD/FG:  $10.05/5.8=1.73$  Rpta: La razón es 1.73

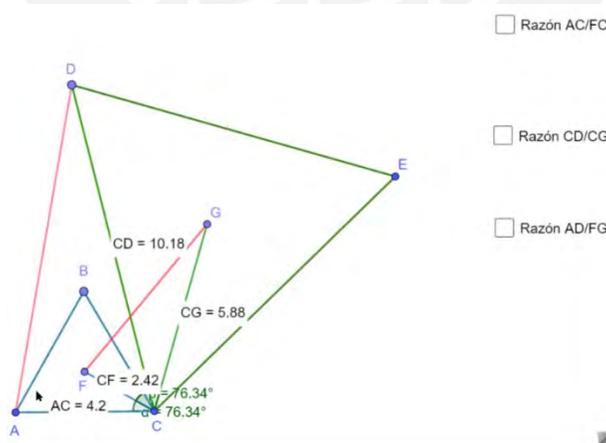
En la figura 53, observamos que el Grupo 1 logra identificar la constante de proporcionalidad entre los lados de los triángulos semejantes establecido en el ítem b) del Bloque II. Por otro lado, la constante de proporcionalidad representado en el ARD es una aproximación a dos decimales del número irracional  $\sqrt{3}$ .

Esto nos permite evidenciar una conversión de la razón representada en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

### Resultados Bloque II – Actividad 1 – Grupo 2

El Grupo 1 presenta las mediciones de los ángulos y lados establecidos en el ítem a) tal como se muestra en la figura 54.

**Figura 54.** Representación de las medidas pedidas en la tabla del ítem a) por el Grupo 2



En la figura 54, se puede observar que el Grupo 2 realizó las mediciones tal como se esperaba.

Asimismo, nos permite evidenciar la formación de los ángulos representados por las medidas de los ángulos en el RFD y el tratamiento en las representaciones de los triángulos obteniéndose las representaciones de las longitudes de los lados en el mismo registro.

A continuación, el Grupo 2 procedió con el llenado de la tabla tal como se muestra en la figura 55.

**Figura 55.** Representación de las medidas de los ángulos del Grupo 1 en la tabla del ítem a) – Bloque II

a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos BCA y GCF de los triángulos AEB y FGB y a continuación con la herramienta Distancia o Longitud mida los lados  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{FC}$  y  $\overline{CG}$ . Escriba las medidas de los ángulos y lados en la siguiente tabla.

m∠BCA	60
m∠GCF	76.34
AB	4.2
CD	10.18
FC	2.42
CG	5.88

En la figura 55, podemos observar al igual que el Grupo 1, no escribieron la unidad angular que es el sistema sexagesimal para las medidas de los ángulos, considerando de que las representaciones de los ángulos en el ARD están expresadas de manera correcta la unidad angular. Por otra parte, las representaciones de las longitudes de los lados de los triángulos ACD y FCG representados en el RFD lo realizaron tal como se esperaba. Esto nos permite identificar la conversión de las representaciones de las medidas de los ángulos y lados de los triángulos ACD y FCG representados en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

En relación al ítem b), el Grupo 2 con la información obtenida en el ítem a) del Bloque II, proceden a responder la pregunta correspondiente tal como se muestra en la figura 56.

**Figura 56.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 a la pregunta del ítem b) – Bloque II

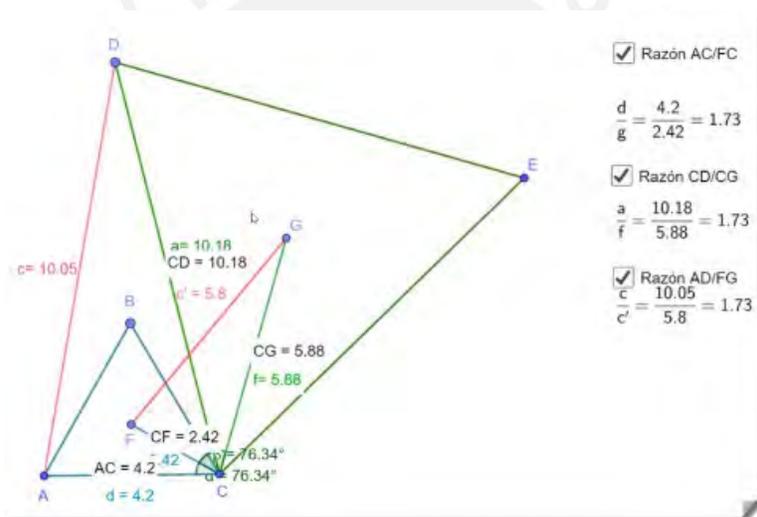
b) A parte de que los triángulos equiláteros son semejantes y de acuerdo a lo anterior, ¿reconoce dos triángulos semejantes? Justifique su respuesta.

A parte de los triángulos equiláteros, los triángulos ADC y CFG son semejantes

En la figura 56, se puede observar que el Grupo 2 logran identificar que los triángulos ADC y FGC son semejantes, sin embargo, no justifican su respuesta en la ficha.

En cuanto al ítem c), el Grupo 2 activa las casillas de control correspondientes, tal como se muestra en la figura 57.

**Figura 57.** Representación de la activación de las casillas de control del ítem c) – Bloque II – Grupo 1



Al activar la casilla control el Grupo 2, se evidenció una conversión de la representación de las razones de las longitudes de los lados en el registro figural dinámico al registro algebraico propio del ARD.

El Grupo 2 escribe en la ficha las representaciones de las razones de las longitudes de los lados de los triángulos ADC y FGC representados en el RFD al registro algebraico con la finalidad de validar la constante de proporcionalidad de la semejanza de triángulos.

**Figura 58.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 2 del ítem c) – Bloque II

c) Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de los lados de los triángulos AEB y FGB.

AC/FC=4.2/2.42=1.73  
CD/CG=10.18/5.88=1.73  
AD/FG=10.05/5.8=1.73

En la figura 58, se puede observar que el Grupo 2 logra identificar la constante de proporcionalidad entre los lados de los triángulos semejantes establecido en el ítem b) del Bloque II ya que en el ítem anterior lograron identificar que los triángulos ADC y FCG son semejantes lo cual mencionaron que la constante de proporcionalidad se justificaba por la definición de la semejanza de dos triángulos.

Al finalizar el desarrollo de este Bloque II el profesor investigador consolidó la formación de las representaciones de las medidas de los ángulos y lados en el ARD, solicitados en la tabla correspondiente a fin de obtener información que permita a los estudiantes aplicar el criterio lado-ángulo-lado de la semejanza de triángulos, ya que por lo menos observamos que los triángulos ACD y FCG presentan un par de ángulos congruentes.

El profesor investigador identificó la conversión de las representaciones de los triángulos semejantes representados en el registro figural dinámico al registro de lenguaje natural, sin embargo, los grupos 1 y 2 no lograron reconocer el criterio lado-ángulo-lado de la semejanza de triángulos, pero reconocieron que los triángulos son semejantes.

Además, se logró identificar la constante de proporcionalidad dado por la razón entre las longitudes de los lados homólogos de los triángulos semejantes ADC y FCG representados en el RFD. Asimismo, se identifica la conversión que realizan los estudiantes de las representaciones de las razones de las longitudes de los lados representados en el registro figural dinámico al registro algebraico propio del ARD.

### **Bloque III**

En esta parte de la tarea se muestra la representación de dos triángulos ABC y DEF y un deslizador k que representa la constante de proporcionalidad entre los lados correspondientes.

Esta actividad está conformada por 3 ítems y tiene como finalidad que los estudiantes reconozcan el criterio lado-lado-lado de la semejanza de triángulos en las representaciones de dos triángulos en el ARD y verificar que los ángulos opuestos a los lados correspondientes son

congruentes validando esta conjetura mediante la definición de la semejanza de triángulos. Asimismo, nos permitirá identificar los tratamientos que realizan los estudiantes en el RFD, esto mediante tratamientos con deslizador y así como identificar la conversión de las representaciones de dos triángulos semejantes del registro figural dinámico al registro de lengua natural y también la conversión de las representaciones de las razones de las longitudes de los lados representados en el registro figural dinámico al registro algebraico propio del ARD.

### Análisis del bloque III

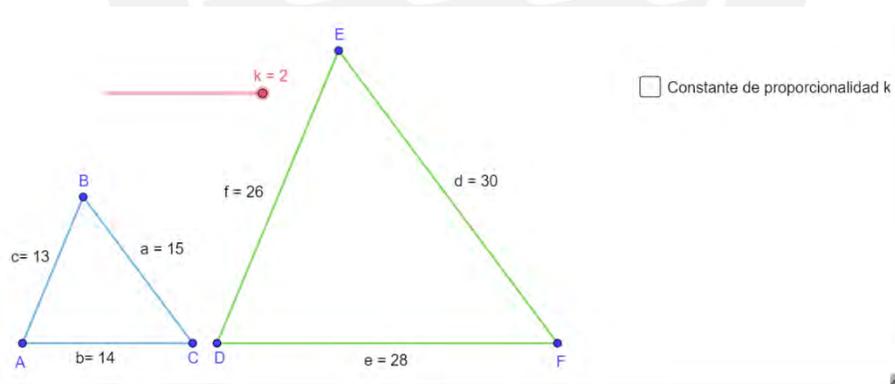
Se espera que los estudiantes al abrir el archivo *Tarea\_1-Bloque\_III.gbb* reconozcan los triángulos ABC y DEF.

#### Análisis del ítem a

- a) Active la casilla de control para encontrar la razón entre los lados de los triángulos ABC y DEF.  
¿Los triángulos ABC y DEF son semejantes? Justifique su respuesta.

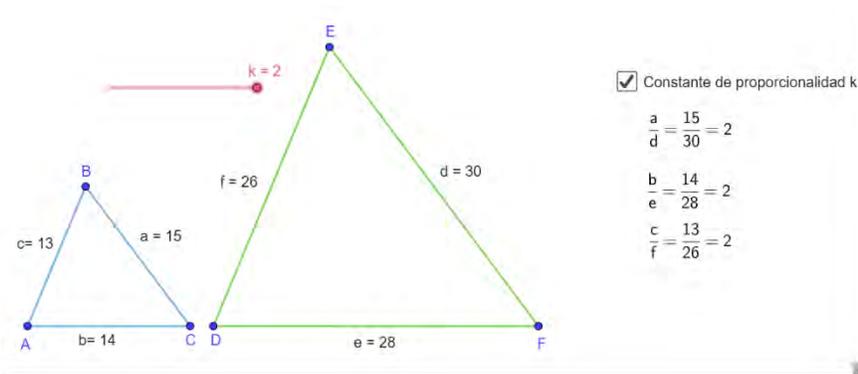
En este ítem, se pide a los estudiantes que activen la casilla de control y verifiquen que los lados son proporcionales con la finalidad de aplicar el criterio lado-lado-lado de la semejanza de triángulos y responder la pregunta de este ítem, tal como se muestra en la figura 59.

**Figura 59.** Constante de proporcionalidad entre las longitudes de los lados



A continuación, presentamos una posible acción que se espera de los grupos con respecto al ítem a) tal como se muestra en la figura 60.

**Figura 60.** Representación esperada de la activación de las casillas de los grupos 1 y 2



Al activar las casillas de control, se evidencia una conversión de las representaciones de las razones de las longitudes de los lados representados en el RFD al registro algebraico del ARD, lo cual les permitirá a los grupos aplicar el criterio lado-lado-lado de la semejanza de triángulos para responder la pregunta del ítem a) y responder que los triángulos ABC y DEF son semejantes.

A continuación, presentamos una posible acción que se espera de los grupos con respecto a la pregunta del ítem a)

Si, los triángulos ABD y DEF son semejantes por el criterio lado-lado-lado de la semejanza de triángulos, porque tienen los lados respectivamente proporcionales.

### Análisis del ítem b

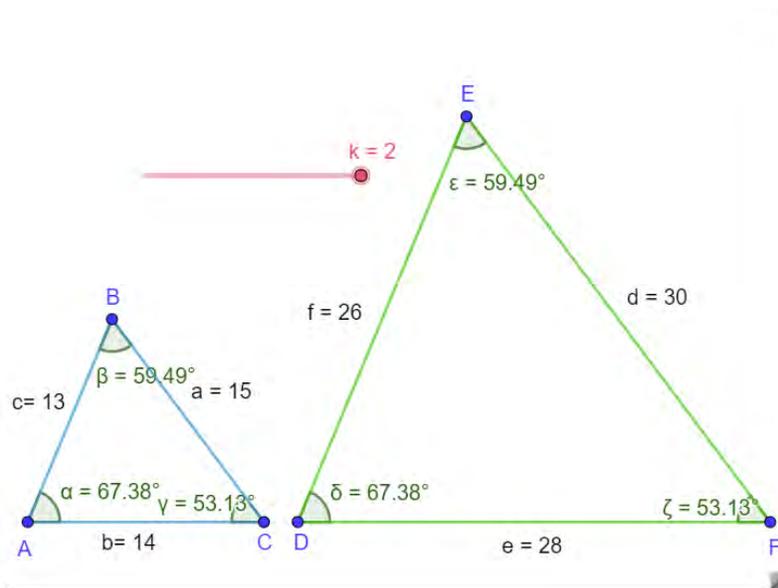
b) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y DEF. ¿Son congruentes? ¿Por qué? Justifique su respuesta.

