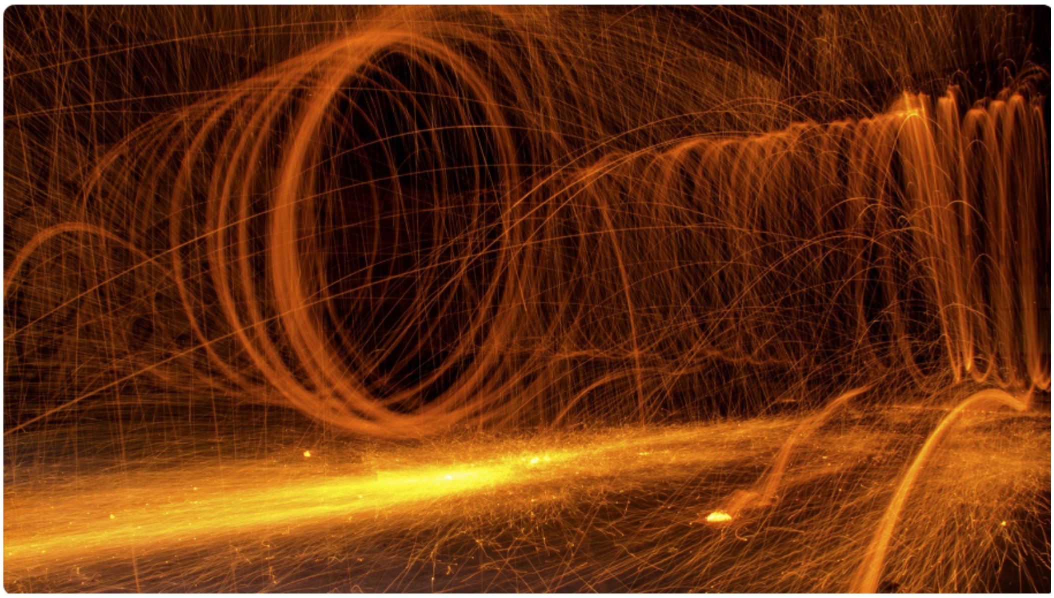
PROBLEMAS RESUELTOS DE TRANSMISIÓN DE CALOR



Mª Isabel Lamas Galdo

UNIVERSIDADE DA CORUÑA

PROBLEMAS RESUELTOS DE TRANSMISIÓN DE CALOR
Autoría de: Mª Isabel Lamas Galdo

Idioma de la obra: Español
Nº de páginas: 105 pp.
Índice: ii

Depósito legal: C 287-2022
ISBN: 978-84-9749-835-7

DOI: https://doi.org/10.17979/spudc.9788497498357

Edición: Universidade da Coruña, Servizo de Publicacións <http://www.udc.gal/publicacions>

ÍNDICE

PRÓLOGO

El presente texto tiene como objetivo servir de apoyo a las asignaturas Transmisión de Calor y Frío Industrial/Refrigeración de los grados en Ingeniería Naval y Oceánica, Ingeniería Mecánica e Ingeniería en Tecnologías Industriales que se imparten en la Escuela Politécnica Superior de la Universidade da Coruña. Su contenido también puede ser usado en asignaturas relacionadas con la transmisión de calor en otros grados y universidades.

El libro consta básicamente de problemas resueltos procedentes del material utilizado para docencia, así como de exámenes realizados a lo largo de varios años. Esta colección de problemas aborda una visión global de la transmisión de calor, abarcando desde los fundamentos hasta los modos de transferencia de calor: conducción, convección y radiación, así como aplicaciones prácticas.

NOMENCLATURA

Símbolo	Descripción	Unidades
c	Calor específico	J/kg·K
C	Capacidad térmica	W/K
A	Área	m^2
D	Diámetro	m
e	Espesor	m
E	Energía	J
g	Aceleración de la gravedad o energía libre de Gibbs	m/s^2 o J/kg
h	Coeficiente de transferencia de calor por convección o entalpía	$W/m^2 \cdot K$ o kJ/kg
$\bar{h}$	Coeficiente de transferencia de calor por convección promedio	$W/m^2 \cdot K$
h_{lv}	Calor latente de evaporación	J/kg·K
I	Intensidad	A
k	Conductividad térmica	W/m·K
m	Masa	kg
$\dot{m}$	Caudal másico	kg/s
p	Presión	Pa
p	Perímetro	m
Q	Calor	J
$\dot{Q}$	Tasa de transferencia de calor	W
$\dot{q}'$	Tasa de transferencia de calor por unidad de longitud	W/m
$\dot{q}''$	Tasa de transferencia de calor por unidad de área	W/m^2
R	Radio o resistencia térmica	m o W/K
t	Tiempo o espesor de aleta	s o m
T	Temperatura	K o ºC
$\bar{T}$	Temperatura promedio	K o ºC
u	Velocidad	m/s
W	Trabajo	J
$\dot{W}$	Potencia	W

Parámetros adimensionales

Bi	Número de Biot
Fo	Número de Fourier
Gr	Número de Grashof
Gz	Número de Graetz
Ja	Número de Jacob
Nu	Número de Nusselt
$\overline{Nu}$	Número de Nusselt promedio
Pr	Número de Prandtl
Ra	Número de Rayleigh
Re	Número de Reynolds
Pe	Número de Péclèt

Símbolos griegos

α	Difusividad térmica o absortividad	m^2/s o -
ε	Emisividad	-
η	Eficiencia	-
θ	Temperatura adimensional	-
λ	Autovalor	rad
μ	Viscosidad dinámica	Pa·s
ρ	Densidad	kg/m^3
σ	Tensión superficial o constante de Stephan-Boltzmann	N/m·K o $W/m^2 \cdot K^4$
ν	Viscosidad cinemática	m^2/s

Subíndices

alr	Alrededores
cond	Conducción
conv	Convección
D	Diámetro
f	Película (film)
gen	Generación
i	Interno
L	Lontigud
m	Promedio
max	Máximo
min	Mínimo
rad	Radiación

TEMA 1

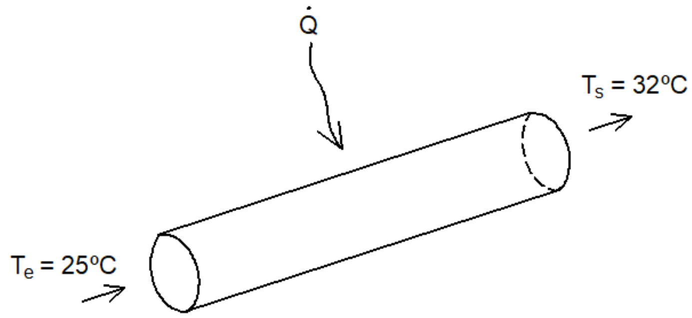
INTRODUCCIÓN A LA TRANSMISIÓN DE CALOR

Problema 1.1

Por el interior de un conducto caliente fluyen 0,3 kg/s de aire, el cual entra a 25 ºC y sale a 32 ºC. Para simplificar los cálculos asumir que el calor específico del aire es de c_p = 1 kJ/kg·K. Calcular la tasa de transferencia de calor que recibe el aire desde la entrada hasta la salida del conducto en estado estacionario.

Solución:

Aplicando balance de energía al sistema abierto que constituye el conducto:



$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} + \sum_e \dot{m}_e (h_e + v_e^2/2 + gz_e) - \sum_s \dot{m}_s (h_s + v_s^2/2 + gz_s)$$

En estado estacionario, con potencia nula y despreciando variaciones de energía cinética y potencial:

$$\cancel{\frac{dE}{dt}} = \dot{Q} - \cancel{\dot{W}} + \sum_e \dot{m}_e (h_e + \cancel{v_e^2/2} + \cancel{gz_e}) - \sum_s \dot{m}_s (h_s + \cancel{v_s^2/2} + \cancel{gz_s})$$

$$0 = \dot{Q} + \dot{m}(h_e - h_s)$$

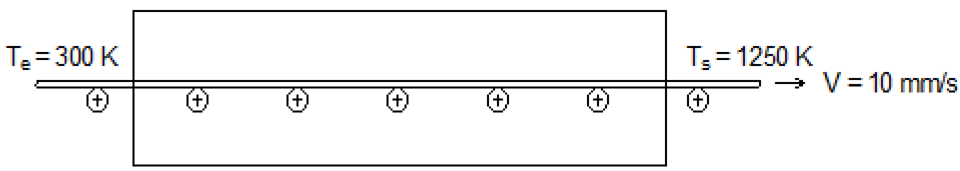
Asumiendo el aire como gas ideal con c_p constante, $h_e - h_s = c_p(T_e - T_s)$, por tanto:

$$0 = \dot{Q} + \dot{m} c_p (T_e - T_s)$$

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_s - T_e) = 0{,}3 \cdot 1 \cdot (32 - 25) = 2{,}1 \text{ kW}$$

Problema 1.2

En una etapa de un proceso de recocido, una hoja de acero inoxidable 304 (ρ = 7900 kg/m^3, c = 578 J/kg·K) se lleva de 300 K a 1250 K conforme pasa a una velocidad de 10 mm/s a través de un horno calentado eléctricamente. El espesor y ancho de la hoja son 8 mm y 2 m (dimensión perpendicular al papel), respectivamente. Calcular la potencia eléctrica que se requiere suministrar al horno asumiendo que en estado estacionario un 15% de esa potencia se pierde como disipación de calor hacia el exterior.



Solución:

Aplicando balance de energía a este sistema abierto:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} + \sum_e \dot{m}_e (h_e + v_e^2/2 + gz_e) - \sum_s \dot{m}_s (h_s + v_s^2/2 + gz_s)$$

En estado estacionario, con potencia nula y despreciando variaciones de energía cinética y potencial:

$$\cancel{\frac{dE}{dt}} = \dot{Q} - \cancel{\dot{W}} + \sum_e \dot{m}_e (h_e + \cancel{v_e^2/2} + \cancel{gz_e}) - \sum_s \dot{m}_s (h_s + \cancel{v_s^2/2} + \cancel{gz_s})$$

$$0 = \dot{Q} + \dot{m}(h_e - h_s)$$

Si las pérdidas representan el 15% de la potencia total resulta:

$$0 = \dot{Q}_{elec} - 0{,}15\dot{Q}_{elec} + \dot{m}(h_e - h_s)$$

Como el calor específico es constante, se cumple que $h_e - h_s = c(T_e - T_s)$. Por tanto:

$$0 = \dot{Q}_{elec} - 0{,}15\dot{Q}_{elec} + \dot{m}c(T_e - T_s)$$

$$0 = 0{,}85\dot{Q}_{elec} + \rho Vewc(T_e - T_s)$$

siendo ρ la densidad, V la velocidad, e el espesor y w el ancho. Sustituyendo valores resulta:

$$\dot{Q}_{elec} = \frac{7900 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}008 \cdot 2 \cdot 578 \cdot (1250 - 300)}{0{,}85} = 816544 \text{ W}$$

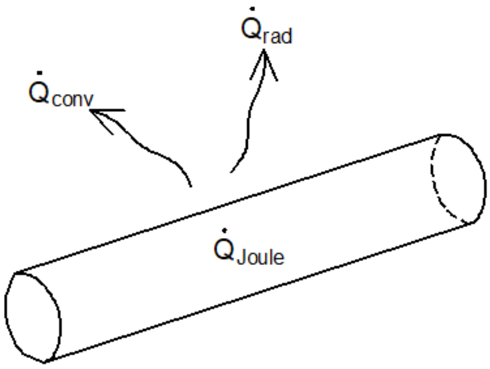
Problema 1.3

Por un cable desnudo de cobre de propiedades k = 395 W/m·K y α = 10^{-4} m²/s, diámetro D = 1,4 mm y resistencia eléctrica por unidad de longitud R´ = 0,01 Ω/m se transmite una intensidad de I = 150 A debido a una avería eléctrica. El ambiente y alrededores se encuentran a 20 °C y el coeficiente de transferencia de calor combinado convección-radiación linealizado es 25 W/m²·K. Asumir que la temperatura del cable es uniforme para cada instante de tiempo y que inicialmente se encuentra a 20 ºC. Sabiendo que la temperatura de fusión del cobre es de 1080 ºC, calcular el tiempo que tarda en fundirse el cable.

NOTA: Por efecto Joule $\dot{q}'_{Joule} = I^2R'$ (W/m).

Solución:

Aplicando balance de energía al sistema cerrado que constituye el cable:



$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}$$

Con potencia nula:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \cancel{\dot{W}}$$

La energía total es la suma de la contribución de la energía interna, cinética, potencial y otras que no se tratarán en el presente texto. Despreciando variaciones de energía cinética y potencial, la energía total resulta:

$$E = me = m(u + \cancel{v^2/2} + \cancel{gz}) = mu$$

Por tanto, el balance de energía queda:

$$\frac{d(mu)}{dt} = \dot{Q}$$

Teniendo en cuenta el calor por radiación, convección y la generación debida a efecto Joule, resulta:

$$\frac{d(mu)}{dt} = -h_{conv-rad}A(T - T_{\infty}) + I^2R^{'}L$$

Nótese que en la expresión anterior se ha tenido en cuenta el coeficiente de transferencia de calor combinado convección-radiación linealizado, $h_{conv\text{-}rad}$, y que el calor debido a convección + radiación se ha puesto negativo porque es calor disipado por el sistema. Haciendo operaciones:

$$\frac{d(\rho\forall cT)}{dt} = -h_{conv-rad}\pi DL(T - T_{\infty}) + I^2R^{'}L$$

siendo ρ la densidad y el $\forall$ volumen.

$$\rho\forall c\frac{dT}{dt} = -h_{conv-rad}\pi DL(T - T_{\infty}) + I^2R^{'}L$$

$$\rho\frac{\pi D^2\cancel{L}}{4}c\frac{dT}{dt} = -h_{conv-rad}\pi D\cancel{L}(T - T_{\infty}) + I^2R^{'}\cancel{L}$$

$$\frac{\rho\dfrac{\pi D^2}{4}c}{-h_{conv-rad}\pi D(T-T_\infty)+I^2R'}\frac{dT}{dt}=1$$

$$\int_{20}^{1080}\frac{\rho\dfrac{\pi D^2}{4}c}{-h_{conv-rad}\pi D(T-T_\infty)+I^2R'}dT=\int_0^t dt \quad \rightarrow \quad t=40{,}46\ \mathrm{s}$$

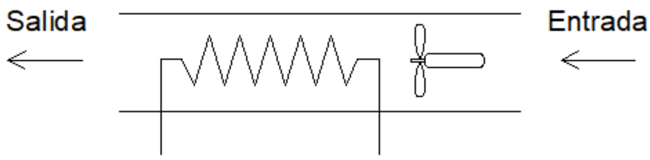
Al resolver la ecuación anterior tener en cuenta que $\alpha = k/(\rho c)$.

Problema 1.4

Un secador de pelo se puede idealizar como un conducto circular por el que un ventilador dirige aire ambiente que se calienta al pasar sobre una resistencia eléctrica. En estado estacionario, un secador opera con una potencia eléctrica de 500 W y calienta aire desde una temperatura ambiente de 20 ºC hasta 45 ºC.

a) Calcular el flujo másico de aire. Asumir que para el aire c_p = 1000 J/kg·K y despreciar las pérdidas de calor hacia el exterior.

b) Considerar un secador con un conducto de 150 mm de largo y 70 mm de diámetro externo con una emisividad superficial de 0,8. Si el coeficiente de transferencia de calor con el aire ambiente exterior es de 4 W/m^2·K y tanto la temperatura del aire exterior como de los alrededores es de 20 ºC, calcular las pérdidas de calor hacia el exterior del conducto y confirmar que son efectivamente despreciables. Para simplificar los cálculos, asumir que la superficie exterior del conducto en contacto con el exterior se encuentra a una temperatura uniforme de 30 ºC.



