



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**

TESIS DE MAGÍSTER EN INGENIERÍA

**Estudio y desarrollo de técnicas de medición y análisis  
de vibraciones torsionales**

Autor: Guillermo Daniel Chiappero

BAHIA BLANCA

ARGENTINA

2013

## PREFACIO

Este trabajo se presenta como parte de los requisitos para optar al grado de Magíster en Ingeniería, de la Universidad Nacional del Sur y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro título en esta universidad u otra. La misma contiene los resultados obtenidos en actividades llevadas a cabo en el ámbito del Departamento de Ingeniería durante el período comprendido entre el 30/09/2008 y el (01/11/2011), bajo la dirección del Ing. José Luis Pombo.



**UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR**  
**Secretaría General de Posgrado y Educación Continua**

**El presente Trabajo Final de Maestría ha sido aprobado el / /..., mereciendo la calificación de ( ).**

## **RESUMEN**

El objetivo de esta tesis es desarrollar y evaluar una técnica de medición y análisis de vibraciones torsionales en máquinas rotantes, utilizando para ello instrumentación de uso común en la industria. Se presenta información detallada acerca de los principios físicos sobre los que se basa la técnica de medición propuesta, así como también de los procedimientos empleados. Debido a que gran parte de los problemas asociados a vibraciones torsionales pueden ocurrir a velocidades de operación constante, los ensayos fueron realizados bajo dicha condición. El trabajo experimental fue realizado sobre dos modelos mecánicos. El primero, utiliza una junta Hooke para generar las oscilaciones torsionales y fue empleado para la calibración de la técnica de medición. El segundo, representa las características físicas de una máquina rotativa y fue utilizado para contrastar el valor de la primera frecuencia natural medida experimentalmente con el valor calculado con un modelo analítico de 3 discos y 2 tramos de eje, obteniéndose buena concordancia. Los resultados de los ensayos realizados con ambos modelos experimentales, demostraron que es posible utilizar la técnica propuesta para la medición de vibraciones torsionales y que se puede utilizar dicha medición como una herramienta importante para el diagnóstico de problemas en máquinas rotantes.

## **ABSTRACT**

The aim of this thesis is to develop and evaluate a technique of measurement and analysis of torsional vibrations in rotating machines. For this purpose, instrumentation commonly applied in industries is used. Detailed information is presented about the physical principles on which the proposed measurement technique is based and about the procedures used. As most of the problems associated with torsional vibrations can occur at constant speeds of operation, the testing were conducted under that condition. The experimental work was developed using two mechanical models. The first model that uses a Hooke joint to generate torsional oscillations, was used for the measurement technique calibration. The second experimental model that represent the mechanical properties of a rotating machine was used to compare the value of the measured first natural frequency with the computed value using an analytical model of 3 discs and 2 shaft stations. The testing results have shown that it is possible to use the technique proposed for the measurement of torsional vibrations as an important tool for diagnostic in problems of rotating machines.

# Índice

<b>Capítulo I – Introducción, objetivos y organización de la tesis.....</b>	<b>7</b>
1.1 Introducción.....	7
1.2 Objetivos.....	9
1.2.1 Objetivo general.....	9
1.2.2 Objetivos específicos.....	9
1.3 Alcance de la tesis.....	10
1.4 Organización de la tesis.....	10
<b>Capítulo II – Conceptos básicos de las vibraciones torsionales.....</b>	<b>11</b>
2.1 Vibraciones libres.....	11
2.1.1 Sistemas de una masa.....	11
2.1.2 Sistemas de dos masas.....	13
2.1.3 Sistemas de tres masas.....	15
2.1.4 Sistemas de múltiples masas.....	17
2.2 Vibraciones forzadas.....	19
2.2.1 Respuesta de los sistemas a velocidades no resonantes.....	19
2.2.1.1 Sistemas de una masa.....	19
2.2.1.2 Sistemas libres-libres.....	20
2.2.1.3 Sistemas de dos masas.....	21
2.2.1.4 Sistemas de tres masas.....	24
2.2.1.5 Sistemas de múltiples masas.....	25
2.2.2 Respuesta de los sistemas en resonancia.....	25
2.2.2.1 Vibraciones forzadas amortiguadas.....	25
2.2.2.2 Diagramas Vectoriales.....	26
2.2.3 Fuentes de vibración torsional.....	29
<b>Capítulo III – Análisis de vibraciones torsionales en régimen estable.....</b>	<b>35</b>
3.1 Método de medición.....	35
3.2 Análisis de amplitud y frecuencia.....	37
3.2.1 Determinación de la frecuencia.....	38
3.2.2 Determinación de la amplitud.....	38

<b>Capítulo IV – Modelos utilizados para el trabajo experimental.....</b>	<b>39</b>
4.1 Dispositivo de puesta a punto.....	39
4.1.1 Descripción del dispositivo.....	39
4.1.2 Técnica de medición.....	40
4.1.3 Técnica de excitación.....	41
4.2 Modelo experimental de aplicación.....	41
4.2.1 Descripción del modelo experimental.....	41
4.2.2 Técnica de medición.....	43
4.2.3 Técnica de excitación.....	43
4.2.4 Propiedades físicas – Primera frecuencia natural torsional.....	44
4.2.4.1 Determinación analítica de la primera frecuencia natural torsional.....	44
4.2.4.2 Determinación experimental de la primera frecuencia natural torsional...	48
4.3 Procedimientos empleados.....	52
4.3.1 Análisis de régimen estable.....	52
4.3.1.1 Dispositivo de puesta a punto.....	52
4.3.1.2 Modelo experimental de aplicación.....	53
<b>Capítulo V – Resultados de los ensayos.....</b>	<b>55</b>
5.1 Dispositivo de puesta a punto.....	55
5.2 Modelo experimental de aplicación.....	58
<b>Capítulo VI – Conclusiones.....</b>	<b>67</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>69</b>
<b>APÉNDICE A</b>	
Teoría del Movimiento de la Junta Hooke.....	73
<b>APÉNDICE B</b>	
Tabla 6 - Funciones de Bessel de orden cero y primer orden.....	79

## Índice de Figuras

Figura 1 – Croquis de un sistema de una masa.....	11
Figura 2 – Modelo dinámico de un sistema de una masa.....	12
Figura 3 – Croquis de un sistema de dos masas.....	13
Figura 4 – Modelo dinámico de un sistema de dos masas.....	13
Figura 5 – Croquis y modelo dinámico de un sistema de tres masas.....	15
Figura 6 – Croquis y modelo dinámico de un sistema de múltiples masas.....	17
Figura 7 – Sistema forzado de una masa.....	19
Figura 8 – Sistema de dos masas excitado en el disco 1.....	21
Figura 9 – Diagramas vectoriales.....	27
Figura 10 – Diagramas de resonancia y fase.....	28
Figura 11 – Motor de dos tiempos – Pistón de simple acción.....	30
Figura 12 – Motor de dos tiempos – Pistón de doble acción.....	31
Figura 13 – Motor de cuatro tiempos – Pistón de simple acción.....	32
Figura 14 – Tren de pulsos generado por el sensor óptico.....	36
Figura 15 – FFT de la señal de la Figura 14.....	36
Figura 16 – Espectro con bandas laterales.....	38
Figura 17-a – Dispositivo de puesta a punto.....	39
Figura 17-b – Dispositivo de puesta a punto (ángulo de la junta Hooke).....	40
Figura 17-c – Dispositivo de puesta a punto (ubicación del sensor magnético).....	40
Figura 18 – Pulsos generados por el sensor óptico.....	41
Figura 19 – Modelo experimental de aplicación.....	42
Figura 20 – Montaje del sensor óptico.....	42
Figura 21 – Circuito de excitación torsional.....	43
Figura 22 – Croquis del modelo experimental de aplicación.....	44

Figura 23 – Montaje del sensor de proximidad en el disco 3.....	48
Figura 24 – Circuito de excitación estática de vibraciones torsionales.....	49
Figura 25 – Medición del desplazamiento angular del disco 3 a diferentes frecuencias....	50
Figura 26 – Medición del desplazamiento angular relativo entre discos 1 y 3.....	51
Figura 27 – Medición del desplazamiento angular relativo entre discos 2 y 3.....	51
Figura 28 – Espectro con bandas laterales para $\alpha = 6^\circ$ .....	55
Figura 29 – Espectro con bandas laterales para $\alpha = 8^\circ$ .....	56
Figura 30 – Espectro con bandas laterales para $\alpha = 10^\circ$ .....	56
Figura 31 – Espectro sin excitación torsional.....	59
Figura 32 – Espectro con excitación torsional de 10,68 Hz.....	60
Figura 33 – Espectro con excitación torsional de 12,82 Hz.....	61
Figura 34 – Espectro con excitación torsional a 14,65 Hz.....	62
Figura 35 – Formas de onda para diferentes frecuencias de excitación.....	63
Figura 36 – Oscilación torsional en función de la relación de frecuencias $f_m/f_n$ .....	64
Figura 37 – Esquema de la Junta Hooke.....	77
Figura 38 – Relación entre amplitud, velocidad y aceleración del árbol impulsado por la Junta Hooke.....	77

## Índice de tablas

Tabla 1a – Propiedades inerciales de los discos del modelo experimental de aplicación.....	47
Tabla 1b – Propiedades elásticas de los ejes del modelo experimental de aplicación.....	47
Tabla 2 – Frecuencias y modos de vibrar del modelo experimental de aplicación.....	48
Tabla 3 – Resultados de las mediciones con el dispositivo de puesta a punto.....	58
Tabla 4 – Resultados de las mediciones en el modelo experimental de aplicación.....	64
Tabla 5 – Amplitud de las oscilaciones para diferentes ángulos de desalineación de la Junta Hooke.....	78
Tabla 6 – Funciones de Bessel de orden cero y de primer orden.....	79





# Capítulo I – Introducción, objetivos y organización de la tesis

## 1.1 Introducción

Existe una gran cantidad de casos reportados referidos a problemas causados por vibraciones torsionales en máquinas industriales. A raíz del incremento en la potencia demandada por el crecimiento de la producción, el estudio de las causas y los efectos de las vibraciones torsionales es un aspecto importante a tener en cuenta por ingenieros de mantenimiento y de diseño.

La lista de las posibles causas de las vibraciones torsionales en máquinas rotantes es extensa. Máquinas alternativas [1] [2] [3], defectos en sistemas de control de velocidad [4] [5], interacción electromagnética entre líneas de energía y turbogeneradores de gran potencia [6] [7] [8] [9] y errores de transmisión en cajas de engranajes producen una excitación torsional sobre el sistema [10]. Cuando esta excitación se acerca a una de las frecuencias naturales torsionales de la máquina, las amplitudes de las vibraciones se hacen importantes, y si además estas se mantienen a lo largo del tiempo pueden producir falla por fatiga en alguno de sus órganos. Las consecuencias más comunes de las vibraciones torsionales pueden ser rotura en dientes de ruedas dentadas [11] [12], fisuras en chaveteros y ejes [13] [14] y roturas de acoplamientos [15] [16]. En todos los casos estos inconvenientes tienen altos costos para el propietario de la máquina, ya sea por las reparaciones necesarias para poner a la máquina en operación como aquellos derivados de la pérdida o disminución de la producción.

Si bien existe en el mercado un gran número de instrumentos para la medición y análisis de vibraciones por flexión en máquinas rotantes, no ocurre lo mismo cuando se trata de vibraciones torsionales. Por tal motivo, esta tesis aborda específicamente el problema de la medición de vibraciones torsionales, poniendo énfasis en la posibilidad de realizar dichas mediciones en máquinas reales y en condiciones de funcionamiento nominal ó de régimen.

Uno de los métodos más empleados para medir vibraciones torsionales utiliza galgas extensométricas (strain gages) [17] [18] pegadas sobre la superficie del eje rotante y orientadas en las direcciones de mayor tensión. A mediados del siglo pasado [19], tanto para la alimentación del puente de Wheatstone como para la obtención de la señal de salida, se utilizaban anillos rozantes y escobillas. Actualmente esta vinculación se realiza por medio de telemetría. Wachel y Szenasi [20] aplicaron galgas extensométricas para la medición de tensiones producidas por torsión, en un sistema impulsado por un motor

eléctrico sincrónico de 30000 HP. Este método da buenos resultados cuando es correctamente aplicado y calibrado, sin embargo tiene varias desventajas de orden práctico. En primer lugar, la señal deber ser transferida desde el eje en rotación hasta la unidad de medición. En segundo lugar, la suciedad o radio interferencia pueden reducir la relación señal/ruido. Por otra parte, un montaje inadecuado de los strain gages puede captar señales debidas más a la deformación del eje por flexión que por torsión. Finalmente, el pegamento que mantiene adheridas las galgas extensométricas a la superficie del eje, se puede deteriorar por factores tales como temperatura o productos químicos. En suma, teniendo en cuenta todos estos factores, cuando se trata de realizar una buena medición, tanto la instalación como la puesta a punto pueden hacer que la aplicación de esta técnica se torne restrictiva, ya sea por su alto costo o por el tiempo necesario para realizarla.

Otro sistema de medición utiliza como transductor un torsiógrafo [21]. Este transductor rota con el eje de la máquina bajo estudio, y es utilizado para medir la velocidad angular [grados/seg] o el desplazamiento angular [grados]. Su funcionamiento está basado en el principio de masa sísmica, donde el movimiento relativo entre la masa y el estator produce una señal eléctrica proporcional a la velocidad o al desplazamiento. Su rango de operación es aproximadamente de 3 a 1000 Hz. Feese y Hill [22], en su trabajo sobre problemas de vibraciones torsionales en máquinas alternativas, explican que debido a una serie de desventajas comparativas con otras técnicas de medición, este tipo de transductor se ha dejado de producir y su uso actual en la industria es cada vez menos frecuente.

Cabe destacar que los dos métodos descritos anteriormente para medir la velocidad angular producen diferentes resultados aún en el caso de ser aplicados en la misma posición sobre el eje. Las galgas extensométricas miden la deformación por torsión del eje, por consiguiente, producen la máxima señal en lugares (como en el caso de los nodos del sistema) donde las variaciones de velocidad son mínimas. Por lo tanto, la selección del tipo de transductor y su ubicación requieren tener por parte del operador un gran conocimiento de los modos de vibración o deben realizarse un gran número de mediciones en diferentes lugares para determinar los modos de vibrar en forma experimental.

Otros instrumentos de medición modernos se basan en la utilización de sistemas láser con procesamiento basado en el principio Doppler [23]. Milers, Lucas, Halliwell y Rothberg [24] mostraron la aplicación de un sistema láser basado en el principio Doppler en el cigüeñal de un motor diesel de 4 cilindros y 2 litros. Este tipo de instrumentos resulta de muy alto costo, sobre todo cuando las mediciones deben ser realizadas en varios puntos simultáneos del eje de una máquina.

Por las razones descriptas anteriormente, es importante investigar otras técnicas que permitan realizar estas mediciones de una manera más sencilla y que además, requieran de instrumental de uso común en la industria. En este sentido, la utilización de sensores sin contacto, parece ser una buena alternativa para la realización de las mediciones. A menudo, una rueda dentada se encuentra solidaria a uno de los ejes que conforma la cadena cinemática sobre la cual interesa realizar el estudio. La rueda dentada constituye un excelente generador de frecuencias para el sensor sin contacto cuya señal puede ser registrada para luego ser procesada y analizada de manera conveniente. En el caso de ausencia de una rueda dentada o bien cuando la medición debe realizarse en varios puntos se pueden construir ruedas especiales o cintas segmentadas para producir, junto al sensor sin contacto, la señal de análisis.

El método de medición que es investigado en este trabajo, utiliza una señal modulada en frecuencia [25] [26] la cual es producida por un transductor ubicado en la proximidad de una rueda dentada o cinta segmentada en colores blancos y negros. Los principios en los que se basa esta técnica de medición se detallan en el capítulo III.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo general

Evaluar una técnica para la medición y análisis de vibraciones torsionales a través de mediciones sin contacto, utilizando instrumental de uso común en la industria.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Definir la técnica prevista de medición y análisis de vibraciones torsionales, su alcance y limitaciones.
- Seleccionar los instrumentos de medición a ser utilizados y reconocer sus características.
- Construir un dispositivo mecánico generador de vibraciones torsionales apto para poner a punto la técnica de medición y análisis.
- Construir un modelo experimental de una máquina rotante de tipo industrial para aplicar la técnica de medición y análisis.
- Establecer procedimientos de ensayo que permitan lograr vibraciones torsionales de amplitud creciente.
- Aplicar los procedimientos a los modelos mecánicos, realizar las mediciones y evaluar los resultados.

### 1.3 Alcance de la tesis

El enfoque de esta tesis es esencialmente experimental, pero se realizan comparaciones con resultados teóricos para evaluar la técnica de medición y análisis utilizada.

Los diferentes ensayos se realizan a velocidades constantes ya que gran parte de los problemas de vibraciones torsionales pueden darse en máquinas que se encuentran trabajando en condiciones normales de operación.

Cabe aclarar que como resultado de la investigación no se intenta determinar la precisión de las mediciones, sino que se trata de detectar la presencia de vibraciones torsionales. Esto es de gran utilidad para investigar la causa de una falla, o bien, para evaluar el desgaste de los órganos de las máquinas debido a su incremento progresivo en el tiempo.

### 1.4 Organización de la tesis

En el Capítulo II se hace una descripción resumida de los conceptos físicos más importantes relacionados con las vibraciones torsionales. La intención de este capítulo es dar al lector una introducción a los conceptos que hay que conocer para poder realizar análisis de vibraciones torsionales, para luego recurrir a bibliografía especializada.

En el Capítulo III se describe la técnica de medición empleada y los conceptos necesarios para el análisis de los datos obtenidos.

El Capítulo IV contiene una descripción de los modelos mecánicos utilizados para el trabajo experimental. También se muestran las técnicas de excitación empleadas para generar las vibraciones torsionales de los modelos y los procedimientos seguidos durante los ensayos.

En el Capítulo V se presentan los resultados de las mediciones y se realiza el análisis de los datos obtenidos.

El Capítulo VI contiene las conclusiones del trabajo. Por último, se presentan dos anexos A y B. En el Anexo A se describe la teoría del funcionamiento de la junta Hooke. En el Anexo B contiene la tabla de funciones de Bessel empleada para el cálculo de la amplitud de las oscilaciones torsionales.

## Capítulo II – Conceptos básicos de las vibraciones torsionales

Si bien los conceptos físicos y matemáticos del presente capítulo se encuentran desarrollados con gran detalle en los libros de texto relacionados con vibraciones mecánicas y dinámica de rotores, tales conceptos se han incluido en este capítulo para facilitar al lector el entendimiento del trabajo en general. Para los interesados en profundizar conocimientos sobre vibraciones torsionales se recomienda la lectura de [27] [28] [29] [30]. Cabe destacar, que no es el objetivo de esta tesis realizar desarrollos matemáticos ni numéricos, sino verificar el correcto funcionamiento de una técnica de medición de vibraciones torsionales, para poder aplicar a máquinas industriales.

### 2.1 Vibraciones Libres

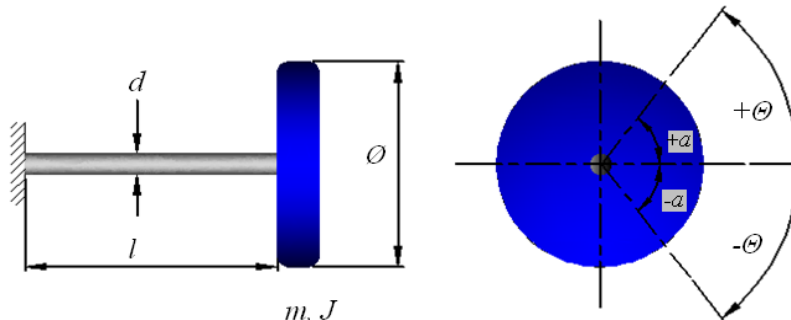
#### 2.1.1 Sistemas de una masa

El sistema de una masa, está compuesto por un disco acoplado a un eje, el cual se encuentra empotrado en uno de sus extremos. Para clarificar esto, en la Figura 1 se muestra el croquis del sistema y en la Figura 2 su modelo dinámico correspondiente.

#### Croquis del sistema y definición de variables

Teniendo como referencia el croquis, se definen las siguientes variables:

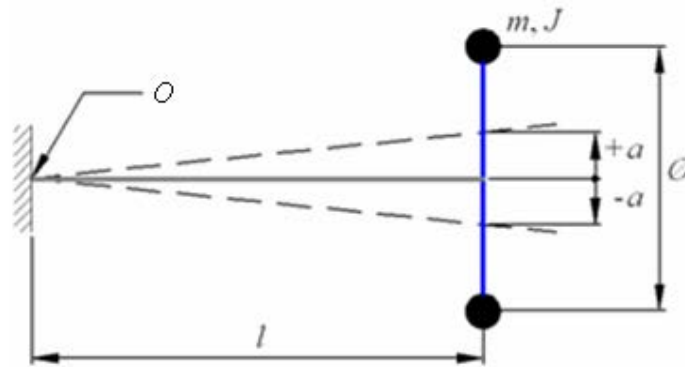
$d$ :	diámetro del eje.	$J$ :	momento de inercia polar del disco.
$l$ :	longitud del eje.	$G$ :	módulo de corte del material del eje.
$m$ :	masa del disco.	$\theta$ :	ángulo de rotación del disco
$\emptyset$ :	diámetro del disco.	$a$ :	arco descripto por el eje.
$K_T$ :	rigidez torsional del eje.	$I_p$ :	momento de inercia polar de la sección transversal del eje.



**Figura 1 – Croquis de un sistema de una masa**

## Modelo dinámico del sistema

El modelo dinámico se utiliza para representar de una manera más sencilla, las características físicas del sistema a estudiar. En este caso, el modelo de la Figura 2 se emplea para representar las características del sistema mencionado en el punto anterior.



**Figura 2 – Modelo dinámico de un sistema de una masa**

Frecuencia natural: si se aparta el disco de su posición de equilibrio angular y luego se lo suelta, comienza a oscilar libremente. Dicha oscilación tiene una frecuencia que depende de la rigidez torsional del eje ( $K_T$ ) y del momento de inercia del disco ( $J$ ). La expresión matemática que vincula estas variables se muestra a continuación:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_T}{J}} \quad \text{Frecuencia natural torsional} \quad (\text{I.1})$$

$$K_T = \frac{GI_p}{l} \quad \text{Rigidez torsional} \quad (\text{I.2})$$

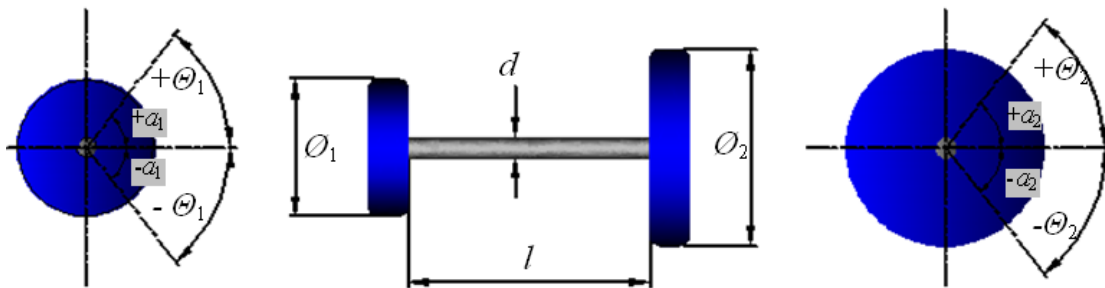
Punto nodal “O”: se define como punto nodal, aquel correspondiente a la rotación nula del eje. En este caso se denota con la letra “O”.

### 2.1.2 Sistemas de dos masas

#### Croquis del sistema y definición de variables

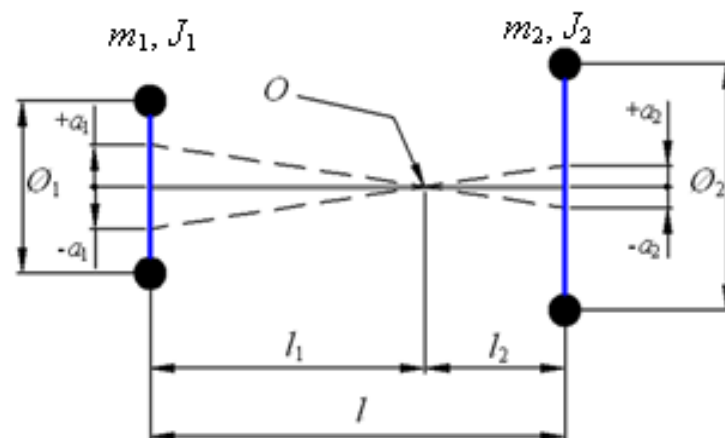
En el croquis de la Figura 3 se definen las siguientes variables:

$d$ : diámetro del eje.	$\Theta_1$ : ángulo de rotación del disco 1.
$l$ : longitud del eje.	$\Theta_2$ : ángulo de rotación del disco 2.
$m_1$ : masa del disco 1.	$a$ : arco descrito por el eje.
$m_2$ : masa del disco 2.	$I_p$ : momento de inercia polar del eje.
$J_1$ : momento de inercia polar del disco 1.	$\varnothing_1$ : diámetro del disco 1.
$J_2$ : momento de inercia polar del disco 2.	$\varnothing_2$ : diámetro del disco 2.
$G$ : módulo de corte del material del eje.	$K_T$ : rigidez torsional del eje.