En este ítem, se pide a los estudiantes que midan los ángulos de los triángulos ABC y DEF con la herramienta Ángulo con el fin de responder que los ángulos congruentes al justificar por la definición de semejanza de triángulos.

Al igual como en el Bloque I, los grupos 1 y 2 realizan la formación de los ángulos representados por las medidas de estos ángulos en el RFD.

A continuación, presentamos una posible acción que se espera de los grupos con respecto a la pregunta del ítem b) tal como se muestra en la figura 61.

**Figura 61.** Representación esperada de la activación de las casillas de los grupos 1 y 2



Luego, los grupos responden a las preguntas correspondiente al ítem b) al Bloque III, donde se espera que los estudiantes escriban las respuestas en la ficha tal como se muestra a continuación.

Si, los triángulos ABC y DEF presentan ángulos congruentes. Porque los triángulos son semejantes y por la definición los triángulos tienen congruentes los ángulos.

Se espera que los grupos realicen una conversión de la representación de dos triángulos semejantes en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

### Análisis del ítem c

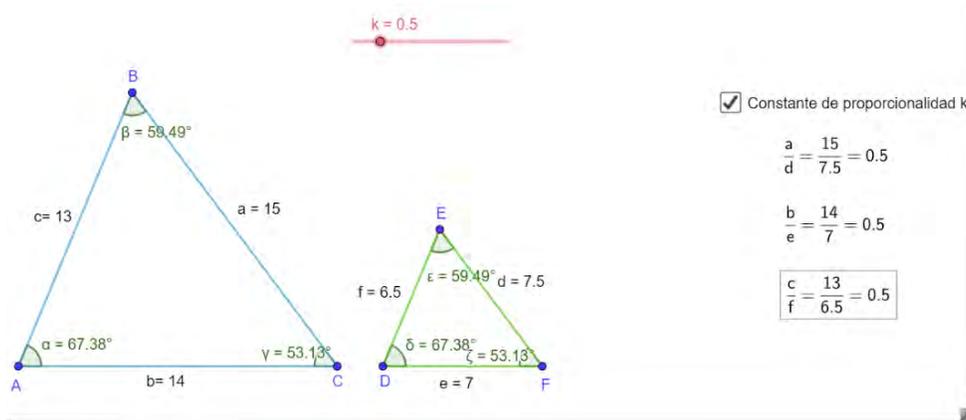
c) Manipule el deslizador hasta  $k = 0.5$ , ¿los triángulos ABC y DEF siguen siendo semejantes? ¿Qué ocurre cuando  $k = 1$ ?

Finalmente, en este ítem, se pide a los grupos que manipulen el deslizador para así obtener un nuevo triángulo DEF con la finalidad de que los estudiantes verifiquen que los triángulos ABC y el nuevo triángulo DEF siguen siendo semejantes.

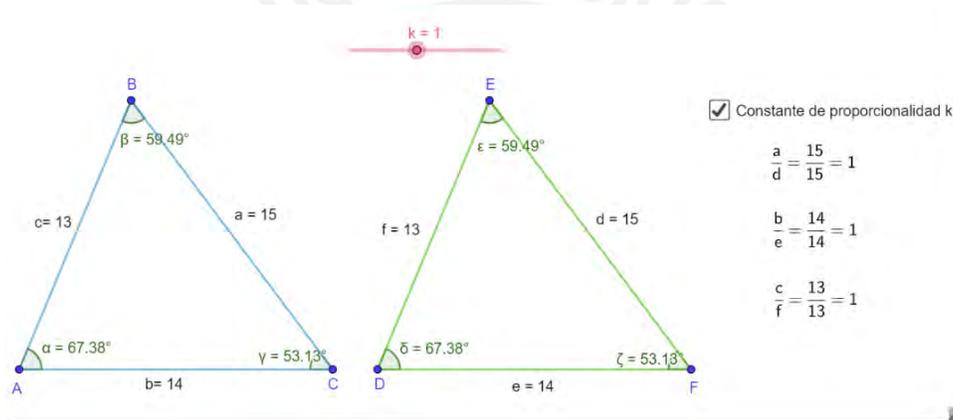
Esto nos permitirá evidenciar, un tratamiento dinámico que realizan los estudiantes en el RFD mediante cambio del tamaño del lado de una figura.

A continuación, presentamos una posible acción que se espera de los grupos con respecto a la pregunta del ítem c) tal como se muestra en las figuras 62 y 63.

**Figura 62.** Representación esperada al manipular el deslizador hasta  $k=0.5$  de los grupos 1 y 2



**Figura 63.** Representación esperada al manipular el deslizador hasta  $k=1$  de los grupos 1 y 2



Luego, los grupos responden a las preguntas correspondiente al ítem c) al Bloque III, donde se espera que los estudiantes escriban las respuestas en la ficha tal como se muestra a continuación.

Si, los triángulos ABC y DEF son semejantes, porque las longitudes de los lados de los triángulos son proporcionales ya que la constante de proporcionalidad es 0.5.

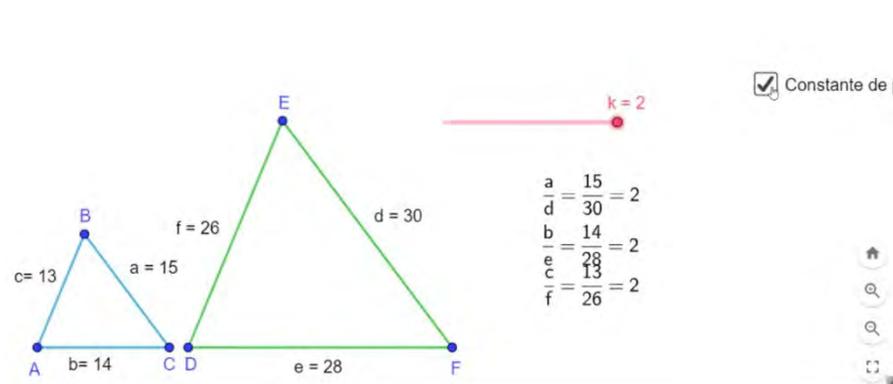
Cuando  $k=1$ , las longitudes de los lados son iguales, en este caso los triángulos son congruentes.

De esta manera podremos identificar una conversión de las representaciones de dos triángulos semejantes en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

### Resultados en el Bloque III – Actividad 1 – Grupo 1

En este ítem a), el Grupo 1 activa las casillas de control tal como se muestra en la figura 64.

**Figura 64.** Representación de la activación de las casillas de control del ítem a) – Bloque III – Grupo 1



En la figura 64, observamos que el Grupo 1 activo las casillas de control tal como se esperaba, luego escribieron en el recuadro la respuesta a la pregunta del ítem a) tal como se muestra en la figura 65.

**Figura 65.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 1 del ítem c) – Bloque II

- a) Active la casilla de control para encontrar la razón entre los lados de los triángulos ABC y DEF. ¿Los triángulos ABC y DEF son semejantes? Justifique su respuesta.

Sí son semejantes, las medidas de los ángulos son iguales.

En la figura 65, el Grupo 1 reconoce que los triángulos representados en el RFD son semejantes, sin embargo, la justificación que escribieron en la ficha no es lo que se esperaba, ya que justifica su respuesta indicando que los ángulos de los triángulos son congruentes. Nuevamente, apreciamos que el Grupo 1 confunde la igual con la congruencia de ángulos.

Por otro lado, justificaron su respuesta con respecto al ítem a) tal como se muestra en la siguiente transcripción:

**Investigador:** ¿Qué está observando usted? ¿Los triángulos son semejantes?

**Grupo 1:** Si son semejantes, puesto que cada ángulo, digo cada lado del triángulo DEF es el doble de cada lado del triángulo ABC, por ende, la razón es 2.

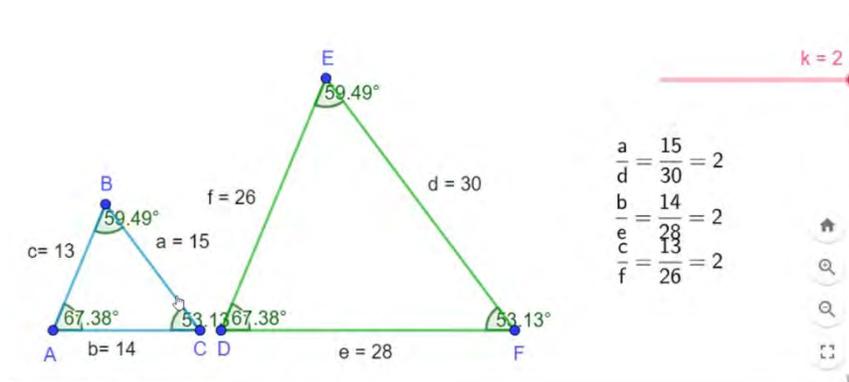
Podemos observar que el Grupo 1 justifica correctamente que los triángulos ABC y DEF son semejantes indicando que la razón entre las longitudes de los lados es igual a 2. Si bien es cierto los estudiantes no mencionaron el criterio lado–lado–lado de la semejanza de triángulo,

sin embargo, la respuesta en la transcripción es clara con respecto a la proporcionalidad entre las longitudes de los lados de los triángulos ABC y DEF.

Asimismo, se evidenció la conversión de las representaciones de dos triángulos semejantes en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

Con respecto al ítem b) el Grupo 1 comienza con la medición de los ángulos de los triángulos ABC y DEF como se realizó en los anteriores bloques, tal como se muestra en la figura 66.

**Figura 66.** Representación de las medidas de los ángulos del ítem b) – Bloque III – Grupo 1



Podemos observar en la figura 66 que el Grupo 1 realizaron las medidas de los ángulos de los triángulos tal como se esperaba, evidenciando la formación de los ángulos representados en las medidas de estos ángulos en el RFD, luego respondieron a las preguntas del ítem b) tal como se muestra en la figura 67.

**Figura 67.** Respuesta del Grupo 1 a las preguntas del ítem b) – Bloque III

b) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y DEF. ¿Son congruentes? ¿Por qué? Justifique su respuesta.

Sí lo son; los tres lados del triángulo DEF incrementaron pero la medida del ángulo sigue siendo la misma por ende te da la misma respuesta las tres divisiones.

En la figura 67, el Grupo 1 reconoce los ángulos de los triángulos son congruentes justificando su respuesta en base a las representaciones de las razones de las longitudes de los lados de los triángulos ABC y DEF en el registro algebraico dados en el ARD.

El Grupo 1 justificó la respuesta a este ítem de la siguiente manera de acuerdo a la transcripción:

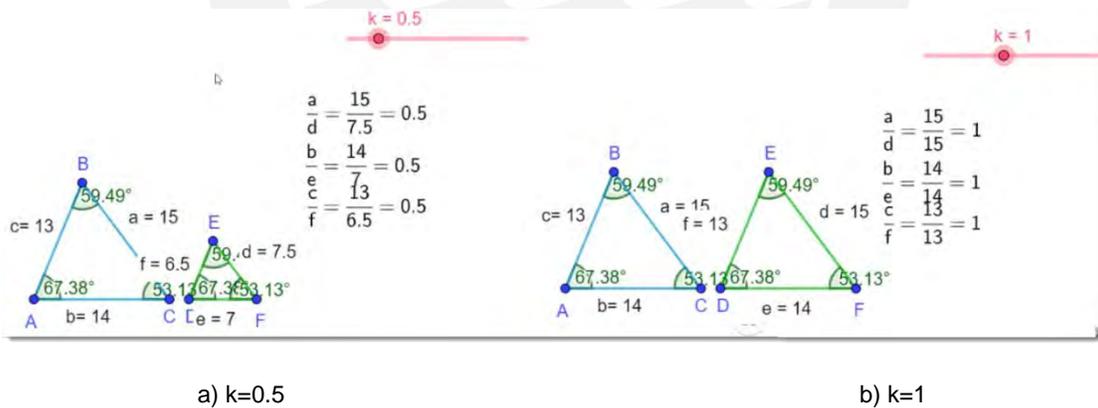
**Investigador:** ¿Por qué son congruentes esos ángulos?

**Grupo 1:** Porque existe una razón lo cual es 2 y si los lados por ejemplo del triángulo ABC son 13, 15 y 14, si existe una razón la cual es 2 formaría los lados de DEF 26, 30 y 28 lo que los haría semejantes y si son semejantes sus ángulos también son iguales.

Se puede apreciar que el Grupo 1, evidencia que los ángulos son congruentes mediante la definición de la noción de semejanza de triángulos, asimismo el hecho de tener las representaciones de las razones entre las longitudes de los lados de los triángulos ABC y DEF en el ARD permitió a los estudiantes reconocer que estos triángulos son semejantes y por la definición de semejanza de triángulos los ángulos son congruentes. Cabe resaltar que en la transcripción de la respuesta del Grupo 1, los estudiantes siguen confundiendo la igualdad con la congruencia de ángulos. Asimismo, evidenciaron la conversión de la congruencia de los ángulos representados en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

En relación al ítem c), el Grupo 1 manipula el deslizador hasta el valor de  $k=0.5$  tal como se muestra en la figura 68.

**Figura 68.** Representación del deslizador  $k$  del ítem c) – Bloque III – Grupo 1



En la figura 68a, se puede observar que el Grupo 1, no obtuvo la representación esperada tal como se muestra en la figura 62, donde la presentación se diferencia en la pantalla del computador en la cual se configuro la actividad y en la pantalla del computador donde se reproduce la actividad. Asimismo, en el triángulo DEF las medidas de los ángulos no muestra la representación completa por ejemplo del ángulo DEF.