Solución apartado a:

Aplicando balance de energía a este sistema abierto:

$$\frac{dE}{dt}=\dot{Q}-\dot{W}+\sum_e \dot{m}_e(h_e+v_e^2/2+gz_e)-\sum_s \dot{m}_s(h_s+v_s^2/2+gz_s)$$

En estado estacionario y despreciando variaciones de energía cinética y potencial:

$$\cancel{\frac{dE}{dt}}=\dot{Q}-\dot{W}+\sum_e \dot{m}_e(h_e+\cancel{v_e^2/2}+\cancel{gz_e})-\sum_s \dot{m}_s(h_s+\cancel{v_s^2/2}+\cancel{gz_s})$$

siendo $\dot{Q}-\dot{W}=\dot{Q}_{resistencia}-\dot{Q}_{pérdidas}-\dot{W}_{ventilador}$. Según el enunciado, en el apartado a se desprecian las pérdidas de calor hacia el exterior, con lo cual resulta $\dot{Q}-\dot{W}=$ 500 W, por tanto:

$$0=500+\dot{m}(h_e-h_s)$$

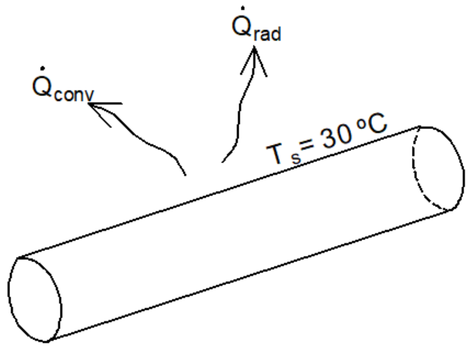
Como c_p es constante:

$$0=500+\dot{m}c_p(T_e-T_s)$$

$$0 = 500 + \dot{m} \cdot 1000 \cdot (20 - 45) \quad \rightarrow \quad \dot{m} = 0{,}02 \text{ kg/s}$$

Solución apartado b:

Se procederá a calcular las pérdidas de calor y verificar que son considerablemente menores que 500 W:



$$\dot{Q}_{pérdidas} = \dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_{rad} = hA(T_s - T_\infty) + \varepsilon A\sigma(T_s^4 - T_{alr}^4) = h\pi DL(T_s - T_\infty) + \varepsilon\pi DL\sigma(T_s^4 - T_{alr}^4) =$$

$$= 4 \cdot \pi \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}15 \cdot (T_s - T_\infty) + 0{,}8 \cdot \pi \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}15 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}(303^4 - 293^4) =$$

$$= 1{,}31 + 1{,}58 = 2{,}89 \text{ W} \ll 500 \text{ W}$$

Nótese que en la expresión anterior, se han indicado las temperaturas en grados kelvin al calcular $T_s^4 - T_{alr}^4$.

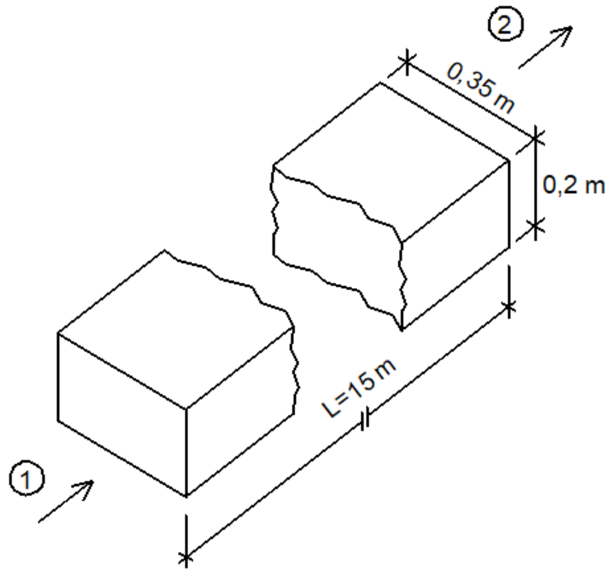
Como se puede observar, al calcular las pérdidas de calor resulta 2,89 W, considerablemente menor que 500 W. Por tanto, efectivamente las pérdidas de calor son despreciables.

Problema 1.5

Por un conducto de aire acondicionado de 15 m de longitud, sección transversal exterior 200×350 mm y emisividad superficial 0,5 fluyen 0,3 kg/s de aire. Exteriormente al conducto hay aire ambiente cuyo coeficiente de transferencia de calor por convección es de 4 $W/m^2 \cdot K$ y tanto la temperatura del aire ambiente exterior como de los alrededores es de 24 ºC. Para simplificar los cálculos asumir que el calor específico a presión constante del aire es de 1 kJ/kg·K y que en estado estacionario la superficie exterior del conducto en contacto con el exterior se encuentra a una temperatura promedio de 22 ºC que, para simplificar los cálculos, se puede asumir uniforme. Sabiendo que el aire entra en el conducto a 12,5 ºC, calcular la temperatura del aire a la salida del conducto.

Solución:

Llamando 1 a la entrada, 2 a la salida y aplicando balance de energía a este sistema abierto:



$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} + \sum_e \dot{m}_e(h_e + v_e^2/2 + gz_e) - \sum_s \dot{m}_s(h_s + v_s^2/2 + gz_s)$$

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} + \sum_1 \dot{m}_1(h_1 + v_1^2/2 + gz_1) - \sum_2 \dot{m}_2(h_2 + v_2^2/2 + gz_2)$$

En estado estacionario, potencia nula y despreciando variaciones de energía cinética y potencial:

$$\cancel{\frac{dE}{dt}} = \dot{Q} - \cancel{\dot{W}} + \sum_1 \dot{m}_1(h_1 + \cancel{v_1^2/2} + \cancel{gz_1}) - \sum_2 \dot{m}_2(h_2 + \cancel{v_2^2/2} + \cancel{gz_2})$$

$$0 = \dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_{rad} + \dot{m}(h_1 - h_2)$$

Asumiendo el aire como gas ideal con c_p constante, $h_1 - h_2 = c_p(T_1 - T_2)$, por tanto:

$$0 = \dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_{rad} + \dot{m}c_p(T_1 - T_2)$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes para convección y radiación resulta:

$$0 = hA(T_\infty - T_s) + \sigma\varepsilon A(T_\infty^4 - T_s^4) + \dot{m}c_p(T_1 - T_2) \quad \rightarrow \quad T_2 = 13{,}26\ ºC$$

siendo el área de transferencia de calor: $A = 2\cdot(0{,}2 + 0{,}35)\cdot 15 = 16{,}5\ m^2$.

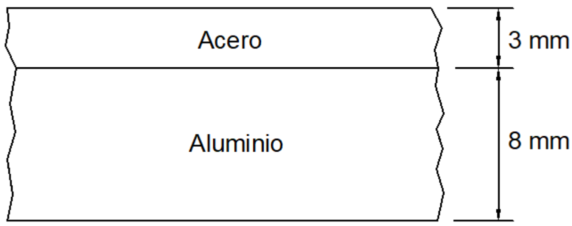
Nótese que en la expresión anterior se ha puesto como negativo el calor disipado por el sistema.

TEMA 2

CONDUCCIÓN DE CALOR UNIDIMENSIONAL EN ESTADO ESTACIONARIO

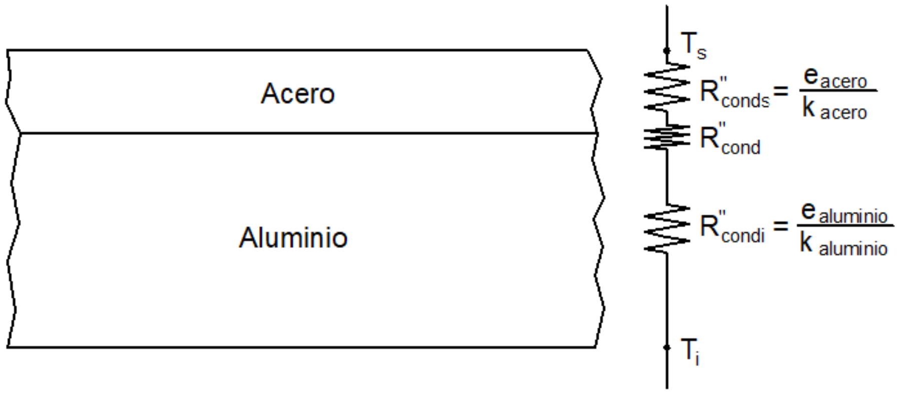
Problema 2.1

Una placa de acero de espesor 3 mm y conductividad térmica 61 W/m·K se sitúa sobre una placa de aluminio de 8 mm de espesor y conductividad térmica 238 W/m·K. La resistencia de contacto entre ambas placas es de 10^{-5} m^2·K/W. La superficie superior del acero se encuentra a 35 ºC, mientras que la superficie inferior del aluminio a 30 ºC. Calcular el salto térmico a través de la resistencia de contacto.



Solución:

Se resolverá aplicando analogía eléctrica. El circuito eléctrico análogo es el siguiente:



La tasa de transferencia de calor por unidad de área viene dada por:

$$\dot{q}'' = \frac{T_s - T_i}{R''_{conds} + R''_{tc} + R''_{condi}}$$

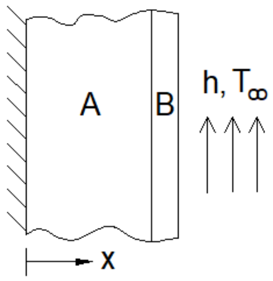
A su vez, la tasa de transferencia de calor por unidad de área también se puede expresar como:

$$\dot{q}'' = \frac{\Delta T_{tc}}{R''_{tc}}$$

Igualando se obtiene que $\dot{q}'' = 53883$ W/m² y el salto térmico a través de la resistencia de contacto $\Delta T_{tc} = 0{,}54$ ºC.

Problema 2.2

Una pared plana se compone de dos materiales. El material A tiene una generación de calor uniforme de 10^6 W/m³, conductividad térmica 50 W/m·K y espesor 50 mm. El material B no tiene generación y su conductividad y espesor son 20 W/m·K y 10 mm, respectivamente. La superficie interior del material A está bien aislada, mientras que la superficie exterior del material B se expone a un ambiente convectivo a T_∞ = 25 ºC y h = 500 W/m²·K. En estado estacionario y despreciando la transferencia de calor por radiación, determinar las temperaturas T (x = 0), T (x = 50 mm) y T (x = 60 mm).



Solución:

Solamente hay conducción de calor a lo largo del eje x.

Cálculo de T(x = 60 mm = 0,06 m):

Balance de energía alrededor del material B: $\dot{q}'' = h[T(x = 0,06) - T_\infty]$

Balance de energía alrededor del material A: $\dot{q}'' = \dot{q}'''_{gen} e_A = 50000 \ \ W/m^2$

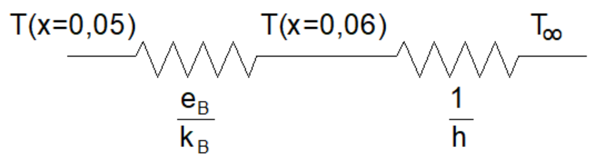
Por tanto:

$$h[T(x = 0,06) - T_\infty] = \dot{q}'''_{gen} e_A \quad \rightarrow \quad T(x = 0,06) = 125 \ ^oC$$

Cálculo de T(x = 50 mm = 0,05 m):

$$\dot{q}'' = k_B \frac{T(x = 0,05) - T(x = 0,06)}{e_B} \quad \rightarrow \quad T(x = 0,05) = 150 \ ^oC$$

Otra forma de calcular T(x = 0,05) sería aplicando analogía eléctrica a partir del material B, nótese que en el material A no se puede aplicar analogía eléctrica debido a que hay generación de calor:



$$\dot{q}'' = \frac{T(x = 0,05) - T_\infty}{\frac{e_B}{k_B} + \frac{1}{h}} \quad \rightarrow \quad T(x = 0,05) = 150 \ ^oC$$

Cálculo de T(x = 0):

Como no se puede aplicar analogía eléctrica al material A, se calcula T(x = 0) aplicando la ecuación general de conducción del calor. El subíndice A de T_A se indica para referirse a la temperatura del sólido A:

$$\alpha\nabla^2 T_A + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

En estado estacionario, coordenadas cartesianas y conducción de calor solamente a lo largo del eje x queda:

$$\alpha \frac{d^2T_A}{dt^2} + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho c} = 0$$

Teniendo en cuenta que $\alpha = k/(\rho c)$:

$$\frac{d^2T_A}{dt^2} + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{k_A} = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial queda:

$$T_A = -\frac{\dot{q}'''_{gen}}{k_A}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Aplicando la condición de contorno en x = 0 se obtiene que $C_1 = 0$:

$$x = 0: \quad \left.\frac{dT_A}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

Otra forma de llegar a la misma conclusión de que $C_1 = 0$ es mediante la siguiente condición de contorno en x = 0,05 m:

$$x = 0,05: \quad -k_A \left.\frac{dT_A}{dx}\right|_{x=0,05} = -k_B \left.\frac{dT_B}{dx}\right|_{x=0,05} \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

Ya que al principio de la solución se ha calculado que T(x = 0,05) 150ºC y se desprecia que haya resistencia térmica de contacto entre los materiales A y B, para calcular C_2 se puede aplicar la siguiente condición de contorno en x = 0,05 m:

$$x = 0,05: \quad T_A = 150^{o}C \quad \rightarrow \quad C_2 = T_A(x = 0,05) + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{k_A}\frac{e_A^2}{2} = 175$$

Sustituyendo valores, la temperatura de A resulta:

$$T_A = -\frac{\dot{q}'''_{gen}}{k_A}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 = -10000x^2 + 175$$

Por tanto, la temperatura de A en x = 0 resulta:

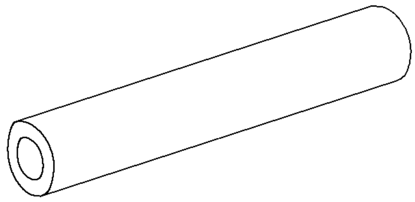
$$T_A(x = 0) = 175^{o}C$$

Problema 2.3

Del tubo de la figura se conoce la conductividad térmica, k = 0,16 W/m·K y los radios interior y exterior, r_i = 10 mm y r_e = 12 mm. El tubo experimenta transferencia de calor por convección con un fluido que circula por el interior, a $T_{\infty i}$ = 200 ºC y h_i = 1000 W/m^2·K y con un fluido que circula por el exterior a h_e = 50 W/m^2·K y $T_{\infty e}$ = 15 ºC. Calcular el flujo de calor por unidad de longitud de tubo mediante los siguientes procedimientos.

a) Aplicando la ecuación general de conducción de calor.

b) Aplicando analogía eléctrica.



<u>Solución apartado a:</u>

Ecuación general de conducción de calor:

$$\alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\alpha \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

En estado estacionario, sin generación de energía y con conducción de calor solamente a lo largo de la coordenada radial queda:

$$\alpha \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial T}{\partial \phi} \right)} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} \right] + \cancel{\frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho c}} = \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\alpha \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Resolviendo resulta:

$$T = C_1 \ln(r) + C_2$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinan aplicando condiciones de contorno:

$$\left. \begin{array}{l} r = r_i : \quad -kA_i \nabla T\big|_{r=r_i} = hA_i[T_{\infty i} - T(r = r_i)] \\ r = r_e : \quad -kA_e \nabla T\big|_{r=r_e} = hA_e[T_{\infty e} - T(r = r_e)] \end{array} \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -k\dfrac{C_1}{r_i} = h_i[T_{\infty i} - C_1 \ln(r_i) - C_2] \\[2ex] -k\dfrac{C_1}{r_e} = h_e[C_1 \ln(r_e) + C_2 - T_{\infty e}] \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -0{,}16\dfrac{C_1}{0{,}01} = 1000[200 - C_1 \ln(0{,}01) - C_2] \\[2ex] -0{,}16\dfrac{C_1}{0{,}012} = 50[C_1 \ln(0{,}012) + C_2 - 15] \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas resulta C_1 = -397,9 y C_2 = -1639. Por tanto, la distribución de temperatura viene dada por la siguiente expresión:

$$T = C_1 \ln(r) + C_2 = -397{,}9 \ln(r) - 1639$$

El flujo de calor se obtiene mediante la ley de Fourier:

$$\dot{Q} = -k\nabla T = -k2\pi r L \nabla T$$

$$\dot{q}' = \frac{\dot{Q}}{L} = -k2\pi r \nabla T$$

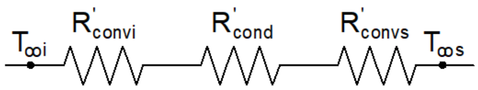
Sustituyendo valores se obtiene el flujo de calor en r = r_i o en r = r_e que, lógicamente, tienen que resultar idénticos al no existir generación de energía:

$$\dot{q}'_{r=r_i} = -k2\pi r_i \nabla T\Big|_{r=r_i} = -k2\pi r_i \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_i} = 400\ \mathrm{W/m^2}$$

$$\dot{q}'_{r=r_e} = -k2\pi r_e \nabla T\Big|_{r=r_e} = -k2\pi r_e \left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_e} = 400\ \mathrm{W/m^2}$$

<u>Solución apartado b:</u>

El circuito eléctrico análogo es el siguiente:



El flujo de calor viene dado por:

$$\dot{q}' = \frac{T_{\infty i} - T_{\infty e}}{\dfrac{1}{2\pi r_i h_i} + \dfrac{\ln(r_e/r_i)}{2\pi k} + \dfrac{1}{2\pi r_e h_e}} = 400\ \mathrm{W/m^2}$$

Problema 2.4

Por un cable de cobre (k_c = 395 W/m·K) de diámetro D = 1,4 mm y resistencia eléctrica por unidad de longitud R´ = 0,01 Ω/m se transmite una intensidad de I = 10 A. Dicho cable se cubre con un aislante de espesor e_a = 1 mm y conductividad térmica k_a = 0,2 W/m·K. Se mide la temperatura de la superficie externa del **aislante** y resulta 28 ºC.