**Figura 3 – Croquis de un sistema de dos masas**

En la Figura 4 se muestra el modelo dinámico de un sistema de dos masas:



**Figura 4 – Modelo dinámico de un sistema de dos masas**



Frecuencia natural: en este caso la frecuencia natural torsional del sistema depende de la rigidez torsional del eje ( $K_T$ ) y de los momentos de inercia polar de los discos ( $J_1$  y  $J_2$ ).

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K_T \left( \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \right)} \quad \text{Frecuencia natural} \quad (\text{I.3})$$

Punto nodal "O": en este caso el punto nodal se ubica entre los discos, debido a que en vibraciones torsionales libres los discos giran en sentido opuesto. Esto es, cuando el disco 1 gira en sentido horario, el disco 2 lo hace en sentido antihorario y viceversa.

El lugar sobre el eje donde se ubica el punto nodal depende de la relación que existe entre los momentos de inercia polares de los discos, como se muestra en la siguiente expresión:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{J_2}{J_1}$$

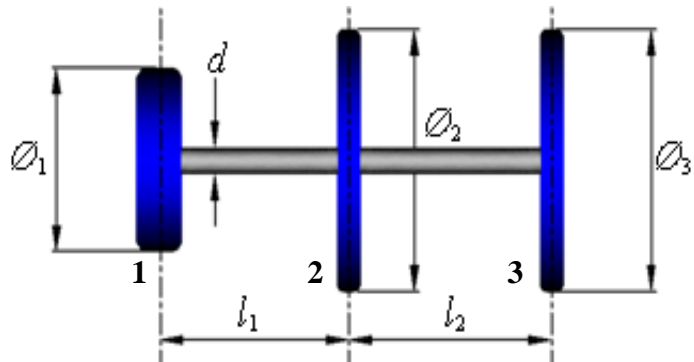
es decir, el punto nodal divide al eje en dos segmentos inversamente proporcionales al cociente entre los momento de inercia polares de los discos.

### 2.1.3 Sistemas de tres masas.

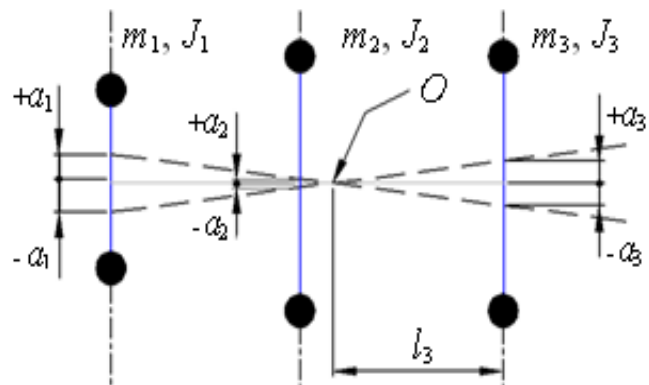
#### Croquis y modelo dinámico del sistema

En la Figura 5 se muestra un croquis de un sistema de tres masas y se indican los modos de vibración.

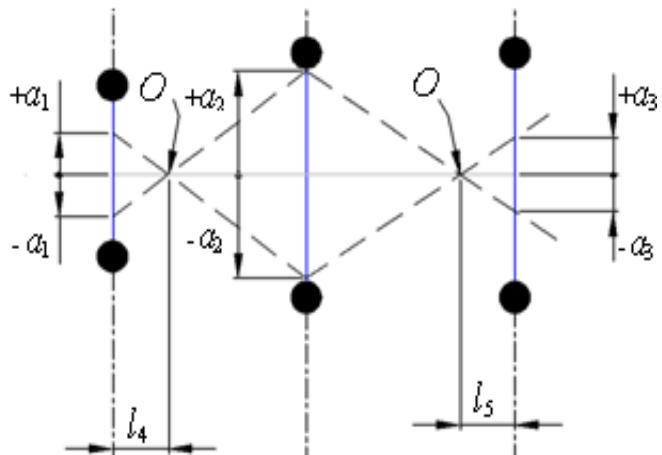
- $d$ : diámetro del eje .
- $m_1$ : masa del disco 1.
- $m_2$ : masa del disco 2.
- $m_3$ : masa del disco 3.
- $l_1$ : longitud del eje entre  $m_1$  y  $m_2$ .
- $l_2$ : longitud del eje entre  $m_2$  y  $m_3$ .
- $J_1$ : momento de inercia polar del disco 1.
- $J_2$ : momento de inercia polar del disco 2.
- $J_3$ : momento de inercia polar del disco 3.
- $\varnothing_1$ : diámetro del disco 1.
- $\varnothing_2$ : diámetro del disco 2.
- $\varnothing_3$ : diámetro del disco 3.
- $\theta_1$ : ángulo de rotación del disco 1.
- $\theta_2$ : ángulo de rotación del disco 2.
- $\theta_3$ : ángulo de rotación del disco 3.
- $a$ : arco descrito por el eje.
- $I_p$ : momento de inercia polar del eje.
- $G$ : Módulo de corte del eje.
- $K_{T_1}$ : rigidez torsional del eje entre  $m_1$  y  $m_2$ .
- $K_{T_2}$ : rigidez torsional del eje entre  $m_2$  y  $m_3$ .



#### **Primer modo de vibración**



#### **Segundo modo de vibración**



**Figura 5 – Croquis y modelo dinámico de un sistema de tres masas**

Frecuencia Natural: en este caso el sistema de tres discos tiene dos frecuencias naturales de vibración cuya expresión matemática se muestra a continuación:

$$f^2 = \frac{1}{4\pi} (\omega_a^2 + \omega_b^2) \pm \frac{1}{4\pi} \sqrt{(\omega_a^2 - \omega_b^2)^2 + 4\omega_c^2 \omega_d^2} \quad (\text{I.4})$$

donde:

$$\omega_a^2 = K_{T_1} \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) \quad (\text{I.5})$$

$$\omega_b^2 = K_{T_2} \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3} \right) \quad (\text{I.6})$$

$$\omega_c^2 = \frac{K_{T_2}}{J_2} \quad (\text{I.7})$$

$$\omega_d^2 = \frac{K_{T_3}}{J_3} \quad (\text{I.8}).$$

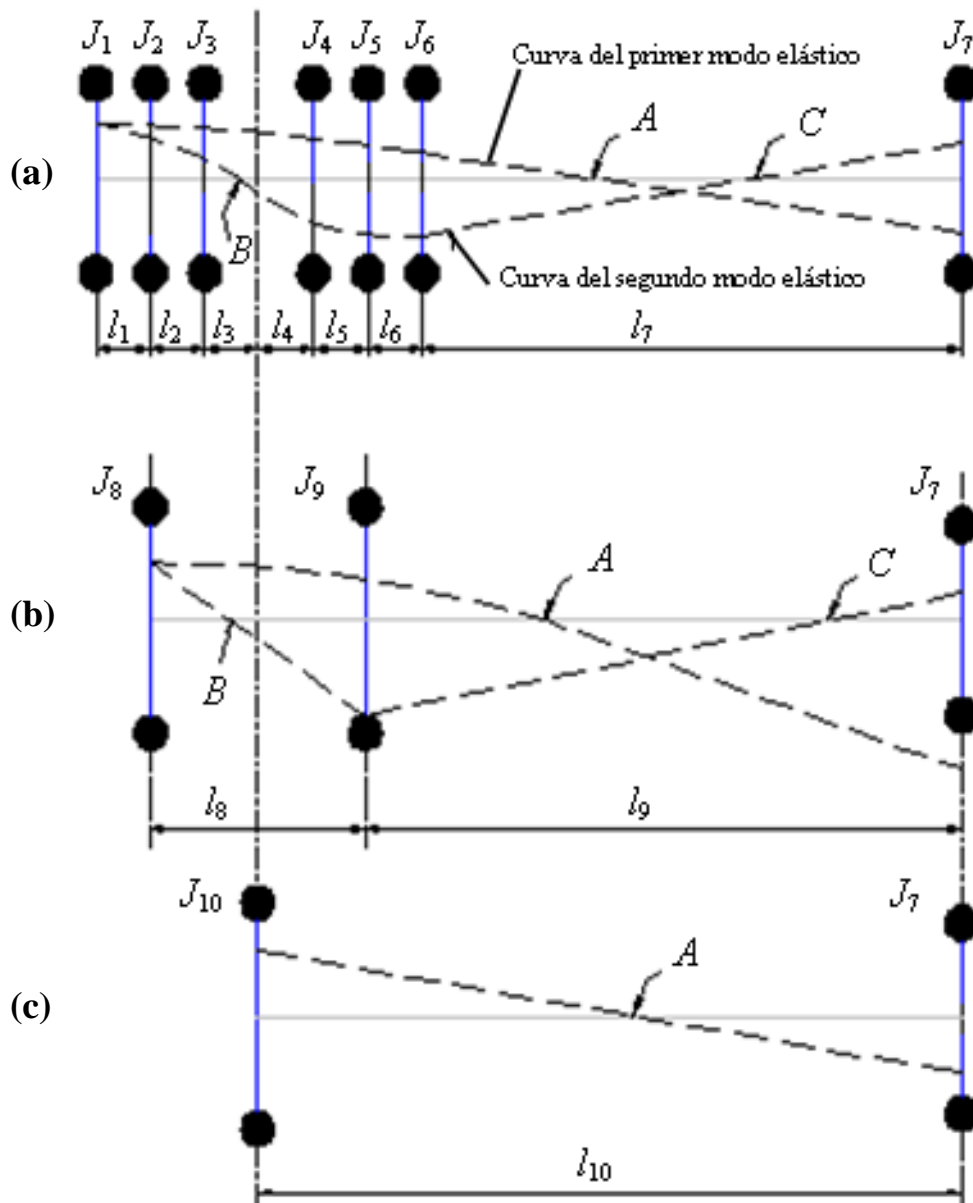
La ecuación (I.4) tiene dos soluciones reales, las cuales indican que el sistema de tres discos tiene dos modos principales elásticos de vibración torsional libre.

Primer modo (fundamental): se caracteriza porque uno de los discos que se encuentra en uno de los extremos, gira en un sentido, mientras que los otros dos discos giran en sentido opuesto. El punto nodal se ubica entre uno de los discos que se está en un extremo y los otros dos discos. Ver el croquis en la página anterior (Figura 5).

Segundo modo: se caracteriza porque los discos de los extremos giran en un sentido mientras que el del medio lo hace en el sentido opuesto. En este caso hay dos puntos nodales. Estos, se ubican entre los discos de los extremos y el disco del medio. Ver el croquis de la Figura 5 en la página anterior.

### 2.1.4 Sistemas de múltiples masas

En estos casos el estudio analítico es algo laborioso y complicado, pero a los fines prácticos, es posible aproximar los dos primeros modos, utilizando el modelo de dos o tres discos. Para explicarlo mejor, se utiliza el modelo de la Figura 6a, el cual es típico de las instalaciones marinas.



**Figura 6 – Croquis y modelo dinámico del sistema de múltiples masas**

El sistema de la Figura 6a representa el modelo de una instalación de tipo marina donde  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$  y  $J_6$  corresponden al motor y  $J_7$  al propulsor.

En el sistema de la Figura 6b se ha reemplazado  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$  por un momento de inercia equivalente  $J_8$  mientras que  $J_4$ ,  $J_5$  y  $J_6$  se sustituyeron por  $J_9$ . Utilizando este sistema simplificado de 3 discos se pueden obtener dos modos de vibración similares a los dos primeros modos del modelo de 7 discos.

En el sistema de la Figura 6c se reemplazaron  $J_8$  y  $J_9$  por un momento de inercia equivalente  $J_{10}$ . Mediante este sistema de 2 discos, se puede determinar un modo de vibración similar al primer modo del sistema de 7 discos.

Nota: Teniendo en cuenta que en realidad el sistema de 7 discos tiene 6 modos de vibrar, las consideraciones hechas en los puntos anteriores se pueden utilizar cuando la solución de un determinado problema solo requiere conocer los dos primeros modos de vibrar. En caso contrario, hay que determinar todos los modos que sean necesarios.

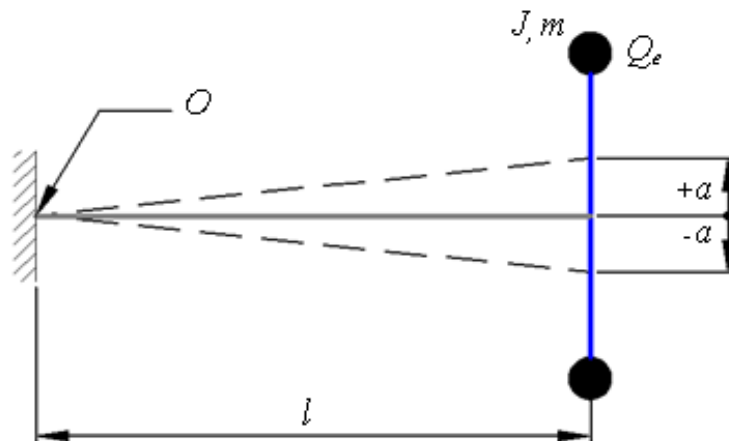
## 2.2 Vibraciones Forzadas

### 2.2.1 Respuesta de los sistemas a velocidades no resonantes

Para el siguiente tratamiento, suponemos al sistema trabajando a velocidades menores a 0,8 y mayores que 1,2 veces la velocidad de resonancia [30]. En estas condiciones, se puede despreciar la influencia del amortiguamiento.

#### 2.2.1.1 Sistemas de una masa

Supongamos un sistema no amortiguado como el de la Figura 7, y que sobre el disco “ $J$ ”, actúa un torque externo de tipo armónico.



**Figura 7 – Sistema forzado de una masa**

$$Q_e = \hat{Q}_e \text{sen}(\omega t + \varepsilon) \quad (\text{I.9})$$

La ecuación del movimiento para este sistema es la siguiente:

$$J \ddot{a} + K_T a = \hat{Q}_e \text{sen}(\omega t + \varepsilon) \quad (\text{I.10})$$

donde:

$J \ddot{a}$  : Torque producido por la inercia del disco.

$K_T a$  : Torque debido a la rigidez torsional del eje.

La respuesta del sistema está compuesta por un término correspondiente a las vibraciones forzadas y otro correspondiente a las vibraciones libres, dicha respuesta puede obtenerse matemáticamente a partir de la ecuación (I.10) y se muestra se a continuación:

$$\sum a = (a + a_c) = \underbrace{\frac{\hat{Q}_e \operatorname{sen}(\omega t + \varepsilon)}{(K_T - J \omega^2)}}_{\text{Vibración Forzada}} + \underbrace{[\theta_c \operatorname{sen}(\omega_c t + \mu)]}_{\text{Vibración Libre}} \quad (\text{I.11})$$

donde:

$\omega$ : frecuencia de la vibración forzada.

$\omega_c$ : frecuencia de la vibración libre.

$\hat{Q}_e$ : máxima amplitud del torque externo.

$K_T$ : rigidez torsional del eje.

$J$ : momento polar de inercia del disco.

$\theta_c, \varepsilon, \mu$ : constantes arbitrarias definidas por las condiciones iniciales.

Nota: Si bien en este análisis no se tuvo en cuenta el amortiguamiento, es importante advertir que el efecto del mismo sobre la respuesta del sistema es disminuir, gradualmente, la amplitud de la componente de vibración libre. En un sistema amortiguado, la respuesta inicial del sistema contiene la vibración libre, pero al cabo de unos instantes desaparece a causa del amortiguamiento. El decremento de la componente de vibración libre, es más rápido cuanto mayor es el amortiguamiento.

#### 2.2.1.2 Sistemas libres-libres

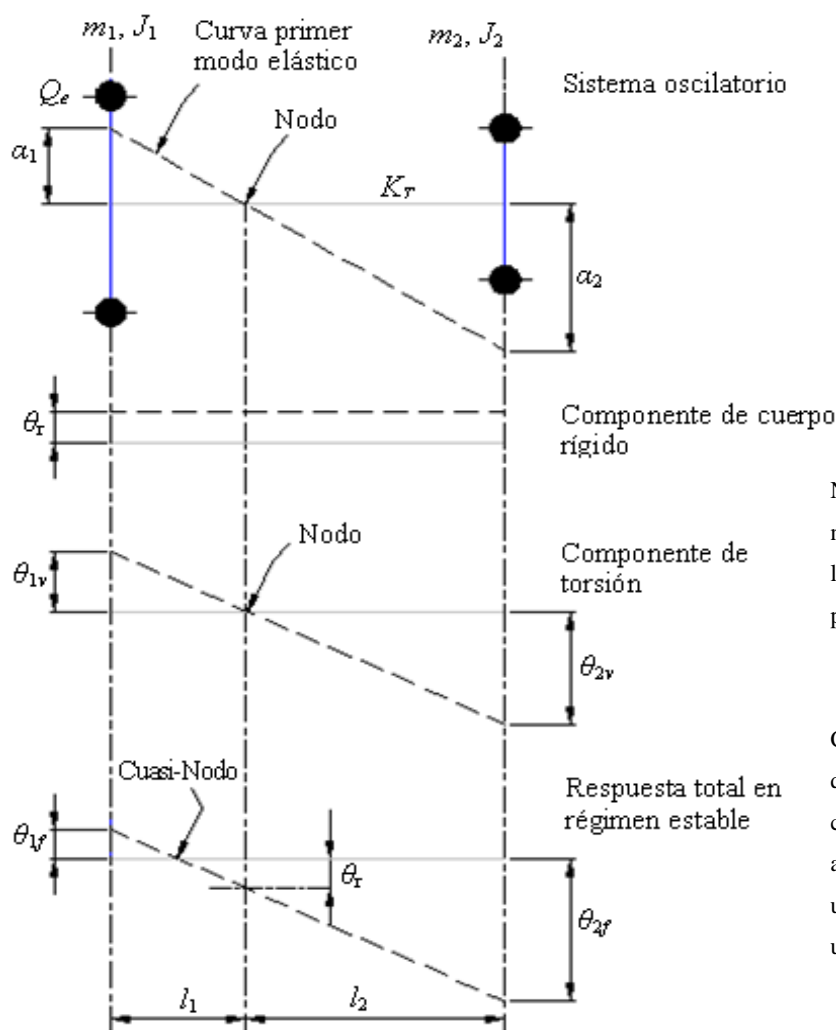
Los sistemas libres-libres son aquellos donde ambos extremos del eje se encuentran libres de rotar. Este tipo de sistema aparece con frecuencia en aplicaciones de la ingeniería mecánica. A continuación se describen los aspectos más importantes relacionados con su respuesta bajo la acción de torques externos.

### 2.2.1.3 Sistemas de dos masas

#### Sistema de dos masas excitado con torque externo en una de las masas

En los sistemas lineales, la respuesta total puede ser obtenida superponiendo las vibraciones de los distintos modos normales. En este caso, los modos normales son:

- Componente de cuerpo rígido ( $\theta_r$ ): se caracteriza porque las dos masas giran en fase.
- Componente de torsión ( $\theta_{1v}$ ,  $\theta_{2v}$ ): en este caso las dos masas giran en contra fase. Esto se puede ver con claridad en la Figura 8, en la cual se aclaran los conceptos de nodo y cuasi-nodo para facilitar la comprensión de la misma.



Nodo: punto del eje en el que no hay vibración torsional cuando las masas del sistema oscilan produciendo una torsión pura.

Cuasi-nodo: punto del eje en el que no hay vibración torsional cuando las masas del sistema además de oscilar produciendo una torsión pura, experimentan una oscilación de cuerpo rígido.

**Figura 8 – Sistema de dos masas excitado en el disco 1**



### Respuesta total del sistema

Suponiendo un torque externo  $Q_e$ , aplicado en el disco 1, la amplitud de la respuesta total del sistema puede expresarse como la suma de una componente de cuerpo rígido ( $\theta_r$ ) y una componente de torsión ( $\theta_t$ ), de la siguiente manera:

$$\text{para } J_1 \quad \theta_{1f} = \theta_r + \theta_{1v} \quad (\text{I.12})$$

$$\text{para } J_2 \quad \theta_{2f} = \theta_r + \theta_{2v} \quad (\text{I.13})$$

siendo

$$\theta_r = - \frac{\hat{Q}_e}{\omega^2 (J_1 + J_2)} \quad (\text{I.14})$$

$$\theta_{1v} = \frac{\hat{Q}_e J_2}{\omega^2 [J_1 \omega^2 (J_1 + J_2) (\omega_c^2 - \omega^2)]} \quad (\text{I.15})$$

$$\theta_{2v} = - \frac{\hat{Q}_e}{[(J_1 + J_2) (\omega_c^2 - \omega^2)]} \quad (\text{I.16})$$

la respuesta total queda

$$\theta_{1f} = \frac{(K_T - J_2 \omega^2) \hat{Q}_e}{\omega^2 [J_1 J_2 \omega^2 - K_T (J_1 + J_2)]} \quad (\text{I.17})$$

$$\theta_{2f} = \frac{K_T \hat{Q}_e}{\omega^2 [J_1 J_2 \omega^2 - K_T (J_1 + J_2)]} \quad (\text{I.18})$$

donde

$\theta_{1f}, \theta_{2f}$ : valor pico del desplazamiento angular de las masas 1 y 2.

$K_T$ : rigidez torsional del eje.

$\hat{Q}_e$ : valor pico del torque externo aplicado en la masa 1.

$\omega$ : pulsación de la vibración forzada.

$\omega_c$ : pulsación a la frecuencia natural.

Del análisis de las ecuaciones (I.15) y (I.16) puede advertirse que a medida que nos acercamos a la frecuencia natural del sistema, la componente torsional crece en amplitud aumentando la sollicitación de torsión del eje y por consiguiente incrementando los problemas de fatiga. Para mayor detalle sobre el procedimiento para obtener las expresiones de la respuesta total, se recomienda la lectura del punto 4 del capítulo XIII de la referencia [30].

### Torque actuante sobre el eje debido a la vibración torsional

El torque actuante sobre el eje, debido a la torsión del mismo (cuando sobre el disco 1 actúa un torque externo variable en el tiempo), se expresa de la siguiente manera:

$$\delta Q = \frac{M \hat{Q}_e J_1}{(J_1 + J_2)} \quad (\text{I.19})$$

donde,

$$M = \frac{1}{1 - f/f_c} : \text{ es el magnificador dinámico.} \quad (\text{I.20})$$

$f$ : es la frecuencia excitadora.

$f_c$ : es la frecuencia correspondiente a la vibración libre del sistema.

$J_1, J_2$ : momentos de inercia polar de las masas 1 y 2, respectivamente.

Si el torque externo esta aplicado en el disco 2, el torque actuante sobre el eje resulta:

$$\delta Q = \frac{M \hat{Q}_e J_2}{(J_1 + J_2)} \quad (\text{I.21})$$

### Tensión de corte sobre el eje

La tensión que produce el momento torsor sobre un eje que une dos masas, se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\tau = \frac{\delta Q}{Z} \quad (\text{I.22})$$

donde,

$\tau$ : es la tensión de corte.

$\delta Q$ : es el torque que actúa sobre el eje.

$Z$ : es el módulo resistente a la torsión.

### Sistemas de dos masas con torque externo actuante en ambas masas

Para el análisis, se supone un sistema como el que se muestra en la Figura 8 en el que actúan un torque externo  $Q_e$  sobre  $J_1$  y un torque  $Q_p$  sobre  $J_2$ , ambos variables en el tiempo, con la misma frecuencia y desfase cualquiera. Para conocer la respuesta total en régimen estable, se puede calcular la respuesta del mismo para cada torque individualmente y luego sumar los resultados en forma vectorial.

Con respecto al esfuerzo que se produce sobre el eje, cabe aclarar que la magnitud del mismo depende del desfase entre los torques externos. Esto es, si el desfase es de  $0^\circ$  la torsión sobre el eje es mínima y en consecuencia el esfuerzo es pequeño, mientras que si el desfase es de  $180^\circ$ , el esfuerzo es grande.

#### 2.2.1.4 Sistemas de tres masas

La respuesta de un sistema de 3 masas en régimen estable y a velocidades no resonantes, puede ser determinada a partir de la suma de la componente de cuerpo rígido y la componente de torsión de forma similar a lo dicho para los sistemas de 2 masas. Recordando que los sistemas de 3 masas tienen dos modos naturales de vibración hay que tener en cuenta lo siguiente:

- Si la frecuencia del torque externo es próxima a la primera frecuencia natural del sistema (ver Figura 5), la componente de torsión correspondiente al primer modo natural es la de mayor importancia y por lo tanto la forma de la respuesta total del sistema es similar a la de dicho primer modo.
- Si la frecuencia del torque externo es próxima a la segunda frecuencia natural del sistema (ver Figura 5), la componente de torsión correspondiente al segundo modo natural, es la de mayor importancia y por lo tanto la forma de la respuesta total del sistema es similar a la de dicho segundo modo.

### 2.2.1.5 Sistemas de múltiples masas

En los sistemas que cuentan con más de tres masas, la respuesta total del sistema se puede obtener, como en el caso de los sistemas anteriores, sumando a la componente de cuerpo rígido la componente de torsión. La diferencia en este caso, es la presencia de una mayor cantidad de modos naturales que definen la forma de la componente de torsión. De todas maneras, en la mayoría de las aplicaciones prácticas podemos, sin mayor error, reducir el sistema a un modelo de dos o tres masas.