En la figura 68b, el Grupo 1, manipuló el deslizador hasta  $k=1$ , en este caso la representación no es la esperada, sin embargo, se pueden apreciar las representaciones de los ángulos de los triángulos ABC y DEF, así como las longitudes de sus lados.

Esto nos permitió identificar el tratamiento dinámico que realizaron los estudiantes en el RFD mediante cambio del tamaño del lado de una figura.

Luego, los grupos responden a las preguntas del ítem c) tal como se muestra en la figura 69.

**Figura 69.** Respuesta del Grupo 1 a las preguntas del ítem c) – Bloque III

c) Manipule el deslizador hasta  $k = 0.5$ , ¿los triángulos ABC y DEF siguen siendo semejantes? ¿Qué ocurre cuando  $k = 1$ ?

Si siguen siendo semejantes, los lados llegan a ser de la misma medida.

En la figura 69, el Grupo 1 responden que los triángulos ABC y DEF siguen siendo semejantes cuando  $k=0.5$  y cuando  $k=1$  responden que los lados tienen la misma medida. Sin embargo, en la transcripción justifican con más detalle cuando el investigador hace énfasis en la segunda pregunta tal como se muestra a continuación:

**Investigador:** ¿Los triángulos ABC y DEF siguen siendo semejantes?

**Grupo 1:** ABC y DEF, si

**Investigador:** ¿Y puede percibir usted la razón de proporcionalidad entre las longitudes de los lados?

**Grupo 1:** Si, ahora la razón es 0.5

**Investigador:** ¿Y qué ocurre cuando  $k=1$ ?

**Grupo 1:** Las tres razones siguen siendo iguales

**Investigador:** Entonces ¿son semejantes los triángulos?

**Grupo 1:** En este caso serían completamente idénticos

**Investigador:** ¿Qué serían?

**Grupo 1:** Congruentes

**Investigador:** Usted puede decir que la congruencia de triángulos en un caso particular de la semejanza de triángulos.

**Grupo1:** Creo que si

Podemos observar que el Grupo 1 pudo explicar con más detalle lo que escribió en la ficha, pudieron deducir que los triángulos ABC y DEF siguen siendo semejantes ya que observaron la constante de proporcionalidad de las longitudes de los lados en la representación algebraica del ARD, y esto es lo que identifica al criterio lado–lado–lado de la semejanza de triángulos.

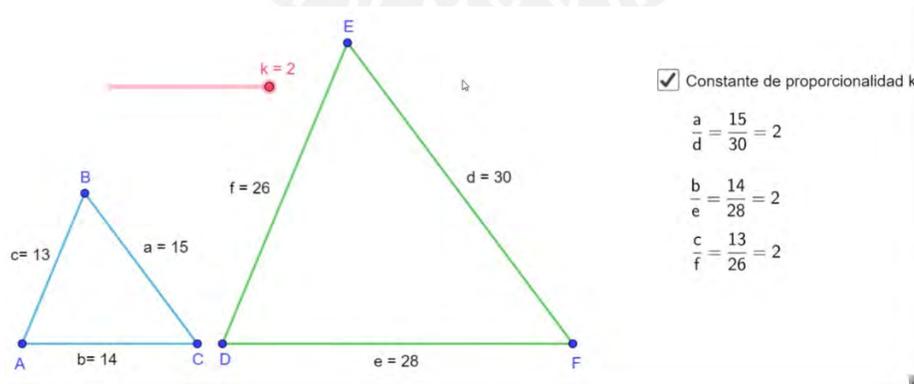
Asimismo, en la segunda pregunta cuando  $k=1$  los estudiantes de la misma manera observan la constante de proporcionalidad de las longitudes de los lados es igual a 1 en la representación algebraica del ARD, y a la pregunta de que si los triángulos son semejantes el Grupo 1 responden que son congruentes, sin embargo, logran indicar que los triángulos son semejantes cuando el investigador hace énfasis si sería un caso particular de la semejanza de triángulos.

Podemos identificar que el Grupo 1, realizó una conversión de la representación de dos triángulos semejantes en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

### Resultados Bloque III – Actividad 1 – Grupo 2

En este ítem a), el Grupo 2 activa las casillas de control tal como se muestra en la figura 70.

**Figura 70.** Representación de la activación de las casillas de control del ítem a) – Bloque III – Grupo 2



En la figura 70, observamos que el Grupo 1 activo las casillas de control tal como se esperaba, a continuación, esto evidencia una conversión de las representaciones de las razones de las longitudes de los lados de los triángulos representados en el RFD al registro algebraico

del ARD. Luego, el Grupo 2 escribieron en el recuadro la respuesta a la pregunta del ítem a) tal como se muestra en la figura 71.

**Figura 71.** Respuesta de los estudiantes del Grupo 2 del ítem c) – Bloque II

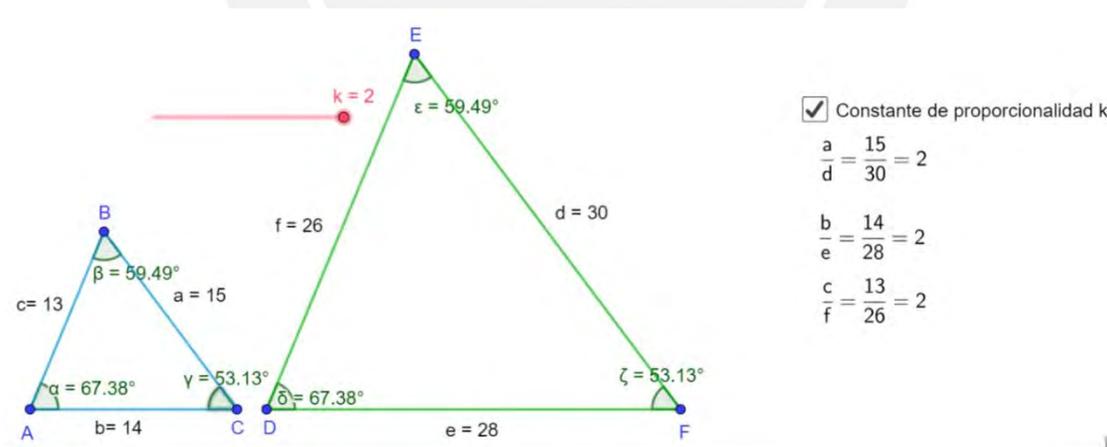
- a) Active la casilla de control para encontrar la razón entre los lados de los triángulos ABC y DEF. ¿Los triángulos ABC y DEF son semejantes? Justifique su respuesta.

Si son semejantes porque sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales

En la figura 71, el Grupo 1 responde que los triángulos son semejantes, justifica su respuesta en la proporcionalidad de los lados que es el criterio lado-lado-lado de la semejanza de triángulos. Asimismo, indican que los ángulos de los triángulos son congruentes, donde lo mencionan como igualdad de ángulos.

Respecto al ítem b), el Grupo 2 realizan la formación de los ángulos representados por las medidas de los ángulos de los triángulos ABC y DEF en el RFD, tal como se muestra en la figura 72.

**Figura 72.** Representación de las medidas de los ángulos del ítem b) – Bloque III – Grupo 2



En la figura 72, se puede observar que el Grupo 2 realizaron las medidas de los ángulos de los triángulos ABC y DEF tal como se esperaba. A continuación, respondieron a las preguntas del ítem b) tal como se muestra en la figura 73.

**Figura 73.** Respuesta del Grupo 2 a las preguntas del ítem b) – Bloque III

b) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y DEF. ¿Son congruentes? ¿Por qué? Justifique su respuesta.

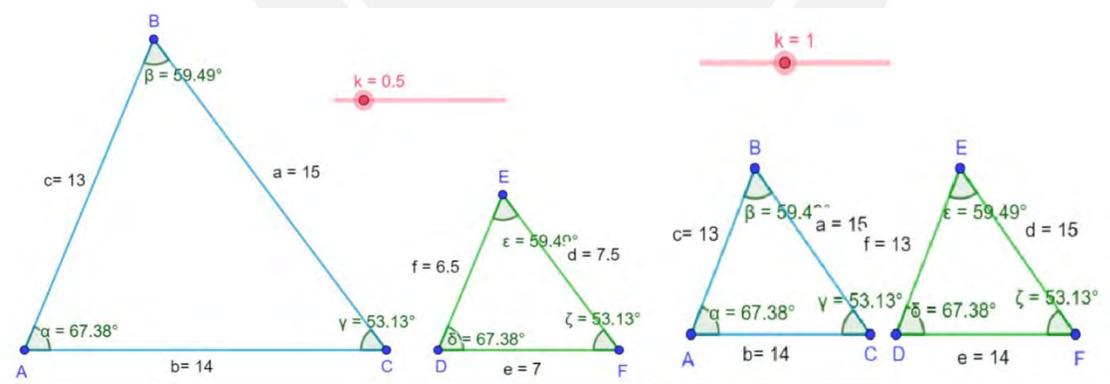
Si son congruentes porque sus ángulos son iguales.

En la figura 73, el Grupo 2 responde que los ángulos de los triángulos son congruentes, aunque menciona que sus ángulos son iguales, justifican basándose en la igualdad de los ángulos mas no en la congruencia de las mismas. Por otro lado, en el ARD si bien es cierto que se pueden apreciar que las representaciones de las medidas de los ángulos de los triángulos ABC y DEF representados en el RFD son iguales, esto le permite al Grupo 2 justificar que los ángulos de los triángulos son congruentes.

Asimismo, se identifica la conversión de la representación de la congruencia de los ángulos de los triángulos representados en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

En cuanto al ítem c), el Grupo 2 manipula el deslizador hasta el valor de  $k=0.5$ , tal como se muestra en la figura 74.

**Figura 74.** Representación del deslizador hasta  $k=0.5$  del ítem c) – Bloque III – Grupo 2



a)  $k=0.5$

b)  $k=1$

Esto nos permitió identificar el tratamiento dinámico que realizaron los estudiantes en el RFD mediante cambio del tamaño del lado de una figura.

En la figura 74a, se puede observar que el Grupo 2, manipuló el deslizador hasta  $k=0.5$  tal como se esperaba en la figura 63. Del mismo modo, el Grupo 2 manipuló el deslizador hasta

$k=1$  tal como se muestra en la figura 74b, donde se pueden apreciar las representaciones de las medidas de los ángulos y lados de los triángulos ABC y DEF en el RFD.

A continuación, el Grupo 2 responden a las preguntas del ítem c) tal como se muestra en la figura 75.

**Figura 75.** Respuesta del Grupo 2 a las preguntas del ítem c) – Bloque III

- c) Manipule el deslizador hasta  $k = 0.5$ , ¿los triángulos ABC y DEF siguen siendo semejantes? ¿Qué ocurre cuando  $k = 1$ ?

Cuando lo manipulas a  $k=0.5$  siguen siendo semejantes y cuando lo manipulas a  $k=1$  los triángulos se vuelven iguales

En la figura 75, el Grupo 2 mencionan que los triángulos ABC y DEF siguen siendo semejantes cuando  $k=0.5$  y cuando  $k=1$  responden que los triángulos son congruentes, considerando que el grupo sigue confundiendo la igualdad con la congruencia de triángulos

Podemos observar que el Grupo 2 reconoció que los triángulos ABC y DEF siguen siendo semejantes en la primera pregunta, mientras que en la segunda pregunta no responden como se esperaba, esto puede ser debido a que no tienen claro la noción de congruencia de triángulos.

Podemos afirmar, que el Grupo 2 realizó una conversión de la representación de dos triángulos semejantes en el registro figural al registro de lengua natural.

Al finalizar el Bloque III el profesor investigador formalizó la semejanza de los triángulos ABC y DEF justificando mediante el criterio lado-lado-lado de la semejanza de triángulos. Asimismo, identificó la conversión de las representaciones de los triángulos semejantes en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

El profesor investigador identificó la formación de los ángulos que realizaron los estudiantes representados por las medidas de estos ángulos en el RFD y así verificar la congruencia de los ángulos de los triángulos semejantes ABC y DEF.

Respecto al ítem c) se identificó el tratamiento dinámico que realizaron los estudiantes como el cambio de las longitudes de los lados del triángulo DEF en el registro figural dinámico y así de esta manera responder a las preguntas del ítem correspondiente de que los triángulos ABC y DEF son semejantes.

A continuación, se presenta el análisis de la actividad 2, donde esta actividad se encuentra en la parte de anexos en una ficha en la cual se describe la secuencia de actividades que los estudiantes van a desarrollar durante la experimentación.

En esta actividad se muestra la representación de un triángulo rectángulo ABC recto en B, la altura  $\overline{BH}$  y las circunferencias inscritas en los triángulos AHB, BHC y ABC.

La Actividad 2 está conformada por 3 ítems y tiene como finalidad que los estudiantes reconozcan la semejanza de triángulos y por ende validar la conjetura que los inradios son proporcionales a los correspondientes lados de los triángulos semejantes representados en el RFD. Asimismo, nos permitirá identificar las conversiones que realizan los estudiantes entre los registros figural dinámico, algebraico y lengua natural.

### Análisis de la Actividad 2

Se espera que los estudiantes al abrir el archivo *Tarea\_2.ggb* reconozcan los triángulos rectángulos ABC, AHB y BHC, estos dos últimos determinados por la altura  $\overline{BH}$ .