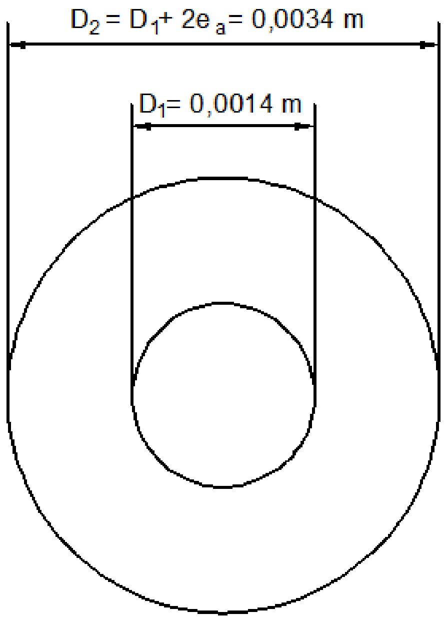
a) Calcular la temperatura de la superficie del **cable**.

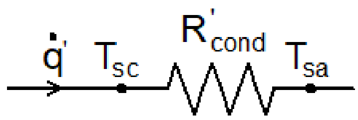
b) Calcular la temperatura del centro del **cable**.

NOTA: Por efecto Joule se disipa $\dot{q}' = I^2R'$ (W/m).

<u>Solución apartado a:</u>

Aplicando analogía eléctrica:





$$\dot{q}' = \frac{T_{sc} - T_{sa}}{R'_{cond}}$$

siendo $\dot{q}' = I^2R' = 1\ W/m$. Por tanto:

$$1 = \frac{T_{sc} - 28}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_a}} \quad \rightarrow \quad T_{sc} = 28{,}71\ ^{o}C$$

<u>Solución apartado b:</u>

En el cobre hay generación de energía, por tanto no se puede aplicar analogía eléctrica a este material. Por tanto, el procedimiento para resolver este apartado es mediante la ecuación general de conducción de calor:

$$\alpha_c \nabla^2 T_c + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho_c c_c} = \frac{\partial T_c}{\partial t}$$

Nótese que se ha puesto el subíndice c refiriéndose al cobre.

El calor por unidad de volumen es $\dot{q}'''_{gen} = \frac{\dot{q}'}{A} = \frac{\dot{q}'}{\pi D^2/4} = 649612 \text{ W/m}^3$

En coordenadas cilíndricas la ecuación general de conducción de calor resulta:

$$\alpha_c \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial T_c}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial^2 T_c}{\partial z^2} \right] + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho_c c_c} = \frac{\partial T_c}{\partial t}$$

En estado estacionario y con conducción de calor solamente a lo largo de la coordenada radial queda:

$$\alpha_c \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_c}{\partial r} \right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial T_c}{\partial \phi} \right)} + \cancel{\frac{\partial^2 T_c}{\partial z^2}} \right] + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho_c c_c} = \cancel{\frac{\partial T_c}{\partial t}}$$

$$\alpha_c \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT_c}{dr} \right) + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho_c c_c} = 0$$

Teniendo en cuenta que $\alpha_c = k_c/(\rho_c c_c)$:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{k_c} = 0$$

Resolviendo se obtiene la distribución de temperaturas en función de las constantes de integración C_1 y C_2:

$$T_c = -\frac{\dot{q}'''_{gen} r^2}{4k_c} + C_1 \ln(r) + C_2$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinan aplicando condiciones de contorno:

$$r = 0: \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$r = r_1 = \frac{D_1}{2}: \quad T = T_{sc} = 28{,}71\ ^\circ C \quad \rightarrow \quad C_2 = 28{,}71\ ^\circ C$$

Por tanto, la distribución de temperatura (en grados centígrados) viene dada por la siguiente expresión:

$$T_c = -\frac{\dot{q}'''_{gen} r^2}{4k_c} + C_1 \ln(r) + C_2 = -411{,}14 r^2 + 28{,}71$$

Particularmente, para r = 0 se corresponde con la temperatura del centro del cable:

$$T_c(r = 0) = 28{,}71\ ^\circ C$$

Como se puede observar, esta temperatura resulta igual que la temperatura de la superficie, lo cual no es de extrañar debido a la elevada conductividad térmica del cobre y al reducido diámetro del cable.

Problema 2.5

Una aleta cilíndrica de aluminio (k = 236 W/m·K) de longitud 100 mm y diámetro 5 mm cuya base se encuentra a 50 ºC se expone al aire ambiente a T_∞ = 20 ºC y h = 30 W/m^2·K. Asumir transferencia de calor unidimensional. Representar gráficamente la temperatura a lo largo de la longitud.

Solución:

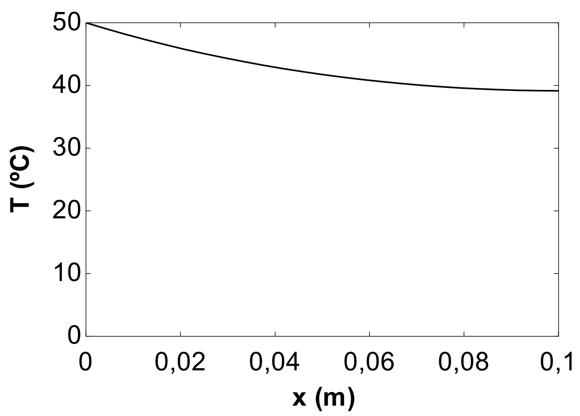
La distribución de temperatura a lo largo del eje x se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{T - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh[m(L-x)] + (h/mk)\mathrm{senh}[m(L-x)]}{\cosh(mL) + (h/mk)\mathrm{senh}(mL)}$$

siendo:

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}} = \sqrt{\frac{h\pi D}{k\pi D^2/4}} = \sqrt{\frac{4h}{kD}} = 10{,}08\ m^{-1}$$

Por tanto, la representación gráfica de temperatura a lo largo de la longitud resulta:



Problema 2.6

Calcular la pérdida de calor a través de las aletas siguientes:

a) Una aleta cilíndrica de aluminio (k = 236 W/m·K) de longitud 100 mm y diámetro 5 mm cuya base se encuentra a 50 ºC se expone al aire ambiente a T_∞ = 20ºC y h = 30 W/m^2·K.

b) Una aleta cuadrada de aluminio (k = 236 W/m·K) de longitud 100 mm y lado 5 mm cuya base se encuentra a 50 ºC se expone al aire ambiente a T_∞ = 20ºC y h = 30 W/m^2·K.

c) Una aleta anular de aluminio (k = 236 W/m·K) de radio externo 100 mm, radio interno 50 mm y espesor 5 mm cuya base se encuentra a 50ºC se expone al aire ambiente a T_∞ = 20 ºC y h = 30 W/m^2·K.

Solución apartado a:

Una forma de resolverlo es mediante la siguiente expresión:

$$\dot{Q}_a = \beta \frac{\operatorname{senh}(mL) + (h/mk)\cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk)\operatorname{senh}(mL)}$$

siendo:

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}} = \sqrt{\frac{h\pi D}{k\pi D^2/4}} = \sqrt{\frac{4h}{kD}} = 10{,}08\ m^{-1}$$

$$\beta = \theta_b\sqrt{hPkA_c} = (T_b - T_\infty)\sqrt{hPkA_c} = (T_b - T_\infty)\sqrt{h\pi Dk\frac{\pi D^2}{4}} = 1{,}401\ W$$

Por tanto:

$$\dot{Q}_a = \beta \frac{\operatorname{senh}(mL) + \frac{h}{mk}\cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{mk}\operatorname{senh}(mL)} =$$

$$= 1{,}401 \frac{\operatorname{senh}(10{,}08\cdot 0{,}1) + \frac{30}{10{,}08\cdot 236}\cosh(10{,}08\cdot 0{,}1)}{\cosh(10{,}08\cdot 0{,}1) + \frac{30}{10{,}08\cdot 236}\operatorname{senh}(10{,}08\cdot 0{,}1)} = 1{,}08\ W$$

Al calcular el la pérdida de calor con la expresión anterior, tener en cuenta que la calculadora debe de estar en radianes.

Otra forma de calcular la pérdida de calor es utilizando la siguiente expresión, correspondiente a aleta con extremo adiabático:

$$\dot{Q}_a = \beta \tanh(mL_c)$$

Siendo L_c la longitud corregida. Hay que utilizar la longitud corregida en lugar de la longitud real para poder aplicar la expresión anterior, correspondiente a aleta con extremo adiabático a una aleta con extremo que intercambia calor por convección. Para esta aleta cilíndrica, la longitud corregida viene dada por:

$$L_c = L + \frac{R}{2} = L + \frac{D}{4} = 0{,}10125\ m$$

Por tanto:

$$\dot{Q}_a = \beta \tanh(mL_c) = 1{,}401\cdot \tanh(10{,}08\cdot 0{,}10125) = 1{,}08\ W$$

Otra forma de calcular la pérdida de calor es utilizando el concepto de eficiencia de aleta, según el cual la pérdida de calor a través de la aleta es igual a la eficiencia de aleta multiplicada por el calor perdido por la aleta ideal:

$$\dot{Q}_a = \eta_a \dot{Q}_{aideal}$$

La aleta ideal es aquella que se encuentra íntegramente a la temperatura de la base, por tanto:

$$\dot{Q}_{aideal} = hA_a(T_b - T_\infty)$$

La eficiencia de aleta para esta aleta cilíndrica viene dada por:

$$\eta_a = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c} = 0{,}7544$$

Nótese que la anterior definición de eficiencia se basa en el concepto de longitud corregida. Por tanto, sustituyendo estas expresiones, la pérdida de calor a través de la aleta resulta:

$$\dot{Q}_a = \eta_a \dot{Q}_{aideal} = \eta_a h A_a (T_b - T_\infty) = \eta_a h \pi D L_c (T_b - T_\infty) = 1{,}08 \text{ W}$$

Solución apartado b:

Una forma de resolverlo es mediante la siguiente expresión:

$$\dot{Q}_a = \beta \frac{\operatorname{senh}(mL) + \frac{h}{mk}\cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{h}{mk}\operatorname{senh}(mL)} =$$

siendo:

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}} = \sqrt{\frac{h4t}{kt^2}} = \sqrt{\frac{4h}{kt}} = 10{,}08 \text{ m}^{-1}$$

$$\beta = \theta_b\sqrt{hPkA_c} = (T_b - T_\infty)\sqrt{hPkA_c} = (T_b - T_\infty)\sqrt{h4tkt^2} = 1{,}785 \text{ W}$$

Por tanto:

$$\dot{Q}_a = \beta \frac{\operatorname{senh}(mL) + (h/mk)\cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk)\operatorname{senh}(mL)} = 1{,}375 \text{ W}$$

Al calcular el la pérdida de calor con la expresión anterior, tener en cuenta que la calculadora debe de estar en radianes.

Otra forma de calcular la pérdida de calor es utilizando la siguiente expresión, correspondiente a aleta con extremo adiabático:

$$\dot{Q}_a = \beta \tanh(mL_c)$$

Siendo L_c la longitud corregida. Hay que utilizar la longitud corregida en lugar de la longitud real para poder aplicar la expresión anterior, correspondiente a aleta con extremo adiabático a una aleta con extremo que intercambia calor por convección. Para esta aleta cuadrada, la longitud corregida viene dada por:

$$L_c = L + \frac{t}{4} = 0{,}10125 \text{ m}$$

Por tanto:

$$\dot{Q}_a = \beta \tanh(mL_c) = 1{,}375 \text{ W}$$

Otra forma de calcular la pérdida de calor es utilizando el concepto de eficiencia de aleta, según el cual la pérdida de calor a través de la aleta es igual a la eficiencia de aleta multiplicada por el calor perdido por la aleta ideal:

$$\dot{Q}_a = \eta_a \dot{Q}_{aideal}$$

La aleta ideal es aquella que se encuentra íntegramente a la temperatura de la base, por tanto:

$$\dot{Q}_{aideal} = hA_a (T_b - T_\infty)$$

La eficiencia de aleta para esta aleta cuadrada viene dada por:

$$\eta_a = \frac{\tanh(mL_c)}{mL_c} = 0{,}7544$$

Nótese que la anterior definición de eficiencia se basa en el concepto de longitud corregida. Por tanto, sustituyendo estas expresiones, la pérdida de calor a través de la aleta resulta:

$$\dot{Q}_a = \eta_a \dot{Q}_{aideal} = \eta_a h A_a (T_b - T_\infty) = \eta_a h 4 t L_c (T_b - T_\infty) = 1{,}375 \text{ W}$$

<u>Solución apartado c</u>:

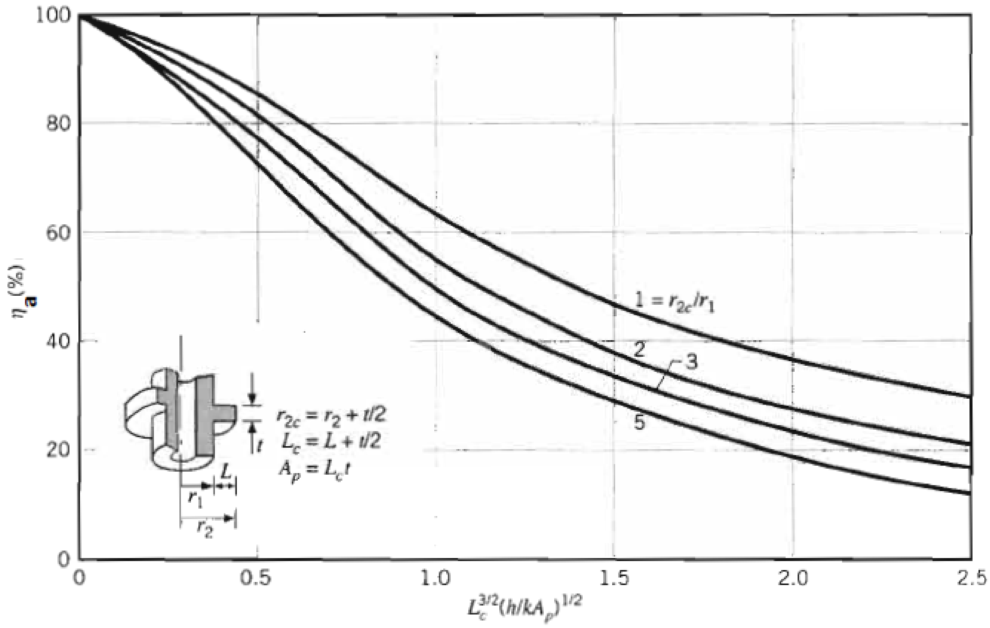
Se procederá a calcular la pérdida de calor utilizando el concepto de eficiencia de aleta, según el cual la pérdida de calor a través de la aleta es igual a la eficiencia de aleta multiplicada por el calor perdido por la aleta ideal:

$$\dot{Q}_a = \eta_a \dot{Q}_{aideal}$$

La aleta ideal es aquella que se encuentra íntegramente a la temperatura de la base, por tanto:

$$\dot{Q}_{aideal} = hA_a (T_b - T_\infty)$$

Para determinar la eficiencia de esta aleta anular se utilizará la siguiente gráfica:



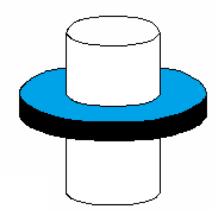
siendo:

$$r_1 = 0,05 \text{ m}$$
$$r_2 = 0,1 \text{ m}$$
$$L = 0,05 \text{ m}$$
$$r_{2c} = r_2 + \frac{t}{2} = 0,1 + \frac{0,005}{2} = 0,1025 \text{ m}$$
$$L_c = L + \frac{t}{2} = 0,05 + \frac{0,005}{2} = 0,0525 \text{ m}$$
$$A_p = L_c t = 0,0002625 \text{ m}^2$$
$$L_c^{3/2}\sqrt{\frac{h}{kA_p}} = 0,2647$$
$$r_{2c}/r_1 = 2,05$$