## 2.2.2 Respuesta de los sistemas en resonancia

### 2.2.2.1 Vibraciones forzadas amortiguadas

Para hacer un análisis de las vibraciones forzadas amortiguadas, se supone un sistema como el de la Figura 7, sobre el que además del torque externo  $Q_e$ , actúan otras fuerzas propias del sistema, que se describen a continuación.

- Fuerza elástica: Esta fuerza se debe a la elasticidad del eje. Su sentido es opuesta al desplazamiento angular y su magnitud es proporcional a dicho desplazamiento. Este coeficiente de proporcionalidad es la constante elástica del eje y en el presente trabajo, se indica como " $K_T$ ".
- Fuerza de amortiguamiento: Esta fuerza se debe a diferentes mecanismos de disipación de energía tales como rozamiento entre las fibras interiores del eje, rozamiento entre el disco y el aire y rozamientos en la unión entre el disco y el eje. Su dirección es ortogonal a la de la fuerza elástica y su magnitud es proporcional a la velocidad angular. El coeficiente de proporcionalidad se denomina coeficiente de amortiguamiento y en este trabajo, se indica con la letra " $S$ ".
- Fuerza de inercia: Esta fuerza se debe a la inercia de la masa del disco en rotación. Su dirección es opuesta a la fuerza elástica y su magnitud es proporcional a la aceleración angular del disco. El coeficiente de proporcionalidad es el momento de inercia del disco y se denomina con la letra " $J$ ".

La resultante de estas fuerzas es la que efectivamente constituye la resistencia que ofrece el sistema a la actuación del torque externo  $Q_e$ , y se denomina *rigidez dinámica a la torsión*. Esta fuerza tiene sentido opuesto a la del torque externo y su magnitud es proporcional al desplazamiento angular del disco. Bajo estas consideraciones, se puede plantear la ecuación del movimiento de la siguiente manera:

$$J \ddot{a} + S \dot{a} + K_T a = \hat{Q}_e \text{sen}(\omega t) \quad (\text{I.23})$$

La respuesta del sistema es:

$$a = \theta \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad \text{Desplazamiento} \quad (\text{I.24})$$

$$\dot{a} = \omega \theta \text{cos}(\omega t + \varphi) \quad \text{Velocidad} \quad (\text{I.25})$$

$$\ddot{a} = -\omega^2 \theta \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad \text{Aceleración} \quad (\text{I.26})$$

donde:

$\varphi$  : es el desfase entre el torque externo y la respuesta del sistema.

$\theta$  : es el valor pico del desplazamiento angular.

#### 2.2.2.2 Diagramas Vectoriales

Reemplazando  $a$ ,  $\dot{a}$  y  $\ddot{a}$  en la ecuación (I.24) por las expresiones dadas en las ecuaciones (I.25), (I.26) y (I.27), se demuestra que la repuesta del sistema puede ser expresada en forma vectorial como sigue:

$$\theta \sqrt{(K_T - J \omega^2) + (S \omega)^2} = \hat{Q}_e \quad (\text{I.27})$$

En virtud de esto se pueden definir los siguientes torques actuantes en el sistema:

Torque externo  $\hat{Q}_e$

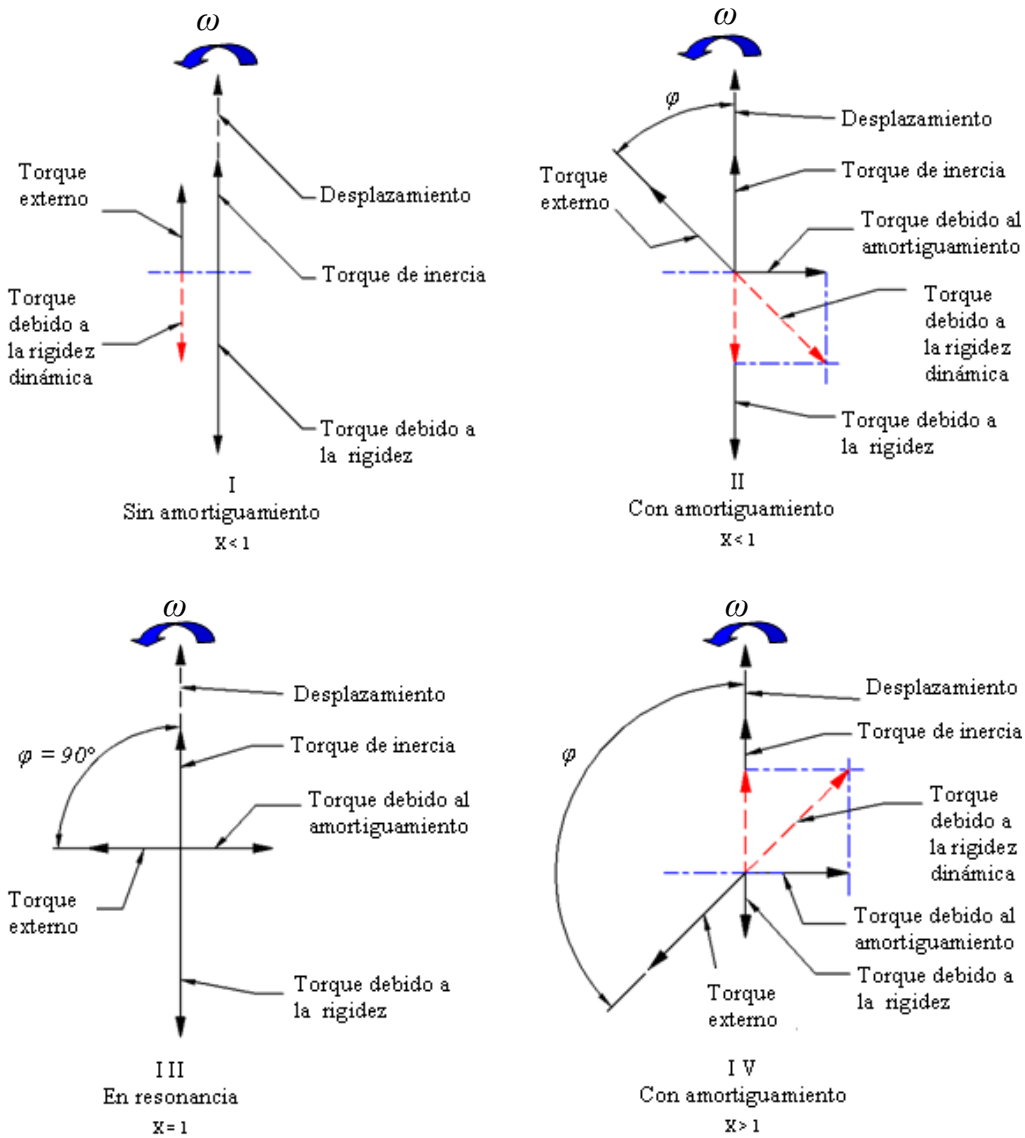
Torque debido a la inercia del disco  $J \omega^2 \theta$

Torque debido a la rigidez del eje  $K_T \theta$

Torque debido al amortiguamiento  $S \omega \theta$

Torque debido a la rigidez dinámica a la torsión:  $\theta \sqrt{(K_T - J \omega^2) + (S \omega)^2}$

A continuación se analizan los distintos valores que adopta el ángulo de desfase  $\Phi$ , para distintas condiciones. Para ello se consideran los cuatro diagramas de la Figura 9:



**Figura 9 – Diagramas vectoriales**

Diagrama I

Este diagrama se construye para un sistema que trabaja sin amortiguamiento y por debajo de su frecuencia natural ( $X = \omega / \omega_c < 1$ ). En este caso la respuesta del sistema ( $\theta$ ) está en fase con el torque externo.

Diagrama II

Este diagrama se construye para un sistema trabajando con amortiguamiento y por debajo de su frecuencia natural ( $X = \omega / \omega_c < 1$ ). En este caso la respuesta del sistema ( $\theta$ ) está desfasada con respecto al torque externo un ángulo  $\varphi < 90^\circ$ .

### Diagrama III

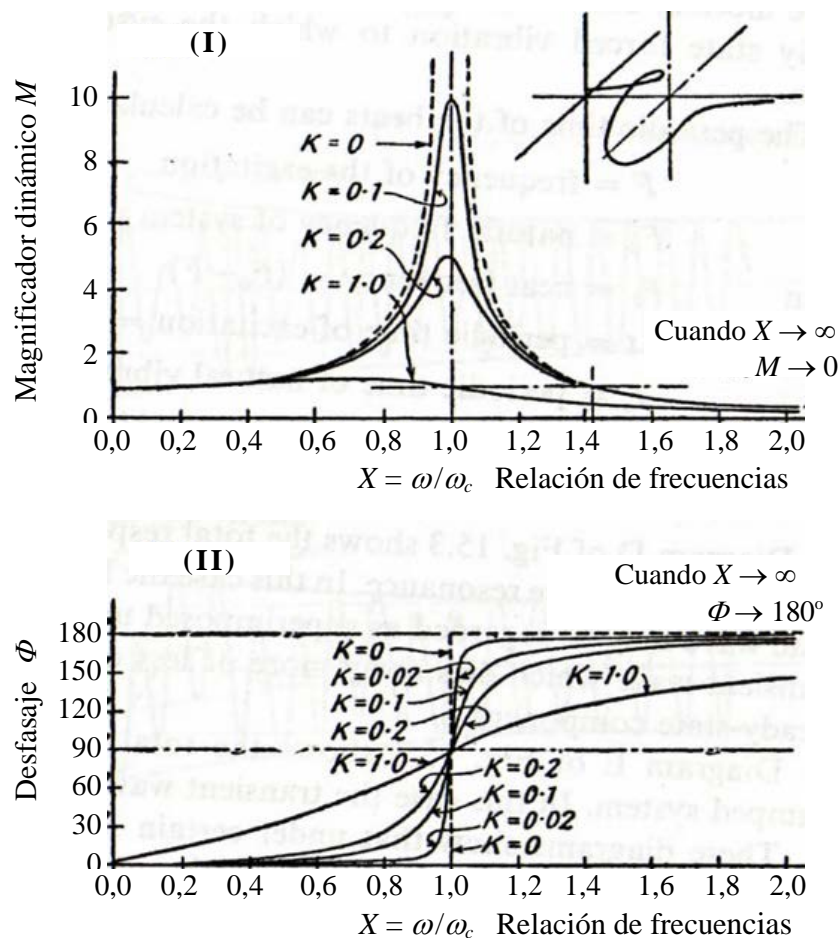
Este diagrama se construye para un sistema trabajando sin amortiguamiento y en resonancia ( $X = \omega / \omega_c = 1$ ). En este caso la respuesta del sistema ( $\theta$ ) está desfasada con respecto al torque externo un ángulo  $\varphi = 90^\circ$ . La única resistencia que opone el sistema a la acción del torque externo es el amortiguamiento.

### Diagrama IV

Este diagrama se construye para un sistema trabajando sin amortiguamiento y en resonancia ( $X = \omega / \omega_c > 1$ ). En este caso la respuesta del sistema ( $\theta$ ) está desfasada con respecto al torque externo un ángulo  $\varphi > 90^\circ$  y próximo a  $180^\circ$ .

### Diagramas de resonancia y fase

La respuesta de un sistema, se puede analizar en un gráfico donde se muestra la amplitud y la fase de la respuesta, para distintos valores de amortiguamiento y para distintas frecuencias de la fuerza excitadora.



**Figura 10 – Diagramas de resonancia y fase**

En el diagrama de la Figura 10 se utilizó la siguiente notación:

$M$  : magnificador dinámico definido en la ecuación (I.20).

$\Phi$  : desfase entre la respuesta y la excitación.

$K$  : coeficiente de amortiguamiento: relación entre el amortiguamiento del sistema  $S$  y el amortiguamiento crítico  $S_c$ .

$X = F/F_c = \omega/\omega_c$  : relación entre la frecuencia excitadora y la frecuencia natural del sistema.

### 2.2.3 Fuentes de vibración torsional

#### Máquinas alternativas

Las máquinas de alternativas se pueden dividir en dos grandes grupos:

- Máquinas motrices: motores de combustión interna de 4 y de 2 tiempos.
- Máquinas conducidas: bombas y compresores de émbolo.

En estas máquinas, la excitación de vibraciones torsionales del eje se produce por la variación del torque motor, para el caso de las máquinas motrices, y por la variación del torque resistente, para el caso de las máquinas conducidas.

Curvas de esfuerzo tangencial: se utilizan para analizar la característica que tiene el torque de cada tipo particular de máquina. Se construyen analizando el valor que tiene el esfuerzo tangencial para cada ángulo de posición del muñón del cigüeñal. El esfuerzo tangencial se obtiene dividiendo el valor del torque instantáneo por el radio del muñón del cigüeñal y expresando el resultado en términos de unidad de área de pistón. Esto se muestra en la siguiente expresión:

$$T = \frac{Q}{AR} \quad (I.28)$$

donde:

$Q$  : es el torque instantáneo.

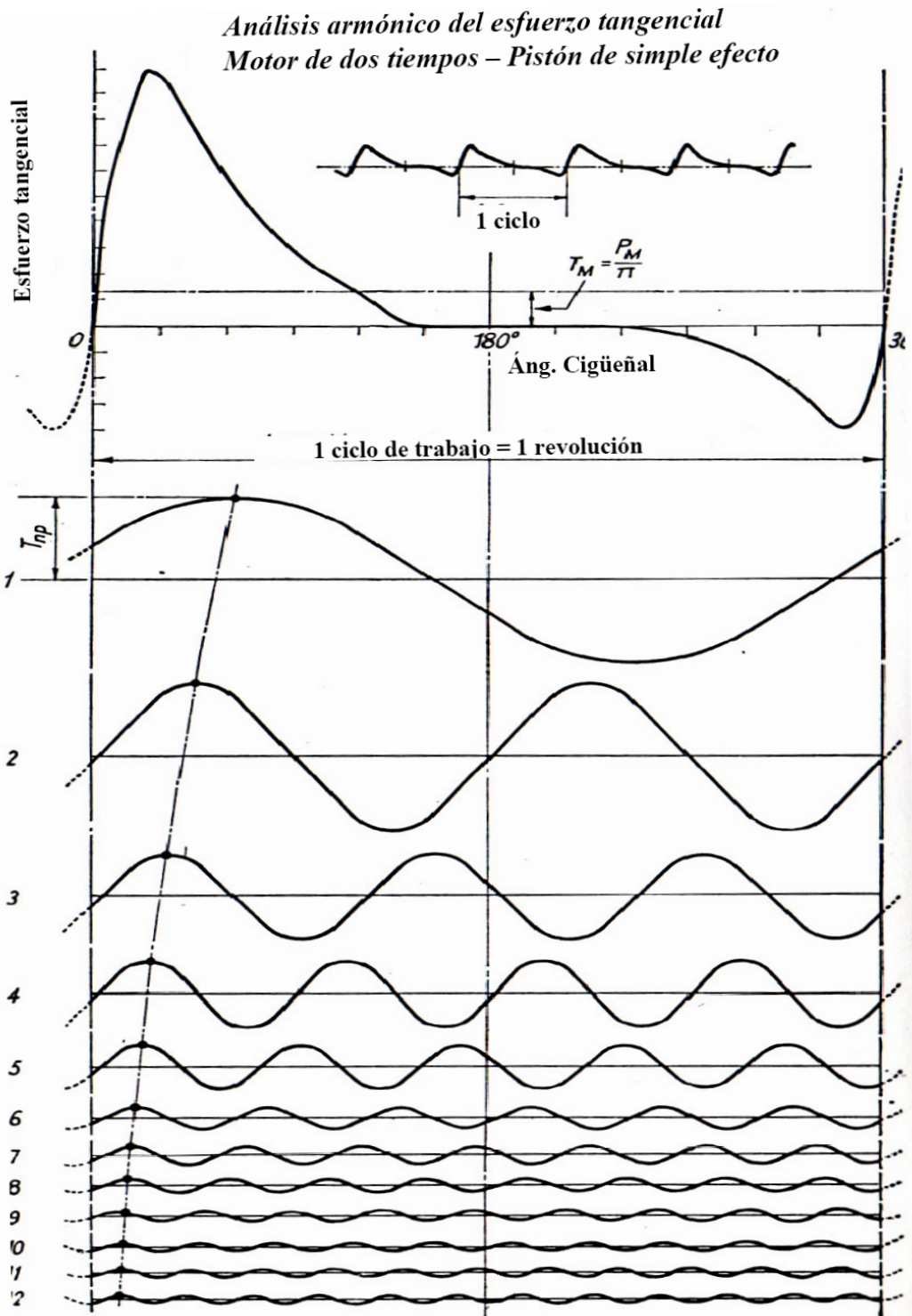
$R$  : es el radio del muñón del cigüeñal.

$A$  : es el área del pistón.

$T$  : es el esfuerzo tangencial instantáneo.

A continuación se muestran las curvas de esfuerzos tangenciales de algunos tipos de máquinas alternativas:

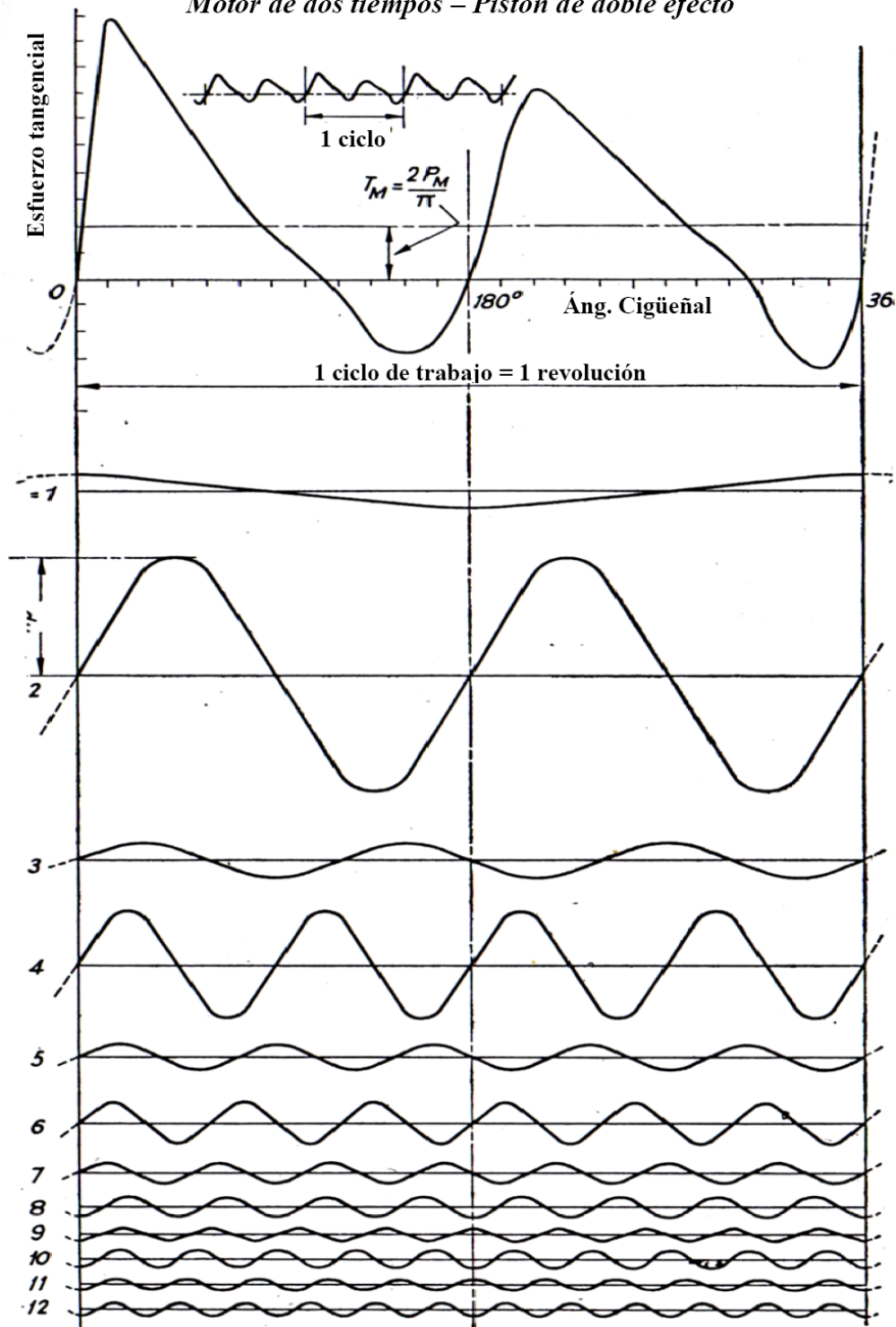




**Figura 11 – Motor de 2 tiempos – Pistón de simple acción [30]**

En el caso del motor de 2 tiempos con pistón de simple acción (Figura 11), el torque del motor realiza un ciclo por cada revolución del cigüeñal. Debido a que el mismo tiene una variación periódica en el tiempo, puede ser descompuesto en serie de Fourier en un conjunto de 12 curvas armónicas. Cada una de dichas componentes se denomina orden. Los órdenes van aumentando de 1 en 1.

*Análisis armónico del esfuerzo tangencial  
Motor de dos tiempos – Pistón de doble efecto*



*Figura 12 – Motor de 2 tiempos – Pistón de doble acción [30]*

En el caso del motor de 2 tiempos con pistón de doble acción (Figura 12), el torque del motor realiza un ciclo por cada revolución del cigüeñal como en el caso anterior. Sin embargo la amplitud de los distintos órdenes es diferente, debido a que la curva que describe el torque motor también lo es.

*Análisis armónico del esfuerzo tangencial  
Motor de cuatro tiempos – Pistón de simple efecto*

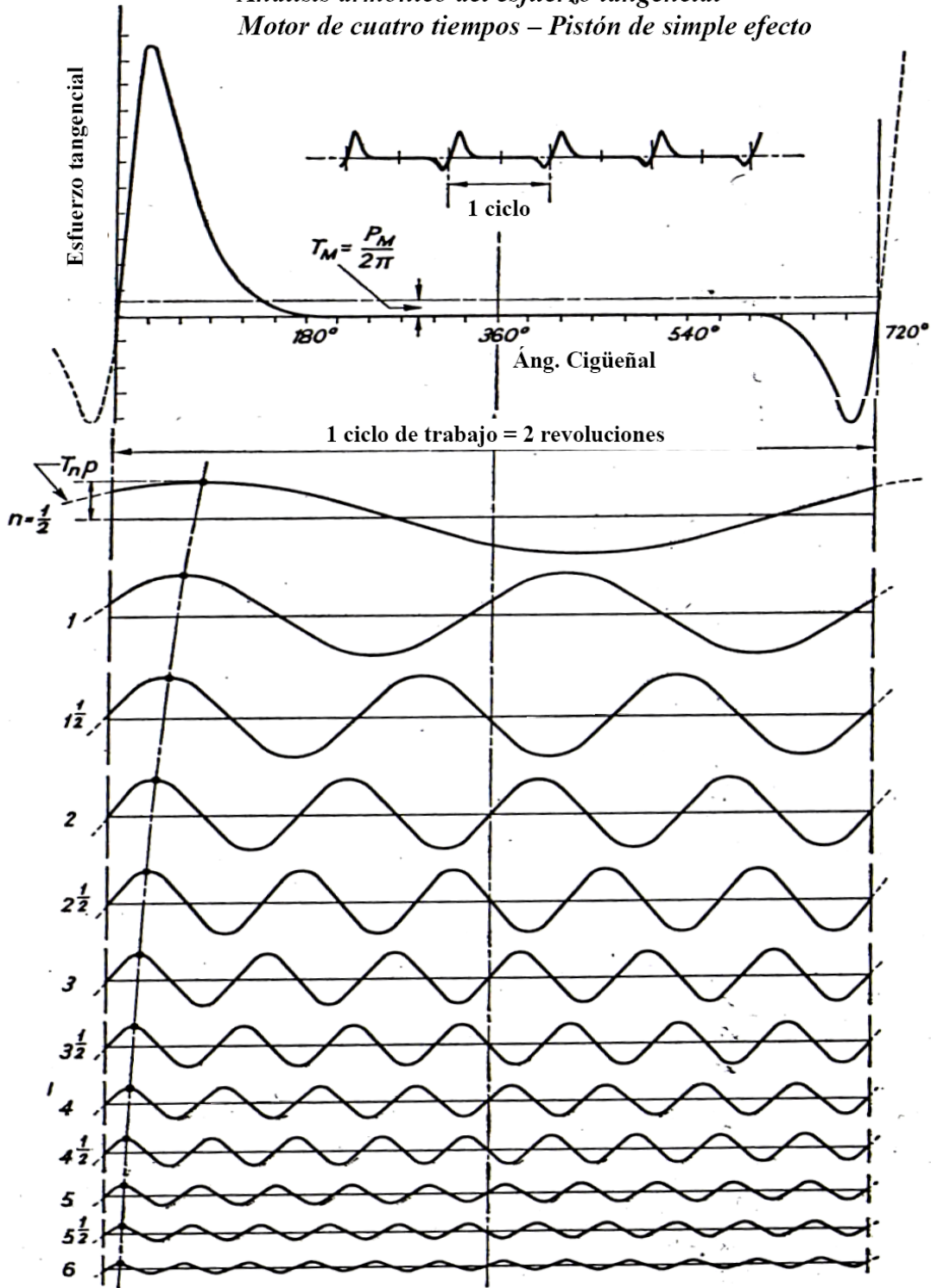


Figura 13 – Motor de cuatro tiempos – Pistón de simple acción [30]

En el caso del motor de cuatro tiempos con cilindro de simple efecto (Figura 13), el torque del motor realiza un ciclo por cada dos revoluciones del cigüeñal. Los órdenes van de 0,5 en 0,5.