#### Análisis del ítem a

- a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos agudos de los triángulos rectángulos AHB y BHC. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

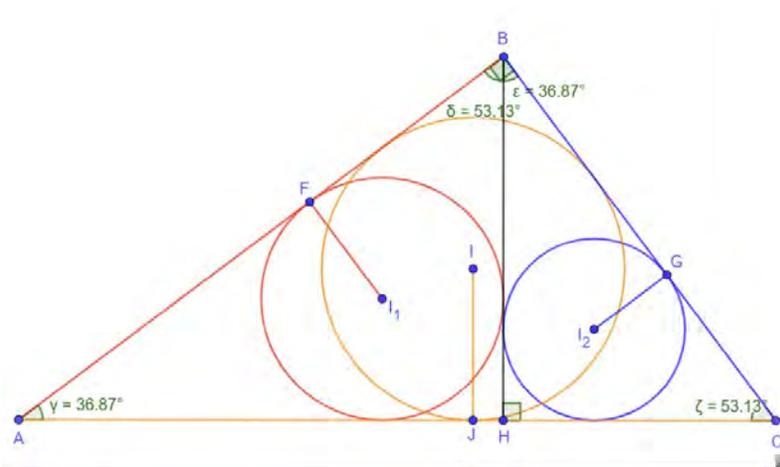
$m\angle CAB$	
$m\angle ABH$	
$m\angle HBC$	
$m\angle BCH$	

En este ítem, los estudiantes luego de reconocer los ángulos agudos en los triángulos rectángulos, se pide que, con la herramienta Ángulo midan cada uno de estos ángulos y escriban en la tabla correspondiente al ítem las medidas de estos ángulos.

De manera análoga como en los bloques anteriores, los Grupos realizan la formación de los ángulos de los triángulos AHB y BHC representados por las medidas de estos ángulos en el RFD.

A continuación, se presenta una posible acción de los grupos con respecto al ítem a) tal como se muestra en la figura 76.

**Figura 76.** Representación esperada de los grupos 1 y 2 al medir los ángulos agudos en el ítem a



Una vez obtenida las representaciones de las medidas en el RFD, los grupos llenan la tabla correspondiente al ítem a tal como se muestra en la figura 77.

**Figura 77.** Representación esperada del llenado de la tabla del ítem a) – Actividad 2

- a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos agudos de los triángulos rectángulos AHB y BHC. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

$m\angle CAB$	$36.87^\circ$
$m\angle ABH$	$53.13^\circ$
$m\angle HBC$	$36.87^\circ$
$m\angle BCH$	$53.13^\circ$

Tal como se muestra en la figura 77, se espera que los grupos representen las medidas de los ángulos con el sistema de medida angular correspondiente que es el sistema sexagesimal tal como se muestra en el RFD.

Esto nos permitirá evidenciar la conversión de las representaciones de las medidas de los ángulos del RFD al registro algebraico.

### Análisis del ítem b

b) De acuerdo a lo anterior, ¿cuántos triángulos semejantes reconoce? Justifique su respuesta.

En este ítem, una vez que los estudiantes hayan obtenido las medidas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos ABC, AHB y BHC, utilizan el criterio ángulo-ángulo de la semejanza de triángulos para afirmar que los triángulos rectángulos ABC, AHB y BHC son respectivamente semejantes entre sí.

Asimismo, se podrá evidenciar la conversión que realicen los estudiantes de las representaciones de dos triángulos semejantes en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

A continuación, se presenta una posible acción de los grupos con respecto al ítem b) correspondiente a la actividad 2.

Se reconocen tres triángulos semejantes, los cuales son ABC, ABH y HBC. Porque los tres triángulos tienen congruentes los ángulos y por el criterio ángulo-ángulo los triángulos son semejantes.

### Análisis del ítem c

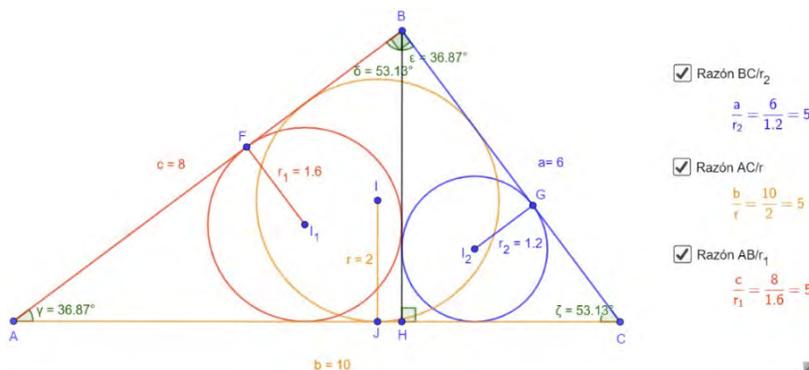
c) Con la herramienta Distancia o Longitud mida los lados de los triángulos rectángulos ABC y mida también los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos rectángulos AHB, BHC y ABC. Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de las hipotenusas y su correspondientes inradios. Escriba estas razones. ¿Por qué las razones son iguales? Justifique su respuesta.

Finalmente, en este ítem, con la herramienta Distancia o Longitud se pide a los estudiantes que midan los lados del triángulo ABC y los inradios de los triángulos AHB y BHC para luego calcular las razones entre las longitudes de las hipotenusas de los triángulos rectángulos semejantes enunciados en el ítem b) y con esto validar la conjetura de que en dos triángulos semejantes los lados y elementos correspondientes son proporcionales.

Esto nos permitirá, evidenciar la conversión que realizan los estudiantes de las representaciones de las razones de las longitudes de los lados e inradios homólogos representados en el registro figural dinámico al registro algebraico del ARD.

A continuación, se presenta una posible acción de los grupos con respecto al ítem c) correspondiente a esta actividad tal como se muestra en la figura 78.

**Figura 78.** Representación esperada de los grupos 1 y 2 de la razón entre las longitudes de los lados e inradios de los triángulos semejantes



Luego, los grupos llenan el recuadro correspondiente al ítem c) y se espera que respondan a la pregunta tal como se muestra en la figura 79.

**Figura 79.** Respuesta esperada de los grupos 1 y 2 a la pregunta del ítem b

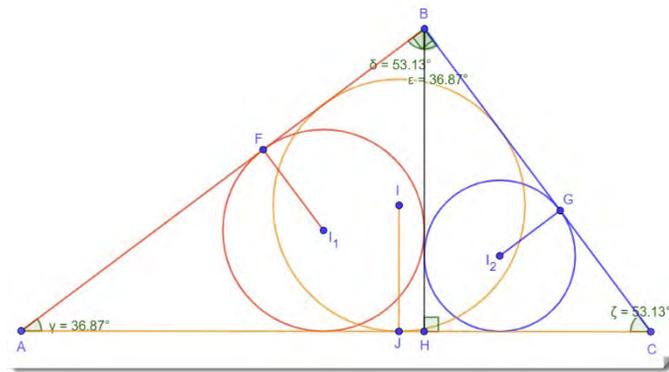
- c) Con la herramienta Distancia o Longitud mida los lados de los triángulos rectángulos AHB y BHC y mida también los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos rectángulos AHB, BHC y ABC. Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de las hipotenusas y su correspondientes inradios. Escriba estas razones. ¿Por qué las razones son iguales? Justifique su respuesta.

BC/r<sub>2</sub>=6/1.2=5  
 AC/r=10/2=5  
 AB/r<sub>1</sub>=8/1.6=5  
 Las razones son iguales porque los triángulos ABC, AHB y BHC son semejantes.

## Resultados de la Actividad 2 – Grupo 1

En el ítem a), el Grupo 1 comienza con la formación de los ángulos de los triángulos AHB y BHC representados por las medidas de estos ángulos en el RFD, para esto utiliza la herramienta Ángulo tal como se muestra en la figura 80.

**Figura 80.** Representación de la medida de los ángulos agudos en el ítem a del Grupo 1



Se puede observar en la figura 80, que el Grupo 1 representó las medidas de los ángulos tal como se esperaba en la figura 76.

A continuación, el Grupo 1 llenó la tabla correspondiente al ítem a) tal como se muestra en la figura 81.

**Figura 81.** Representación de las medidas de los ángulos agudos del Grupo 1 en la tabla del ítem a)

- a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos agudos de los triángulos rectángulos AHB y BHC. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

$m\angle CAB$	36.87
$m\angle ABH$	53.13
$m\angle HBC$	36.87
$m\angle BCH$	53.13

En la figura 81, el Grupo 1, al igual que en los bloques de la actividad 1, no escriben la unidad angular de las medidas de los ángulos que es el sistema sexagesimal.

Respecto al ítem b), el Grupo 1 presenta la respuesta a la pregunta correspondiente, tal como se muestra en la figura 82.

**Figura 82.** Respuesta del Grupo 1 a la pregunta del ítem b)

b) De acuerdo a lo anterior, ¿cuántos triángulos semejantes reconoce? Justifique su respuesta.

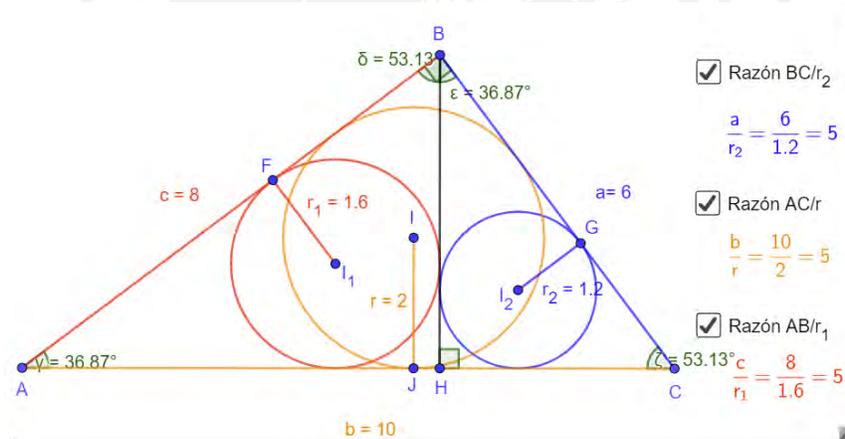
Reconozco 3 triángulos semejantes los cuales son AHB, BHC Y ABC ya que los tres poseen los mismos ángulos y por ende son congruentes.

En la figura 82, la respuesta del Grupo 1 es tal como se esperaba, justifican su respuesta con la congruencia de los ángulos de los tres triángulos AHB, BHC y ABC.

Podemos afirmar que el Grupo 1 realizó una conversión de la representación de dos triángulos semejantes representados en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

En cuanto al ítem c), el grupo 1 activa las casillas de control tal como se muestra en la figura 83.

**Figura 83.** Representación de las casillas de control activadas por el Grupo 1



En la figura 83, el Grupo 1 al activar las casillas de control, se representan las medidas de las hipotenusas de los triángulos rectángulos, así como sus correspondientes medidas de sus inradios en el RFD. Por otro lado, se puede observar que las razones no se superponen a los nombres de las casillas de control a comparación de la actividad 1 - Bloque III – ítem c).

Esta activación de casillas nos permite evidenciar que el Grupo 1 realizó una conversión de la representación de las razones de las longitudes de las hipotenusas homólogas y los inradios homólogos de los triángulos representados en el registro figural dinámico al registro algebraico del ARD.

Luego, el Grupo 1 responde a la pregunta correspondiente al ítem c) tal como se muestra en la figura 84.

**Figura 84.** Respuesta a la pregunta del ítem c del Grupo 1

- c) Con la herramienta Distancia o Longitud mida los lados de los triángulos rectángulos ABC y mida también los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos rectángulos AHB, BHC y ABC. Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de las hipotenusas y su correspondientes inradios. Escriba estas razones. ¿Por qué las razones son iguales? Justifique su respuesta.

Razón BC/r<sub>2</sub>:  $6/1.2=5$  Razón AC/R:  $10/2=5$  Razón AB/r<sub>1</sub>:  $8/1.6=5$

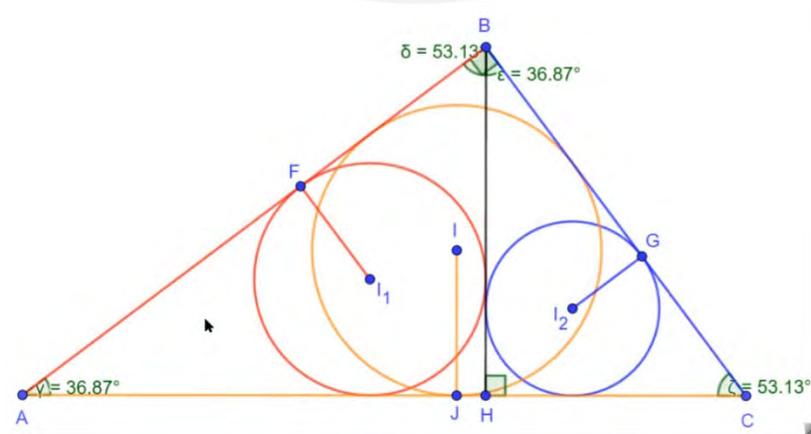
Las razones son iguales debido a que los triángulos son semejantes y los ángulos iguales de esta manera los lados aumentan o disminuyen proporcionalmente.