Entrando en la gráfica con un valor de $L_c^{3/2}\sqrt{\frac{h}{kA_p}} = 0,2647$ y r_{2c}/r_1 = 2,05 se obtiene que la eficiencia de aleta resulta aproximadamente 92% (0,92 en base unitaria). Por tanto:

$$\dot{Q}_a = \eta_a \dot{Q}_{aideal} = \eta_a h A_a (T_b - T_\infty) = \eta_a h 2\pi (r_{2c}^2 - r_1^2)(T_b - T_\infty) = 41,63 \text{ W}$$

Téngase en cuenta que el área de aleta es la que se indica en color azul en la figura (por arriba y por abajo, que no se percibe en la figura), teniendo en cuenta que al utilizar el modelo de eficiencia de aleta no se tiene en consideración el extremo indicado en color negro:



Problema 2.7

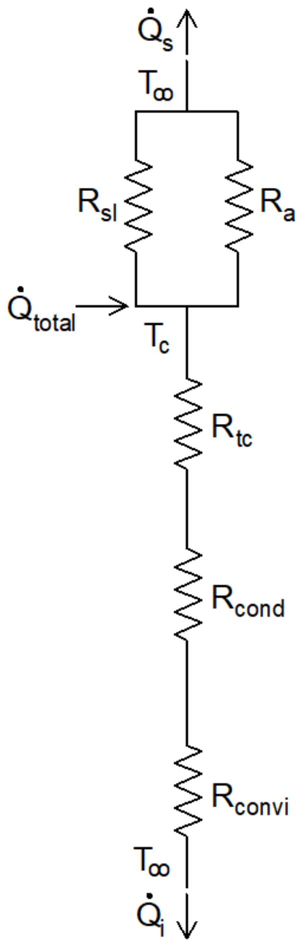
Una tarjeta de circuito de espesor despreciable y dimensiones 10 × 10 mm disipa 1 W en estado estacionario. Para simplificar los cálculos, este calor disipado se puede asumir uniformemente distribuido. Para refrigerarla se dispone de 4 × 4 aletas rectas de cobre, de sección circular, diámetro 1,5 mm, longitud 5 mm y conductividad térmica 200 W/m·K. El circuito se instala sobre una base de 15 mm de espesor y conductividad térmica 1 W/m·K. La resistencia térmica de contacto circuito-base es de 10^{-4} m^2·K/W. Por arriba y abajo circula una corriente de aire que ayuda a enfriar el circuito. Este aire se encuentra a 20 ºC y presenta un coeficiente de transferencia de calor por convección de 40 W/m^2·K, tanto por la parte superior como por la inferior.

a) Determinar la temperatura de la tarjeta de circuito.

b) Repetir el apartado anterior en caso de que no hubiera aletas.

<u>Solución apartado a</u>:

Este apartado se resolverá utilizando analogía eléctrica. El circuito eléctrico análogo es el que se indica en la figura:



Del calor total que genera la tarjeta de circuitos, $\dot{Q}_{total}$, parte se disipa hacia la parte inferior, $\dot{Q}_i$, y parte hacia la superior, $\dot{Q}_s$:

$$\dot{Q}_{total} = \dot{Q}_s + \dot{Q}_i$$

$$\dot{Q}_{total} = \frac{T_c - T_\infty}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_{sl}}}} + \frac{T_c - T_\infty}{R_{tc} + R_{cond} + R_{convi}}$$

siendo:

$$\dot{Q}_{total} = 1\ \text{kW}$$

$$R_{tc} = \frac{R''_{tc}}{A} = \frac{10^{-4}}{0{,}01 \cdot 0{,}01} = 1\ \text{K/W}$$

$$R_{cond} = \frac{e_b}{k_b A} = \frac{0{,}015}{1 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}01} = 150\ \text{K/W}$$

$$R_{convi} = \frac{1}{hA} = \frac{1}{40 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}01} = 250\ \text{K/W}$$

$$R_{sl} = \frac{1}{hA_{sl}} = \frac{1}{40 \cdot (0{,}01^2 - 16 \cdot \pi \cdot 0{,}0015^2 / 4)} = 348{,}5\ \text{K/W}$$

$$R_a = \frac{1}{hA_a \eta_a}$$

La eficiencia de aleta se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\eta_a = \frac{\text{tgh}(mL_c)}{mL_c}$$

Utilizando el modelo de longitud corregida, $L_c = L + R/2 = 0{,}005375$ m.

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_c}} = \sqrt{\frac{h\pi D}{k_{aletas} \pi D^2 / 4}} = \sqrt{\frac{4h}{k_{aletas} D}} = 23{,}09\ \text{m}^{-1}$$

$$A_a = N_{aletas} \pi D L_c = 0{,}0004\ \text{m}^2$$

Por tanto, la resistencia que representa la superficie aleteada resulta:

$$R_a = \frac{1}{hA_a \eta_a} = 62{,}82\ \text{K/W}$$

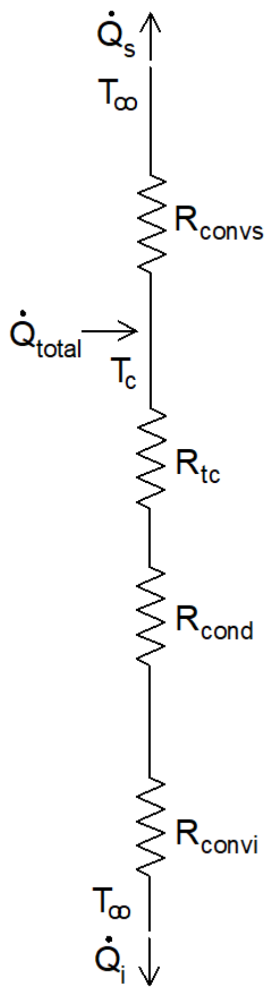
Y la temperatura de la tarjeta de circuito se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{Q}_{total} = \frac{T_c - T_\infty}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_{sl}}}} + \frac{T_c - T_\infty}{R_{tc} + R_{cond} + R_{convi}}$$

$$1 = \frac{T_c - 20}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{62,82} + \dfrac{1}{348,5}}} + \frac{T_c - 20}{1 + 150 + 250} \quad \rightarrow \quad T_c = 67,1\ °C$$

Solución apartado b:

En ausencia de aletas el circuito eléctrico análogo es el indicado en la siguiente figura:



En este caso, también del calor total que genera la tarjeta de circuitos, $\dot{Q}_{total}$, parte se disipa hacia la parte inferior, $\dot{Q}_i$, y parte hacia la superior, $\dot{Q}_s$:

$$\dot{Q}_{total} = \dot{Q}_s + \dot{Q}_i$$

$$\dot{Q}_{total} = \frac{T_c - T_\infty}{R_{convs}} + \frac{T_c - T_\infty}{R_{tc} + R_{cond} + R_{convi}}$$

siendo:

$$R_{convs} = \frac{1}{hA} = \frac{1}{40 \cdot 0,01 \cdot 0,01} = 250 \text{ K/W}$$

Por tanto:

$$1 = \frac{T_c - 20}{250} + \frac{T_c - 20}{1 + 150 + 250} \quad \rightarrow \quad T_c = 174 \text{ °C}$$

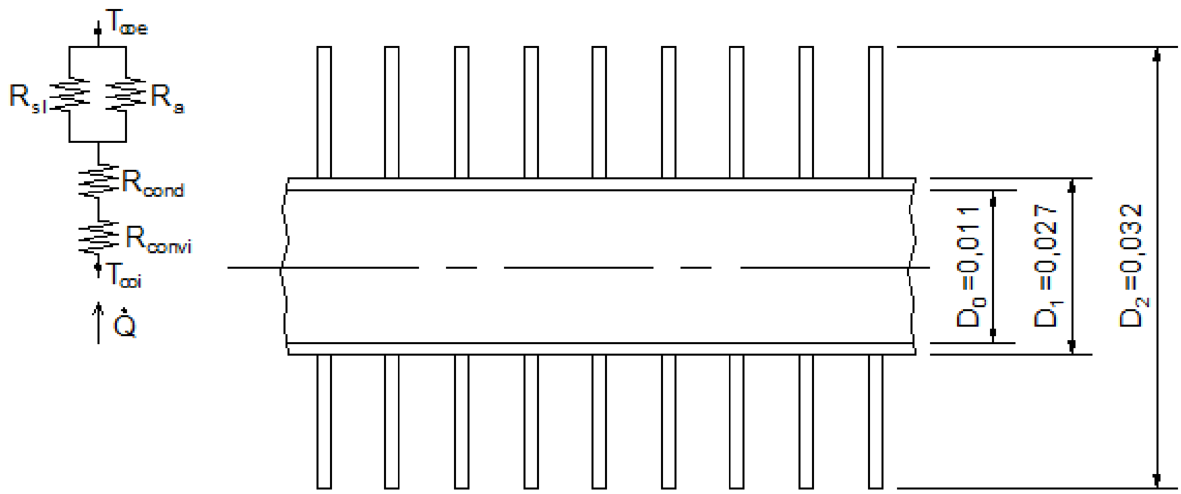
Como se puede observar, en ausencia de aletas la temperatura de la tarjeta de circuitos es considerablemente mayor, como era de esperar ya que las aletas se colocan para disipar mejor el calor generado por la tarjeta de chips.

Problema 2.8

Por el interior de una tubería aleteada circula agua a 60 ºC y coeficiente de transferencia de calor por convección 2000 $W/m^2 \cdot K$. Exteriormente circula aire a temperatura 20 ºC y coeficiente de transferencia de calor por convección 10 $W/m^2 \cdot K$. Los diámetros interno y externo de la tubería son 11 y 12,7 mm respectivamente. Las aletas son anulares, de diámetro externo 32 mm y espesor 1 mm. El espaciado entre aletas es tal que se colocan 235 aletas por cada metro de longitud de tubo. Tanto el tubo como las aletas son de un cobre de conductividad térmica k = 400 W/m·K. Calcular la pérdida de calor por metro de longitud de tubo. Despreciar la transferencia de calor por radiación.

Solución:

Se realizará este problema aplicando analogía eléctrica. El circuito eléctrico análogo es el siguiente:



siendo:

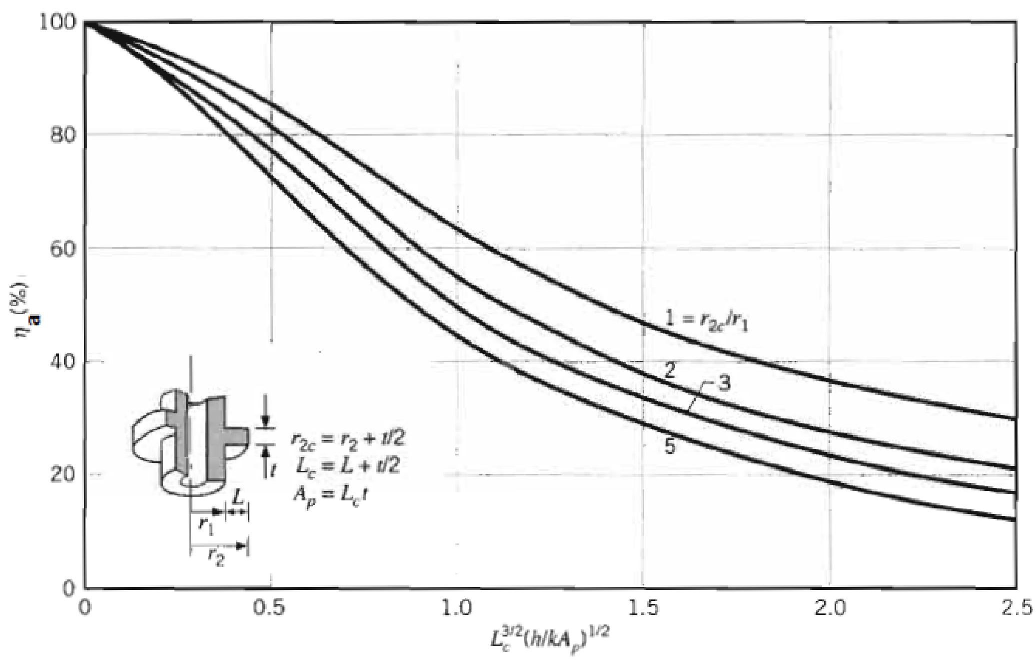
$$R_{convi} = \frac{1}{\pi D_0 L h_i} = 0{,}01448\ K/W$$

$$R_{cond} = \frac{\ln(r_1/r_0)}{2\pi k L} = \frac{\ln(D_1/D_0)}{2\pi k L} = 0{,}0005721\ K/W$$

$$R_{sl} = \frac{1}{h_e A_{sl}} = \frac{1}{10\cdot(1-235\cdot 0{,}001)\cdot\pi\cdot 0{,}011} = 3{,}278\ K/W$$

$$R_a = \frac{1}{\eta_a A_a h_e}$$

Para calcular la eficiencia de aleta, η_a, se utilizará la siguiente gráfica:



siendo:

$$r_1 = \frac{D_1}{2} = 0{,}00635 \text{ m}$$

$$r_2 = \frac{D_2}{2} = 0{,}016 \text{ m}$$

$$L = r_2 - r_1 = 0{,}00965 \text{ m}$$

$$r_{2c} = r_2 + \frac{t}{2} = 0{,}016 + \frac{0{,}001}{2} = 0{,}0165 \text{ m}$$

$$L_c = L + \frac{t}{2} = 0{,}00965 + \frac{0{,}001}{2} = 0{,}01015 \text{ m}$$

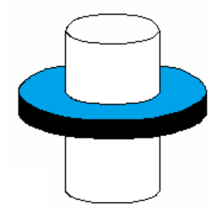
$$A_p = L_c t = 10{,}15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_c^{3/2}\sqrt{\frac{h}{kA_p}} = 0{,}05$$

$$\frac{r_{2c}}{r_1} = \frac{0{,}0165}{0{,}00635} = 2{,}6$$

Entrando en la gráfica con un valor de $L_c^{3/2}\sqrt{\frac{h}{kA_p}} = 0{,}05$ y r_{2c}/r_1 = 2,6 se obtiene que la eficiencia de aleta resulta aproximadamente 98% (0,98 en base unitaria).

El área aleta es 235 veces la que se indica en color azul en la figura (por arriba y por abajo, que no se percibe en la figura), teniendo en cuenta que al utilizar el modelo de eficiencia de aleta no se tiene en consideración el extremo indicado en color negro:



$$A_a = 235 \cdot 2 \cdot \pi \cdot (r_{2c}^2 - r_1^2) = 0{,}3423 \text{ m}^2$$

Sustituyendo valores:

$$R_a = \frac{1}{\eta_a A_a h_e} = 0{,}2981 \text{ K/W}$$

Por tanto, la pérdida de calor resulta:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty i} - T_{\infty e}}{R_{convi} + R_{cond} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_{sl}}}} = 139 \text{ W}$$

TEMA 3

CONDUCCIÓN DE CALOR UNIDIMENSIONAL EN RÉGIMEN TRANSITORIO

Problema 3.1

Una placa de aluminio (c = 903 J/kg·K, k = 236 W/m·K, ρ = 2702 kg/m^3) de espesor 10 cm que inicialmente se encuentra a 20 ºC se apoya sobre una superficie adiabática. El ambiente se encuentra a 600 ºC y el coeficiente de transferencia de calor por convección es 20 W/m^2·K. Calcular el tiempo que tarda la placa en alcanzar 350 ºC.

Solución:

Se procederá a comprobar si se puede aplicar el análisis simplificado. Para ello es necesario calcular el número de Biot:

$$Bi = \frac{h(\forall / A)}{k} = \frac{he}{k} = 0{,}00847$$

Como el número de Biot resultó menor que 0,1 se puede aplicar el análisis simplificado, que consiste en asumir la temperatura del sólido permanece uniforme para cada instante de tiempo.