### Junta Hooke

La junta Hooke es un órgano de máquinas que sirve para unir ejes que no se encuentran colineales, y se caracteriza porque la velocidad angular de salida varía periódicamente mientras la velocidad angular de entrada se mantiene constante. La amplitud con la que oscila el eje de salida es mayor cuanto mayor es el ángulo  $\alpha$  de desalineación. En el APENDICE A, se trata en forma detallada la teoría del movimiento de la junta Hooke.

### Uniones por medio de cajas de engranajes

Las uniones por medio de cajas de engranajes, pueden excitar vibraciones torsionales por dos razones principales:

- Excitaciones debidas al engrane entre ruedas: en este caso la frecuencia de la excitación es igual a la velocidad de giro de la rueda por su número de dientes.
- Excitaciones cuya frecuencia es igual a un impulso por revolución del eje sobre el que está montada la rueda. Este tipo de excitación se da, por ejemplo, cuando hay defectos en los dientes, excentricidad de la rueda, dobladura o desalineación del eje sobre el que está montada dicha rueda, etc.

### Máquinas eléctricas

La variación del torque motor se da en las máquinas de inducción porque operan con variación del resbalamiento. La frecuencia de excitación en este tipo de máquinas es dos veces la frecuencia de deslizamiento. Este problema no se produce en las máquinas sincrónicas, debido a la ausencia de deslizamiento. En los motores sincrónicos, puede darse este tipo de excitación en los períodos de arranque ya que los mismos arrancan como motores de inducción hasta llegar a la velocidad de sincronismo. Por tanto, durante el período de arranque se produce resbalamiento y por consiguiente hay variación en el torque.



## Capítulo III – Análisis de vibraciones torsionales en régimen estable

En este capítulo se describen los principios físicos [26] sobre los que se basó el análisis de vibraciones torsionales en los distintos ensayos. Además, se hace una descripción de la instrumentación utilizada

### 3.1 Método de medición

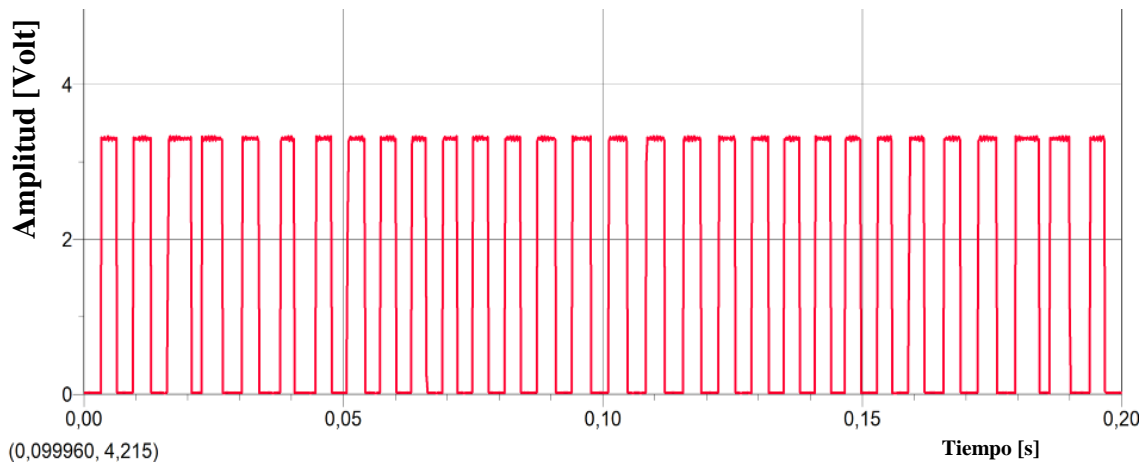
El método de medición consiste en generar de una señal portadora , la cual es modulada en frecuencia cuando se producen vibraciones torsionales. Luego esta señal es procesada utilizando un sistema analizador de vibraciones (de alta resolución) y un software adecuado para obtener la FFT (Fast Fourier Transform) de dicha señal. Del análisis de la FFT se obtienen la amplitud y frecuencia de la vibración torsional. En la Figura 14, se muestra un tren de pulsos obtenido durante los ensayos, y en la Figura 15 su FFT.

Al utilizar el *dispositivo de puesta a punto* que se describe en el punto 4.1, cada vez que un diente de la rueda pasa frente al sensor magnético se produce un pulso. El resultado es un tren de pulsos cuya frecuencia es igual al producto de la velocidad angular del eje por el número de dientes de la rueda. Cuando se producen oscilaciones angulares, dicho tren de pulsos se modula en frecuencia y provee la información necesaria para realizar el análisis. En tales aplicaciones se usó el instrumental siguiente:

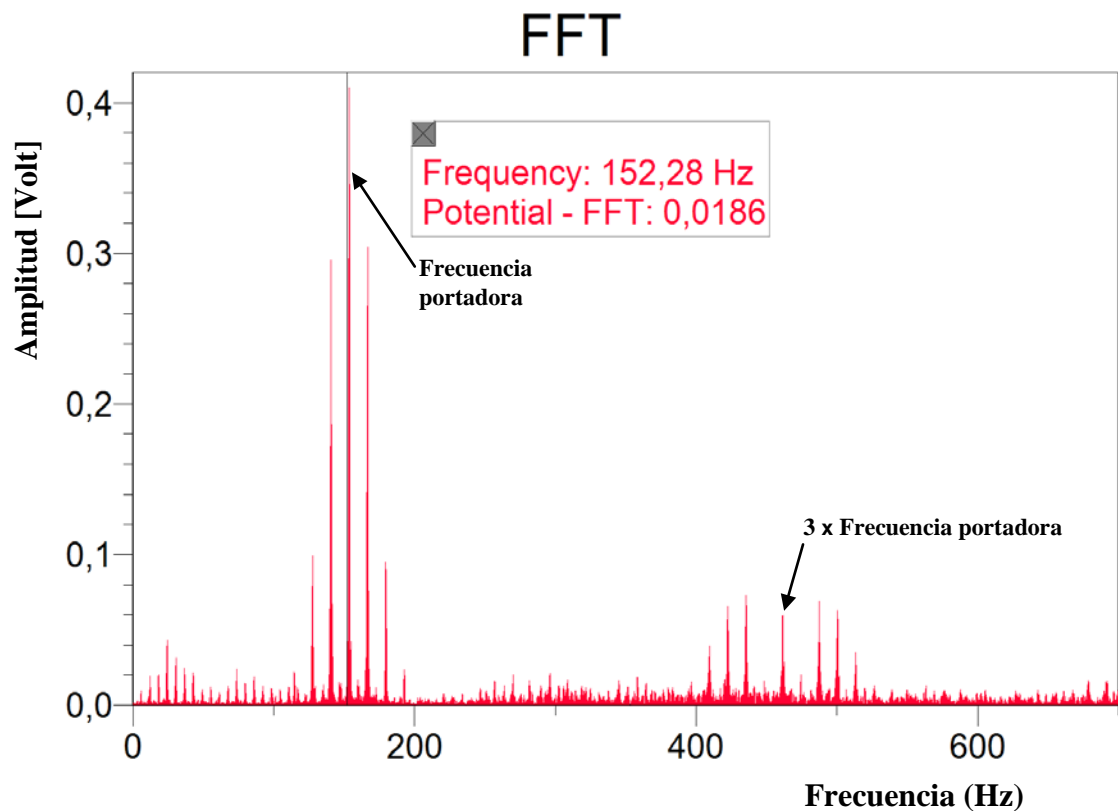
- Sistema de adquisición marca CSI.
- Software de aplicación para la obtención de la FFT, WAVEPACK.

Al utilizar el *modelo experimental de aplicación* que se describe en el punto 4.2, el pulso se produce cada vez que un segmento de color blanco corta el haz luminoso generado por el sensor óptico. En tales aplicaciones se usó el instrumental siguiente:

- Sistema de adquisición LABQUEST.
- Software de aplicación para la obtención de la FFT, LOGGER PRO.



*Figura 14 – Tren de pulsos generado por el sensor óptico*



*Figura 15 – FFT de la señal de la Figura 14*

Como se ve en la Figura 15, además de la componente fundamental a la frecuencia de la señal portadora, aparecen sus múltiplos armónicos impares. Esto se debe, a que el sensor utilizado tiene un circuito integrado que normaliza los pulsos, la señal de salida es una onda cuadrada. De todas formas y a los fines del análisis centraremos la atención en torno a la componente fundamental.

### 3.2 Análisis de amplitud y frecuencia

Una señal de FM, generado por los métodos descritos anteriormente, puede ser expresada de la siguiente manera:

$$V(t) = \hat{V} \cos(2\pi f_c t + \beta \text{sen}(2\pi f_m t)) \quad (\text{III.1})$$

donde:

- $f_c$ : Frecuencia de la señal portadora.
- $f_m$ : Frecuencia modulante (frecuencia de la vibración torsional).
- $\beta$ : Índice de modulación.
- $V(t)$ : Tensión a la salida del sensor.
- $\hat{V}$ : Valor pico de la tensión de salida del sensor.

Si una rueda de “Z” dientes (ó un disco con “Z” segmentos blancos y negros) gira a “N” rpm y si además, dicha rueda experimenta oscilaciones angulares de la forma

$$\theta(t) = \hat{\theta} \cos(\omega t) \quad (\text{III.2})$$

entonces, podemos escribir:

$$f_c = \frac{Z_N}{60} \quad (\text{III.3})$$

$$f_m = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{III.4})$$

$$\beta = Z \hat{\theta} \quad (\text{III.5})$$

Descomponiendo la ecuación (III.1) en series de Bessel, queda:

$$V(t) = \hat{V} \left\{ J_0(Z\hat{\theta}) \cos[2\pi(f_c)t] + J_1(Z\hat{\theta}) \cos[2\pi(f_c + f_m)t] - J_1(Z\hat{\theta}) \cos[2\pi(f_c - f_m)t] + J_2(Z\hat{\theta}) \cos[2\pi(f_c + 2f_m)t] - J_2(Z\hat{\theta}) \cos[2\pi(f_c - 2f_m)t] \right\} \quad \text{III.6}$$

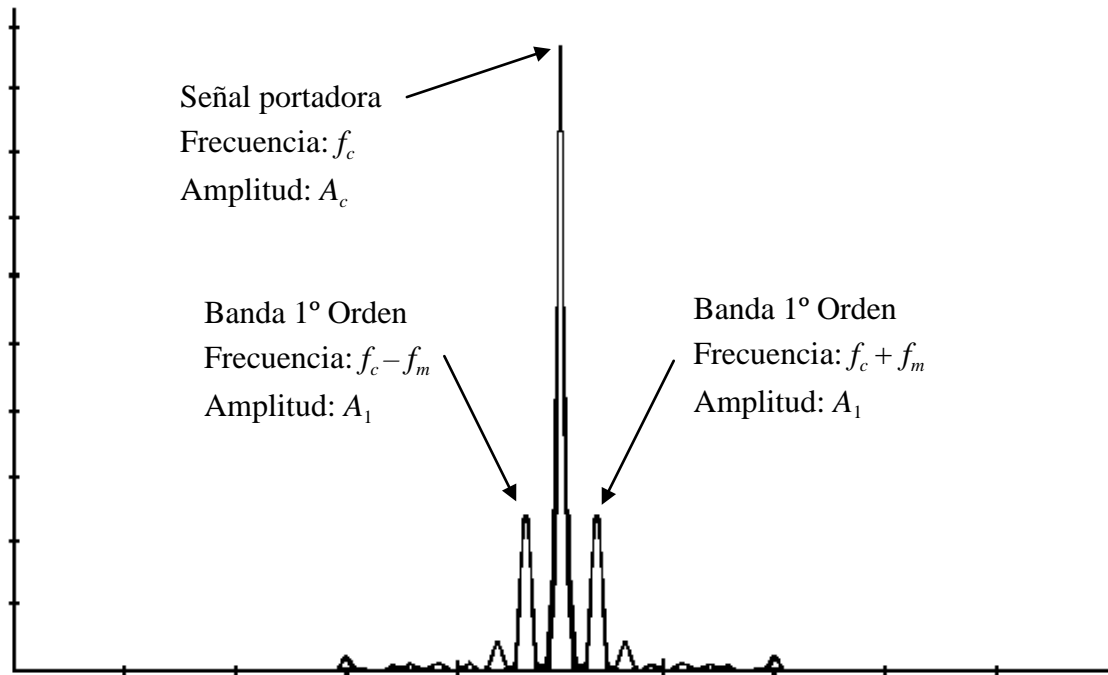
Las expresiones  $J_i(Z\hat{\theta})$  con  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , se denominan funciones de Bessel de orden 0, 1, ..., n y sus valores numéricos se encuentran tabulados. En la Tabla 6 (Apéndice B), se muestran los valores numéricos de las funciones de *orden cero* y *primer orden*, que fueron las utilizadas en este trabajo.

Partiendo de estos conceptos, se puede utilizar el analizador de vibraciones para obtener la información de amplitud y frecuencia de la vibración torsional mediante la utilización de la FFT.



### 3.2.1 Determinación de la frecuencia

Si una señal modulada en frecuencia (*FM*), es ingresada en un analizador de vibraciones y luego es procesada por medio de la transformada rápida de Fourier (*FFT*), se obtiene un gráfico como el siguiente



**Figura 16 – Espectro con bandas laterales**

A partir del gráfico de la Figura 16 se pueden obtener las frecuencias portadora ( $f_c$ ), y modulante ( $f_m$ ). Esta última resulta de la diferencia entre la frecuencia de la portadora y la frecuencia de la banda lateral. Esto concuerda con lo expresado por la ecuación (III.6).

### 3.2.2 Determinación de la amplitud

Para determinar la amplitud “ $\hat{\theta}$ ” de la vibración torsional, es necesario obtener el cociente entre la amplitud de la banda lateral de primer orden y la amplitud de la portadora, ( $A_1/A_c$ ). Luego, buscando en la Tabla 6 (Apéndice B) de funciones de Bessel los valores de  $J_1$  y  $J_0$ , cuyo cociente  $J_1(\beta) / J_0(\beta)$  se aproxima al valor antes mencionado ( $A_1/A_c$ ), se puede determinar el índice de modulación y por consiguiente la amplitud del ángulo de oscilación (medido en radianes).

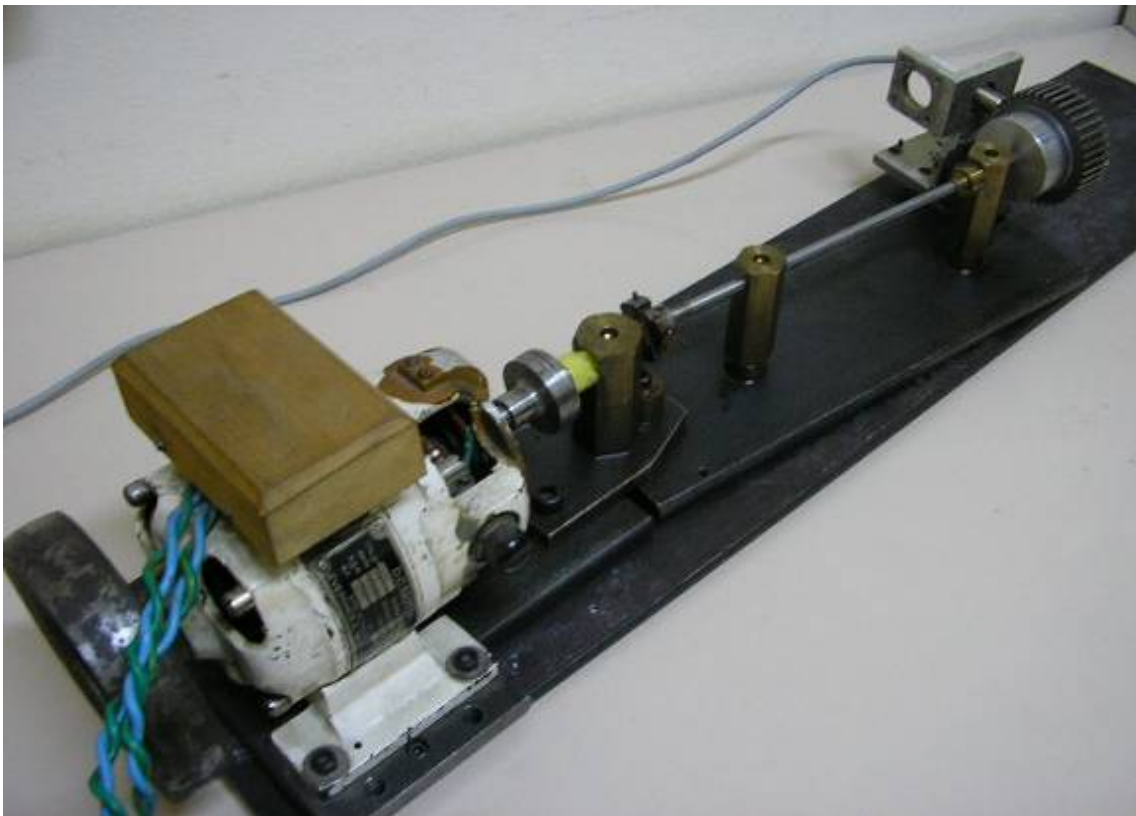
## Capítulo IV – Modelos utilizados para el trabajo experimental

En este capítulo, se describen los dos modelos utilizados para el trabajo experimental. El primero de ellos, sirve para la verificación del correcto funcionamiento de la técnica de análisis propuesta, y el segundo para aplicar la técnica en un sistema que recrea las condiciones y características de una máquina industrial.

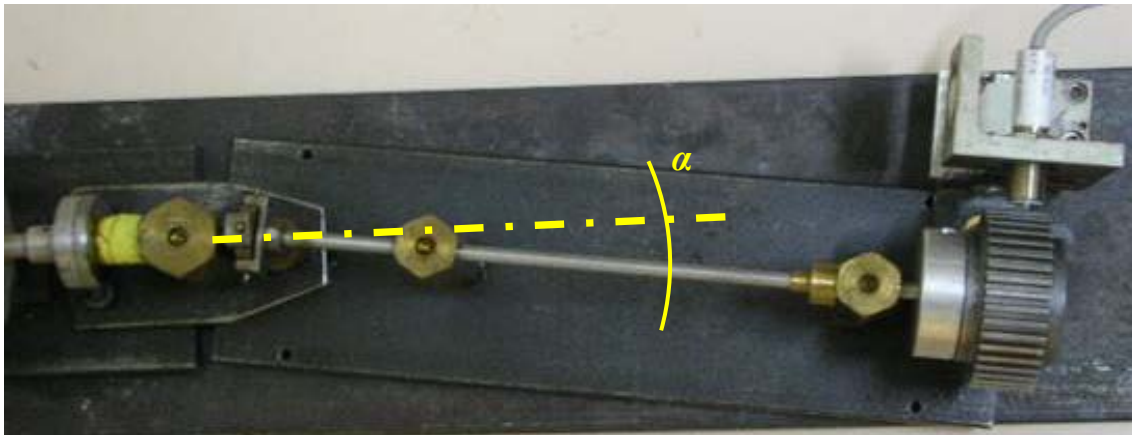
### 4.1 Dispositivo de puesta a punto

#### 4.1.1 Descripción del dispositivo

El dispositivo que se utilizó para la puesta a punto de la técnica, está compuesto por una rueda dentada, de 40 dientes, montada sobre un eje que está acoplado a un motor eléctrico de CD mediante una junta Hooke. Como transductor se empleó un sensor de tipo magnético, el cual fue montado a una pequeña distancia de la rueda dentada. En las Figuras 17-a, b y c se muestran fotografías del modelo.



*Figura 17-a – Dispositivo de puesta a punto*



**Figura 17-b – Dispositivo de puesta a punto (ángulo de la junta Hooke)**

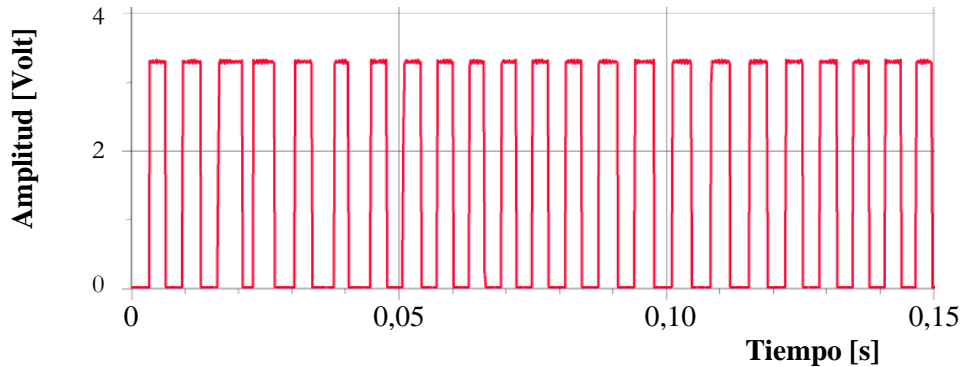


**Figura 17-c – Dispositivo de puesta a punto (ubicación del sensor magnético )**

#### 4.1.2 Técnica de medición

La medición de las oscilaciones angulares fue realizada con un sensor magnético con circuito conformador de pulsos incluido (Figura 17-b). El circuito conformador de pulsos asegura que la amplitud de todos los pulsos sea la misma, minimizando los errores en la medición. De esta manera cuando los dientes de la rueda pasan frente al sensor, se obtiene un tren de pulsos como el mostrado en la Figura 18, en el que se encuentra la información necesaria para el análisis. Notar que la figura 18, que es similar a la Figura 14 del Capítulo III, se ha incluido en esta sección a modo de ejemplo

para facilitar la comprensión de los conceptos aquí tratados. Así mismo, se debe tener presente que en el Capítulo III se explican con mayor detalle las características del método de medición y el posterior análisis.



**Figura 18 – Pulsos generados por el sensor óptico**

#### 4.1.3 Técnica de excitación

La oscilación de la rueda dentada se debe a que la velocidad del eje de salida de la junta Hooke tiene la propiedad de ser variable. Además, dicha variación tiene una frecuencia conocida (igual a dos veces la velocidad de rotación) y su amplitud varía conforme cambia el ángulo  $\alpha$  de desalineación entre el eje de entrada y salida (ver Figura 17-b). En el ANEXO A se describe, con mayor detalle, la teoría del movimiento de la junta Hooke. El ensayo se realiza a una velocidad constante del eje de entrada de la junta. Dicho eje es impulsado por un motor eléctrico de CD. Para disminuir la irregularidad de marcha de dicho motor, se montó sobre su eje, un volante de inercia.

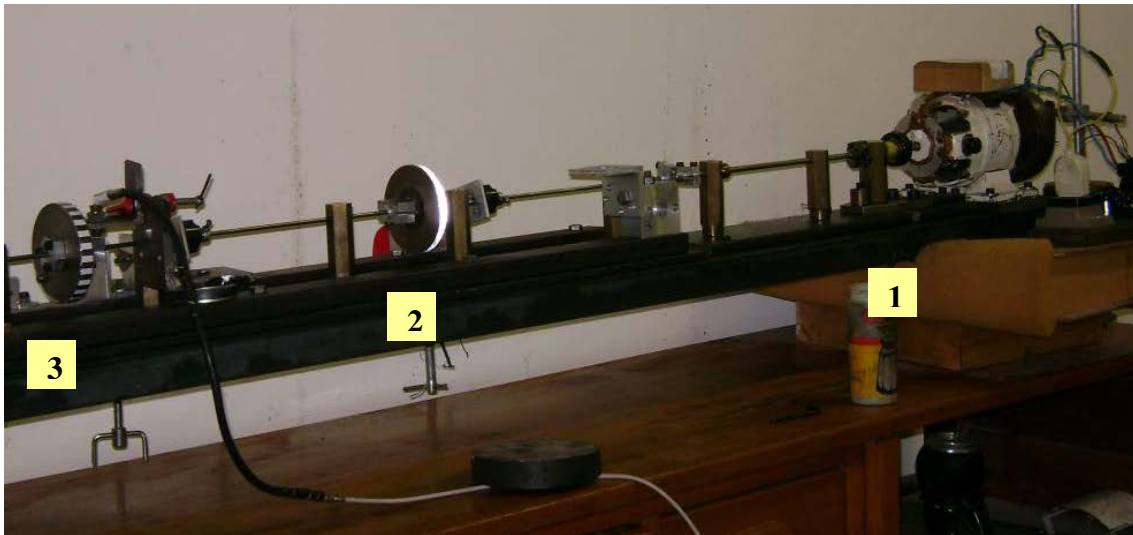
#### 4.2 Modelo experimental de aplicación

##### 4.2.1 Descripción del modelo experimental de aplicación

El modelo experimental de aplicación, fue diseñado para tener su primera frecuencia natural a la torsión cerca de los 14 Hz. Esto, porque en las máquinas industriales donde se reportaron problemas asociados a las vibraciones torsionales, las frecuencias naturales se encuentran dentro de este orden de magnitud. En la Figura 19 se muestra una fotografía del modelo. En este caso, se utilizó como transductor un sensor de tipo óptico ya que con el mismo se pueden obtener resultados similares que en el caso de utilizar el sensor magnético pero sin utilizar ruedas dentadas. Para obtener la señal de análisis, se utilizó una cinta formada por franjas negras y blancas. En la Figura 20 se muestra el detalle de montaje del sensor.