En la figura 84, el Grupo 1 responde tal como se esperaba, justifican que las razones son iguales en base a que los triángulos son semejantes y por la definición de semejanza de triángulos los ángulos de los triángulos son congruentes y los lados homólogos proporcionales. Si bien es cierto, aún siguen confundiendo la igualdad con la congruencia de ángulos, los estudiantes tienen claro que las razones son iguales por que los triángulos son semejantes.

### Resultados de la Actividad 2 – Grupo 2

En el ítem a), el Grupo 2 comienza con la formación de los ángulos representados por las medidas de los ángulos de los triángulos en el RFD, tal como se muestra en la figura 85.

**Figura 85.** Representación de la medida de los ángulos agudos en el ítem a del Grupo 2



En la figura 85, el Grupo 2 también represento las medidas de los ángulos agudos de los triángulos AHB y BHC en el RFD tal como se esperaba.

Luego, el Grupo 2 llena la tabla con las medidas de los ángulos agudos requeridos en el ítem correspondiente tal como se muestra en la figura 86. Esto permitirá evidenciar la conversión de las representaciones de las medidas de los triángulos representados en el RFD al registro algebraico.

**Figura 86.** Representación de las medidas de los ángulos agudos del Grupo 2 en la tabla del ítem a)

a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos agudos de los triángulos rectángulos AHB y BHC. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

$m\angle CAB$	36.87
$m\angle ABH$	53.13
$m\angle HBC$	36.87
$m\angle BCH$	53.13

En la figura 86, el Grupo 2 representaron las medidas de los ángulos agudos en la tabla sin escribir la unidad angular que es el sistema sexagesimal tal como se muestra en la figura 85.

A la pregunta del ítem b), el Grupo 2 presenta la respuesta tal como se muestra en la figura 87.

**Figura 87.** Respuesta del Grupo 2 a la pregunta del ítem b)

b) De acuerdo a lo anterior, ¿cuántos triángulos semejantes reconoce? Justifique su respuesta.

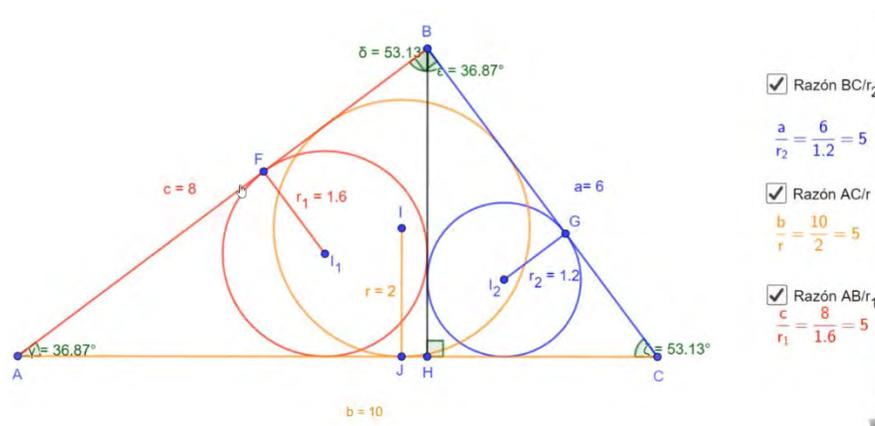
Son 3 triángulos semejantes, ABC AHB y BHC

En la figura 87, el Grupo 2 responde a la pregunta del ítem b) de manera correcta, sin embargo, no justifica por qué los tres triángulos son semejantes.

Podemos afirmar que el Grupo 2 realizó una conversión de la representación de los triángulos semejantes representados en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

Con respecto al ítem c), el Grupo 2 activa las casillas de control tal como se muestra en la figura 88.

**Figura 88.** Representación de las casillas de control activadas por el Grupo 2



En la figura 88, el Grupo 2 activan las casillas de control y se muestran las representaciones de las medidas de las hipotenusas, así como las representaciones de las medidas de los inradios de los triángulos ABC, ABH y BHC tal como se esperaba.

A continuación, el Grupo 2 responde a la pregunta del ítem c) tal como se muestra en la figura 89.

**Figura 89.** Respuesta a la pregunta del ítem c) del Grupo 2

- c) Con la herramienta Distancia o Longitud mida los lados de los triángulos rectángulos ABC y mida también los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos rectángulos AHB, BHC y ABC. Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de las hipotenusas y su correspondientes inradios. Escriba estas razones. ¿Por qué las razones son iguales? Justifique su respuesta.

$$a/r_2 = 6/1.2 = 5$$

$$b/r = 10/2 = 5$$

$$c/r_1 = 8/1.6 = 5$$

Las razones son iguales porque los triángulos son semejantes

En la figura 89, el Grupo 2 respondió a la pregunta del ítem c) tal como se esperaba, justifican que las razones son iguales porque los triángulos ABC, AHB y HBC son semejantes.

Esto nos permite identificar la conversión que realizaron los estudiantes de las representaciones de los triángulos semejantes en el registro figural al registro de lengua natural.

Al finalizar la Actividad 2, se identificó la formación de los ángulos representados por las medidas de los ángulos en el registro figural dinámico y así poder afirmar que los ángulos agudos de los triángulos rectángulos ABC, AHB y BHC son congruentes.

Además, se identificó la conversión de la representación de los triángulos semejantes representados en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

El profesor investigador identificó la representación de la constante de proporcionalidad entre las longitudes de las hipotenusas homólogos y los inradios correspondientes de los triángulos semejantes ABC, AHB y BHC. Por otro lado, se identificó la conversión de las razones entre las longitudes de los lados e inradios de los triángulos ABC, AHB y BHC representados en el registro figural dinámico por medio de la activación de las casillas de control al registro algebraico del ARDD, así como la conversión de la representación de los triángulos semejantes en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

A continuación, presentamos el análisis de la actividad 2, esta actividad se encuentra en la parte de anexos en una ficha en la cual se describe la secuencia de actividades que los estudiantes van a desarrollar durante la experimentación.

En esta tarea se muestra la representación de un triángulo ABC y eligiendo como diámetro el lado  $\overline{AC}$  se representa una circunferencia de centro O determinándose los puntos P y Q por la intersección de la circunferencia con los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ .

La Actividad 3 está conformada por 3 ítems y tiene como finalidad comprobar que las áreas de las regiones triangulares de dos triángulos semejantes son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de los lados homólogos. Asimismo, nos permitirá identificar la conversión entre los registros figural dinámico, algebraico y lengua natural.

### **Análisis de la Actividad 3**

Se espera que los estudiantes al abrir el archivo *Tarea\_3.gbb* reconozcan el triángulo ABC y el triángulo PBQ determinado por la cuerda  $\overline{PQ}$  cuyos extremos son los puntos de intersección de la circunferencia con los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ .

#### **Análisis del ítem a**

a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y PBQ. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.
--

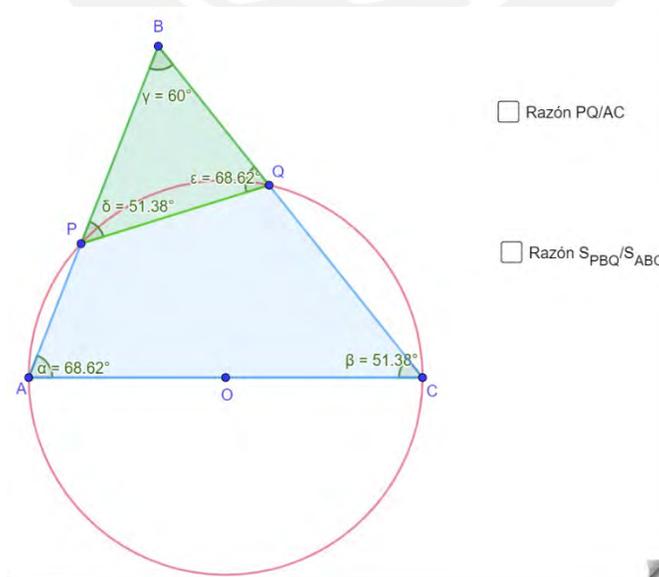
	<table border="1"> <tr> <td><math>m\angle CAB</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>m\angle BCA</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>m\angle ABC</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>m\angle QPB</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td><math>m\angle BQP</math></td> <td></td> </tr> </table>	$m\angle CAB$		$m\angle BCA$		$m\angle ABC$		$m\angle QPB$		$m\angle BQP$	
$m\angle CAB$											
$m\angle BCA$											
$m\angle ABC$											
$m\angle QPB$											
$m\angle BQP$											

En este ítem, se pide a los estudiantes que utilicen la herramienta Ángulo y midan los ángulos de los triángulos ABC y PBQ, y escriban en la tabla correspondiente al ítem las medidas de estos ángulos. Por otro lado, nos permitirá identificar la formación de la representación algebraica de las medidas de los ángulos en el ARD, a fin de obtener información si los triángulos ABC y QBP tienen ángulos congruentes entre sí.

Como en las anteriores actividades, la formación de los ángulos estará representada por las medidas de estos ángulos en el RFD.

A continuación, presentamos una posible acción de los grupos con respecto al ítem a) tal como se muestra en la figura 90.

**Figura 90.** Representación esperada de los grupos 1 y 2 al medir los ángulos en el ítem a



Una vez representadas las medidas de los ángulos en el RFD, a continuación, los estudiantes llenan la tabla correspondiente tal como se muestra en la figura 91.

**Figura 91.** Representación esperada del llenado de la tabla del ítem a) – Actividad 3

$m\angle CAB$	$68.62^\circ$
$m\angle BCA$	$51.38^\circ$
$m\angle ABC$	$60^\circ$
$m\angle QPB$	$51.38^\circ$
$m\angle BQP$	$68.62^\circ$

### Análisis del ítem b

b) De acuerdo a lo anterior, ¿reconoce dos triángulos semejantes? Justifique su respuesta.

En este ítem, una vez que los estudiantes hayan obtenido las representaciones de las medidas requeridas en el ítem anterior, utilizan el criterio ángulo-ángulo de la semejanza de triángulos para afirmar que los triángulos ABC y QBP son semejantes. Asimismo, nos permitirá identificar la conversión que realizan los estudiantes de la representación de dos triángulos semejantes representados en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

### Análisis del ítem c

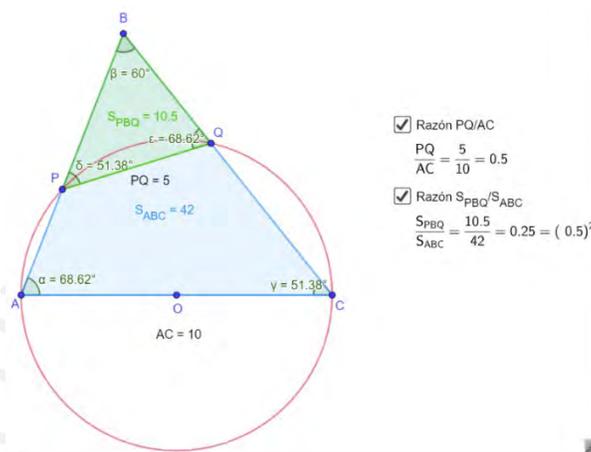
c) Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de los lados  $\overline{PQ}$  y  $\overline{AC}$  de los triángulos PBQ y ABC, así como la razón entre las áreas de las regiones triangulares PBQ y ABC.

Finalmente, en este ítem, se pide a los estudiantes que activen las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de los lados  $\overline{PQ}$  y  $\overline{AC}$  de los triángulos semejantes QBP y ABC, así como la razón de las áreas de las regiones triangulares correspondientes, con el fin de comprobar que las áreas de las regiones triangulares QBP y ABC son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de los lados homólogos  $\overline{PQ}$  y  $\overline{AC}$ .

Esto nos permitirá evidenciar la conversión que realizan los estudiantes de la representación de las razones de las longitudes de los lados homólogos y de las áreas de las regiones triangulares representadas en el RFD al registro algebraico del ARD.

A continuación, presentamos una posible acción de los grupos 1 y 2 correspondiente al ítem c) tal como se muestra en la figura 92.

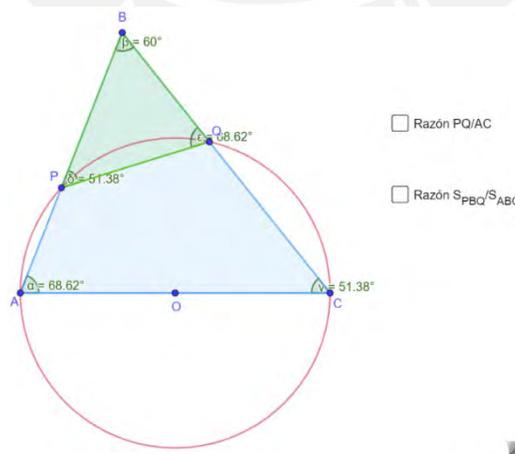
**Figura 92.** Representación esperada de los grupos 1 y 2 al activar las casillas de control en el ítem c)



### Resultados de la Actividad 3 – Grupo 1

Para este ítem a), el Grupo 1 realiza la formación de los ángulos representados por las medidas de estos ángulos en el RFD, tal como se muestra en la figura 93.

**Figura 93.** Representación de la medida de los ángulos agudos en el ítem a) del Grupo 1



Luego el Grupo 1, llena la tabla correspondiente al ítem a) tal como se muestra en la figura 94.