Aplicando balance de energía a este sistema cerrado:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}$$

Con potencia nula:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \cancel{\dot{W}}$$

La energía total es la suma de la contribución de la energía interna, cinética, potencial y otras que no se tratarán en el presente texto. Despreciando variaciones de energía cinética y potencial, la energía total resulta:

$$E = me = m(u + \cancel{v^2/2} + \cancel{gz}) = mu$$

Por tanto, el balance de energía queda:

$$\frac{d(mu)}{dt} = \dot{Q}$$

Como se trata de un sólido con calor específico constante, se cumple que Δu = cΔT. Por tanto:

$$\frac{d(mcT)}{dt} = \dot{Q}$$

Si la placa se está calentando, y asumiendo como positivo el calor recibido, resulta:

$$\frac{d(mcT)}{dt} = hA(T_\infty - T)$$

Como la masa y el calor específico son constantes:

$$mc\frac{dT}{dt} = hA(T_\infty - T)$$

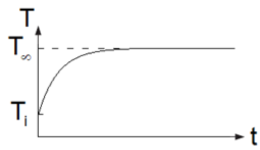
Indicando la masa como densidad por volumen:

$$\rho\forall c\frac{dT}{dt} = hA(T_\infty - T)$$

Resolviendo la ecuación diferencial, resulta:

$$\int_{T_i}^{T}\frac{1}{T_\infty - T}dT = \frac{hA}{\rho\forall c}\int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_i}\right) = \frac{hA}{\rho\forall c}t$$

Gráficamente, la temperatura a lo largo del tiempo se comporta de la siguiente manera:



Sustituyendo valores se obtiene la solución:

$$\ln\left(\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_i}\right) = \frac{hA}{\rho\forall c}t \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_i}\right) = \frac{h}{\rho e c}t \quad \rightarrow \ln\left(\frac{600-350}{600-20}\right) = \frac{20}{2702\cdot 0{,}1\cdot 903}t \quad \rightarrow t = 10267 \text{ s}$$

Problema 3.2

Una resistencia eléctrica que tiene forma cilíndrica de diámetro 3,5 mm y longitud 10 mm genera un calor de 0,1 W. Esta resistencia se monta junto a otros componentes de una placa electrónica de modo que tanto ambiente como alrededores se encuentran a 30 ºC y el coeficiente de transmisión de calor por convección es de h = 12 $W/m^2 \cdot K$. La emisividad superficial es de ε = 0,9. Para simplificar los cálculos, asumir que la temperatura de la resistencia permanece uniforme para cada instante de tiempo. Calcular la temperatura que alcanza en estado estacionario.

Solución:

En estado estacionario, el calor generado debe ser igual al disipado. En este caso se disipa por convección y por radiación, por tanto:

$$\dot{Q}_{gen} = \dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_{rad}$$

$$\dot{Q}_{gen} = hA(T - T_\infty) + \sigma\varepsilon A(T^4 - T_{alr}^4)$$

$$\dot{Q}_{gen} = h\pi DL(T - T_\infty) + \sigma\varepsilon\pi DL(T^4 - T_{alr}^4)$$

$$0{,}1 = 12\cdot\pi\cdot 0{,}0035\cdot 0{,}01\cdot(T - 303) + 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}9\cdot\pi\cdot 0{,}0035\cdot 0{,}01\cdot(T^4 - 303^4)$$

Nótese que la temperatura T_∞ se ha indicado en kelvin. Resulta una ecuación de grado 4 con las siguientes 4 soluciones, de las cuales la válida es la físicamente coherente, es decir, 350,5 K = 77,5 ºC.

Problema 3.3

Un cilindro de aluminio (k = 230 W/m·K, ρ = 2700 kg/m³, c = 1030 J/kg·K) de diámetro 0,05 m e inicialmente a 25 ºC se expone a un ambiente convectivo a T_∞ = 600 ºC y h = 100 W/m²·K.
a) Calcular el tiempo que tarda el cilindro en alcanzar el 75% del almacenamiento máximo posible de energía.
b) Calcular la temperatura del cilindro en ese momento.

Solución apartado a:

En primer lugar se procederá a comprobar si se puede aplicar el análisis simplificado. Para ello es necesario calcular el número de Biot:

$$Bi = \frac{h(\forall / A)}{k} = \frac{hR/2}{k} = 0{,}0054$$

Como el número de Biot resultó menor que 0,1 se puede aplicar el análisis simplificado, que consiste en asumir la temperatura del sólido permanece uniforme para cada instante de tiempo.

La energía que almacena el cilindro en un tiempo t viene dada porla siguiente expresión:

$$Q = \int_0^t \dot{Q}dt = hA\int_0^t (T - T_\infty)dt = \rho\forall c(T_i - T_\infty)\left(1 - e^{-\frac{hA}{\rho\forall c}t}\right) \qquad (J)$$

La energía máxima se alcanza cuando t → ∞ en la expresión anterior, es decir:

$$Q_{max} = \rho\forall c(T_i - T_\infty)$$

El tiempo que se tarda en alcanzar el 75% del almacenamiento máximo posible de energía se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$Q = 0{,}75 Q_{max}$$

$$\rho\forall c(T_i - T_\infty)\left(1 - e^{-\frac{hA}{\rho\forall c}t}\right) = 0{,}75\rho\forall c(T_i - T_\infty)$$

$$\cancel{\rho\forall c(T_i - T_\infty)}\left(1 - e^{-\frac{hA}{\rho\forall c}t}\right) = 0{,}75\,\cancel{\rho\forall c(T_i - T_\infty)}$$

$$1 - e^{-\frac{hA}{\rho\forall c}t} = 0{,}75$$

$$1 - e^{-\frac{2h}{\rho Rc}t} = 0{,}75$$

$$e^{-\frac{2h}{\rho Rc}t} = 0{,}25$$

$$-\frac{2h}{\rho Rc}t = \ln(0{,}25)$$

$$t = 963{,}8 \text{ s}$$

Solución apartado b:

Aplicando balance de energía:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}$$

Con potencia nula:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \cancel{\dot{W}}$$

La energía total es la suma de la contribución de la energía interna, cinética, potencial y otras que no se tratarán en el presente texto. Despreciando variaciones de energía cinética y potencial, la energía total resulta:

$$E = me = m(u + \cancel{v^2/2} + \cancel{gz}) = mu$$

Por tanto, el balance de energía queda:

$$\frac{d(mu)}{dt} = \dot{Q}$$

Como se trata de un sólido con calor específico constante, se cumple que $\Delta u = c\Delta T$. Por tanto:

$$\frac{d(mcT)}{dt} = \dot{Q}$$

Si el cilindro se está calentando, y asumiendo como positivo el calor recibido, resulta:

$$\frac{d(mcT)}{dt} = hA(T_\infty - T)$$

Como la masa y el calor específico son constantes:

$$mc\frac{dT}{dt} = hA(T_\infty - T)$$

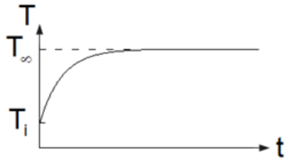
Indicando la masa como densidad por volumen:

$$\rho \forall c\frac{dT}{dt} = hA(T_\infty - T)$$

Resolviendo la ecuación diferencial, resulta:

$$\int_{T_i}^{T} \frac{1}{T_\infty - T} dT = \frac{hA}{\rho \forall c} \int_0^t dt \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_i}\right) = \frac{hA}{\rho \forall c} t$$

Gráficamente, la temperatura a lo largo del tiempo se comporta de la siguiente manera:



Sustituyendo valores se obtiene la solución:

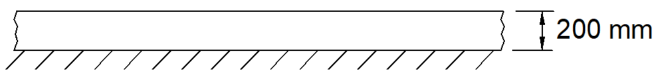
$$\ln\left(\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_i}\right) = \frac{hA}{\rho \forall c} t \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_i}\right) = \frac{h}{\rho R c} t \quad \rightarrow \ln\left(\frac{600 - T}{600 - 25}\right) = \frac{100}{2700 \cdot 0{,}05 \cdot 1030} \cdot 963{,}8 \quad \rightarrow T = 107{,}1\,ºC$$

Problema 3.4

Una placa de propiedades k = 15 W/m·K, c = 477 J/kg·K, y ρ = 7900 kg/m^3 tiene un espesor de 200 mm. Inicialmente se encuentra a 400 ºC y se apoya sobre una superficie adiabática. El ambiente y alrededores se encuentran a 20 ºC y el coeficiente de transferencia de calor combinado convección-radiación linealizado es de 250 W/m^2·K.

a) Calcular el tiempo que tarda la superficie inferior de la placa en alcanzar 300 ºC.

b) Calcular el tiempo que tarda la superficie inferior de la placa en alcanzar 375 ºC.



Solución apartado a:

Se procederá a comprobar si se puede aplicar el análisis simplificado. Para ello es necesario calcular el número de Biot:

$$Bi = \frac{h(\forall / A)}{k} = \frac{he}{k} = 3{,}\widehat{3}$$

Como el número de Biot resultó mayor que 0,1 no se puede aplicar el método simplificado, es decir, la temperatura no se puede asumir uniforme. Por tanto, la solución viene dada por el siguiente sumatorio:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 Fo} \cos(\lambda_n x^*)$$

siendo:

$x^* = \frac{x}{e}$, en la superficie inferior x = 0 y por tanto x^* = 0

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{R^2}$$

$$C_n = \frac{4 \sin(\lambda_n)}{2\lambda_n + \sin(2\lambda_n)}$$

$$\lambda_n tg(\lambda_n) = Bi$$

Se puede utilizar un único término del sumatorio si el número de Fourier resulta mayor que 0,2. Como el número de Fourier depende del tiempo y es precisamente el tiempo lo que se pide calcular en el enunciado, lo que se va a hacer es resolver el problema asumiendo que Fo > 0,2. Una vez resuelto se comprobará si esta hipótesis resulta cierta.

Con un único término del sumatorio resulta:

$$\theta^* = C_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \cos(\lambda_1 x^*)$$

siendo C_1 = 1,22 y λ_1 = 1,217 rad. Teniendo en cuenta además que x^* = 0 resulta:

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \cos(0) \quad \rightarrow \quad \frac{300 - 20}{400 - 20} = 1{,}22 e^{-1{,}217^2 Fo} \quad \rightarrow \quad Fo = 0{,}334$$

Por tanto, como el número de Fourier ha resultado mayor de 0,2 el procedimiento de utilizar solamente el primer término de la serie ha sido el correcto. A partir del número de Fourier se obtiene el tiempo:

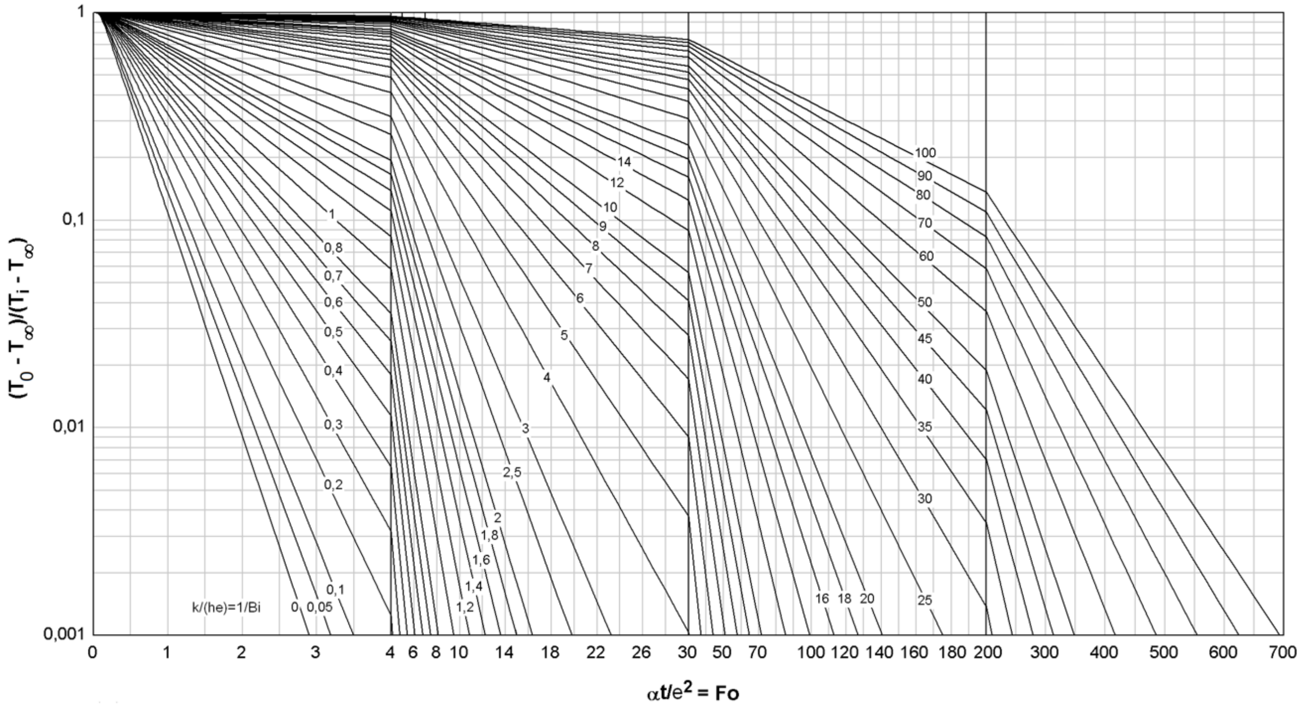
$$Fo = \frac{\alpha t}{e^2} = \frac{\frac{k}{\rho c} t}{e^2} \quad \rightarrow \quad t = 3359 \text{ s}$$

<u>Solución apartado b:</u>

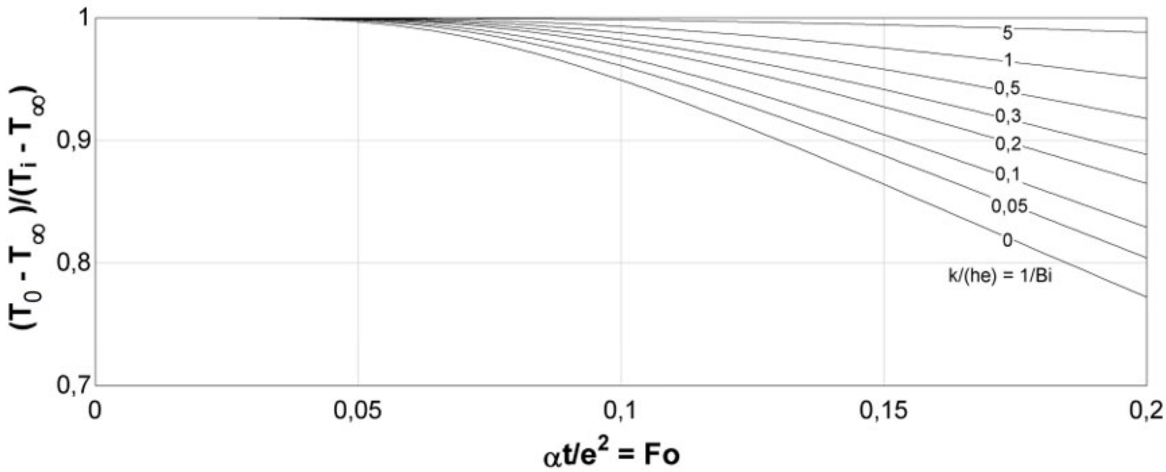
Considerando un único término del sumatorio resulta:

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} \cos(0) \quad \rightarrow \quad \frac{375 - 20}{400 - 20} = 1{,}22 e^{-1{,}217^2 Fo} \quad \rightarrow \quad Fo = 0{,}18$$

Como en este caso el número de Fourier resulta menor que 0,2 el error obtenido al utilizar solamente el primer término de la serie sería relativamente considerable. Una alternativa a utilizar el sumatorio es la siguiente gráfica, gráfica de Heisler:



Detalle para números de Fourier menores que 0,2:

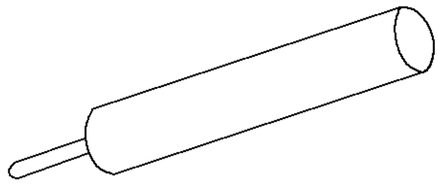


En este caso, los parámetros representativos son 1/Bi = h/(ek) = 0,3 y $\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0{,}93$. T_0 es la temperatura del plano medio de una placa de espesor 2e, que en este caso concreto sería la temperatura de la superficie inferior (superficie adiabática) para la placa de espesor e. A partir de la gráfica se obtiene el número de Fourier, aproximadamente 0,16, y a partir del mismo el tiempo:

$$Fo = \frac{\alpha t}{e^2} \approx 0{,}16 \quad \rightarrow \quad t \approx 1608 \text{ s}$$

Problema 3.5

Un helado de forma cilíndrica se extrae de un congelador a una temperatura de -20 ºC. Calcular el tiempo que tarda en empezar a derretirse (cuando algún punto empieza a alcanzar 0 ºC) en un ambiente a 25 ºC con un coeficiente de convección de 50 W/m^2·K. Para simplificar los cálculos, asumir transferencia de calor unidimensional, despreciar la transferencia de calor por radicación y asumir el helado como un cilindro largo de hielo de radio 0,015 m. Propiedades del hielo: c = 1930 J/kg·K, ρ = 913 kg/m^3, k = 2,22 W/m·K.