Para impulsar el sistema se utilizó un motor de CD de excitación independiente. Esto para poder controlar la velocidad de giro, y además, poder introducir la señal de excitación que produzca la oscilación del torque.

Los ejes se apoyaron sobre cojinetes hidrodinámicos para lograr la menor fricción posible. Tanto los discos como el eje fueron dimensionados para lograr que la primera frecuencia natural esté cerca de los 14 Hz.



*Figura 19 – Modelo experimental de aplicación*



*Figura 20 – Montaje del sensor óptico*

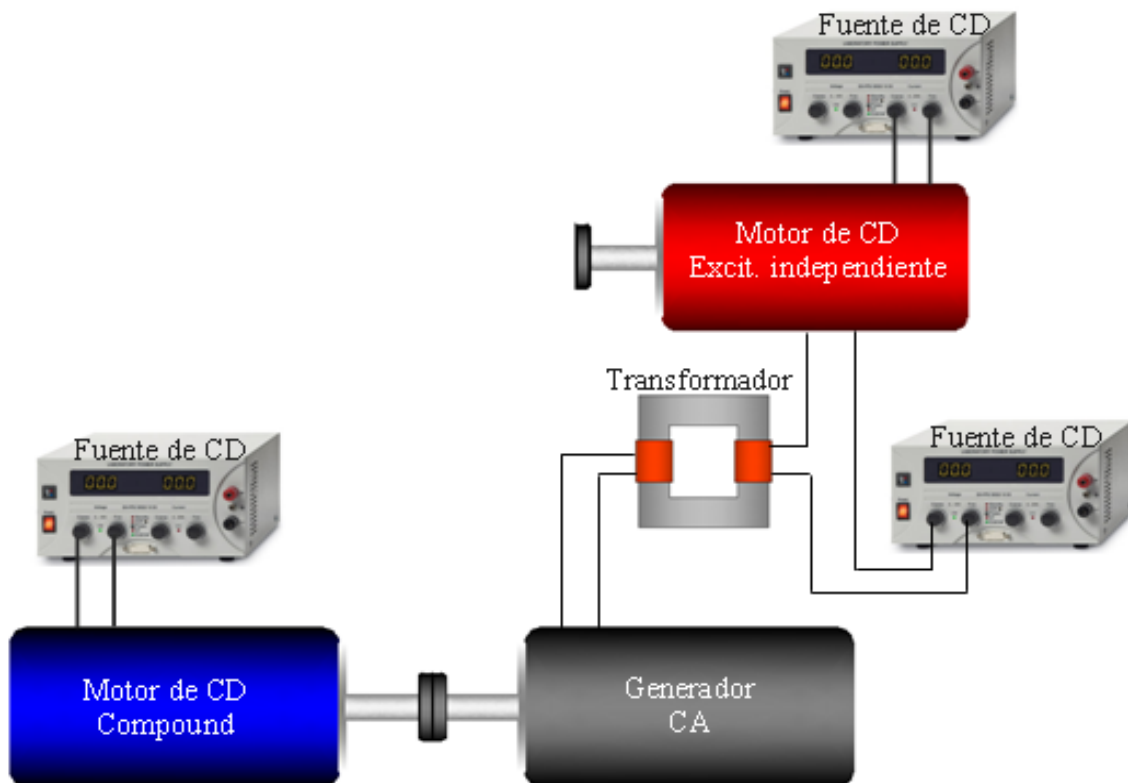


#### 4.2.2. Técnica de medición

La medición de las oscilaciones angulares fue realizada con un sensor de tipo óptico con circuito conformador de pulsos incluido, como se muestra en la Figura 20. En este caso, para producir el tren de pulsos se utilizó una cinta con segmentos de colores blancos y negros. Los segmentos de color blanco hicieron las veces de los dientes de la rueda dentada utilizada en el modelo de puesta a punto. En el Capítulo III se explica con más detalle las características del método de medición y su posterior análisis.

#### 4.2.3 Técnica de excitación

Para generar la excitación se superpusieron sobre la señal de corriente continua que alimenta el rotor del motor, una señal de corriente alterna y de frecuencia controlada. La corriente continua genera el torque motor (de valor constante) y la corriente alterna le introduce pequeñas oscilaciones. Dichas oscilaciones, son las encargadas de excitar la vibración torsional del modelo experimental. A medida que la frecuencia de la señal alterna se acerca a la frecuencia natural de torsión, la amplitud de las oscilaciones van creciendo. Este es uno de los parámetros que se utilizó para verificar el correcto funcionamiento de la técnica. En la Figura 21 se muestra un croquis del circuito de excitación torsional.



**Figura 21 – Circuito de excitación torsional**

#### 4.2.4 Propiedades físicas - Primera frecuencia natural torsional

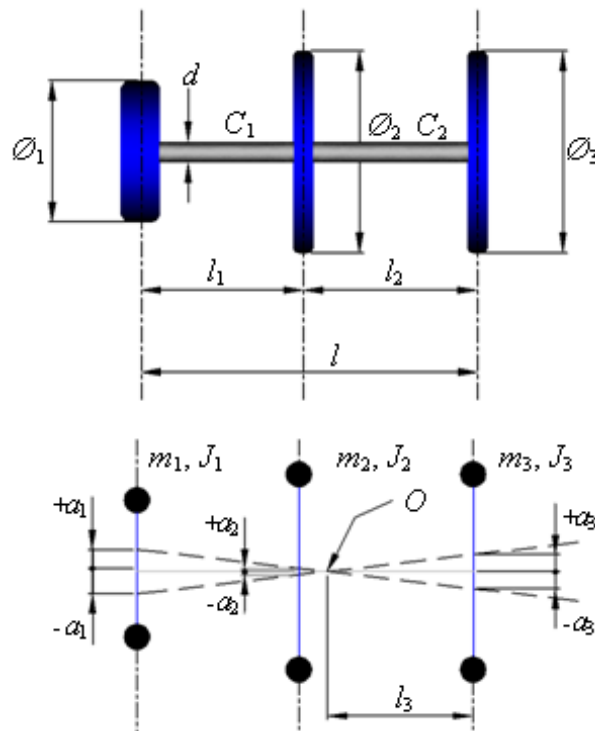
A continuación, se presentan los resultados del estudio analítico y experimental realizado en el modelo de la Figura 19 para determinar sus propiedades mecánicas. El croquis del modelo utilizado se muestra en la Figura 22.

$m_1, m_2$  y  $m_3$  : masas de los discos.

$J_1, J_2$  y  $J_3$  : momentos de inercia de los discos.

$C_1, C_2$  : rigideces torsionales de los tramos.

$a_1, a_2$  y  $a_3$  : amplitud de la oscilación de los discos.



**Figura 22 – Croquis del modelo experimental de aplicación**

##### 4.2.4.1 Determinación analítica de la primera frecuencia natural torsional

El cálculo de la primera frecuencia natural del sistema, fue realizado aplicando el método de sumatoria de torques [29], como sigue:

Torque a la izquierda de  $J_1$  -----  $T_1 = 0$

Ángulo de torsión en  $J_1$  -----  $a_1$

Torque a la derecha de  $J_1$  -----  $T_2$

Velocidad angular de la oscilación -----  $\omega$

donde

$$T_2 = T_1 + (\text{torque para acelerar } J_1) = T_1 + J_1 \omega^2 a_1$$

como  $T_1 = 0$

$$T_2 = J_1 \omega^2 a_1 \quad (\text{IV.1})$$

El ángulo de torsión relativo entre  $J_1$  y  $J_2$  es

$$a_1 - a_2 = \frac{T_2}{C_1} = \frac{J_1 \omega^2 a_1}{C_1}$$

por lo que

$$a_1 - a_2 = \frac{J_1 \omega^2 a_1}{C_1} \quad (\text{IV.2})$$

El torque a la derecha de  $J_2$  es  $T_3$  y puede expresarse como sigue

$$T_3 = T_2 + (\text{torque para acelerar } J_2)$$

$$T_3 = J_1 \omega^2 a_1 + J_2 \omega^2 a_2 = J_1 \omega^2 a_1 + J_2 \omega^2 \left( a_1 - \frac{J_1 \omega^2 a_1}{C_1} \right)$$

$$T_3 = \omega^2 (J_1 a_1 + J_2 a_1) - \omega^4 \frac{J_1 J_2 a_1}{C_1} \quad (\text{IV.3})$$

La amplitud de oscilación en  $J_3$  es

$$a_3 = a_1 - \frac{J_1 \omega^2 a_1}{C_1} - \left[ \frac{\omega^2 (J_1 a_1 + J_2 a_1) - \omega^4 J_1 J_2 a_1 / C_1}{C_2} \right]$$

$$a_3 = a_1 - \omega^2 \left( \frac{J_1 a_1}{C_1} + \frac{J_1 a_1}{C_2} + \frac{J_2 a_1}{C_2} \right) + \omega^4 \frac{J_1 J_2 a_1}{C_1 C_2} \quad (\text{IV.4})$$



El torque  $T_4$ , a la derecha de  $J_3$  es

$$T_4 = \omega^2 (J_1 a_1 + J_2 a_1) - \omega^4 \frac{J_1 J_2 a_1}{C_1} + \omega^2 J_3 a_1 - \omega^4 \left( \frac{J_1 J_3 a_1}{C_1} + \frac{J_1 J_3 a_1}{C_2} + \frac{J_2 J_3 a_1}{C_2} \right) + \omega^6 \frac{a_1 J_1 J_2 J_3}{C_1 C_2} \quad (\text{IV.5})$$

Al no haber un torque externo actuando sobre  $J_3$ ,  $T_4$  se hace cero, por lo que podemos escribir la ecuación (IV.5) de la siguiente manera:

$$\omega^2 (J_1 a_1 + J_2 a_1) - \omega^4 \frac{J_1 J_2 a_1}{C_1} + J_3 \omega^2 a_1 - \omega^4 \left( \frac{J_1 J_3 a_1}{C_1} + \frac{J_1 J_3 a_1}{C_2} + \frac{J_2 J_3 a_1}{C_2} \right) + \omega^6 \frac{a_1 J_1 J_2 J_3}{C_1 C_2} = 0$$

dividiendo todo por  $\omega^2$  y  $a_1$ , queda

$$(J_1 + J_2 + J_3) - \omega^2 \left( \frac{J_1 (J_2 + J_3)}{C_1} + \frac{J_3 (J_1 + J_2)}{C_2} \right) + \omega^4 \frac{J_1 J_2 J_3}{C_1 C_2} = 0 \quad (\text{IV.6})$$

donde

$$C_1 = G I_p / L_1$$

$$C_2 = G I_p / L_2$$

$G$ : módulo de elasticidad a la torsión

$I_p$ : momento de inercia polar de la sección del eje

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}, \text{ siendo } d \text{ es el diámetro del eje.}$$

La ecuación (IV.6) tiene dos raíces reales, lo que significa que este sistema tiene dos modos naturales de torsión.

En el primer modo de vibración torsional, uno de los discos (ubicado en un extremo) rota en un sentido, mientras que los otros dos rotan en sentido contrario. En este modo se encuentra un punto nodal.

En el segundo modo los discos ubicados en los extremos rotan en la misma dirección mientras el disco ubicado al medio, rota en sentido contrario. Este modo presenta dos puntos nodales.

Introduciendo la siguiente notación

$$\omega_1^2 = C_1/J_1; \quad \omega_2^2 = C_1/J_2; \quad \omega_3^2 = C_2/J_2 \quad \text{y} \quad \omega_4^2 = C_2/J_3$$

la ecuación (IV.6) puede ser escrita, de la siguiente manera:

$$\omega^4 - \omega^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) + (\omega_1^2 \omega_3^2 + \omega_1^2 \omega_4^2 + \omega_2^2 \omega_4^2) = 0 \quad (\text{IV.7})$$

y

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 - \omega_4^2)^2 + 4\omega_2^2 \omega_3^2} \quad (\text{IV.8})$$

Resolviendo la ecuación (IV.7) se obtienen las dos frecuencias naturales (IV.8). Para cada una de estas frecuencias naturales, asignando el valor 1 para  $a_1$  y aplicando las ecuaciones (IV.2) y (IV.4), se obtienen las amplitudes relativas de los discos 2 y 3 que caracterizan el modo de vibración.

En las Tablas 1-a y b, se presentan las propiedades mecánicas del sistema y en la Tabla 2 el resultado de los cálculos de los modos y frecuencias naturales.

**Tabla 1-a – Propiedades inerciales de los discos del modelo de aplicación**

Propiedades de los discos		Disco 1	Disco 2	Disco 3
Diámetro exterior	[m]	--	0,0822	0,0822
Espesor del disco	[m]	--	0,009	0,009
Densidad	[Kg/m <sup>3</sup> ]	--	7800	7800
Momento de inercia $J$	[Kg m <sup>2</sup> ]	0,0027	0,0003146	0,0003146

**Tabla 1-b – Propiedades elásticas de los ejes del modelo de aplicación**

Propiedades de los tramos de eje		Tramo 1	Tramo 2
Longitud del tramo	[m]	0,397	0,330
Diámetro del eje	[m]	0,004	0,004
Módulo de corte	[ N/m <sup>2</sup> ]	8,1x10 <sup>10</sup>	8,1x10 <sup>10</sup>
Rigidez a la torsión $C$	[Nm/rad]	5,13	6,1

El momento de inercia  $J_1$  fue medido en forma experimental. Uniendo la punta del eje del motor a un punto fijo mediante un resorte de rigidez conocida, se hizo oscilar el sistema en forma torsional y se midió la frecuencia natural. Luego, conociendo el valor de la rigidez del resorte y la frecuencia natural, se calculó el momento de inercia.

**Tabla 2 – Frecuencias naturales y modos de vibrar del modelo exptal. de aplicación**

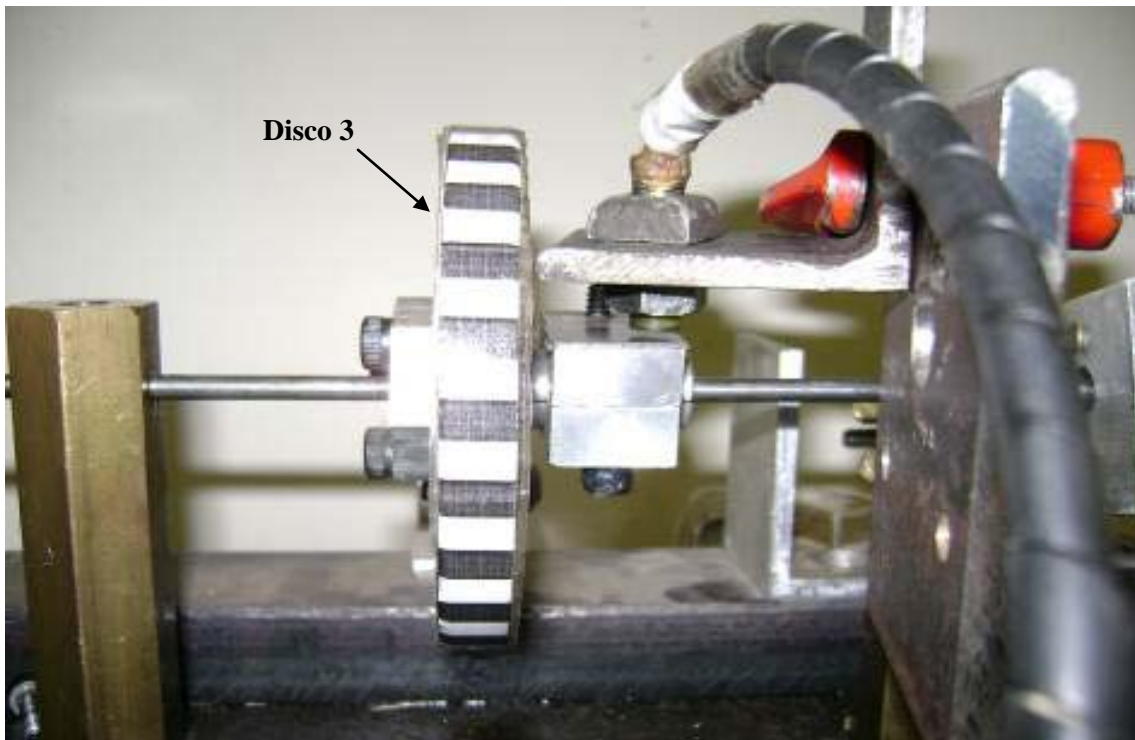
Modo	Frecuencia		Componentes modales [rad]		
	Rad/seg	[Hz]	$a_1$	$a_2$	$a_3$
1	89	14,16	-0,18	0,59	1,0
2	221,3	38,3	-0,04	1,0	-0,65

Del análisis de la Tabla 2 se desprende que este modelo tiene su primera frecuencia natural, la de mayor interés para nuestro trabajo, a los 14,16 Hz y un punto nodal ubicado entre los discos 1 y 2.

Para validar el modelo utilizado, sobre todo para el caso de la primera frecuencia natural, se hicieron ensayos de laboratorio para medirla en forma experimental.

#### 4.2.4.2 Determinación experimental de la primera frecuencia natural torsional

El ensayo se realizó excitando el sistema, en forma torsional, con frecuencia variable, mientras, se medían los desplazamientos angulares en las proximidades de los discos y la tensión de excitación del torque variable. En la Figura 23, se muestra el detalle de montaje del sensor de proximidad utilizado cerca del disco 3.

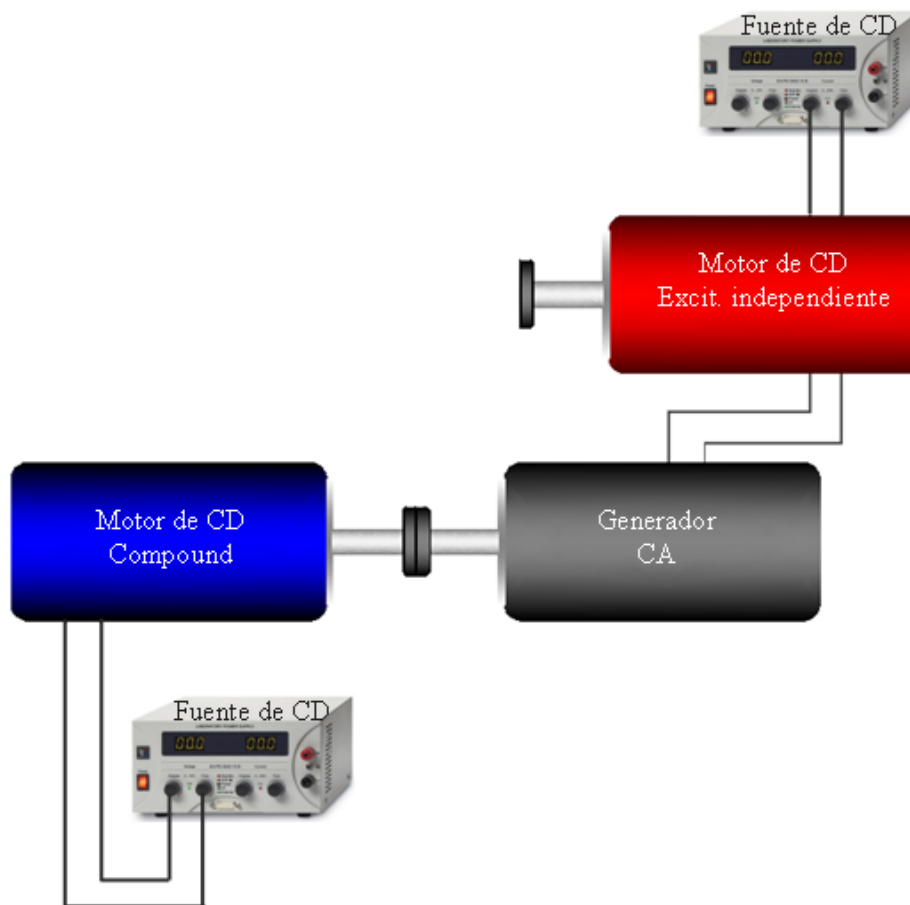


**Figura 23 – Montaje del sensor de proximidad en el disco 3**

Para determinar la frecuencia natural, se utilizaron los siguientes criterios:

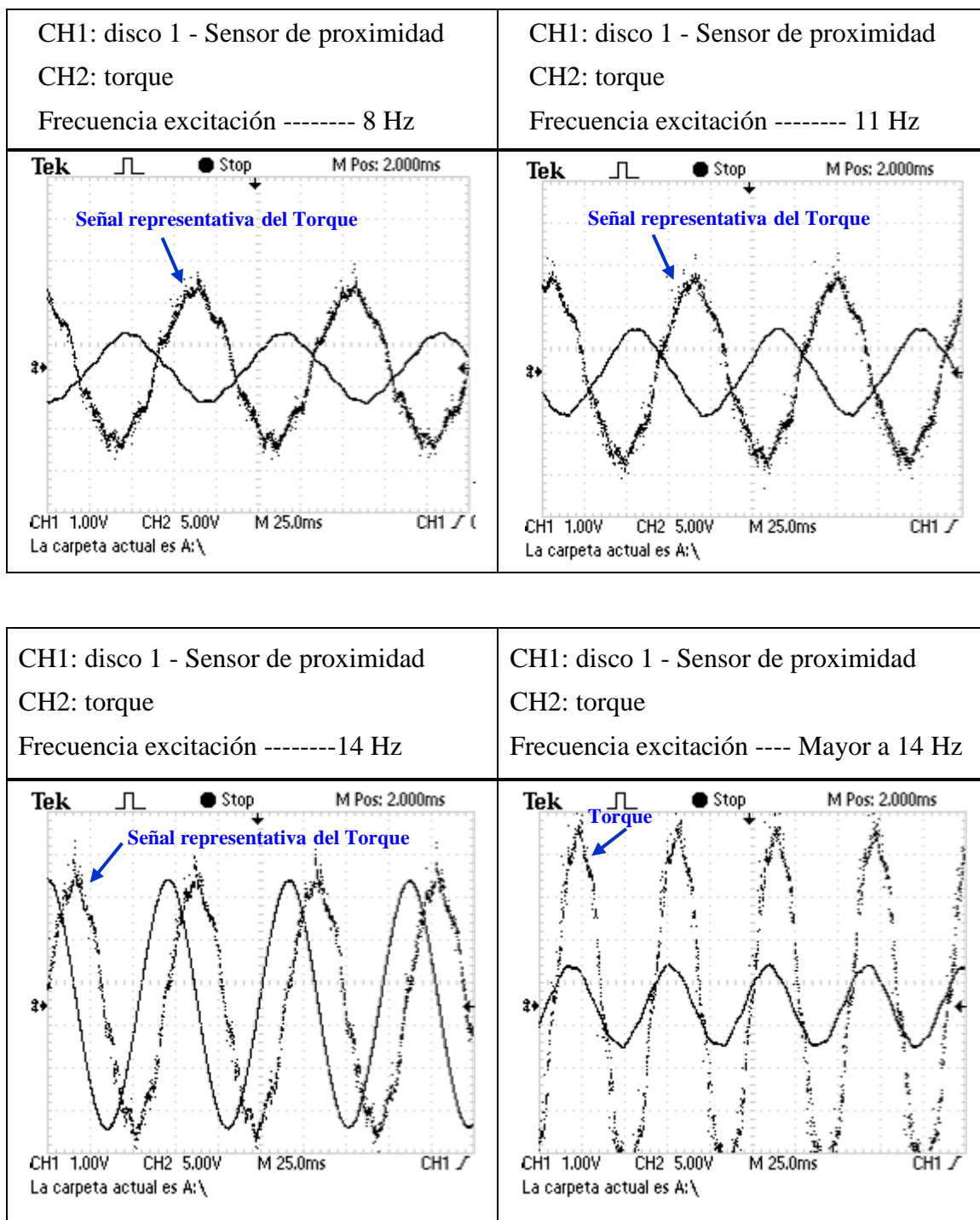
- 1) Frecuencia a la cual que se produce el mayor desplazamiento angular.
- 2) Frecuencia a la cual que se genera un cambio de fase de  $180^\circ$  entre la señal de desplazamiento y la señal de tensión.

Para excitar el torque se utilizó un sistema similar al presentado en la Figura 21, con la diferencia de que en este ensayo la señal de corriente alterna fue introducida directamente en el campo rotórico del motor de CD. De esta manera, se logró excitar solamente el torque, de modo que la única rotación del eje fue la debida a la vibración torsional. En la Figura 24 se muestra un esquema del circuito utilizado para este caso.