**Figura 94.** Representación de las medidas de los ángulos agudos del Grupo 1 en la tabla del ítem a)

a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y PBQ. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

$m\angle CAB$	68.62
$m\angle BCA$	51.38
$m\angle ABC$	60
$m\angle QPB$	51.38
$m\angle BQP$	68.62

Se puede observar en la figura 94, que el Grupo 1 a llenado la tabla sin colocar la unidad de medida de los ángulos en la tabla, esta situación se presentó anteriormente en las actividades 1 y 2.

Esto nos permite evidenciar la conversión que realizan los estudiantes de las representaciones de las medidas de los ángulos representados en el registro figural dinámico al registro algebraico.

En relación al ítem b), el Grupo 1 responde a la pregunta del ítem b tal como se muestra en la figura 95.

**Figura 95.** Respuesta a la pregunta del ítem b del Grupo 1

b) De acuerdo a lo anterior, ¿reconoce dos triángulos semejantes? Justifique su respuesta.

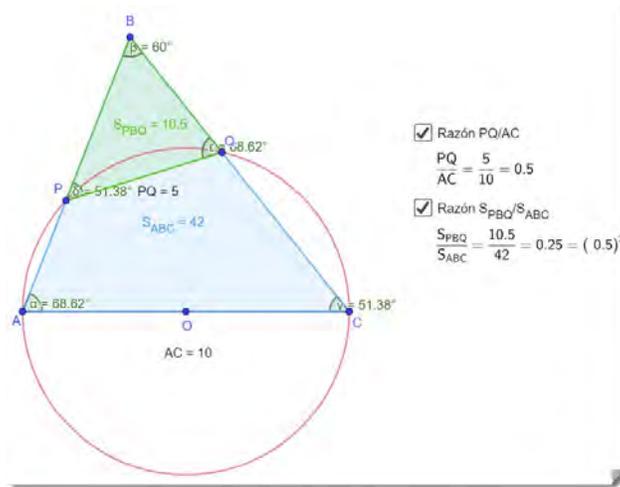
Sí, los dos triángulos semejantes son ABC y PBQ.

Podemos observar en la figura 95, que los estudiantes identifican los triángulos semejantes, pero no justifican utilizando el criterio de ángulo-ángulo-ángulo de la semejanza de triángulos, entendemos que esta situación se da debido a que en las actividades anteriores se ha aplicado este criterio y los estudiantes identifican los triángulos semejantes ABC y QBP.

Podemos afirmar que el Grupo 1 realizó la conversión de la representación de dos triángulos semejantes representados en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

En cuanto al ítem c), el Grupo 1 activa las casillas de control para obtener la razón de las longitudes de los lados homólogos PQ y AC, y la razón de las áreas de las regiones triangulares PBQ y ABC tal como se muestra en la figura 96.

**Figura 96.** Representación de las casillas de control activadas en el ítem c) por el Grupo 1



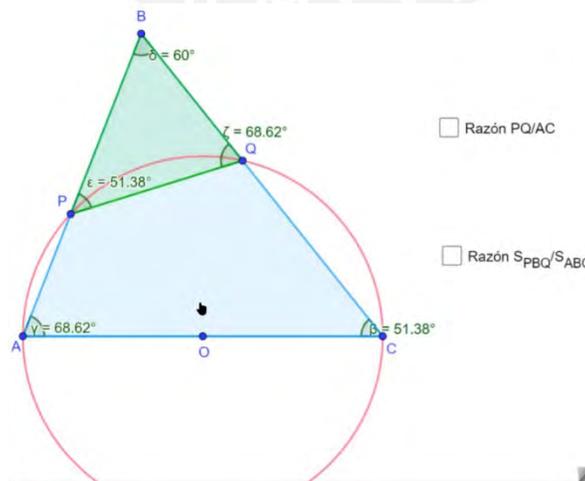
En la figura 96, el Grupo 1 represento tal como se esperaba al activar las casillas de control, se pueden distinguir las razones de las longitudes de los lados homólogos PQ y AC, así como la razón entre las áreas de las regiones triangulares QBP y ABC.

De esta manera, el Grupo 1 evidencia la conversión de las representaciones de las razones de las longitudes de dos lados homólogos y las áreas de las regiones triangulares representados en el registro figural dinámico al registro algebraico del ARD.

### Resultados de la Actividad 3 – Grupo 2

En este ítem a), el Grupo 2 comienza con la formación de los ángulos de los triángulos representados por las medidas de estos ángulos en el RFD tal como se muestra en la figura 97.

**Figura 97.** Representación de la medida de los ángulos agudos en el ítem a del Grupo 2



Luego el Grupo 1, llena la tabla correspondiente al ítem a) tal como se muestra en la figura 98.

**Figura 98.** Representación de las medidas de los ángulos agudos del Grupo 1 en la tabla del ítem a)

a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y PBQ. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

m $\angle$ CAB	68.62
m $\angle$ BCA	51.38
m $\angle$ ABC	60
m $\angle$ QPB	51.38
m $\angle$ BQP	68.62

Al igual que el Grupo 1, los estudiantes del Grupo 2 tampoco expresan las medidas de los ángulos en el sistema sexagesimal tal como lo representa el ARD.

Esto nos permite identificar la conversión que realizan los estudiantes de las representaciones de las medidas de los ángulos representados en el registro figural dinámico al registro algebraico.

Con respecto al ítem b), el Grupo 2 presenta la respuesta tal como se muestra en la figura 99.

**Figura 99.** Respuesta a la pregunta del ítem b del Grupo 2

b) De acuerdo a lo anterior, ¿reconoce dos triángulos semejantes? Justifique su respuesta.

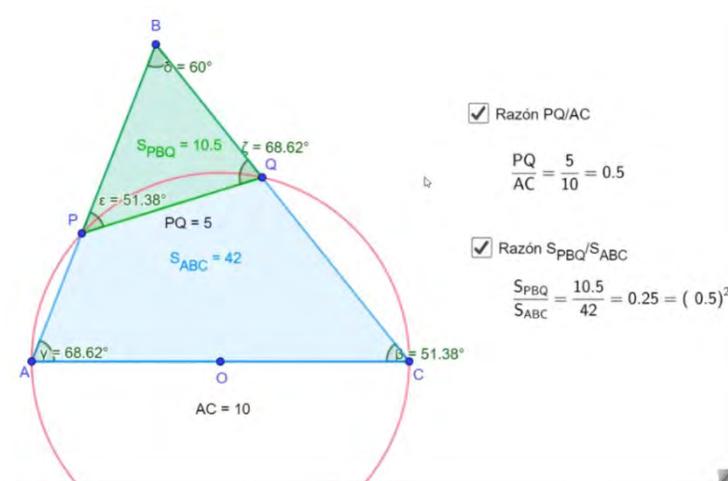
Los triángulos semejantes son PBQ y ABC porque la medida de sus ángulos son iguales

Se puede observar en la figura 99, que a diferencia del Grupo 1, los estudiantes del Grupo 2 identifican los triángulos semejantes ABC y QBP justificándose en la igualdad de las medidas de los ángulos de los triángulos que es el criterio ángulo-ángulo de la semejanza de triángulos.

Luego, podemos afirmar que el Grupo 2 realizó la conversión de la representación de dos triángulos semejantes representados en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

En cuanto al ítem c), el Grupo 2 activa las casillas de control en el ARD, a fin de obtener las razones mencionadas en este ítem tal como se muestra en la figura 100.

**Figura 100.** Representación de las casillas de control activadas en el ítem c) por el Grupo 2



Al igual que el Grupo 1, la representación de las casillas de control activadas por parte del Grupo 2 es la esperada, distinguiéndose de manera clara la razón de las longitudes de los lados homólogos PQ y AC, y la razón entre las áreas de las regiones triangulare QBP y ABC.

De igual forma, el Grupo 2 evidencia la conversión de las representaciones de las razones de las longitudes de dos lados homólogos y las áreas de las regiones triangulares representados en el registro figural dinámico al registro algebraico del ARD.

Al finalizar esta actividad, el profesor investigador identificó la formación de los ángulos representados por las medidas de estos ángulos en el registro figural dinámico, el cual permitió que los estudiantes comparen las medidas de los ángulos y de esta manera señalar la congruencia de los ángulos de los triángulos rectángulos ABC y QBP.

Asimismo, el profesor investigador identificó la conversión que realizaron los estudiantes de la representación de los triángulos semejantes representados en el registro figural dinámico al registro de lengua natural.

Finalmente, el profesor investigador, identificó la constante de proporcionalidad entre las longitudes de los lados homólogos PQ y AC de los triángulos semejantes QBP y ABC, así como la razón de las áreas de las regiones triangulares de QBP y ABC que es igual al cuadrado de la constante de proporcionalidad. Por otro lado, se identificó la conversión del registro figural dinámico al registro algebraico del ARD de las representaciones de las razones de las longitudes

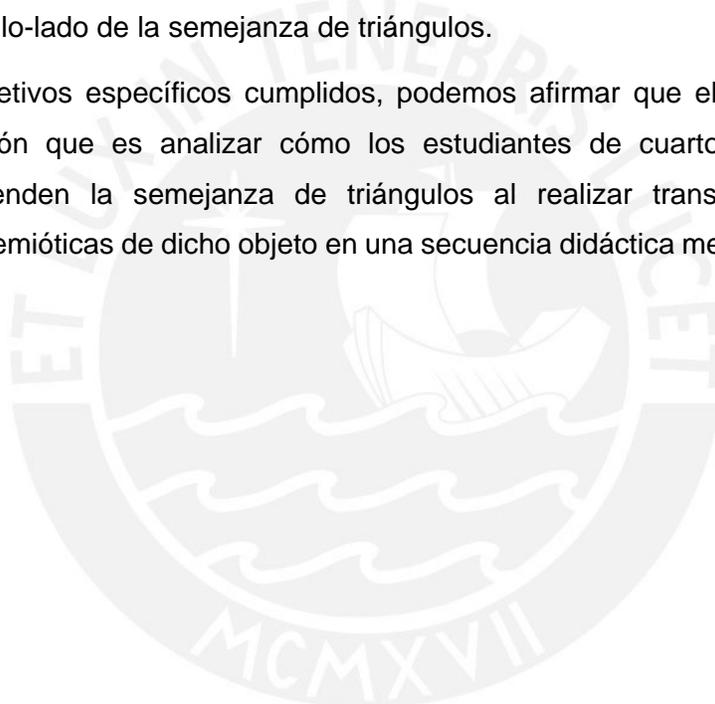
de los lados y áreas de las regiones triangulares representadas en el registro figural dinámico al registro algebraico del ARD.

### **Resultado de la aplicación de la secuencia de actividades**

Con los resultados dados en las acciones del Grupo 1 y Grupo 2, podemos decir que se logró que los estudiantes identificarán las transformaciones, como son los tratamientos y conversiones en los registros de representación semiótica lengua natural, registro algebraico y registro figural dinámico.

Se cumplieron los objetivos de cada actividad, sin embargo, en la actividad 1–bloque I– ítem b) si bien es cierto los estudiantes reconocen los triángulos semejantes, pero no identifican el criterio lado-ángulo-lado de la semejanza de triángulos.

Con los objetivos específicos cumplidos, podemos afirmar que el objetivo general de nuestra investigación que es analizar cómo los estudiantes de cuarto año de educación secundaria comprenden la semejanza de triángulos al realizar transformaciones en las representaciones semióticas de dicho objeto en una secuencia didáctica mediado por GeoGebra se ha cumplido.



## Conclusiones

En esta sección presentamos las conclusiones y resultados de nuestro trabajo de investigación teniendo en cuenta la metodología, el marco teórico y las contribuciones para investigaciones futuras.

La secuencia didáctica permitió que los estudiantes utilicen los registros: algebraico, figural dinámico, y lengua natural, a la vez que movilizaban sus conocimientos con respecto a la semejanza de triángulos.

El marco teórico que toma los aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, nos brindó las herramientas necesarias para el análisis de los resultados de cada una de nuestras actividades. Así pudimos observar si los estudiantes de cuarto año de educación secundaria alcanzaban los objetivos de cada una estas actividades o si se presentaba algún inconveniente con alguna de ellas.

La actividad 1, fue muy importante porque daba inicio al estudiante a la formación de los ángulos en el registro figural dinámico y al reconocimiento de las representaciones de dos triángulos semejantes en este registro, justificándose en los criterios de la semejanza de triángulos, además de verificar la constante de proporcionalidad mediante las razones de las longitudes de los lados de los triángulos representados en este mismo registro, de esta manera se observó que los estudiantes movilizaban de manera correcta, sus conocimientos previos de la semejanza de triángulos tales como razones y proporciones, ángulos, triángulos, circunferencia y áreas de regiones triangulares.

En el bloque II de la actividad 1 los estudiantes tuvieron dificultades al aplicar el criterio lado-ángulo-lado de la semejanza de triángulos, pensamos que este criterio no es muy visto en el sentido que no han desarrollado tareas relacionadas con este criterio. Por otra parte, quizás la activación de las dos primeras casillas, en esta parte del ítem les hubiera permitido deducir el criterio ya que en la representación algebraica del ARD, podrían observar que los lados que determinan a esos ángulos congruentes son proporcionales, cuya constante de proporcionalidad es  $\sqrt{3} \approx 1.73$ . Por otro lado, pensamos que debió ser conveniente que antes de proponer la pregunta, si los triángulos son semejantes, se indique a los estudiantes la activación de las dos primeras casillas a fin de obtener la proporcionalidad entre los lados que determinan a esos ángulos congruentes en los triángulos representados en el registro figural dinámico y así validar mediante este criterio la semejanza de los triángulos.