Solución:

Se procederá a comprobar si se puede aplicar el análisis simplificado. Para ello es necesario calcular el número de Biot:

$$Bi = \frac{h(\forall / A)}{k} = \frac{hR/2}{k} = 0{,}17$$

Como el número de Biot resultó mayor que 0,1 no se puede aplicar el método simplificado, es decir, la temperatura no se puede asumir uniforme. Por tanto, la solución viene dada por el siguiente sumatorio:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 Fo} J_0\left(\lambda_n r^*\right)$$

siendo:

$r^* = \dfrac{r}{R}$, como el helado se empieza a derretir por los bordes resulta $r^* = \dfrac{R}{R} = 1$

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{R^2}$$

$$C_n = \frac{2}{\lambda_n} \frac{J_1\left(\lambda_n\right)}{J_0^2\left(\lambda_n\right) + J_1^2\left(\lambda_n\right)}$$

$$\lambda_n \frac{J_1\left(\lambda_n\right)}{J_0\left(\lambda_n\right)} = Bi$$

Se puede utilizar un único término del sumatorio si el número de Fourier resulta mayor que 0,2. Como el número de Fourier depende del tiempo y es precisamente el tiempo lo que se pide calcular en el enunciado, lo que se va a hacer es resolver el problema asumiendo que Fo > 0,2. Una vez resuelto se comprobará si esta hipótesis resulta cierta.
Con un único término del sumatorio resulta:

$$\theta^* = C_1 e^{-\lambda_1^2 Fo} J_0\left(\lambda_1 r^*\right)$$

siendo C_1 = 1,08 y λ_1 = 0,79 rad. Teniendo en cuenta además que r^* = 1 resulta:

$$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}=C_1e^{-\lambda_1^2 Fo}J_0\left(\lambda_1 r^*\right) \quad \rightarrow \quad \frac{0-25}{-20-25}=1{,}08e^{-0{,}79^2 Fo}J_0\left(0{,}79\right) \quad \rightarrow \quad Fo=0{,}8$$

Por tanto, como el número de Fourier ha resultado mayor de 0,2 el procedimiento de utilizar solamente el primer término de la serie ha sido el correcto. A partir del número de Fourier se obtiene el tiempo:

$$Fo=\frac{\alpha t}{R^2}=\frac{\frac{k}{\rho c}t}{R^2} \quad \rightarrow \quad t=144{,}3\ s$$

Problema 3.6

Un largo cilindro de diámetro 20 cm, de acero inoxidable (k = 14,9 W/m·K, $\alpha = 3{,}95\cdot10^{-6}$ m^2/s) se retira de un horno a una temperatura uniforme de 600 ºC. El cilindro se enfría posteriormente en un ambiente a 200 ºC con un coeficiente de transferencia de calor por convección de h = 80 $W/m^2\cdot K$. Determinar la temperatura en el centro del cilindro después de 7 min de enfriamiento.

<u>Solución</u>:

Se procederá a comprobar si se puede aplicar el análisis simplificado. Para ello es necesario calcular el número de Biot:

$$Bi=\frac{h(\forall/A)}{k}=\frac{hR/2}{k}=0{,}26$$

Como el número de Biot resultó mayor que 0,1 no se puede aplicar el método simplificado, es decir, la temperatura no se puede asumir uniforme. Por tanto, la solución viene dada por el siguiente sumatorio:

$$\theta^*=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\lambda_n^2 Fo}J_0\left(\lambda_n r^*\right)$$

siendo:

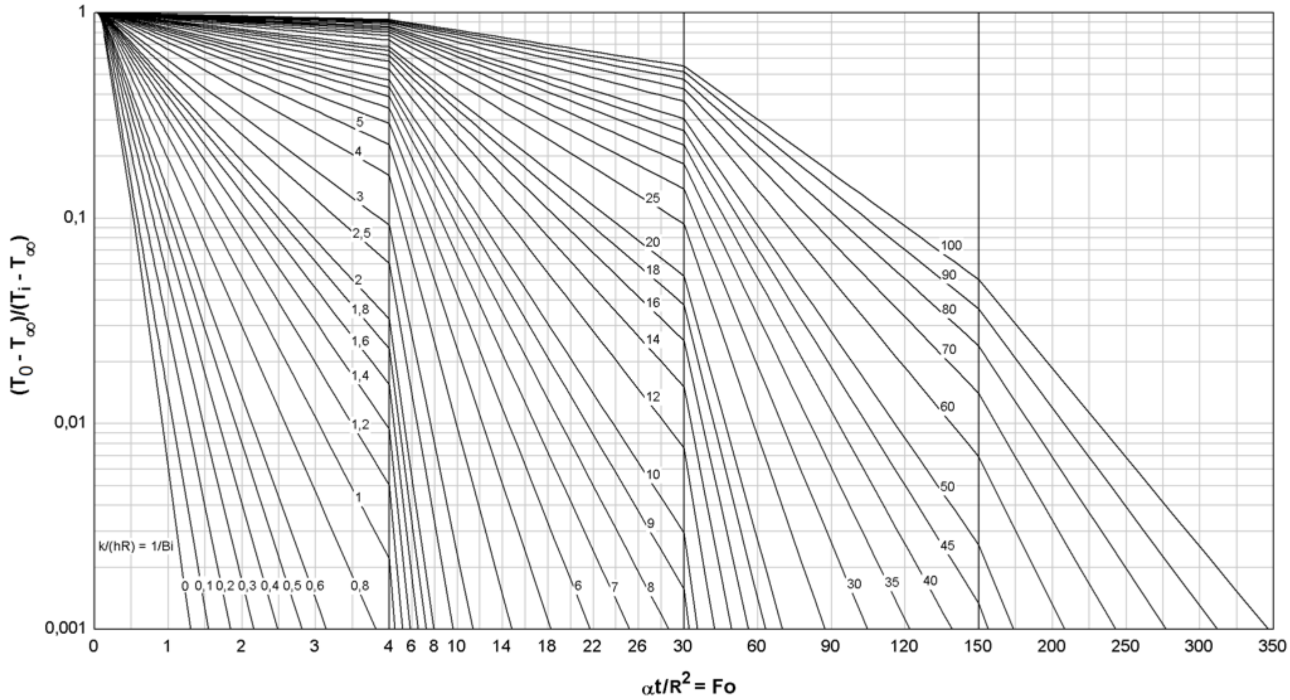
$r^*=\dfrac{r}{R}$, lo cual en el centro del cilindro resulta $r^*=\dfrac{0}{R}=0$

$$\theta^*=\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}$$

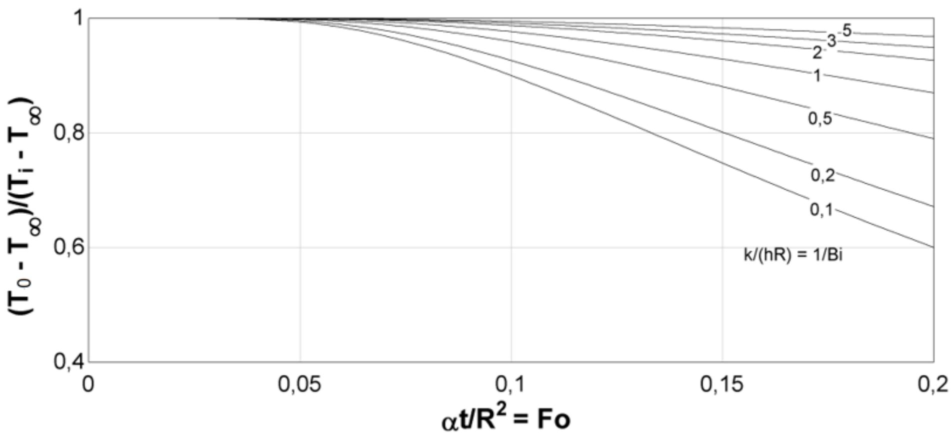
$Fo=\dfrac{\alpha t}{R^2}$, para este caso resulta $Fo=\dfrac{3{,}95\cdot10^{-6}\cdot420}{0{,}1^2}=0{,}1\widehat{6}$

Téngase en cuenta de que en el cálculo del número de Fourier el tiempo se ha pasado a segundos, es decir, 420 segundos en lugar de 7 minutos.

Se podría utilizar un único término del sumatorio si el número de Fourier resultara mayor que 0,2. Como en este caso resulta menor que 0,2 el error obtenido al utilizar solamente el primer término de la serie sería relativamente considerable. Una alternativa a utilizar el sumatorio es la siguiente gráfica, gráfica de Heisler:



Detalle para números de Fourier menores que 0,2:



En este caso, los parámetros de la gráfica son $Fo = 0,1\widehat{6}$ y 1/Bi = h/(Rk) = 1,862, por tanto el cociente $\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$ resulta aproximadamente 0,95. A partir de este valor se obtiene la temperatura en el centro del cilindro:

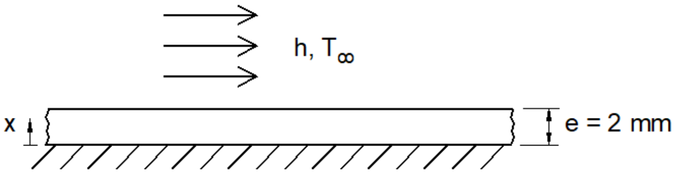
$$\frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \approx 0,95 \quad \rightarrow \quad \frac{T_0 - 200}{600 - 200} \approx 0,95 \quad \rightarrow \quad T_0 \approx 580\ ^\circ C$$

Problema 3.7

Una placa de plástico de espesor 2 mm se encuentra sobre una superficie adiabática. Inicialmente la placa presenta una temperatura uniforme de T_i = 200 ºC. Por encima de la placa circula una corriente de aire a 25 ºC y h = 200 W/m^2·K. La conductividad y difusividad térmica del plástico son k = 0,25 W/m·K y α = 1,2·10^{-7} m^2/s, respectivamente. Despreciar la transferencia de calor por radiación.

a) Representar gráficamente la temperatura adimensional de la superficie inferior, $(T_o-T_\infty)/(T_i-T_\infty)$, en función del módulo de Fourier para el intervalo 0 ≤ Fo ≤ 2. Comparar el resultado utilizando 1, 5 y 10 términos de sumatorio de cosenos de Fourier.

b) Representar gráficamente la temperatura de la superficie inferior en función del tiempo para el intervalo de 0 a 50 segundos.



Solución apartado a:

Se procederá a comprobar si se puede aplicar el análisis simplificado. Para ello es necesario calcular el número de Biot:

$$Bi = \frac{h(\forall / A)}{k} = \frac{he}{k} = 1,6$$

Como el número de Biot resultó mayor que 0,1 no se puede aplicar el método simplificado, es decir, la temperatura no se puede asumir uniforme. Por tanto, la solución viene dada por el siguiente sumatorio:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 Fo} \cos(\lambda_n x^*)$$

siendo:

$x^* = \dfrac{x}{e}$, lo cual en el la superficie inferior resulta $x^* = \dfrac{0}{e} = 0$

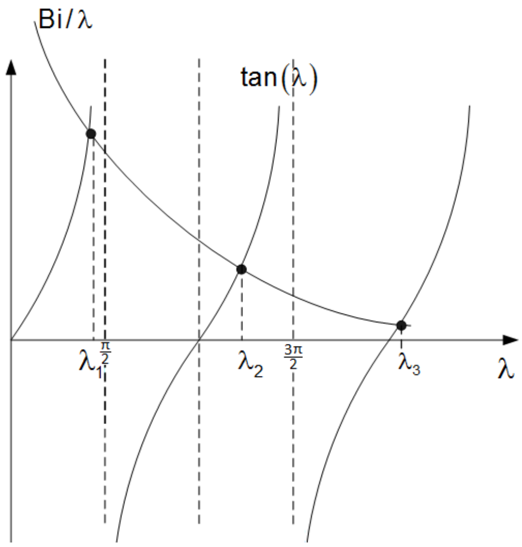
$\theta^* = \dfrac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$, que en x = 0 resulta: $\theta_0^* = \dfrac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$

$$Fo = \frac{\alpha t}{e^2}$$

$$C_n = \frac{4 sen(\lambda_n)}{2\lambda_n + sen(2\lambda_n)}$$

$$\lambda_n \tan(\lambda_n) = Bi$$

Los términos λ_n se denominan autovalores, gráficamente se representan en la siguiente figura:



Para un valor del número de Biot de 1,6 los 10 primeros autovalores resultan:

λ_1 = 1,008 rad

λ_2 = 3,564 rad

λ_3 = 6,524 rad

λ_4 = 9,590 rad

λ_5 = 12,69 rad

λ_6 = 15,81 rad

λ_7 = 18,93 rad

λ_8 = 22,06 rad

λ_9 = 25,20 rad

λ_{10} = 28,33 rad

A partir de estos autovalores se obtienen los valores de C_n:

$$C_1 = \frac{4\text{sen}(\lambda_1)}{2\lambda_1 + \text{sen}(2\lambda_1)} = 1{,}159$$

$$C_2 = \frac{4\text{sen}(\lambda_2)}{2\lambda_2 + \text{sen}(2\lambda_2)} = -0{,}2081$$

$$C_3 = \frac{4\text{sen}(\lambda_3)}{2\lambda_3 + \text{sen}(2\lambda_3)} = 0{,}07053$$

$$C_4 = \frac{4\text{sen}(\lambda_4)}{2\lambda_4 + \text{sen}(2\lambda_4)} = -0,03375$$

$$C_5 = \frac{4\text{sen}(\lambda_5)}{2\lambda_5 + \text{sen}(2\lambda_5)} = 0,01952$$

$$C_6 = \frac{4\text{sen}(\lambda_6)}{2\lambda_6 + \text{sen}(2\lambda_6)} = -0,01574$$

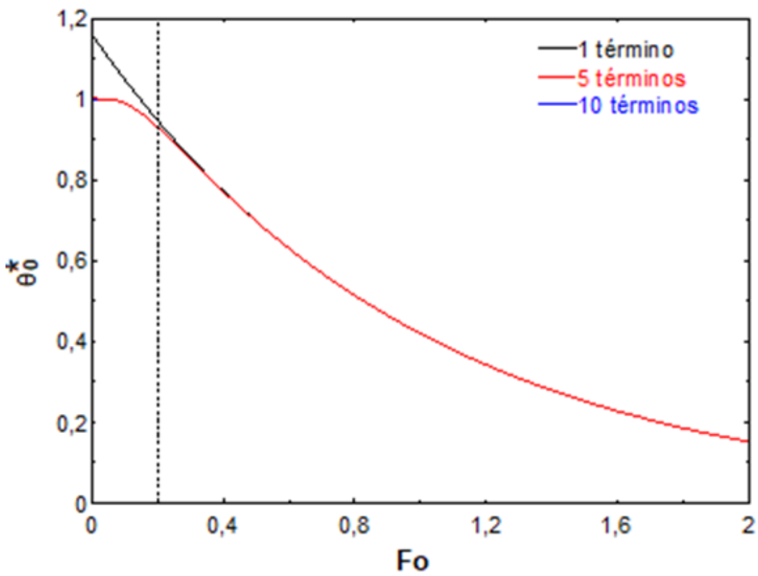
$$C_7 = \frac{4\text{sen}(\lambda_7)}{2\lambda_7 + \text{sen}(2\lambda_7)} = 0,008855$$

$$C_8 = \frac{4\text{sen}(\lambda_8)}{2\lambda_8 + \text{sen}(2\lambda_8)} = -0,006535$$

$$C_9 = \frac{4\text{sen}(\lambda_9)}{2\lambda_9 + \text{sen}(2\lambda_9)} = 0,005018$$

$$C_{10} = \frac{4\text{sen}(\lambda_{10})}{2\lambda_{10} + \text{sen}(2\lambda_{10})} = -0,003973$$

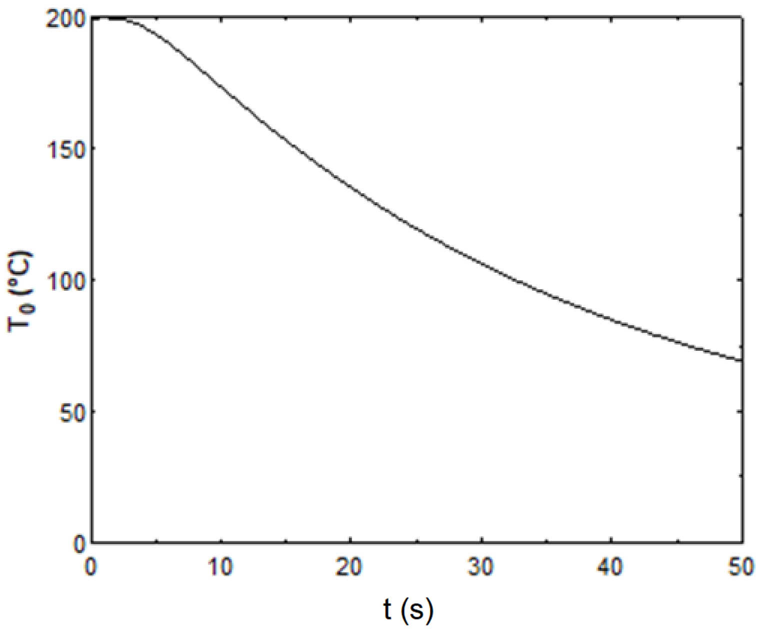
Una vez obtenidos los primeros 10 λ_n y C_n ya se está en condiciones de representar gráficamente el sumatorio $\theta_0^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n^2 Fo}$ para 1, 5 y 10 términos:



Como se puede observar, para números de Fourier mayores que 0,2 las soluciones utilizando 1, 5 y 10 términos son prácticamente similares. Sin embargo, para números de Fourier menores de 0,2 la solución para un término proporciona errores considerables ya que para un Fourier nulo la temperatura adimensional debe resultar 1, como así se obtiene utilizando los primeros 5 y 10 términos de la serie.