**Figura 24 – Circuito de excitación estática de vibraciones torsionales**

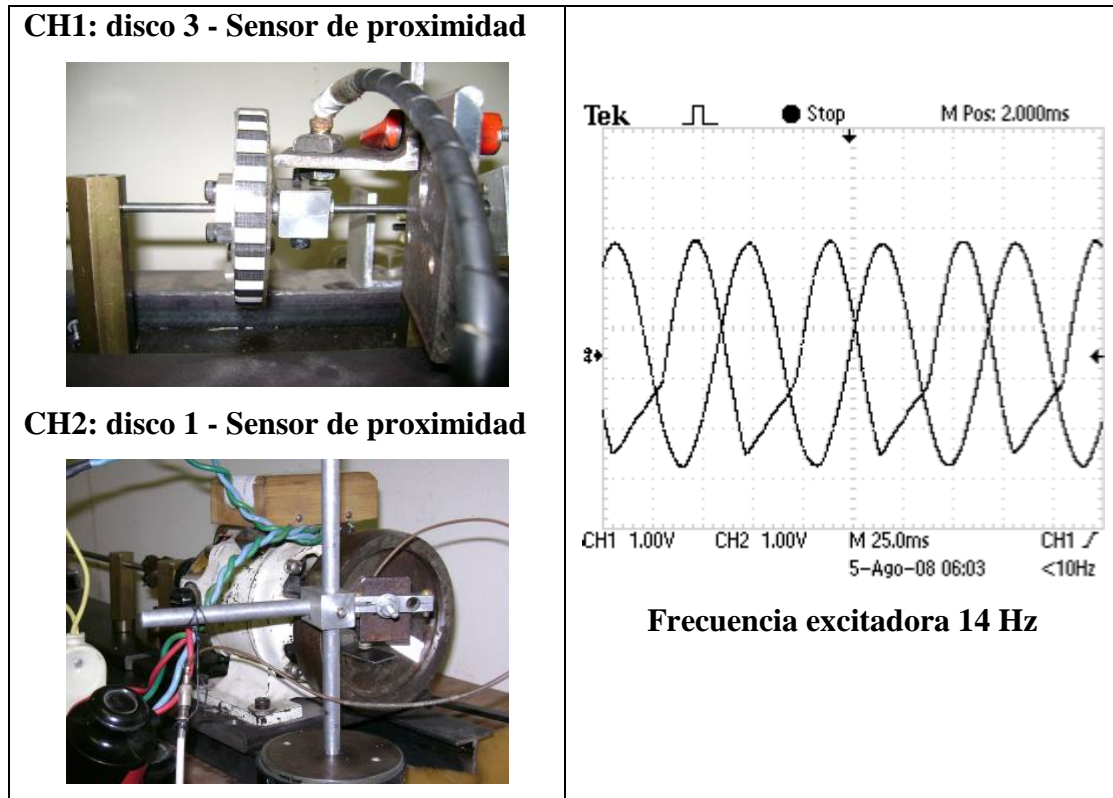
En la Figura 25 se muestran los resultados de la medición realizada en el disco 3. Esta medición fue realizada con un osciloscopio de dos canales. En el canal 1 se registró el desplazamiento y en el canal 2 la tensión.



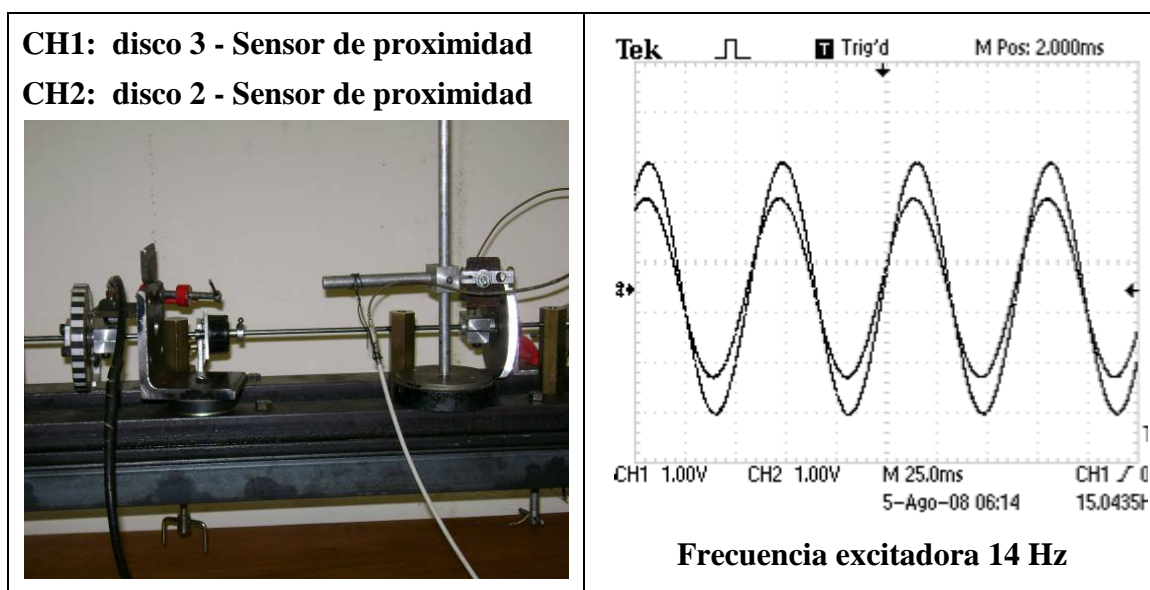
**Figura 25 – Medición del desplazamiento angular del disco 3 a diferentes frecuencias**

Observando la Figura 25, se puede determinar que el modelo presenta una frecuencia natural en torno a los 14 Hz. Esto porque al llegar la frecuencia de excitación a los 14 Hz, la amplitud de la oscilación llegó a un pico. Además, al pasar por los 14 Hz se produjo un cambio de fase de aproximadamente  $180^\circ$  entre la señal de tensión, representativa del torque, y el desplazamiento.

Para confirmar que esta frecuencia natural correspondía al primer modo de vibración, se realizaron ensayos comparando las fases relativas entre los desplazamientos de los distintos discos. Aquí también se utilizó el sistema de excitación mostrado en la Figura 24. En primer lugar se comparó el desplazamiento relativo entre los discos 3 y 1 (ver Figura 26) y en segundo lugar, entre los discos 2 y 3 (ver Figura 27).



*Figura 26 – Medición del desplazamiento angular relativo entre discos 1 y 3*



*Figura 27 – Medición del desplazamiento angular relativo entre los discos 2 y 3*

Del análisis de la fase relativa de los desplazamientos de los discos a la frecuencia de excitación de 14 Hz, se pudo establecer que el sistema presenta un punto nodal entre los discos 1 y 2. Esto confirmó los datos obtenidos por medio del cálculo (14,162 Hz).

#### Conclusiones:

El sistema tiene su primera frecuencia natural a la torsión a los 14 Hz y el punto nodal ubicado entre los discos 1 y 2.

#### 4.3 Procedimientos empleados

El programa de ensayos fue desarrollado para evaluar la posibilidad de utilizar instrumentos de uso común en la industria en el análisis de vibraciones torsionales en régimen estable. La técnica de análisis fue evaluada en primer lugar, por un dispositivo que utiliza una junta Hooke que por sus características dinámicas (como se ve en el APÉNDICE A) es un excelente sistema de puesta a punto. En segundo lugar, se aplicó la técnica a un sistema cuyas características dinámicas eran semejantes a las de una máquina industrial.

##### 4.3.1 Análisis de régimen estable

En todos los casos, los ensayos fueron realizados a una velocidad constante. Esto debido a que la técnica bajo evaluación, es decir el uso de las bandas laterales junto a las funciones de Bessel, así lo impone. Además desde el punto de vista de la aplicación, gran cantidad de los casos de problemas de vibraciones torsiones se dan en condiciones de régimen estable.

##### 4.3.1.1 Dispositivo de puesta a punto

El ensayo se realizó a una velocidad de 1000 rpm y los espectros fueron registrados a diferentes ángulos (6°, 8° y 10°) de inclinación del eje de salida de la junta Hooke. El hecho de que cuanto mayor es el ángulo de inclinación mayor es el ángulo de oscilación de la vibración torsional (como se muestra en el APÉNDICE A), permitió contar con una excelente referencia para la verificación del correcto funcionamiento de la técnica.

#### 4.3.1.2 Modelo experimental de aplicación

El ensayo se realizó a una velocidad de rotación 380 rpm, principalmente, por limitaciones impuestas por la potencia de las fuentes de alimentación utilizadas para alimentar al motor de impulsión del modelo. Luego mediante un generador de corriente alterna, como indica el circuito de la Figura 21, se generó una excitación torsional de frecuencia variable. Esto se logró, cambiando la velocidad del motor que impulsaba al generador. Los espectros fueron registrados en las siguientes frecuencias de excitación:

- 0 Hz
- 10,8 Hz
- 12,8 Hz
- 14,6 Hz

El objetivo del ensayo, fue medir el aumento de las oscilaciones a medida que la frecuencia de la excitación torsional se acercaba a la primera frecuencia natural del modelo (aproximadamente 14 Hz).





## Capítulo V – Resultados de los ensayos

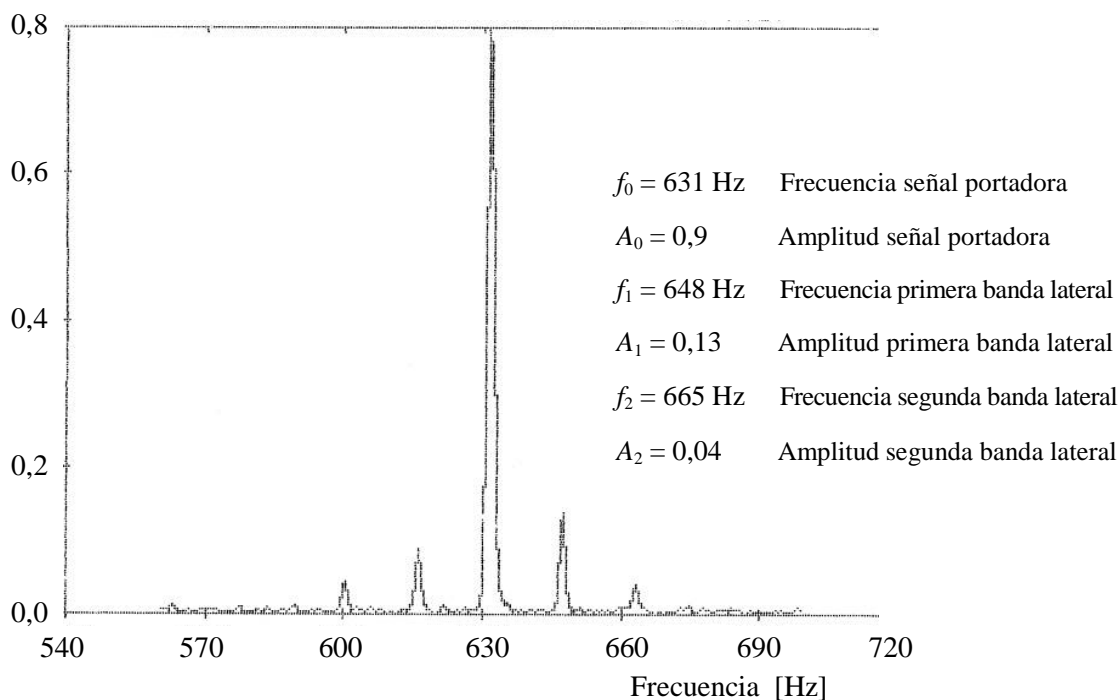
### 5.1 Dispositivo de puesta a punto

Las mediciones fueron realizadas con el sistema marca CSI y la FFT obtenida por medio del software WAVEPACK, de la misma marca. En este caso se utilizó la técnica del ZOOM, es decir, se generó una ventana en torno a la frecuencia portadora con una resolución de 6400 líneas espectrales.

En primer lugar, en las Figuras 28, 29 y 30, se muestran los espectros en frecuencia obtenidos con una velocidad de rotación 1000 rpm y con tres ángulos de inclinación ( $\alpha$  igual a 6, 8 y 10°). Luego se realiza el análisis de amplitud (como en el Capítulo II) y el cálculo del ángulo de oscilación máximo  $\hat{\theta}_r$  (como se muestra en el APÉNDICE A). Por último se presentan estos resultados en la Tabla 2; para su posterior análisis.

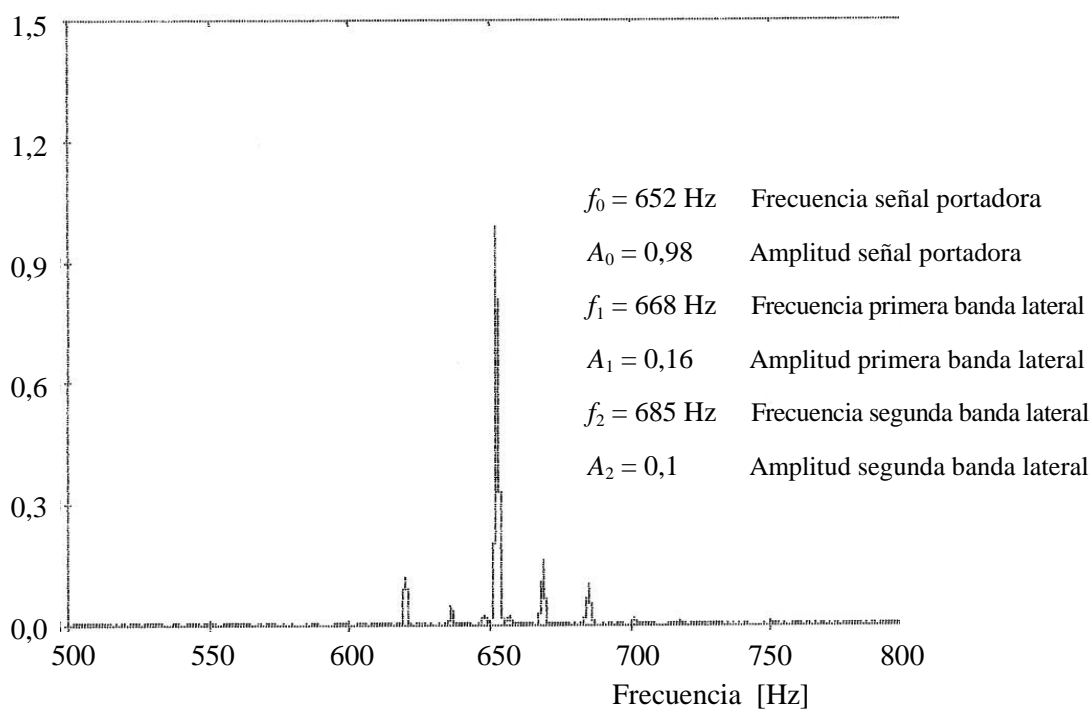
#### Espectros en frecuencia

##### Ángulo de inclinación $\alpha = 6^\circ$ - Velocidad de rotación 1000 rpm



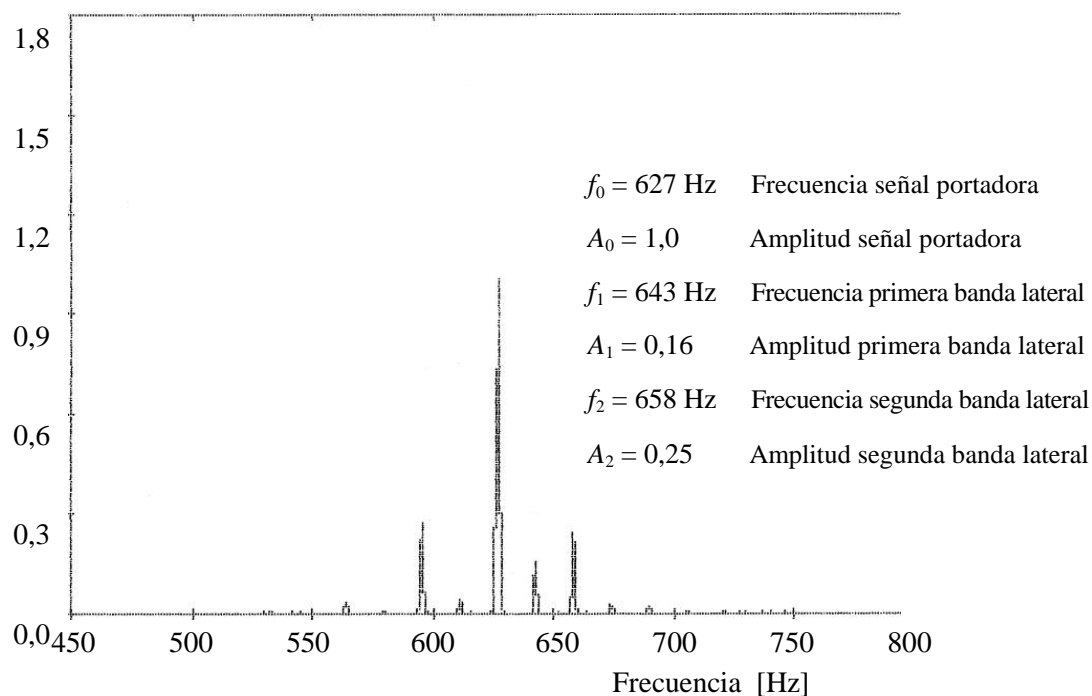
**Figura 28 – Espectro con bandas laterales para  $\alpha = 6^\circ$**

**Ángulo de inclinación  $\alpha = 8^\circ$  - Velocidad de rotación 1000 rpm**



**Figura 29 – Espectro con bandas laterales para  $\alpha = 8^\circ$**

**Ángulo de inclinación  $\alpha = 10^\circ$  - Velocidad de rotación 1000 rpm**



**Figura 30 – Espectro con bandas laterales para  $\alpha = 10^\circ$**

## Análisis de amplitud y cálculo del ángulo de oscilación torsional máximo

Para el análisis de amplitud se utiliza la Tabla 6 (Apéndice B) de funciones de Bessel.

- Ángulo de inclinación  $\alpha = 6^\circ$

De la Figura 28 obtenemos  $A_c = 0,9$  y  $A_2 = 0,04$  con lo que se calcula  $A_2/A_c$ , que da 0,044. Con este dato se puede ingresar a la tabla de funciones de Bessel donde se encuentra el valor del índice de modulación  $\beta$ . Para este caso el valor de  $\beta$  más próximo es 0,1. Dividiendo  $\beta$  por el número de dientes de la rueda (en este caso 40 dientes) y luego expresando el resultado en grados, se obtiene un ángulo de oscilación torsional máximo de  $0,1432^\circ$ .

Utilizando las ecuaciones (A.4) y (A.12) del APENDICE A y despreciando las componentes de orden superior, se puede calcular el ángulo máximo de oscilación teórico, como sigue:

$$\hat{\theta}_T = \left[ \frac{K}{2} \frac{180}{\pi} \right] = \left[ \frac{\left( \frac{\text{sen}^2 \alpha}{2 - \text{sen}^2 \alpha} \right) \frac{180}{\pi}}{2} \right] = 0,16^\circ$$

- Ángulos de inclinación  $\alpha = 8^\circ$  y  $\alpha = 10^\circ$

Procediendo en forma similar que en el caso anterior, se obtiene:

$\hat{\theta}_T = 0,29^\circ$  (para  $\alpha = 8^\circ$ ) y  $\hat{\theta}_T = 0,57^\circ$  (para  $\alpha = 10^\circ$ ), utilizando la Tabla 3 de funciones de Bessel y  $\hat{\theta}_T = 0,28^\circ$  (para  $\alpha = 8^\circ$ ) y  $\hat{\theta}_T = 0,44^\circ$  (para  $\alpha = 10^\circ$ ), utilizando la teoría del movimiento de la junta Hooke.

La Tabla 3 resume los resultados de las mediciones realizadas para el dispositivo de de puesta a punto, el resultado del análisis de amplitud utilizando la tabla de funciones de Bessel y las amplitudes de las oscilaciones calculadas siguiendo la teoría del movimiento de la junta Hooke.

**Tabla 3 – Resultado de las mediciones con el modelo de puesta a punto\***

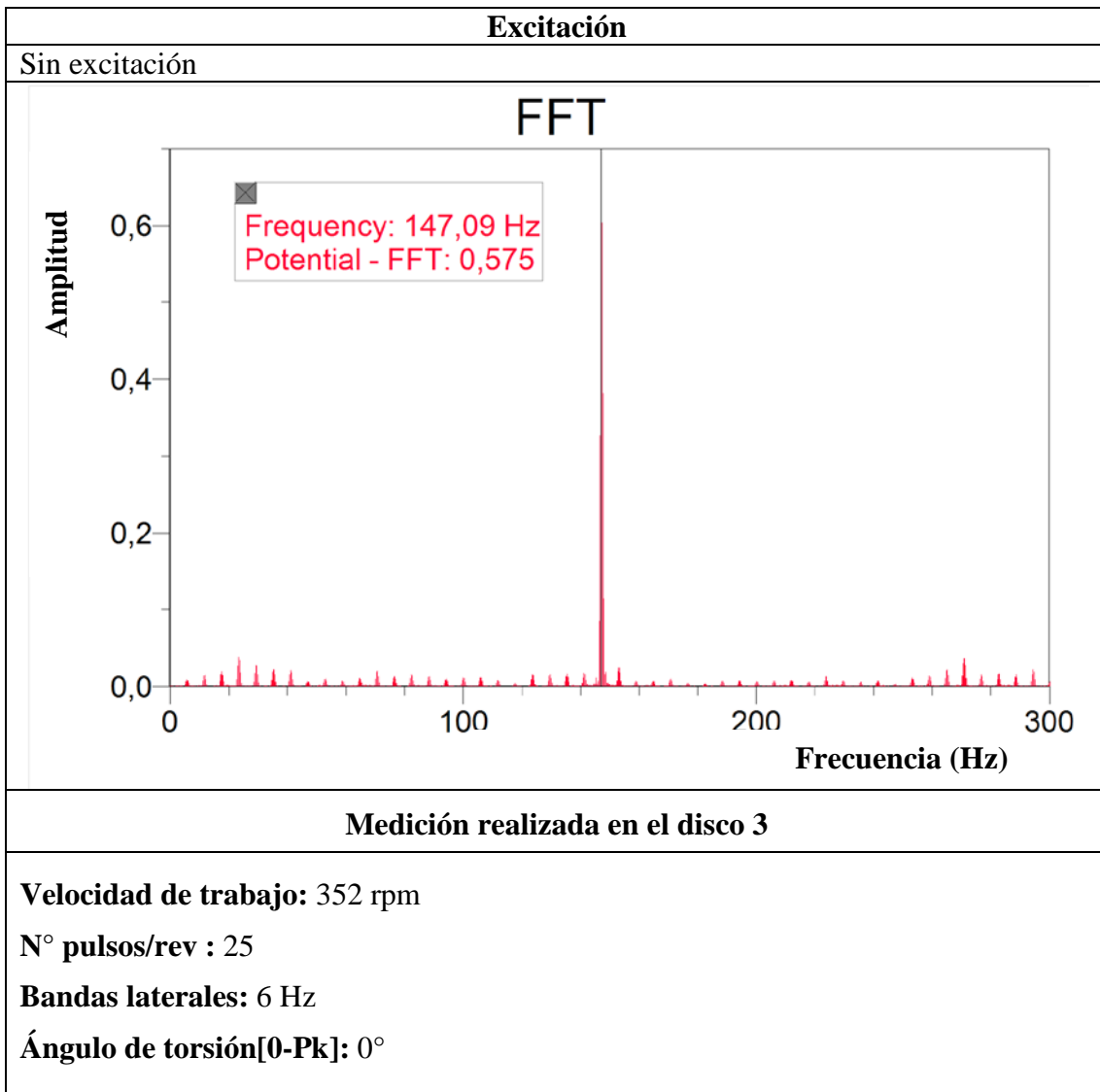
$\alpha$ [°]	$f_c$ [Hz]	$f_2$ [Hz]	$f_m$ [Hz]	$Z$	$A_c$	$A_1$	$A_1/A_c$	$\beta$	$\theta_t$ [°]	
									Medición	Cálculo
6	631	663	32	40	0,90	0,04	0,044	0,1	0,14	0,16
8	652	685	33	40	0,98	0,10	0,102	0,2	0,29	0,28
10	627	658	31	40	1,00	0,20	0,200	0,4	0,57	0,44

\* Velocidad de rotación 1000 rpm (aproximadamente 16,6 Hz).