El bloque III de la actividad 1, permitió identificar el tratamiento dinámico que realizaron los estudiantes en el registro figural dinámico mediante el cambio de posición del lado de un triángulo, este dinamismo permitió que los estudiantes identificaran que las representaciones de los triángulos en el registro figural dinámico seguían siendo semejantes.

En el desarrollo de las actividades, los estudiantes de ambos grupos que se analizaron, presentaban en la ficha las representaciones de las medidas de los ángulos sin la unidad angular de medida el cuál es el sistema sexagesimal, observándose que el ARD representa las medidas

en dicho sistema de manera clara. Pensamos que, los estudiantes no están familiarizados con el símbolo “°” en el teclado dependiendo de la configuración de la misma, en el sistema operativo del computador en el cual se llevó a cabo la sesión.

También, pudimos observar que los estudiantes interpretaron la congruencia de ángulos con la igualdad al identificar la igualdad de las medidas de los ángulos de los triángulos semejantes. Lo cual nos lleva a pensar, que los estudiantes no tienen claro la noción de congruencia de ángulos.

Por otro lado, la metodología cualitativa nos permitió describir las acciones, comportamientos e interrelaciones que los estudiantes mostraron en el desarrollo de la secuencia de actividades.

Asimismo, la implementación de las actividades con los estudiantes por medio de la plataforma de videoconferencia Zoom, fue un reto que nos propusimos al inicio de la pandemia, que pudimos cumplirlo con la disposición de los estudiantes que en estos últimos años son considerados nativos digitales ya que se desarrollaron bien en el uso del Zoom, GeoGebra y Office.

Con los resultados obtenidos a partir de la implementación de la secuencia de actividades pudimos alcanzar nuestros objetivos específicos ya que logramos identificar los tratamientos y las conversiones que los estudiantes utilizaron al desarrollar la secuencia de actividades, podemos afirmar que se logró alcanzar el objetivo general el cual nos permitió responder nuestra pregunta de investigación: *¿Cómo los estudiantes de cuarto año de educación secundaria comprenden la noción de semejanza de triángulos mediante transformaciones en representaciones semióticas de dicho objeto en una secuencia didáctica mediada por GeoGebra?*

Con respecto al aporte de nuestro trabajo a futuras investigaciones, lo presentamos como sigue:

- Recomendamos el diseño de actividades que permitan la aplicación del criterio lado–ángulo–lado de la semejanza de triángulos de modo que la constante de proporcionalidad sea un número entero de manera que los estudiantes puedan identificar la proporción entre las longitudes de los lados que determinan a los ángulos congruentes según este criterio.
- Diseñar actividades que involucren otros tratamientos en el registro figural dinámico según Salazar y Almouloud (2015).
- Extender esta propuesta a situaciones geométricas en la geometría del espacio, donde el ARD GeoGebra cuenta con las herramientas necesarias para la implementación de esta propuesta.

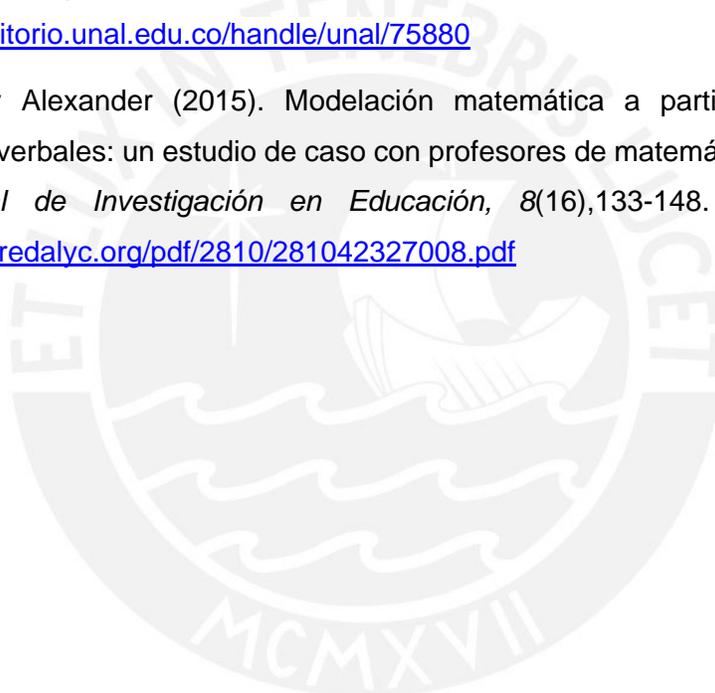
## Referencias

- Álvarez, M., Almeida, B., & Villegas, E. (2014). El proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. La Habana-Cuba: Pueblo y Educación.
- BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T.; LOPES, F. I. (2018). O desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em geometria segundo raymond duval: uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra. *Olhar de Professor*, 21(1),98-115. ISSN: 1518-5648. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=684/68460140008>
- Briceño, E., & Alamillo, L. (2017). Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, 8(15), 111-131. [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2448-85502017000200111&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448-85502017000200111&lng=es&tlng=es)
- CABRAL, C. A. F. (2019). Uma sequência de atividades com enfoque em representações dinâmicas para o desenvolvimento de conhecimentos de semelhança de triângulos. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará. <http://repositorio.ufpa.br:8080/jspui/handle/2011/12445>
- COREFO. (2019). *Matemática: Libro de Actividades*. Lima-Perú. Editorial Corefo, p. 19.
- Ducuara, M. & Quiza, J. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de semejanza de triángulos y objetos tridimensionales mediante el uso del software dinámico GeoGebra: una experiencia con estudiantes del grado noveno de la Educación Básica colombiana*. Universidad Surcolombiana. <http://repositoriousco.co:8080/jspui/handle/123456789/611>
- Duval R. (1995a). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific Processings. *In Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (R. Sutherland & J. Mason Eds.) Berlin: Springer pp. 142-157.
- Duval, R. (1995b). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle, Colombia, 2004.
- Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. *La Gaceta de la RSME*, 9.1, pp. 143-168. <https://cmappublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN->

[2CG/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf](#)

- DUVAL, R. (2009). *Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física.
- DUVAL, R. (2011). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *Tradução de Mércles Thadeu Moretti. Revista Eletrônica de Matemática. Florianópolis (SC)*, 6(2), 96-112. <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>
- Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 23(3), pp. 379-91, <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/22034>
- García, J. G. J., & Izquierdo, S. J. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista electrónica sobre tecnología, educación y sociedad*, 4(7). <https://www.ctes.org.mx/index.php/ctes/article/view/654>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2017). *Metodología de la investigación* (6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.
- IPEBA (2013). Mapas de progreso del aprendizaje. Matemática: Geometría. Lima. [https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/1078852/Mapas\\_MatGeometr%C3%ADa\\_20200730-107894-u5a67p.pdf](https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/1078852/Mapas_MatGeometr%C3%ADa_20200730-107894-u5a67p.pdf)
- Julio, L. (2014). *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza* [Tesis de posgrado, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional de la Universidad de Colombia <http://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/74974>
- Moise, E. E., & Downs, F. L. (1966). *Geometría moderna*. Addison-Wesley.
- Ortiz, A. (2005). *Historia de la matemática. Volumen 1. La matemática en la antigüedad*. <http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/134460>
- Perú. Ministerio de Educación. (2016). *Currículo Nacional de Educación Básica*. Lima. <http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2016.pdf>
- Salazar J.V.F. (2018). Semiotic Representations: A Study of Dynamic Figural Register. In: Presmeg N., Radford L., Roth WM., Kadunz G. (eds) Signs of Signification. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2_12)

- SALAZAR, J. V.; ALMOULOU, S. A. (2015). Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. *Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 17(5), 919 – 941. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/26325>
- Torres, R. & Matute, J. (2018). *Fortalecimiento de los criterios de semejanzas de triángulos mediante la integración de las TIC para mejorar el componente geométrico* [Tesis de posgrado, Universidad del Norte, Colombia]. <http://hdl.handle.net/10584/7949>
- Vanegas, J. (2019). *Propuesta para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las relaciones de semejanza y congruencia de triángulos* [Tesis de posgrado, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional de la Universidad de Colombia <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/75880>
- Villa-Ochoa, Jhony Alexander (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, 8(16),133-148. ISSN: 2027-1174. <https://www.redalyc.org/pdf/2810/281042327008.pdf>



## Anexos

**Tabla 3.** Herramientas del GeoGebra 6.0

Herramienta	Iconos	Construcción
Elije y mueve		Permite seleccionar y trasladar objetos, incluso varios a la vez presionando la tecla de Control.
Punto		Crea un punto en el plano.
Punto en objeto		Crea un punto dentro del objeto.
Intersección		Selecciona dos objetos, para crear todos los puntos de intersección.
Medio o centro		Marca dos puntos y se traza un punto que equidista y es colineal a los dos puntos.
Recta		Ubica dos puntos y se traza la recta que pasa por los dos puntos.
Segmento		Elige dos puntos extremos y queda definido un segmento.
Recta perpendicular		Selecciona una recta (semirrecta o segmento) y un punto donde quedará definida una recta que pase por el punto y perpendicular a la primera recta.
Rectas paralelas		Selecciona una recta y un punto, quedará definida una recta paralela a la primera recta.
Polígono		Construye polígono marcando como mínimo tres puntos, se inicia en el primer punto y termina en el mismo punto donde se inició.
Compás		Selecciona un segmento o puntos extremos que serán el radio de la circunferencia, luego se fija en un punto que será su centro.
Distancia o Longitud		Selecciona dos puntos extremos o un segmento para determinar la medida de longitud.

Ángulo		Selecciona tres puntos (lateral, vértice, lateral) o dos rectas para determinar su medida.
Renombrar		Clica sobre el objeto matemático (punto, recta, ángulo, etc.) con el botón derecho para asignarle un nombre.
Deslizador		Clica sobre la vista gráfica y en el dialogo emergente especificar el nombre del deslizador, el intervalo y el incremento, así como su velocidad y la modalidad de animación.
Casilla de control		Clica sobre la vista gráfica y en el dialogo emergente especificar el rótulo de la casilla de control y elegir objetos a seleccionar en la construcción de la lista desplegable.

Fuente. García (2014, p. 13) y Gómez (2015, p. 16)

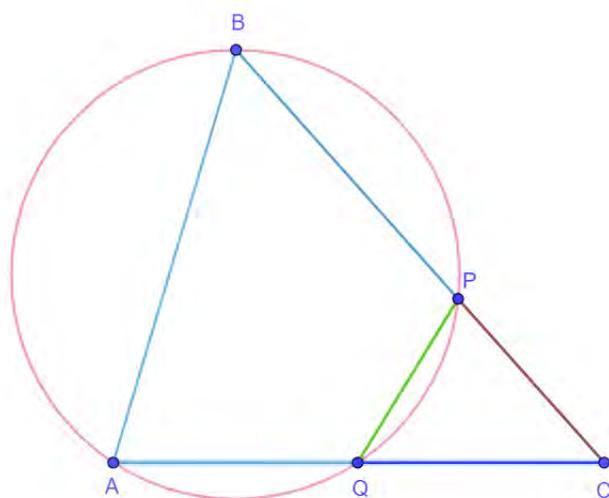


Ficha de la secuencia de actividades de la experimentación.

ACTIVIDAD 1

Bloque I

Abra el archivo: *Tarea\_1-Bloque\_I.gbb*



Razón BC/QC

Razón AC/PC

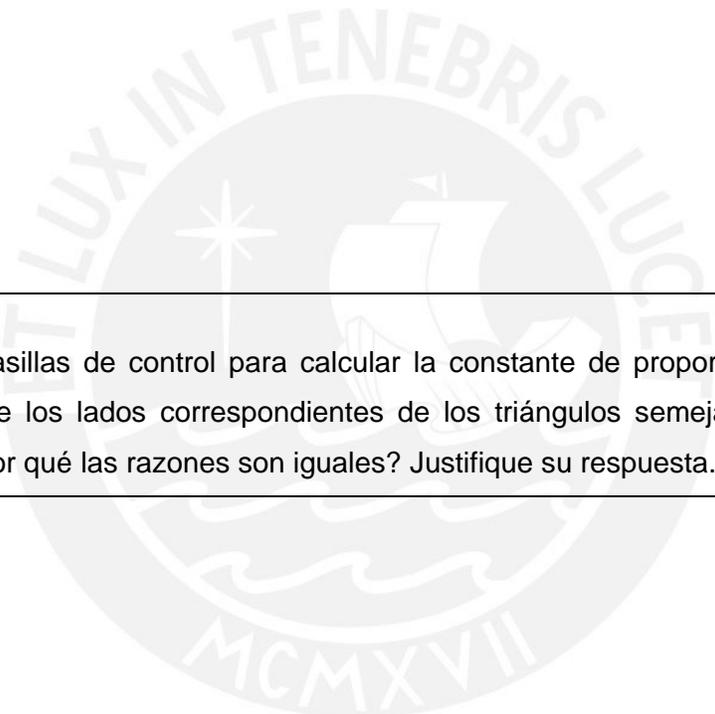
Razón AB/PQ

- a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y QPC. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

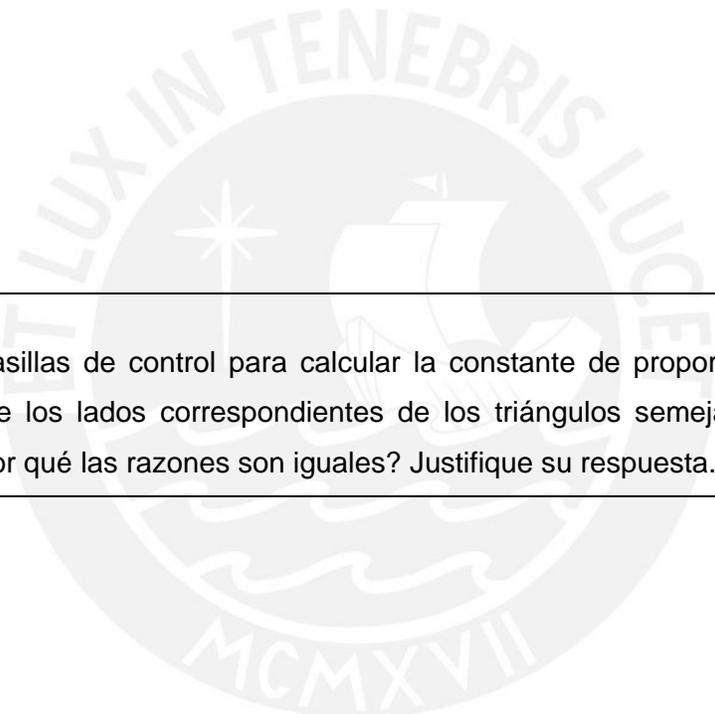
$m\angle CAB$	
$m\angle ABC$	
$m\angle BCA$	
$m\angle QPC$	
$m\angle CQP$	

- b) De acuerdo a lo anterior, ¿los triángulos PQC y ABC son semejantes? Justifique su respuesta.