Solución apartado b:

Lo que pide el enunciado es la misma gráfica que en el apartado anterior pero de forma dimensional, es decir, en lugar de representar la temperatura adimensional, θ_0^*, y el tiempo adimensional, Fo, se representa directamente T_0 frente a t:



Para realizar la gráfica anterior se han utilizado los 10 primeros términos del sumatorio y se ha obtenido la temperatura y el tiempo a partir de los parámetros adimensionales:

$$\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} \quad \rightarrow \quad T_0$$

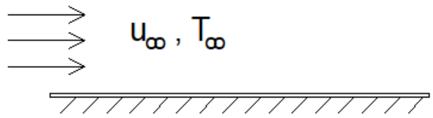
$$Fo = \frac{\alpha t}{e^2} \quad \rightarrow \quad t$$

TEMA 4

CONVECCIÓN FORZADA. FLUJO EXTERIOR

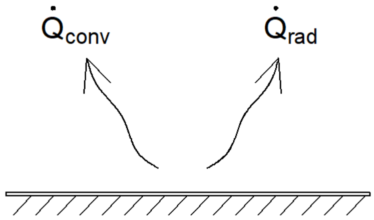
Problema 4.1

Una placa electrónica de 10 $\times$ 10 cm y reducido espesor se encuentra aislada por un lado, mientras que por el otro se somete a una corriente de aire a 20 ºC y 10 m/s. Los alrededores también se encuentran a 20 ºC. La superficie tiene una emisividad de ε = 0,60. En estado estacionario se mide la temperatura de la placa y resulta 60 ºC, que para simplificar los cálculos se puede asumir uniforme. Calcular el calor que está disipando la placa.



Solución:

El calor disipado será el debido a convección más radiación:



$$\dot{Q} = \dot{Q}_{rad} + \dot{Q}_{conv}$$

siendo:

$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon\sigma A(T_s^4 - T_\infty^4) = 0,6 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot [(60+273)^4 - (20+273)^4] = 1,6\ \text{W}$$

$$\dot{Q}_{conv} = \overline{h}_L A(T_s - T_\infty)$$

Cálculo de $\overline{h}_L$:

Se evalúan las propiedades necesarias: $T_f = \dfrac{T_s + T_\infty}{2} = \dfrac{60+20}{2} = 40\ ºC \begin{cases} \nu = 17 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s} \\ Pr = 0,72 \\ k = 0,027\ \text{W/mK} \end{cases}$

$$Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{10 \cdot 0,1}{17 \cdot 10^{-6}} = 58823 < 5 \cdot 10^5 \quad \rightarrow \quad \text{Flujo laminar}$$

$$\overline{Nu}_L = 0,664\, Re_L^{1/2}\, Pr^{1/3} = 144,34$$

$$\overline{Nu}_L = \frac{\overline{h}_L L}{k} \quad \rightarrow \quad \overline{h}_L = 38,97\ \text{W/m}^2\text{K}$$

Por tanto:

$$\dot{Q}_{conv} = \overline{h}_L A(T_s - T_\infty) = 15,58\ \text{W}$$

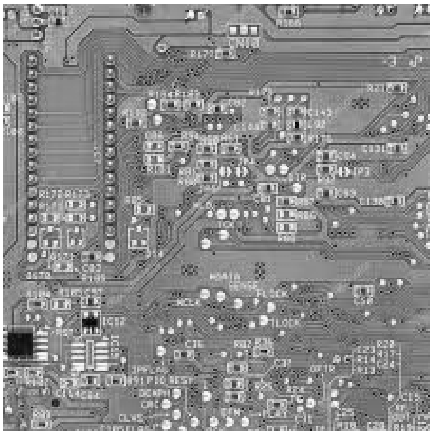
$$\dot{Q} = \dot{Q}_{rad} + \dot{Q}_{conv} = 1,67 + 15,58 = 17,25\ \text{W}$$

Problema 4.2

Una placa de circuitos de 30 × 30 cm disipa 50 W que, para simplificar los cálculos, se puede asumir que disipa uniformemente. Dicha placa se enfría con aire que se encuentra a 20 ºC y a una velocidad de 5 m/s. Despreciar pérdidas de calor por la parte inferior y despreciar también transferencia de calor por radiación. Asumir el flujo turbulento ya que los componentes electrónicos se suelen diseñar para actuar como turbuladores. Calcular:

a) Temperatura promedio de la placa.

b) Temperatura de la placa en el borde final.



Solución apartado a;

Para flujo turbulento sometido a flujo de calor uniforme, la expresión que proporciona la temperatura promedio de la placa es la siguiente:

$$\overline{T}_s - T_\infty = \frac{\dot{q}''L/k}{0{,}03696\,Re_L^{4/5}\,Pr^{1/3}}$$

Las propiedades necesarias se evalúan a la temperatura de película, $T_f = \frac{\overline{T}_s + T_\infty}{2}$, para la cual es necesario disponer de la temperatura promedio de la superficie. Se realizará por tanto un procedimiento iterativo.

- 1ª iteración:

En la primera iteración se evaluarán las propiedades a una temperatura de película de, por ejemplo, 20ºC:

$$T_f = \frac{\overline{T}_s + T_\infty}{2} = 20\ ^\circ C \quad \begin{cases} \nu = 15{,}14 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ Pr = 0{,}7294 \\ k = 0{,}02513\ W/mK \end{cases}$$

Una vez determinadas las propiedades necesarias ya se está en condiciones de determinar la temperatura promedio de la superficie en esta primera iteración:

$$\overline{T}_s - T_\infty = \frac{\dot{q}''L/k}{0{,}03696\,Re_L^{4/5}\,Pr^{1/3}} = \frac{\dot{q}''L/k}{0{,}03696\left(\frac{u_\infty L}{\nu}\right)^{4/5} Pr^{1/3}}$$

$$\overline{T}_s - 20 = \frac{\frac{50}{0,3 \cdot 0,3} 0,3 / 0,02513}{0,03696 \cdot \left(\frac{5 \cdot 0,3}{15,14 \cdot 10^{-6}} \right)^{4/5} \cdot 0,7294^{1/3}}$$

$$\overline{T}_s - 20 = 20,08 \quad \rightarrow \quad \overline{T}_s = 40,08 \ ^\circ C$$

Una vez obtenido un valor de temperatura promedio de superficie se procederá con la segunda iteración.

- 2ª iteración:

$$T_f = \frac{\overline{T}_s + T_\infty}{2} = \frac{40,08 + 20}{2} = 30,04 \ ^\circ C \ \begin{cases} \nu = 16,07 \cdot 10^{-6} \ m^2/s \\ Pr = 0,7269 \\ k = 0,02587 \ W/mK \end{cases}$$

Una vez determinadas las propiedades necesarias ya se está en condiciones de determinar la temperatura promedio de la superficie en esta segunda iteración:

$$\overline{T}_s - 20 = \frac{\frac{50}{0,3 \cdot 0,3} 0,3 / 0,02587}{0,03696 \cdot \left(\frac{5 \cdot 0,3}{16,07 \cdot 10^{-6}} \right)^{4/5} \cdot 0,7269^{1/3}}$$

$$\overline{T}_s - 20 = 20,5 \quad \rightarrow \quad \overline{T}_s = 40,5 \ ^\circ C$$

Como se puede observar, la temperatura promedio de superficie obtenida en esta segunda iteración es muy parecida a la obtenida en la primera iteración, por lo cual no se seguirá iterando y se considerará como válida, aunque es importante aclarar que más iteraciones proporcionarían una solución más precisa.

<u>Solución apartado b:</u>

En todo punto de la placa se verifica la ley del enfriamiento de Newton:

$$\dot{q}'' = h_x (T_{sx} - T_\infty)$$

Siendo el flujo de calor por unidad de área uniforme, $\dot{q}'' = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{50}{0,3 \cdot 0,3} = 555,\widehat{5} \ W$. Lógicamente, en el borde final, x = L, también se cumple la ley del enfriamiento de Newton:

$$\dot{q}'' = h_L (T_{sL} - T_\infty)$$

Por tanto, para determinar la temperatura de la placa en el borde final, T_{sL}, es necesario calcular el coeficiente de transferencia de calor por convección en el borde final, h_L. Se calculará a partir del número de Nusselt, el cual a su vez se calcula mediante la siguiente expresión:

$$Nu_L = 0,0308 Re_L^{4/5} Pr^{1/3} = 0,0308 \cdot \left(\frac{5 \cdot 0,3}{16,07 \cdot 10^{-6}} \right)^{4/5} \cdot 0,7269^{1/3} = 262,08$$

El coeficiente de transferencia de calor por convección en el borde final resulta:

$$Nu_L = \frac{h_L L}{k} \quad \rightarrow \quad h_L = \frac{kNu_L}{L} = \frac{0{,}02587 \cdot 262{,}08}{0{,}3} = 22{,}6\ W/m^2K$$

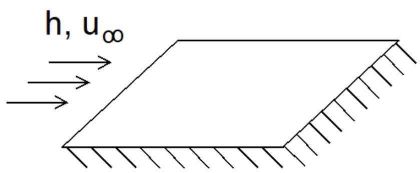
Y, finalmente, la temperatura de la superficie en el borde final:

$$\dot{q}'' = h_L (T_{sL} - T_\infty) \quad \rightarrow \quad 555{,}\widehat{5} = 22{,}6 \cdot (T_{sL} - 20) \quad \rightarrow \quad T_{sL} = 44{,}6\ ºC$$

Problema 4.3

Una placa electrónica de 50 x 50 cm disipa un flujo de calor uniforme de 200 W/m². Por encima de la placa circula una corriente de aire a 27 ºC, presión atmosférica y velocidad 2 m/s, mientras que por debajo está aislada. La transferencia de calor por radiación es despreciable. El fabricante no desea que en ningún punto de la placa la temperatura de operación exceda de 60 ºC con el fin de alargar la vida útil. Indicar si se cumple el deseo del fabricante.

Solución:



Es necesario evaluar propiedades a $T_f = \frac{\overline{T}_s + T_\infty}{2}$. La expresiones que proporcionan la temperatura promedio de la superficie son $\overline{T}_s - T_\infty = \frac{\dot{q}'' L/k}{0{,}6795 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}}$ y $\overline{T}_s - T_\infty = \frac{\dot{q}'' L/k}{0{,}03696 Re_L^{4/5} Pr^{1/3}}$ para flujo laminar y turbulento, respectivamente. Como para evaluar las propiedades necesarias es necesaria la temperatura promedio se resolverá el problema mediante un procedimiento iterativo.

1ª iteración:

En esta primera iteración se evaluarán propiedades por ejemplo a una temperatura de película de $T_f = \frac{\overline{T}_s + T_\infty}{2}$ = 77ºC = 350 K, con lo cual las propiedades necesarian resultan:

$$T_f = \frac{\overline{T}_s + T_\infty}{2} = 350\ K \begin{cases} \nu = 20{,}64 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ Pr = 0{,}7163 \\ k = 0{,}0293\ W/mK \end{cases}$$

El número de Reynolds resulta:

$$Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{20{,}64 \cdot 10^{-6}} = 48442 < 5 \cdot 10^5 \quad \rightarrow \quad \text{Flujo laminar}$$

Como el número de Reynolds es menor de $5\cdot10^5$, se trata de flujo laminar y por tanto la expresión que proporciona la temperatura de superficie promedio es la siguiente:

$$\overline{T}_s - T_\infty = \frac{\dot{q}''L/k}{0{,}6795\,Re_L^{1/2}\,Pr^{1/3}} = \frac{200\cdot 0{,}5/0{,}0293}{0{,}6795\cdot 48442^{1/2}\cdot 0{,}7163^{1/3}} = 25{,}51 \quad \rightarrow \quad \overline{T}_s = 52{,}51\ ^\circ C$$

Este valor de temperatura de superficie promedio se utilizará como punto de partida en la segunda iteración.

2ª iteración:

$$T_f = \frac{\overline{T}_s + T_\infty}{2} = \frac{52{,}51+27}{2} = 39{,}8\ ^\circ C = 312{,}8\ K \begin{cases} \nu = 16{,}98\cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ Pr = 0{,}7245 \\ k = 0{,}02659\ W/mK \end{cases}$$

El número de Reynolds resulta:

$$Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{2\cdot 0{,}5}{16{,}98\cdot 10^{-6}} = 58901 < 5\cdot 10^5 \quad \rightarrow \quad \text{Flujo laminar}$$

Como el número de Reynolds sigue resultando menor de $5\cdot10^5$, se trata de flujo laminar y por tanto la expresión que proporciona la temperatura de superficie promedio es también la siguiente:

$$\overline{T}_s - T_\infty = \frac{\dot{q}''L/k}{0{,}6795\,Re_L^{1/2}\,Pr^{1/3}} = \frac{200\cdot 0{,}5/0{,}0293}{0{,}6795\cdot 58901^{1/2}\cdot 0{,}7245^{1/3}} = 25{,}39 \quad \rightarrow \quad \overline{T}_s = 52{,}39\ ^\circ C$$

Este valor de temperatura de superficie promedio es, lógicamente, más preciso que el obtenido en la primera iteración. Si se continuaran haciendo iteraciones cada vez se obtendrían valores más precisos. Sin embargo, dada la poca variación en el resultado obtenido entre la primera y la segunda iteración, se adoptará este resultado como válido.

El siguiente paso es comprobar si algún punto de la placa excede 60ºC. La temperatura máxima tiene lugar en el borde final, y se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{q}'' = h_L(T_{sL} - T_\infty)$$

Para despejar la temperatura del borde final a partir de la expresión anterior es necesario calcular el coeficiente de transferencia de calor por convección en el borde final. Se calcula a partir del número de Nusselt:

$$Nu_L = \frac{h_L L}{k} = 0{,}453\,Re_x^{1/2}Pr^{1/3} = 98{,}74 \quad \rightarrow \quad h_L = \frac{Nu_L k}{L} = 5{,}251\ W/m^2K$$

Una vez que se tiene el valor de h_L ya se está en condiciones de calcular la temperatura de superficie en el borde final.

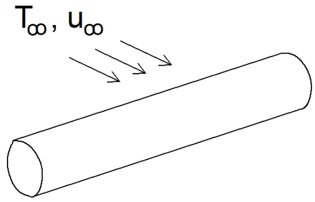
$$\dot{q}'' = h_L(T_{sL} - T_\infty) \quad \rightarrow \quad T_{sL} = 65{,}08\ ^\circ C$$

Como se puede observar, se superan los 60 ºC a los que se refiere el fabricante.

Problema 4.4

Un tubo largo de diámetro 10 cm y cuya temperatura superficial se mantiene a 110 ºC está afectado por una corriente de viento a 10 ºC soplando a 8 m/s. Calcular la tasa de transferencia de calor por unidad de longitud. Despreciar la tasa de transferencia de calor por radiación.