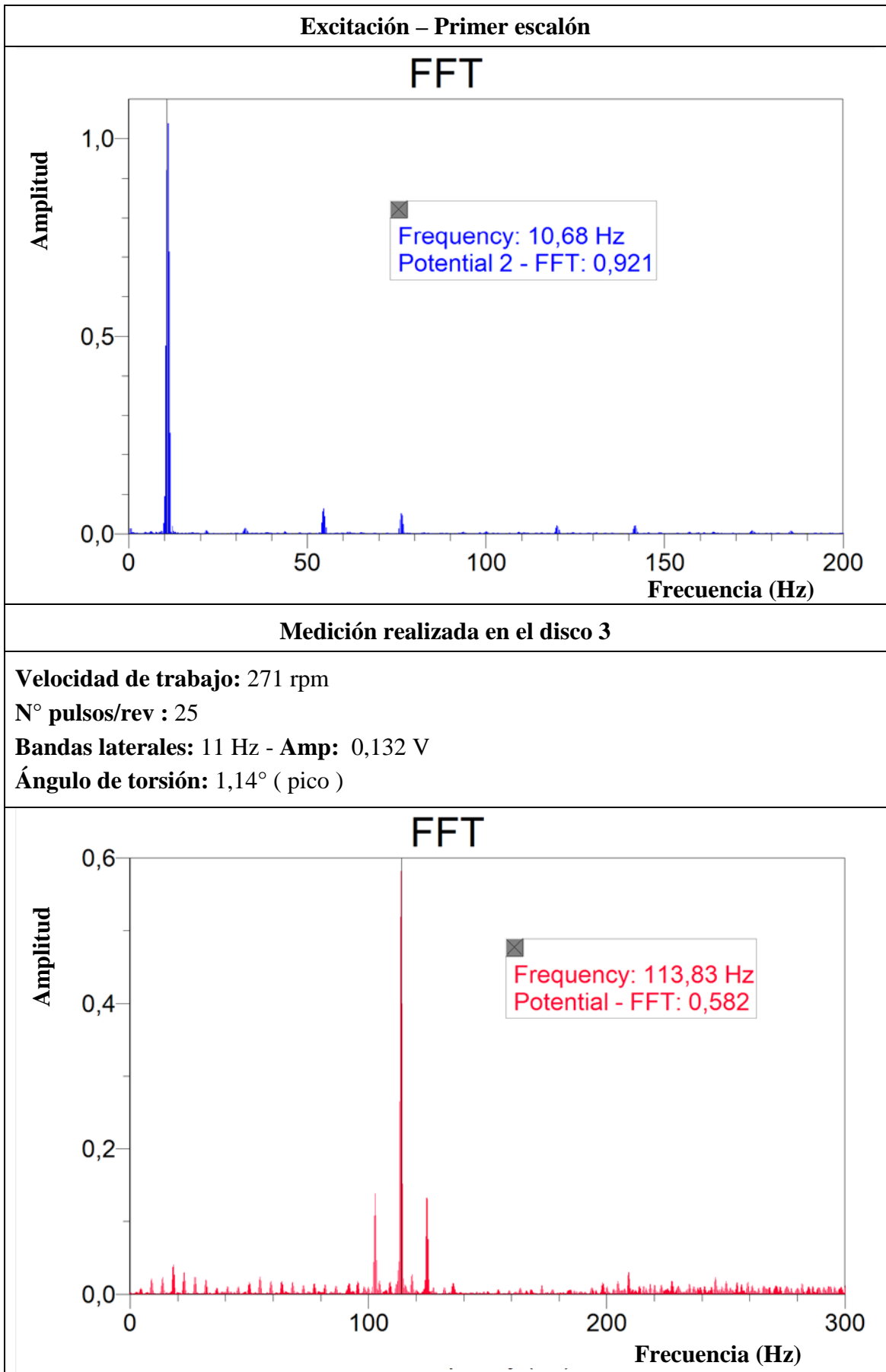
Comparando las dos últimas columnas de la Tabla 3, se puede observar que los valores obtenidos en la medición son similares a los obtenidos por cálculo. Las diferencias entre los valores medidos y los valores calculados tienen que ver con errores propios del sistema de medición y con errores en la medición del ángulo de desalineación de la junta Hooke. Cabe destacar que estas diferencias son admisibles para la aplicación de la técnica a nivel industrial. Además, en todos los casos la frecuencia de la oscilación torsional fue igual a dos veces la velocidad de rotación ( $2 \times 16,6$  Hz), lo cual es correcto si se tiene en cuenta que la oscilación impuesta por la junta; es de esa misma frecuencia. No obstante esto, en los espectros también aparecen componentes indicadas como  $f_1$ , las cuales se encuentran separadas de la frecuencia portadora a la velocidad de giro. Estas se deben principalmente, a errores del dentado, excentricidad de la rueda e irregularidad en la velocidad de giro impuesta por el motor.

## 5.2 Modelo experimental de aplicación

La medición fue realizada con el sistema marca Vernier y la FFT obtenida por medio del software Logger Pro, de la misma marca. En este caso, se registró primero la señal en el tiempo con una frecuencia de muestreo de 5000 muestras/seg. y un tiempo de adquisición de 2 seg. Luego aplicando la herramienta FFT del software, se obtuvo el espectro en frecuencias. A continuación, se presentan los espectros en frecuencia obtenidos para las diferentes condiciones de excitación torsional y un gráfico comparativo con las formas de onda obtenidas a partir del sensor óptico, también para las diferentes condiciones de excitación. Por último, en la Tabla 5, se resumen los resultados de las mediciones efectuadas y los cálculos de amplitud realizados utilizando las tablas de funciones de Bessel.

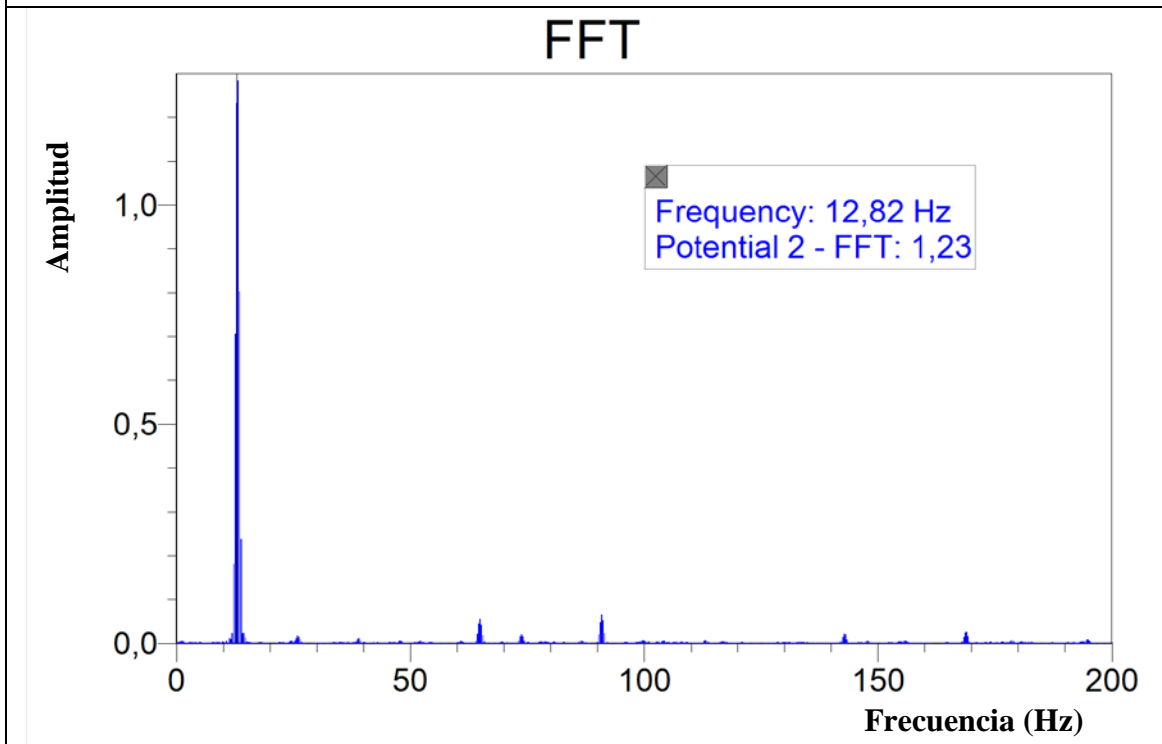


*Figura 31 – Espectro sin excitación torsional*



*Figura 32 – Espectro con excitación torsional de 10,68 Hz*

### Excitación – Segundo escalón



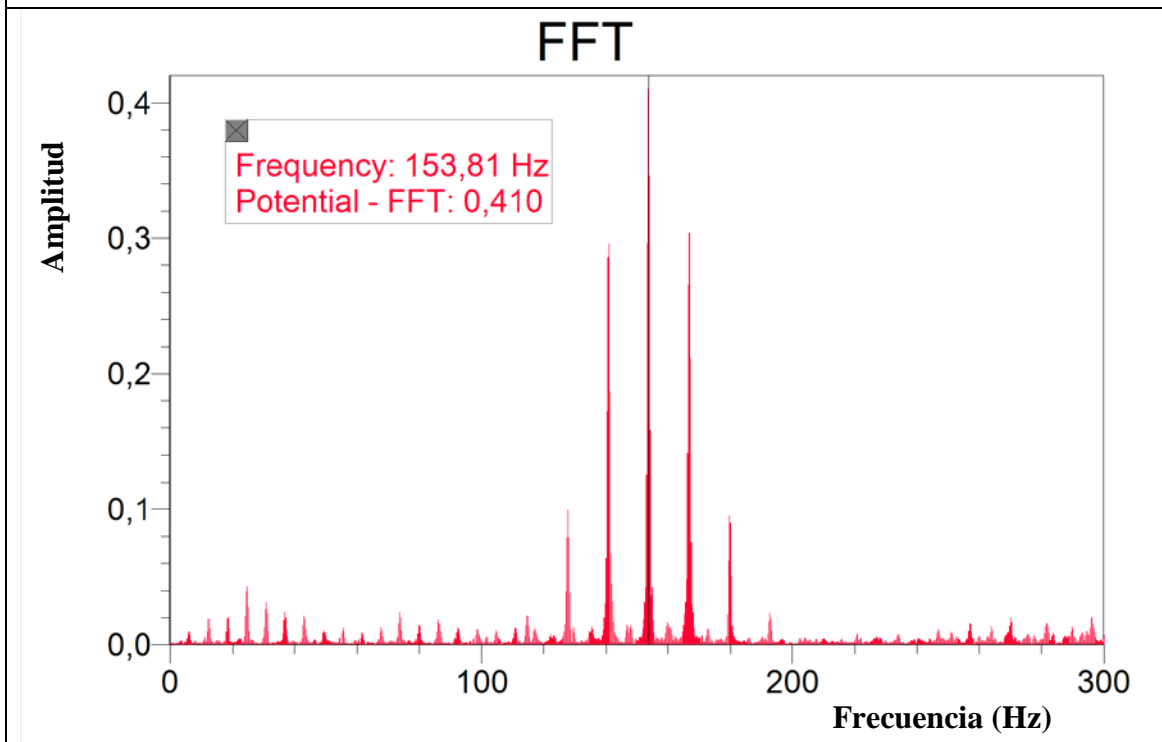
### Medición realizada en el disco 3

**Velocidad de trabajo:** 370 rpm

**N° pulsos/rev :** 25

**Bandas laterales:** 13 Hz - **Amp:** 0,3 V

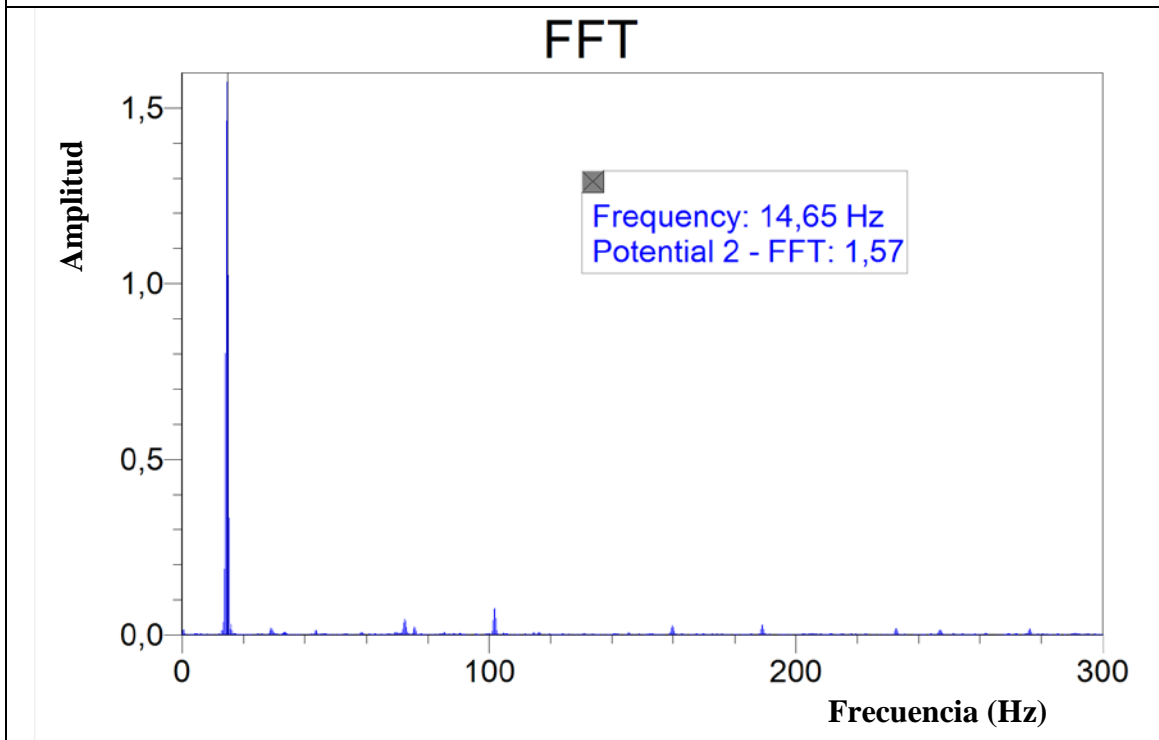
**Ángulo de torsión:** 2,3° ( pico )



*Figura 33 – Espectro con excitación torsional de 12,82 Hz*



**Excitación – Tercer escalón – Frecuencia natural**



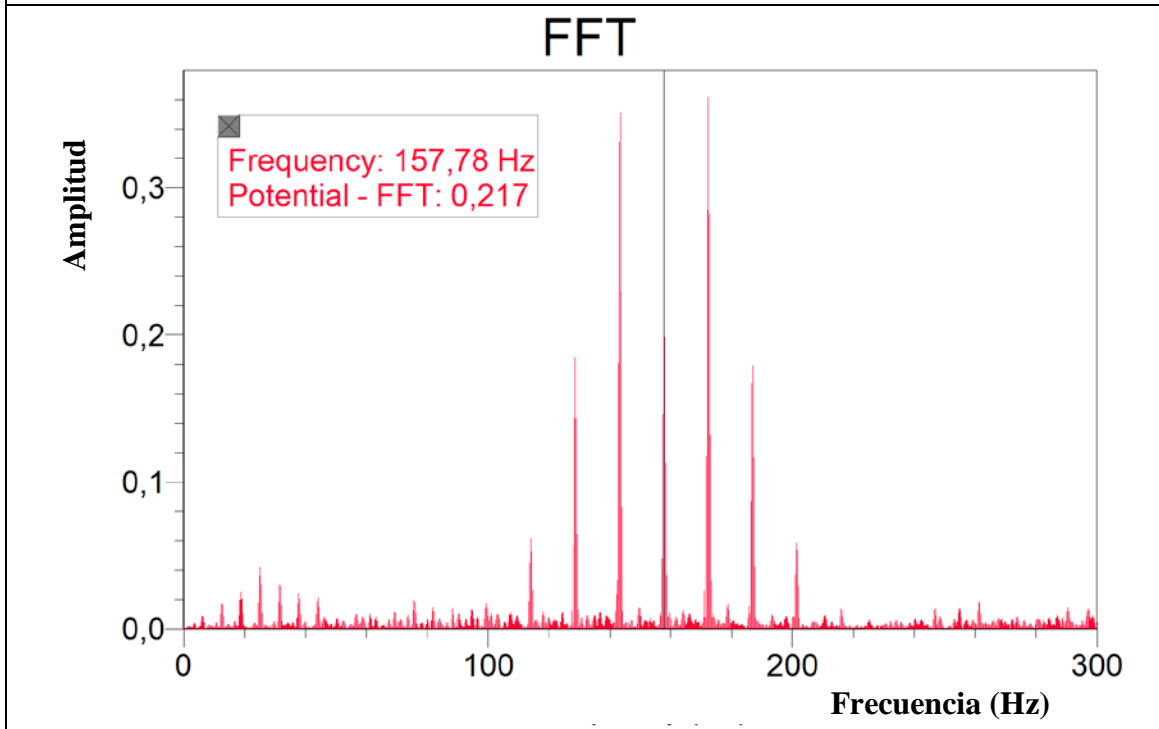
**Medición realizada en el disco 3**

**Velocidad de trabajo:** 378 rpm

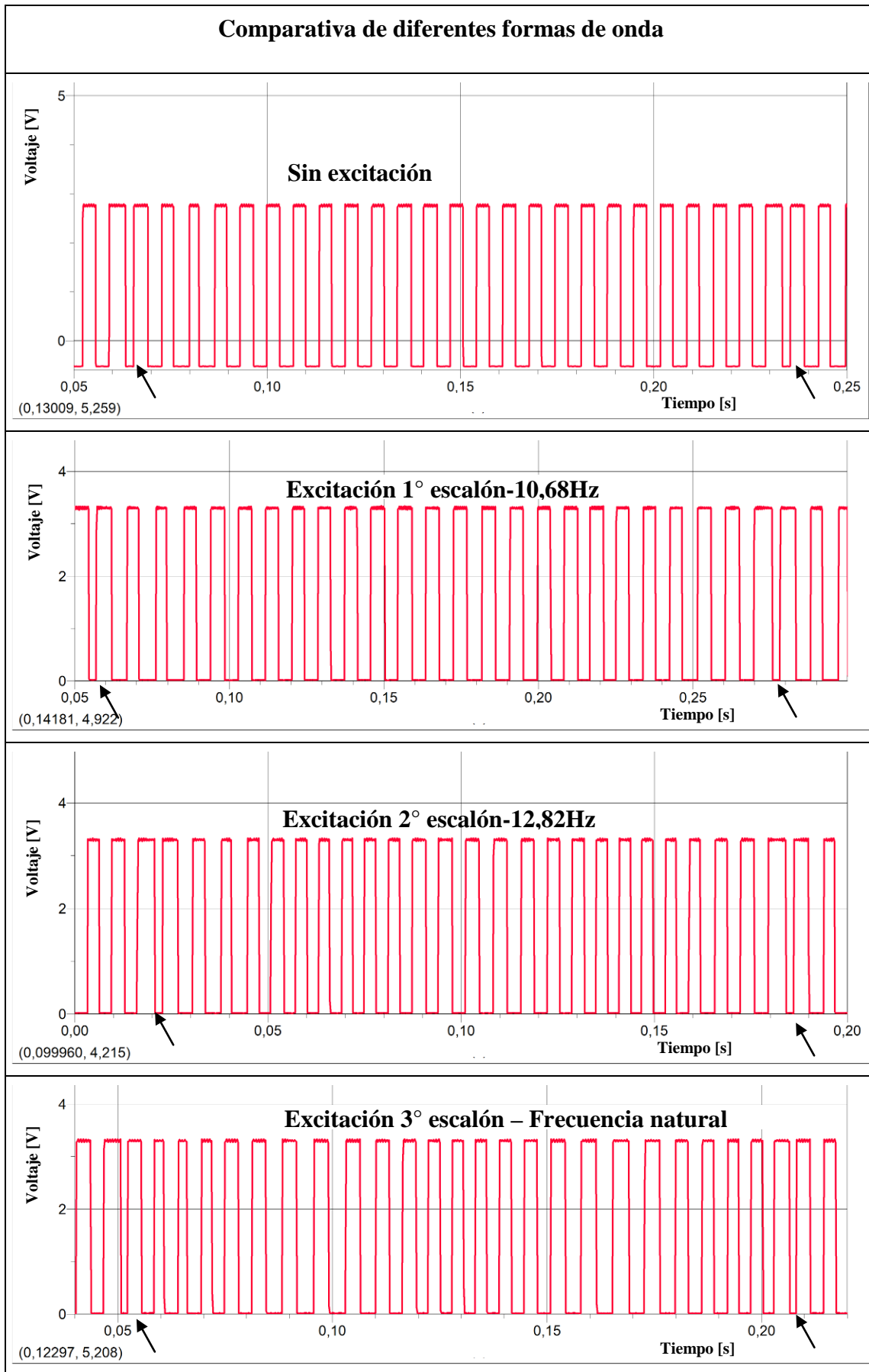
**N° pulsos/rev :** 25

**Bandas laterales:** 14 Hz - **Amp:** 0,362 V

**Ángulo de torsión:** 4,5° ( pico )



*Figura 34 – Espectro con excitación torsional de 14,65 Hz*



**Figura 35 – Formas de onda para diferentes frecuencias de excitación**

**Tabla 4 – Resultado de las mediciones en el modelo experimental de aplicación**

Excitación	$n$ [rpm]	$f_c$ [Hz]	$f_1$ [Hz]	$f_m = f_c - f_1$	$Z$	$A_c$	$A_1$	$A_1/A_c$	$\beta$	$\theta_t$ [°]
0	352,81	147,1	0	0	25	0,575	0	0	0	0,00
10,80	273,12	113,8	124,8	11,0	25	0,579	0,132	0,23	0,45	1,03
12,82	369,14	153,8	166,8	13,0	25	0,411	0,301	0,73	1,21	2,75
14,65	378,72	157,8	172,3	14,5	25	0,217	0,362	1,67	1,83	4,13

La notación usada en la Tabla 4 es la siguiente:

$n$  : velocidad de rotación [rpm].

$f_c$  : frecuencia portadora.

$f_1$  : frecuencia de la banda lateral de primer orden.

$f_m$  : frecuencia modulante, igual a  $f_1 - f_c$ .

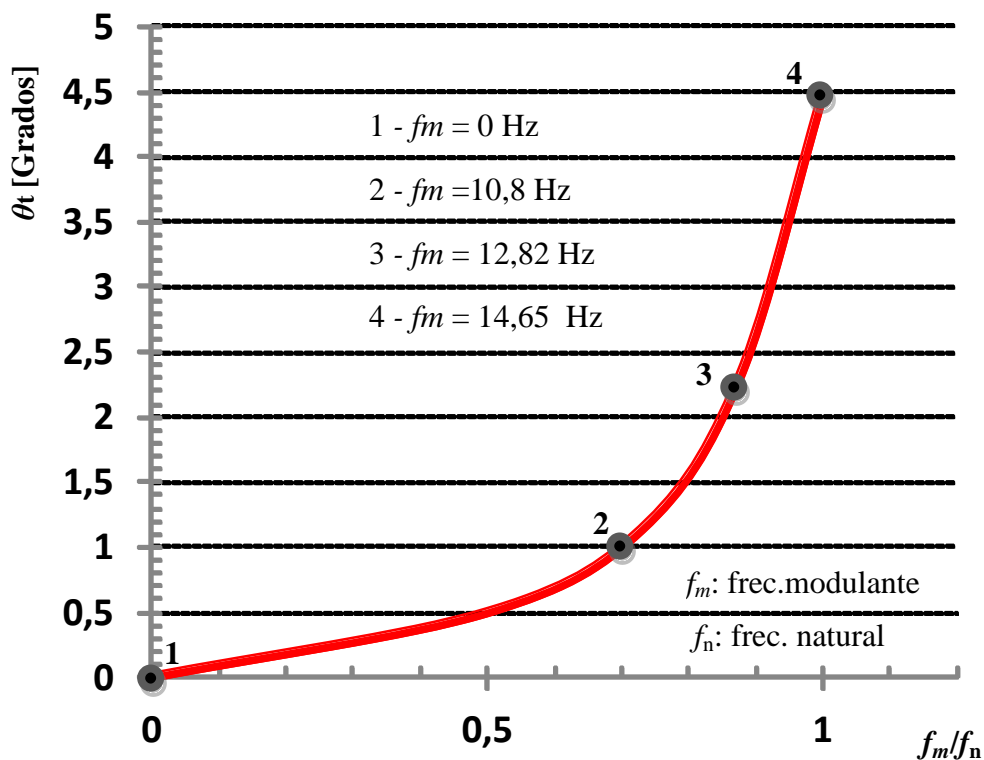
$Z$  : número de dientes de la rueda dentada.

$A_c$  : Amplitud de la señal portadora.

$A_1$  : Amplitud primera banda lateral.

$\beta$  : índice de modulación.

$\theta_t$  : ángulo de oscilación torsional.



**Figura 36 – Oscilación torsional en función de la relación de frecuencias  $f_m/f_n$**

Del análisis de los gráficos de las Figuras 31, 32, 33 y 34 y de los valores de la Tabla 4, se puede concluir en que a medida que la frecuencia de excitación torsional se acerca a la frecuencia natural del sistema, comienzan a aumentar las amplitudes de las bandas laterales en torno a la frecuencia portadora indicando el aumento de la oscilación angular. Todo esto se ha resumido en la Figura 36 en la cual se grafica el ángulo de torsión medido, en función de la relación entre la frecuencia de la señal modulante y la frecuencia natural. En esta figura se puede ver con mayor claridad el aumento de la amplitud de la vibración torsional a medida que la frecuencia de la señal modulante (excitación torsional) se acerca a la frecuencia natural.

Este fenómeno también puede observarse en el gráfico de la Figura 35 ya que al aumentar la vibración torsional los períodos de la onda cuadrada comienzan a comprimirse en unas zonas y a expandirse en otras, evidenciando el fenómeno de frecuencia modulada (FM).



## Capítulo VI – Conclusiones

En este trabajo de investigación se ha evaluado el correcto funcionamiento de una técnica para la medición y análisis de vibraciones torsionales. Se construyeron dos modelos mecánicos para la realización del trabajo experimental, uno de ellos para la puesta a punto de la técnica y el otro para aplicar la misma en un sistema de características físicas similares a las de una máquina rotante. Se definieron procedimientos de ensayo adecuados para verificar que con la técnica propuesta era posible detectar el incremento de las vibraciones torsiones, manteniendo constante la velocidad de rotación del eje. Durante los ensayos se utilizó el principio de medición sin contacto y la adquisición y posterior procesamiento de los datos, con instrumental de uso común en la industria.

De los resultados del trabajo, se pueden resaltar las siguientes conclusiones:

1. Se construyó y operó exitosamente un dispositivo mecánico para la puesta a punto de la técnica de medición y análisis, utilizando como fuente de vibración torsional una junta Hooke que genera una oscilación en el eje de salida igual a dos veces la velocidad de rotación del eje de entrada. Este dispositivo permite además variar la amplitud de las vibraciones torsionales modificando el ángulo de desalineación de la junta.

2. Se construyó y operó exitosamente un modelo experimental, de características similares a las de una máquina rotante, para la aplicación de la técnica de medición y análisis. Para excitar las vibraciones torsionales, se introdujo una señal de corriente alterna en los campos magnéticos del motor de impulsión del modelo para producir una oscilación del torque motriz con una frecuencia controlada.