- c) Con la herramienta Mueve, desplace el punto P a otra ubicación sobre el mismo lado  $\overline{BC}$ .  
¿El triángulo determinado en la nueva posición de P es semejante al triángulo ABC?  
Explique.

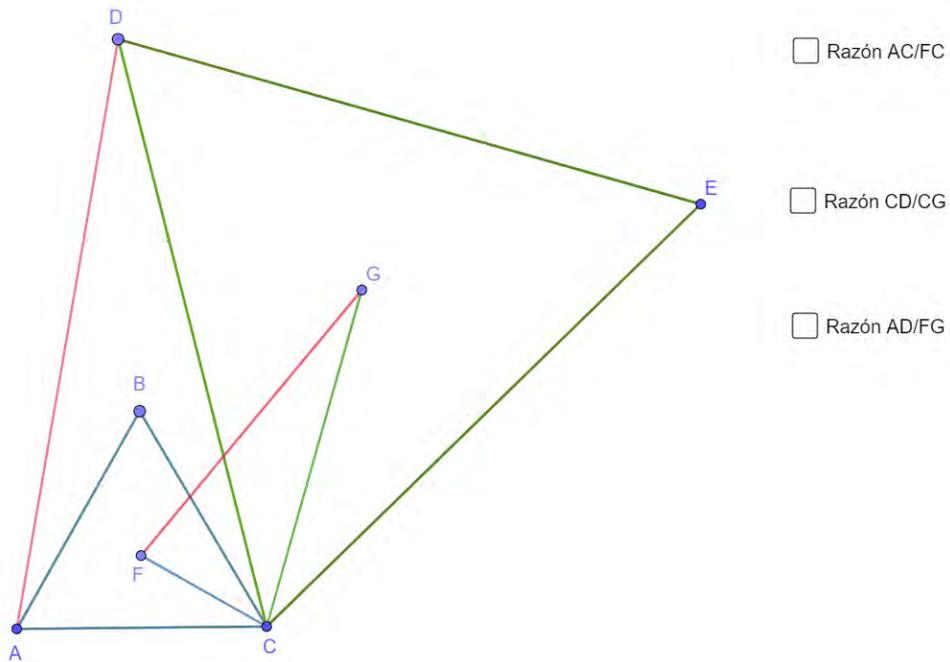


- d) Active las casillas de control para calcular la constante de proporcionalidad entre las longitudes de los lados correspondientes de los triángulos semejantes. Escriba esas razones. ¿Por qué las razones son iguales? Justifique su respuesta.



## Bloque II

Abra el archivo *Tarea\_1-Bloque\_II.gbb*



Razón AC/FC

Razón CD/CG

Razón AD/FG

- a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos  $\angle BCA$  y  $\angle GCF$  de los triángulos  $AEB$  y  $FGB$  y a continuación con la herramienta Distancia o Longitud mida los lados  $\overline{AC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{FC}$  y  $\overline{CG}$ . Escriba las medidas de los ángulos y lados en la siguiente tabla.

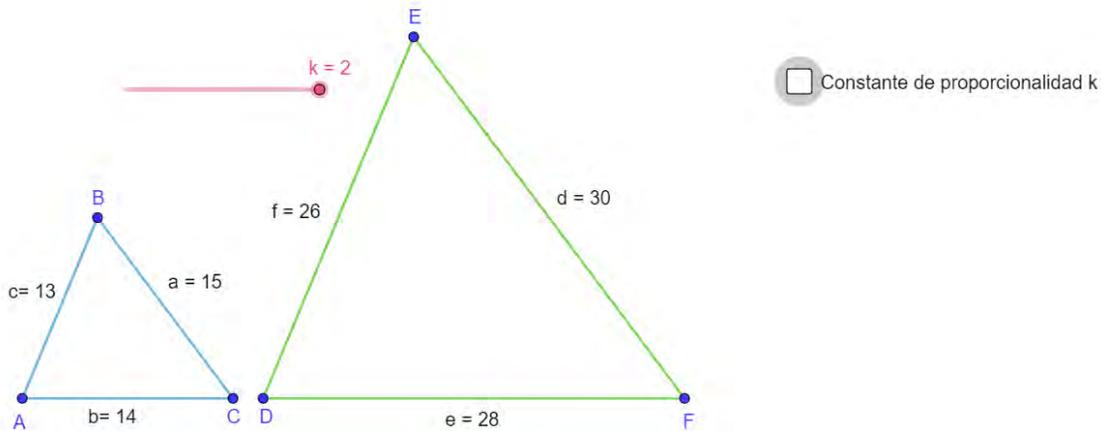
$m\angle DCA$	
$m\angle GCF$	
AC	
DC	
FC	
CG	

- b) A parte de que los triángulos equiláteros son semejantes y de acuerdo a lo anterior, ¿reconoce dos triángulos semejantes? Justifique su respuesta.

- c) Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de los lados de los triángulos AEB y FGB.

### Bloque III

Abra el archivo *Tarea\_1-Bloque\_III.gbb*



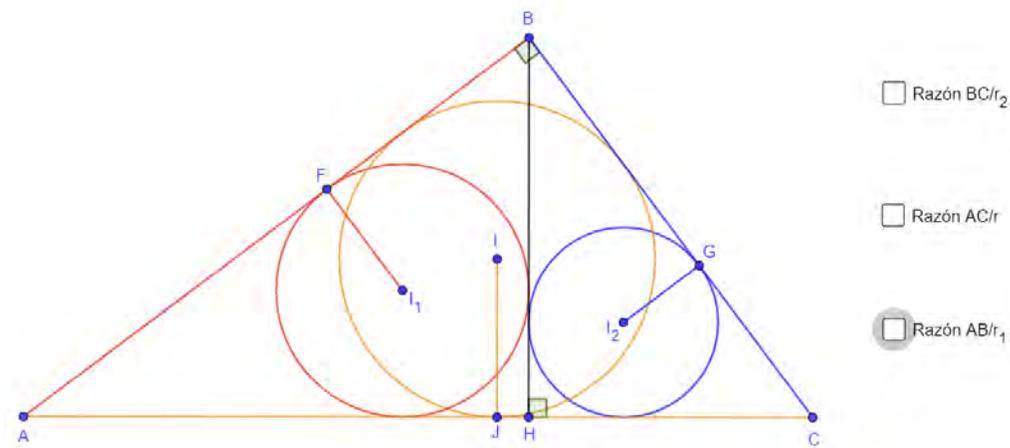
- a) Active la casilla de control para encontrar la razón entre los lados de los triángulos ABC y DEF. ¿Los triángulos ABC y DEF son semejantes? Justifique su respuesta.

- b) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y DEF. ¿Son congruentes? ¿Por qué? Justifique su respuesta.

- c) Manipule el deslizador hasta  $k = 0.5$ , ¿los triángulos ABC y DEF siguen siendo semejantes? ¿Qué ocurre cuando  $k = 1$ ?

## ACTIVIDAD 2

Abra el archivo *Tarea\_2.gbb*



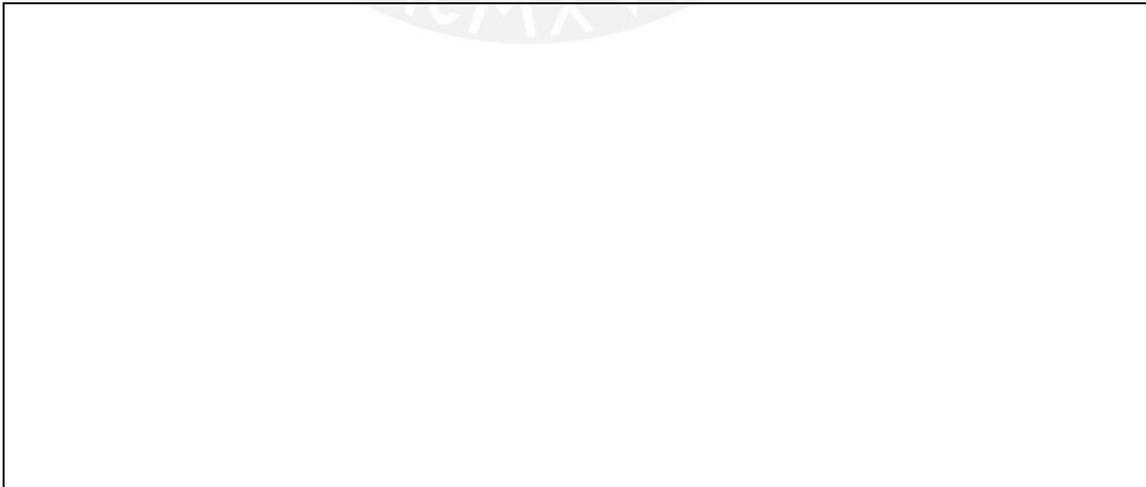
- a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos agudos de los triángulos rectángulos AHB y BHC. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

$m\angle CAB$	
$m\angle ABH$	
$m\angle HBC$	
$m\angle BCH$	

b) De acuerdo a lo anterior, ¿cuántos triángulos semejantes reconoce? Justifique su respuesta.

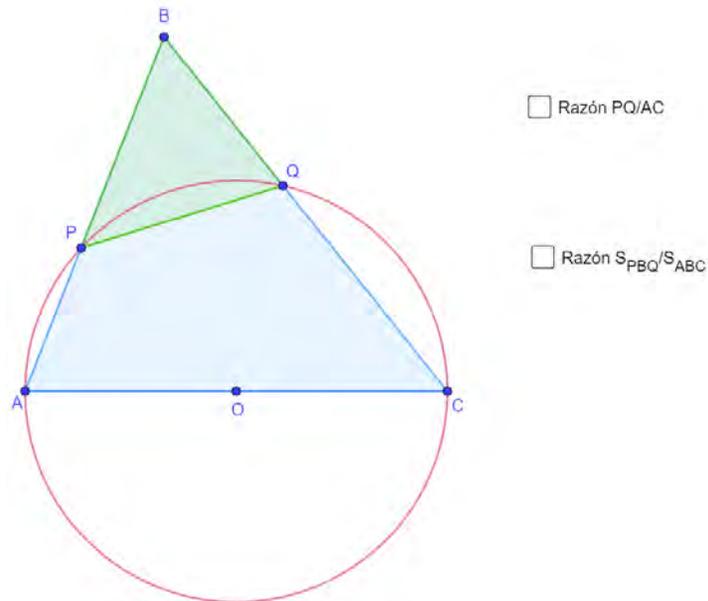


c) Con la herramienta Distancia o Longitud mida los lados de los triángulos rectángulos ABC y mida también los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos rectángulos AHB, BHC y ABC. Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de las hipotenusas y su correspondientes inradios. Escriba estas razones. ¿Por qué las razones son iguales? Justifique su respuesta.



### ACTIVIDAD 3

Abra el archivo Tarea\_3.ggb



Razón  $PQ/AC$

Razón  $S_{PBQ}/S_{ABC}$

- a) Con la herramienta Ángulo mida los ángulos de los triángulos ABC y PBQ. Escriba las medidas de los ángulos en la siguiente tabla.

$m\angle CAB$	
$m\angle BCA$	
$m\angle ABC$	
$m\angle QPB$	
$m\angle BQP$	

- b) De acuerdo a lo anterior, ¿reconoce dos triángulos semejantes? Justifique su respuesta.

- c) Active las casillas de control para obtener la razón entre las longitudes de los lados  $\overline{PQ}$  y  $\overline{AC}$  de los triángulos PBQ y ABC, así como la razón entre las áreas de las regiones triangulares PBQ y ABC.