3. Se establecieron procedimientos de ensayo adecuados para lograr condiciones de vibraciones torsional de amplitudes crecientes. Estos procedimientos fueron aplicados durante las mediciones.

4. Los resultados del trabajo demostraron, en primer lugar, que la técnica utilizada presenta un alto grado de confiabilidad respecto al análisis de frecuencias. Esto quedó demostrado al detectar correctamente la componente a dos veces la velocidad de giro de la Junta Hooke, y la componente correspondiente a la frecuencia natural del modelo experimental de aplicación. En segundo lugar, se puede decir que la técnica representa

correctamente el incremento de la amplitud de las oscilaciones. Esto fue evidenciado al ver el aumento de las bandas laterales a medida que se aumentaba el ángulo de desalineación de la junta Hooke. También se pudo observar el mismo comportamiento cuando la excitación torsional se acercaba a la frecuencia natural del modelo experimental de aplicación.

5. Quedó probado que es posible utilizar instrumental de uso corriente en la industria para realizar mediciones y análisis de vibraciones torsionales. Un caso donde es posible aplicar esta técnica es en turbogeneradores tales como los de la Central Térmica Luis Piedra Buena [7], ya que por la interacción electromagnética entre la línea eléctrica y el generador, se pueden excitar las frecuencias naturales torsionales del eje debido al fenómeno de resonancia sub-sincrónica.

En trabajos futuros sería importante evaluar técnicas de procesamiento de la señal que permitan obtener la información de amplitud y frecuencia de las vibraciones torsionales cuando la velocidad de rotación del eje varía con el tiempo. Hay una serie de problemas que se producen durante los arranques o paradas de máquinas que requerirían de esta técnica para su adecuado análisis.

## BIBLIOGRAFÍA

1. P. Charlesa, J.K. Sinhaa, F. Gub, L. Lidstonea, A.D. Ball, Detecting the crankshaft torsional vibration of diesel engines for combustion related diagnosis, *Journal of Sound and Vibration*, (2009), 32:11171–1185.
2. Fredrik Ostmann, Hannu T. Toivonen, Torsional system parameter identification of internal combustion engines under normal operation, *Mechanical Systems and Signal Processing*, (2011), 25:1146–1158.
3. S.J. Drew, D.C. Hesterman, B. J. Stone, The torsional excitation of variable inertia effects in reciprocating engines, *Mechanical Systems and Signal Processing*, (1999), 13(1):125-144.
4. V. Hutten, R. Zurowski, M. Hilscher, Torsional inter harmonic interaction study of 75 MW direct driven VSDS motor compressor train for LNG duty, *37th Turbomachinery symposium, Turbomachinery Laboratory, Texas A&M College Station, Texas* (2008).
5. T. Feese, R. Maxfeld, Torsional vibration problem with motor/ID fan system due to PWM variable frequency drive, *Proceedings of the 38<sup>th</sup> Turbomachinery symposium, Turbomachinery Laboratory, Texas A&M College Station*, pp 45-56, Texas (2008).
6. D.H. Baker, Subsynchronous resonance studies and mitigation methods for series capacitor applications, *Power Engineering Society Inaugural Conference and Exposition in Africa*, 2005 IEEE.
7. J.A. Nizovoy, J.L. Alonso, Impacto de los ensayos del TG N°1 de la central Luis Piedrabuena en la identificación de problemas de resonancia subsincrónica, Puerto Iguazú, CIGRÉ, 1991
8. L. Ahlgren, K. Walve, N. Fahlé, S. Karlson, Countermeasures against oscillatory torque stress in large turbogenerators, Sweden, CIGRÉ, 1982.
9. R. Bigret, C.J. Goetzee, D.C. Levy, R.G. Harley, Measuring the torsional modal frequencies of a 900 MW turbogenerator, IEEE, 1986.
10. M.A. Valenzuela, J.M. Bentley, R.D. Lorenz, Evaluation of torsional oscillations in paper machine sections, *IEEE Transactions on Industry Applications*, (2005), 41(2):493-501.
11. P.J.L. Fernandes, Tooth bending fatigue failures in gears, *Engineering Failure Analysis*, (1996), 3(3):219–225.



12. H. Henao, S. H. Kia, G. A. Capolino, Torsional-Vibration Assessment and Gear-Fault Diagnosis in Railway Traction System, *IEEE Transactions On Industrial Electronics*, (2011) 58(5):1707-1717.
13. H. Roy, D. Ghosh, A.C. Pankaj, A.K. Shukla, J. Basu, A Case Study on the Premature Failure of a Cooling Water Pump Shaft, *Journal for Manufacturing Science and Production*, (2011), 9(1-2):99–106.
14. A. Dimagoras, G. Massouros, Torsional vibration of a shaft with a circumferential crack, *Engineering Fracture Mechanics*, (1981), 15(3-4):439-444.
15. Joe Corcoran, John Kocur, Jr., Coupling failure case study: Torsional oscillation trouble on VFD motor driven reciprocating compressor, *37th Turbomachinery Symposium, Turbomachinery Laboratory, Texas A&M College Station*, pp 45-56, Texas (2008).
16. H. Trip, D. Kim, R. Witney, A comprehensive cause analysis of a coupling failure induced by torsional oscillations in a variable speed motor, *Proceedings of the 37th Turbomachinery symposium, Turbomachinery Laboratory, Texas A&M College Station*, pp 17-24, Texas (2008) .
17. C. Harris, A. Piersol, *Shock and Vibration Handbook*, Fifth Edition, McGraw-Hill, New York, 2002.
18. D. J. Sheppard, Torsional Vibrations Resulting from Adjustable Frequency AC Drives, *IEEE Transactions On Industry Applications*, (1988), 24(5):812-817.
19. D.P. Walstrom, Measurement of operating stresses in an aircraft engine crankshaft under power, *National Advisory Committee for Aeronautics, Advance restricted Report E5B01, Aircraft Engine Laboratory*, (1948)
20. J.C. Wachell, J. Szenasi, Analysis of torsional vibration in rotating systems, *Proceedings of the 22th Turbomachinery symposium, Turbomachinery Laboratory, Texas A&M College Station*, pp 213-238, Texas (1993).
21. R. Stansfield, The Measurement of Torsional Vibrations, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, (1942), 48(1):175-193.
22. T. Feese, Ch. Hill, Prevention of torsional vibration problems in reciprocating machinery, *Proceedings of the 38th Turbomachinery symposium, Turbomachinery Laboratory, Texas A&M College Station*, pp 213-238, Texas (2009).
23. S.Rothberg, J. Bell, Rotational vibration Measurements Using Laser Doppler Vibrometry Comprehensive Theory and Practical Application, *Journal of Sound and vibration*, (2000), 238(4): 673-690.

24. T. J. Milers, M. Lucas, N. A. Halliwell, S. J. Rothberg, Torsional and Bending vibration measurement on Rotors Using Laser Technology, *Journal of Sound and vibration*, (1999), 226(3): 441-467.
25. A. Muszinska, *Rotordynamics*, Taylor & Francis, (2005).
26. John M. Vance, *Rotordynamics of turbomachinery*, John Wiley & Sons, 1988.
27. G. Genta, *Dynamics of Rotating Systems*, Springer, (2005).
28. G. Genta, *Vibrations of structures and Machines*, Springer, (1995).
29. W. Ker Wilson, *Practical solution of torsional vibration problems, Volume One*, John Wiley & Sons, 1956.
30. W. Ker Wilson, *Practical solution of torsional vibration problems, Volume Two*, John Wiley & Sons, 1956.



## APÉNDICE A

### Teoría del movimiento de la junta Hooke

En la Figura 35 se muestra un esquema de la junta Hooke que consiste en dos orquillas, una montada sobre el árbol impulsor (de entrada o motriz) y la otra sobre el impulsado (salida). Estas horquillas son conectadas a una cruz con brazos a  $90^\circ$ , las cuales pueden girar libremente alrededor de los ejes de la cruz.

En el estudio que continúa se supone que el eje impulsor (con su horquilla) gira a velocidad  $\omega$  constante y que el eje longitudinal del árbol impulsado, está desalineado formando un ángulo  $\alpha$  con el eje del árbol impulsor y que los ejes se interceptan en el centro de la cruz.

Como consecuencia de la desalineación  $\alpha$ , el árbol impulsado rota con una velocidad angular  $\omega_o$  que varía periódicamente, y se determina de la siguiente manera:

A la izquierda en la Figura 37 tenemos una vista en planta del mecanismo y a la derecha una vista mirando desde el árbol impulsor en la dirección  $X$ , así por ejemplo  $a$  y  $a'$  son las extremidades de la horquilla del eje impulsor que está situado en un plano horizontal y,  $d$  y  $d'$  son las extremidades de la horquilla impulsada que están en un plano vertical; para esta configuración particular mostrada en la figura.

Si el movimiento de las extremidades de las horquillas son proyectadas sobre un plano perpendicular al eje del árbol impulsor, las extremidades del eje impulsor describen un círculo mientras que las del eje impulsado describen una elipse; con su eje mayor a lo largo de  $d-d'$ . Si la horquilla impulsora se mueve un ángulo  $\theta$ , por ejemplo desde  $d$  a  $b$ , esta es la proyección de ángulo rotado por el árbol impulsado pero no el ángulo verdadero.

Para obtener el ángulo verdadero, dibujamos una línea que pase por  $b$  paralela a  $o-a'$  la cual corta la figura circular de la horquilla del eje impulsor en  $c$ . Luego  $\beta = d-o-c$  es el ángulo verdadero que rota el árbol impulsado, ya que  $ec$  es la verdadera distancia que movió la horquilla impulsada mientras que  $oc$  es el radio del círculo que el describe. Luego del

diagrama de la figura tenemos:

$$\tan \beta = \frac{ec}{oe} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{eb}{oe}$$

por lo tanto:

$$\frac{\tan \beta}{\tan \theta} = \frac{ec}{eb} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\tan \theta = \cos \alpha = \tan \beta$$

Diferenciando con respecto al tiempo y reagrupando tenemos:

$$\frac{d\beta}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{d\beta}{d\theta} = \frac{\omega_o}{\omega_i} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \theta} \quad (\text{A.1})$$

donde:

$\omega_i$  es la velocidad angular (constante) del árbol impulsor.

$\omega_o$  es la velocidad angular instantánea del árbol impulsado cuando la horquilla del árbol impulsor está en un ángulo  $\theta$  de lo posición mostrada en la Figura 35.

$\alpha$  es el ángulo de inclinación entre los ejes de los árboles.

La ecuación (A.1) muestra que para un dado valor de  $\alpha$ , la velocidad angular del árbol impulsado tiene un valor máximo ( $\omega_i \cos \alpha$ ) para valores de  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ , etc., es decir, cuando la horquilla impulsora está en el plano que contiene al eje longitudinal del árbol impulsor e impulsado. El valor mínimo de la velocidad angular del árbol impulsado ( $\omega_i \cos \alpha$ ) ocurre cuando  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$ , etc., es decir, cuando la horquilla del eje impulsor está a  $90^\circ$  del plano que contiene los ejes longitudinales de los dos árboles.

Es también de interés notar que las velocidades angulares de ambos árboles son iguales ( $\omega_i = \omega_o$ ) cuando:

$$\tan \theta = \sqrt{\cos \alpha}$$

para valores de  $\alpha$  hasta  $20^\circ$  el valor de  $\theta$  para que  $\omega_i = \omega_o$  varía de  $44^\circ$  a  $45^\circ, 134^\circ$  a  $135^\circ$ -, etc.

Como se expresó anteriormente el eje impulsado posee una velocidad angular que varía periódicamente por lo tanto se podrá descomponer en componentes armónicas de frecuencia múltiplo de la fundamental (velocidad angular de entrada).

La ecuación (A.1) se puede escribir como

$$\frac{\omega_o}{\omega_i} = \frac{d\beta}{d\theta} = \frac{H}{1 - K \cos 2\theta} \quad (\text{A.2})$$

donde

$$H = \frac{\cos \alpha}{1 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha} \quad (\text{A.3})$$

$$K = \frac{\text{sen}^2 \alpha}{2 - \text{sen}^2 \alpha} \quad (\text{A.4})$$

Expandiendo (A.2) con el Teorema del binomio, tenemos:

$$\frac{d\beta}{d\theta} = H(1 + K \cos 2\theta + K^2 \cos^2 2\theta + K^3 \cos^3 2\theta + \dots) \quad (\text{A.5})$$

y para expresarlas en términos de múltiplos de  $\theta$  con la ayuda del Teorema de Moivre:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\theta} = H \left[ \left( 1 + \frac{K^2}{2} + \frac{3K^2}{8} + \dots \right) + \left( K + \frac{3K^3}{4} + \dots \right) \cos 2\theta + \right. \\ \left. + \left( \frac{K^2}{2} + \frac{K^4}{2} + \dots \right) \cos 4\theta + \left( \frac{K^3}{4} + \dots \right) \cos 6\theta + \left( \frac{K^4}{8} \right) \cos 8\theta \right] \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

De (A.4) tenemos que

$$\alpha = 2K(1 + K) \quad (\text{A.7})$$

luego de (A.3)

$$H = \sqrt{(1 + K^2)} \quad (\text{A.8})$$

y expandiéndolo por el Teorema del binomio nos queda

$$H = \left( 1 - \frac{K^2}{2} - \frac{K^4}{8} - \dots \right) \quad (\text{A.9})$$

Luego reemplazando y trabajando sobre (A.6)

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\theta} = \left[ 1 + K \left( 1 + \frac{K^2}{4} + \dots \right) \cos 2\theta + K^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{K^2}{4} + \dots \right) \cos 4\theta + \right. \\ \left. + K^3 \left( \frac{1}{4} + \dots \right) \cos 6\theta + K^4 \left( \frac{1}{8} + \dots \right) \cos 8\theta + \dots \right] \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

$K$  es siempre menor que 1, y para ángulos de  $\alpha$  hasta  $30^\circ$  es menor que 0,15, luego se comente muy poco error si se desprecia  $K^3$  y valores de  $K$  con potencias mayores, en cuyo caso la expresión se reduce a:

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \left[ 1 + K \cos 2\theta + \frac{K^2}{2} \cos 4\theta \right] \quad (\text{A.11})$$

$\frac{d\beta}{d\theta}$  es la variación instantánea de la relación de velocidades.

Para hallar la amplitud de la variación torsional del eje impulsado, integramos la ecuación (A.11) y le restamos la componente permanente  $\theta$  de la fluctuación  $\beta$

$$\theta_r = (\beta - \theta) = \left[ \frac{K}{2} \text{sen} 2\theta + \frac{K^2}{8} \text{sen} 4\theta + \dots \right] \quad (\text{A.12})$$

Esta última ecuación nos muestra que la variación de la velocidad angular del eje de salida consiste casi totalmente en una componente de segundo orden (el doble de la velocidad de entrada o dos ciclos por revolución) de amplitud  $\pm \frac{1}{2} K$  rad y una pequeña componente de cuarto orden (4 veces la velocidad de entrada) de amplitud  $\pm \frac{1}{8} K^2$  rad, pero para valores tan grandes de  $\alpha$  como  $30^\circ$  la amplitud de esta componente toma valores que son aproximadamente 1/30 avos de la componente de segundo orden, por lo tanto las amplitudes de las componentes de 6to, 8vo, etc. orden son completamente insignificantes.

Como este es un dispositivo que se utiliza para la calibración y existen instrumentos que miden velocidad y aceleración de la variación, veremos cómo se pueden calcular estos parámetros.

Reemplazando  $\theta = \omega_i t$  en (A.12) y derivando con respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{\theta} = \text{velocidad} = \omega_i \left[ K \cos 2\theta + \frac{K^2}{2} \cos 4\theta + \dots \right] \quad (\text{A.13})$$

Esta ecuación muestra que la velocidad de oscilación del árbol impulsado consiste casi totalmente en una variación entre un máximo y un mínimo de una amplitud  $\pm \omega_i K$  con una variación de segundo orden, ya que la componente de cuarto orden posee una amplitud, aún para ángulos de desalineación del orden de  $\alpha=30^\circ$ , cuyo valor es 1/15 avos del valor de la segunda.

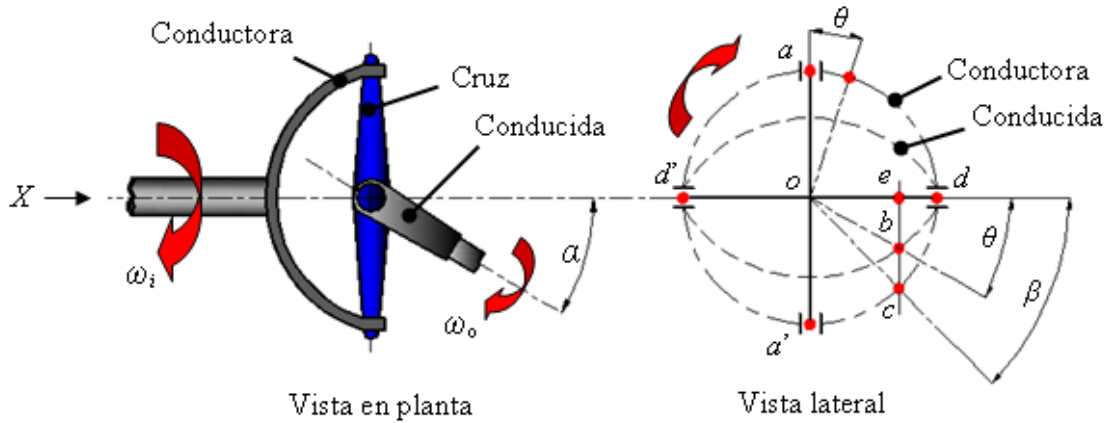
Para calcular la aceleración, después de reemplazar  $\theta = \omega_i t$  en (A.13) y derivar con respecto al tiempo se obtiene:

$$\ddot{\theta} = \text{aceleración} = -\omega_i^2 \left[ 2K \text{sen} 2\theta + 2K^2 \text{sen} 4\theta + \dots \right] \quad (\text{A.14})$$

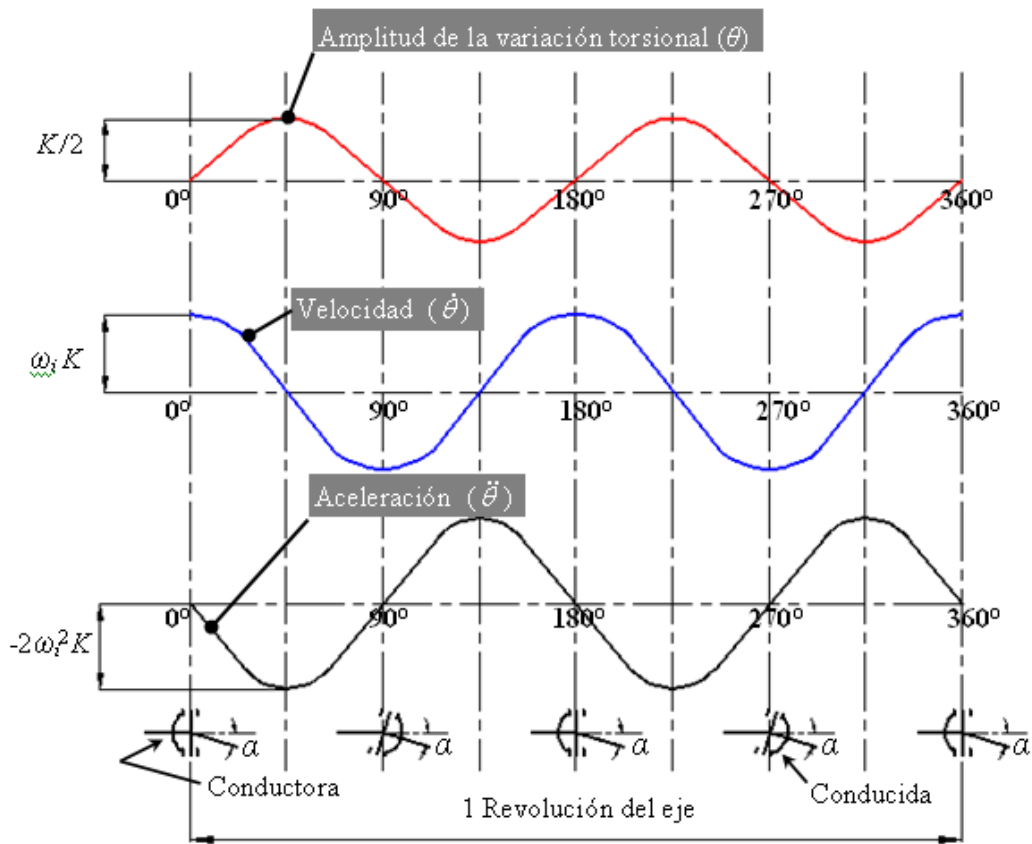
Esta ecuación muestra que la aceleración de la oscilación es casi totalmente un efecto de segundo orden de amplitud  $\pm 2\omega_i^2 K$  y la componente de cuarto orden toma un valor de aproximadamente 1/7 de la componente de segundo orden para desalineaciones tan grandes como  $30^\circ$ .

La relación entre amplitud, velocidad y aceleración de la variación del árbol impulsado a través de una junta Hooke son mostrados en la Figura 38. En el gráfico se muestra solamente la componente de segundo orden, ya que como se mencionó anteriormente, la de 4to y las de mayor orden son insignificantes.

En la Tabla 5 se muestran los principales valores para distintos ángulos de desalineación.



**Figura 37- Esquema de la Junta Hooke**



**Figura 38 – Relación entre amplitud, velocidad y aceleración del árbol impulsado por la junta Hooke**



**Tabla 5 – Amplitudes de las oscilaciones para diferentes ángulos de desalineación de la junta Hooke.**

$\alpha$ [°]	$K$	Máxima amplitud de la oscilación torsional ( $\theta$ )		Máxima amplitud de la velocidad torsional ( $\dot{\theta}$ )		Máxima amplitud de la aceleración torsional ( $\ddot{\theta}$ )	
		Componente 2º orden	Componente 4º orden	Componente 2º orden	Componente 4º orden	Componente 2º orden	Componente 4º orden
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000 $\omega_i$	0,00000 $\omega_i$	0,00000 $\omega_i^2$	0,00000 $\omega_i^2$
2,5	0,00095	0,02727	0,00001	0,00095 $\omega_i$	0,00000 $\omega_i$	0,00190 $\omega_i^2$	0,00000 $\omega_i^2$
5,0	0,00381	0,10921	0,00010	0,00381 $\omega_i$	0,00001 $\omega_i$	0,00762 $\omega_i^2$	0,00003 $\omega_i^2$
7,5	0,00859	0,24614	0,00053	0,00859 $\omega_i$	0,00004 $\omega_i$	0,01718 $\omega_i^2$	0,00015 $\omega_i^2$
10,0	0,01531	0,43854	0,00168	0,01531 $\omega_i$	0,00012 $\omega_i$	0,03062 $\omega_i^2$	0,00047 $\omega_i^2$
12,5	0,02398	0,68712	0,00412	0,02398 $\omega_i$	0,00029 $\omega_i$	0,04797 $\omega_i^2$	0,00115 $\omega_i^2$
15,0	0,03465	0,99276	0,00860	0,03465 $\omega_i$	0,00060 $\omega_i$	0,06931 $\omega_i^2$	0,00240 $\omega_i^2$
17,5	0,04735	1,35656	0,01606	0,04735 $\omega_i$	0,00112 $\omega_i$	0,09471 $\omega_i^2$	0,00449 $\omega_i^2$
20,0	0,06212	1,77966	0,02764	0,06212 $\omega_i$	0,00193 $\omega_i$	0,12424 $\omega_i^2$	0,00772 $\omega_i^2$
22,5	0,07901	2,26341	0,04471	0,07901 $\omega_i$	0,00312 $\omega_i$	0,15802 $\omega_i^2$	0,01248 $\omega_i^2$
25,0	0,09806	2,80921	0,06887	0,09806 $\omega_i$	0,00481 $\omega_i$	0,19612 $\omega_i^2$	0,01923 $\omega_i^2$
27,5	0,11933	3,41847	0,10198	0,11933 $\omega_i$	0,00712 $\omega_i$	0,23865 $\omega_i^2$	0,02848 $\omega_i^2$
30,0	0,14286	4,09255	0,14616	0,14286 $\omega_i$	0,01020 $\omega_i$	0,28571 $\omega_i^2$	0,04082 $\omega_i^2$

Nota:  $\omega_i = 2\pi N_i/60$  donde  $N_i$  = velocidad del eje conductor [r.p.m.]

## APÉNDICE B

*Tabla 6 – Funciones de Bessel de orden cero y de primer orden*

$\beta$	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$
0,0	1,0000	0,0000
0,1	0,9975	0,0499
0,2	0,9900	0,0995
0,3	0,9776	0,1483
0,4	0,9604	0,1960
0,5	0,9385	0,2423
0,6	0,9120	0,2867
0,7	0,8812	0,3290
0,8	0,8463	0,3688
0,9	0,8075	0,4059
1,0	0,7652	0,4401
1,0	0,7196	0,4709
1,2	0,6711	0,4983
1,3	0,6201	0,5220
1,4	0,5669	0,5419
1,5	0,5118	0,5579
1,6	0,4554	0,5699
1,7	0,3980	0,5778
1,8	0,3400	0,5815
1,9	0,2818	0,5812
2,0	0,2239	0,5767
2,1	0,1666	0,5683
2,2	0,1104	0,5560
2,3	0,0555	0,5399