Solución:



La tasa de transferencia de calor será la debida a convección más radiación, despreciando radiación el calor se disipa íntegramente por convección, y viene dado por la siguiente expresión:

$$\dot{Q}_{conv} = \bar{h}A(T_s - T_\infty)$$

Cálculo de $\bar{h}$:

Se evalúan las propiedades necesarias: $T_f = \dfrac{T_s + T_\infty}{2} = 60\ ºC$ $\begin{cases} \nu = 18{,}94 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ Pr = 0{,}7199 \\ k = 0{,}02807\ W/mK \end{cases}$

$$Pe_D = Re_D\,Pr = \frac{u_\infty D}{\nu} Pr = 42194 \cdot 0{,}7199 = 30375{,}5$$

Como el número de Péclèt resultó mayor de 0,2 se empleará la expresión de Churchill:

$$\overline{Nu_D} = \frac{\bar{h}D}{k} = 0{,}3 + \frac{0{,}62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + (0{,}4/Pr)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} = 101{,}9$$

$$\overline{Nu_D} = \frac{\bar{h}D}{k} \quad \rightarrow \quad \bar{h} = \frac{\overline{Nu_D}k}{D} = 28{,}62\ W/m^2K$$

Una vez que se tiene el coeficiente de transferencia de calor se está en condiciones de calcular la tasa de transferencia de calor por unidad de longitud, la cual viene dada por:

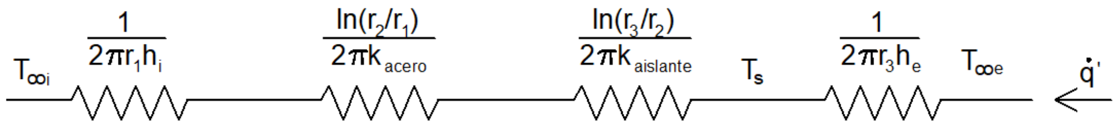
$$\dot{Q}_{conv} = \bar{h}A(T_s - T_\infty) = \bar{h}\pi DL(T_s - T_\infty) \quad \rightarrow \quad q'_{conv} = \bar{h}\pi D(T_s - T_\infty) = 898{,}6\ W/m$$

Problema 4.5

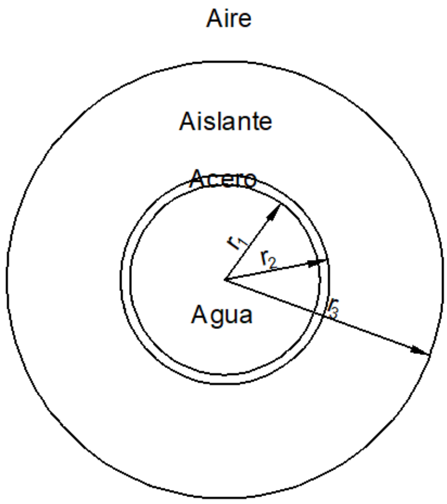
Por el interior de una tubería larga de acero (k_{acero} = 80 W/m·K) de diámetros interior y exterior 5 y 5,5 cm respectivamente fluyen 0,2 kg/s de agua líquida a una temperatura de 15 ºC, la cual para simplificar los cálculos se puede considerar constante a lo largo de toda la longitud. La tubería se cubre con un material aislante ($k_{aislante}$ = 0,05 W/m·K) de 3 cm de espesor. El aire exterior se encuentra a 25 ºC y circulando a 10 m/s debido al viento. Despreciar la transferencia de calor por radiación. Calcular la temperatura de la superficie exterior del material aislante.

Solución:

Se procederá a resolver este problema mediante analogía eléctrica. Despreciando la transferencia de calor por radiación, el circuito eléctrico análogo se muestra en la siguiente figura:



Los radios r_1, r_2 y r_3 son los indicados en la siguiente figura, siendo r_1 = 0,025 m, r_2 = 0,0275 m y $r_3 = r_2 + e$ = 0,0575 m:



La temperatura de la superficie del aislante, T_s, se puede obtener a partir de la siguiente expresión:

$$\frac{T_s - T_{\infty i}}{\dfrac{1}{2\pi r_1 h_i} + \dfrac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_{acero}} + \dfrac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_{aislante}}} = \frac{T_{\infty e} - T_s}{\dfrac{1}{2\pi r_3 h_e}}$$

Para despejar T_s de la expresión anterior es necesario calcular h_i y h_e, lo cual se hace a continuación.

Cálculo de h_i:

$$\text{Propiedades de agua a 15ºC} \begin{cases} \mu_{agua} = 0{,}002243 \text{ Pa}\cdot\text{s} \\ Pr_{agua} = 8{,}29 \\ k_{agua} = 0{,}58 \text{ W/mK} \end{cases}$$

Para comprobar si el agua presenta flujo laminar o turbulento se calcula el número de Reynolds:

$$Re_{Dagua} = \frac{u_{magua} D_1}{\nu_{agua}} = \frac{4\dot{m}_{agua}}{\pi D_1 \mu_{agua}} = 13378 > 2300 \quad \rightarrow \quad \text{flujo turbulento}$$

Para calcular el número de Nusselt se utilizará por ejemplo la correlación de Dittus-Boelter:

$$Nu_{Dagua} = \frac{h_i D_1}{k_{agua}} \quad \rightarrow \quad h_i = \frac{k_{agua} Nu_{Dagua}}{D_1} = 1237 \ W/m^2K$$

Cálculo de h_e:

Para evaluar las propiedades necesarias del aire es necesaria la temperatura de la superficie del aislante pero es precisamente esa temperatura la que se pide calcular. Se seguirá por tanto un procedimiento iterativo.

- 1ª iteración:

En la primera iteración se asumirá por ejemplo una temperatura de película, $T_f = (T_{\infty e} + T_s)/2$, de 20ºC (lógicamente, esta temperatura debe ser mayor de 15ºC y menor de 25ºC). A esta temperatura las propiedades necesarias son las siguientes:

$$\text{Propiedades de aire } T_f = \frac{T_{\infty e} + T_s}{2} = 20 \text{ ºC} \begin{cases} \nu_{aire} = 15{,}14 \cdot 10^{-6} \ m^2/s \\ Pr_{aire} = 0{,}7293 \\ k_{aire} = 0{,}02513 \ W/mK \end{cases}$$

El número de Reynolds para el aire resulta:

$$Re_{Daire} = \frac{u_{aire} D_3}{\nu_{aire}} = 75957$$

El número de Péclèt para el aire resulta:

$$Pe_{Daire} = Re_{Daire} Pr_{aire} = \frac{u_{aire} D_3}{\nu_{aire}} Pr_{aire} = 55396$$

A la vista del número de Péclèt, una correlación apropiada para determinar el número de Nusselt para el aire es la de Churchill, dada por:

$$\overline{Nu}_{Daire} = 0{,}3 + \frac{0{,}62 Re_{Daire}^{1/2} Pr_{aire}^{1/3}}{\left[1 + \left(0{,}4/Pr_{aire}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_{Daire}}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} = 181{,}5$$

A partir del número de Nusselt para el aire se obtiene el coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$\overline{Nu}_{Daire} = \frac{h_e D_3}{k_{aire}} \quad \rightarrow \quad h_e = \frac{k_{aire} \overline{Nu}_{Daire}}{D_3} = 39{,}7 \ W/m^2K$$

La temperatura de la superficie del aislante resulta:

$$\frac{T_s - T_{\infty i}}{\frac{1}{2\pi r_1 h_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_{acero}} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_{aislante}}} = \frac{T_{\infty e} - T_s}{\frac{1}{2\pi r_3 h_e}} \quad \rightarrow \quad T_s = 24{,}7 \ ^{o}C$$

- 2ª iteración:

En esta segunda iteración se utilizará el valor de T_s obtenido en la primera iteración, es decir, T_s = 24,71 ºC. Las propiedades del aire teniendo en cuenta este nuevo valor resultan:

$$\text{Propiedades de aire } T_f = \frac{T_{\infty e} + T_s}{2} = \frac{25 + 24,7}{2} = 24,85\ ºC \begin{cases} \nu_{aire} = 15,59 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ Pr_{aire} = 0,728 \\ k_{aire} = 0,0255\ W/mK \end{cases}$$

El número de Reynolds para el aire resulta:

$$Re_{Daire} = \frac{u_{aire} D_3}{\nu_{aire}} = 73779$$

El número de Péclèt para el aire resulta:

$$Pe_{Daire} = Re_{Daire}\, Pr_{aire} = \frac{u_{aire} D_3}{\nu_{aire}} Pr_{aire} = 53721$$

El número de Nusselt para el aire resulta:

$$\overline{Nu}_{Daire} = 0,3 + \frac{0,62 Re_{Daire}^{1/2} Pr_{aire}^{1/3}}{\left[1 + \left(0,4 / Pr_{aire}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_{Daire}}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} = 178$$

A partir del número de Nusselt para el aire se obtiene el coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$\overline{Nu}_{Daire} = \frac{h_e D_3}{k_{aire}} \quad \rightarrow \quad h_e = \frac{k_{aire} \overline{Nu}_{Daire}}{D_3} = 39,44\ W/m^2K$$

La temperatura de la superficie del aislante resulta:

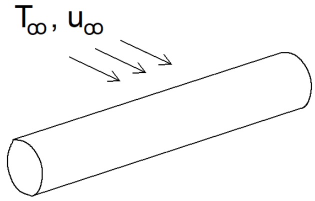
$$\frac{T_s - T_{\infty i}}{\frac{1}{2\pi r_1 h_i} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_{acero}} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_{aislante}}} = \frac{T_{\infty e} - T_s}{\frac{1}{2\pi r_3 h_e}} \quad \rightarrow \quad T_s = 24,7\ ºC$$

Como se puede observar, en esta segunda iteración se ha obtenido una temperatura de superficie de aislante igual que en la primera iteración, por lo que se considerará el valor obtenido como válido y ya no es necesario seguir iterando.

Problema 4.6

Una línea de alta tensión de 25 mm de diámetro tiene una resistencia eléctrica de 10^{-4} Ω/m y su temperatura superficial en estado estacionario es prácticamente uniforme e igual a 30 ºC. En flujo cruzado sobre la línea circula aire ambiental a 10 ºC y 5 m/s. Despreciar la transferencia de calor por radiación.
a) Calcular la corriente que está transmitiendo.
b) Si la línea se aproxima como una varilla sólida de cobre de conductividad térmica k = 396,1 W/m·K, ¿cuál es la temperatura del eje?
NOTA: Efecto Joule: $\dot{q}'_{Joule} = I^2 R'$ (W/m).

Solución apartado a:



El calor generado se disipa por convección y radiación de la forma:

$$\dot{q}'_{Joule} = \dot{q}'_{conv} + \cancel{\dot{q}'_{rad}}$$

$$I^2R' = \bar{h}\pi D(T_s - T_\infty)$$

Cálculo de $\bar{h}$:

$$\text{Se evalúan las propiedades necesarias: } T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = 20\ ºC \begin{cases} \nu = 15{,}14 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ Pr = 0{,}7293 \\ k = 0{,}02513\ W/mK \end{cases}$$

$$Pe_D = Re_D\, Pr = \frac{u_\infty D}{\nu} Pr = 8247 \cdot 0{,}793 = 6021{,}3$$

Como el número de Péclèt resultó mayor de 0,2 se empleará la expresión de Churchill:

$$\overline{Nu_D} = \frac{\bar{h}D}{k} = 0{,}3 + \frac{0{,}62\, Re_D^{1/2}\, Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(0{,}4/Pr\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} = 48{,}76$$

$$\overline{Nu_D} = \frac{\bar{h}D}{k} \quad \rightarrow \quad \bar{h} = \frac{\overline{Nu_D}\, k}{D} = 49{,}03\ W/m^2K$$

Una vez que se tiene el coeficiente de transferencia de calor la intensidad se calcula despejándola de la siguiente ecuación:

$$I^2R' = \bar{h}\pi D(T_s - T_\infty) \quad \rightarrow \quad I = 877{,}6\ A$$

Solución apartado b:

Resolviendo la ecuación general de conducción de calor:

$$\alpha \nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

En coordenadas cilíndricas:

$$\alpha \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial T}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

En estado estacionario y con conducción de calor solamente a lo largo de la coordenada radial queda:

$$\alpha\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)}+\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}\right]+\frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho c}=\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\alpha\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{q}'''_{gen}}{\rho c}=0$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=-\frac{\dot{q}'''_{gen}}{k}r$$

Resolviendo resulta:

$$T=-\frac{\dot{q}'''_{gen}}{4k_{cobre}}r^2+C_1\ln(r)+C_2$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinan aplicando condiciones de contorno:

$$\left.\begin{array}{ll} r=0: & \dfrac{dT}{dr}=0 \\ r=R: & T=30\ ^{o}C \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} C_1=0 \\ C_2=30{,}02\ ^{o}C \end{array}$$

Sustituyendo valores, la distribución de temperatura viene dada por la siguiente expresión:

$$T=99{,}02r+30{,}02$$

En el eje, r = 0, la temperatura resulta 30,02 ºC.

Problema 4.7

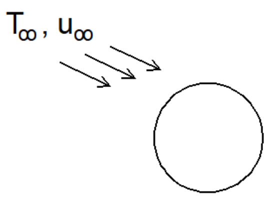
Una esfera de 10 mm de diámetro se encuentra a 75 ºC. La esfera está inmersa en una corriente de aire a presión atmosférica, temperatura 23 ºC y velocidad 10 m/s. Despreciar la tasa de transferencia de calor por radiación. Calcular:

a) Coeficiente de transferencia de calor por convección.

b) Tasa de transferencia de calor.

DATO: Área de una esfera: $4\pi R^2$.

<u>Solución apartado a</u>:



Se utilizará la siguiente correlación:

$$\overline{Nu_D} = \frac{\bar{h}D}{k_\infty} = 2 + \left(0,4\,Re_{D\infty}^{\;1/2} + 0,06\,Re_{D\infty}^{\;2/3}\right)Pr_\infty^{0,4}\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4}$$

$$\text{si} \qquad 0,71 < Pr_\infty < 3,2; \quad 3,5 < Re_{D\infty} < 7,6\cdot 10^4$$

Previamente es necesario verificar que se cumpla el rango de aplicación. Pero antes de comprobar esto se evalúan las propiedades que van a ser necesarias:

$$T_s = 75\ ºC \quad \rightarrow \quad \mu_s = 20,73\cdot 10^{-6}\ Pa\cdot s$$

$$T_\infty = 23\ ºC \begin{cases} \mu_\infty = 18,39\cdot 10^{-6}\ Pa\cdot s \\ \nu_\infty = 15,42\cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ k_\infty = 0,02535\ W/mK \\ Pr_\infty = 0,7286 \end{cases}$$

$$Re_{D\infty} = \frac{u_\infty D}{\nu_\infty} = \frac{10\cdot 0,01}{15,42\cdot 10^{-6}} = 6485,1$$

Se cumple el rango de aplicación de la correlación, por tanto se puede aplicar y el número de Nusselt resulta:

$$\overline{Nu_D} = \frac{\bar{h}D}{k_\infty} = 2 + \left(0,4\,Re_{D\infty}^{\;1/2} + 0,06\,Re_{D\infty}^{\;2/3}\right)Pr_\infty^{0,4}\left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4} = 47,38$$

$$\overline{Nu_D} = \frac{\bar{h}D}{k_\infty} \quad \rightarrow \quad \bar{h} = \frac{\overline{Nu_D}k_\infty}{D} = 120,11\ W/m^2K$$

<u>Solución apartado b</u>:

Despreciando la tasa de transferencia de calor por radiación, el calor total será el disipado por convección:

$$\dot{Q}_{conv} = \bar{h}A(T_s - T_\infty) = \bar{h}4\pi R^2(T_s - T_\infty) = 1,96\ W$$

TEMA 5

CONVECCIÓN FORZADA. FLUJO INTERIOR

Problema 5.1

Por un tubo circular de 60 mm de diámetro y longitud 7 m fluyen 0,01 kg/s de agua líquida, la cual sale del tubo a 80 ºC. Debido a la acción solar, la superficie del tubo está sometida a un flujo de calor de 2000 W/m^2, el cual, para simplificar los cálculos, asumir uniforme. Calcular la temperatura de la superficie a la salida del tubo.

Solución:

Se evalúan las propiedades necesarias: $T_m = 80\ ºC \begin{cases} \mu = 355{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{Ns/m}^2 \\ \Pr = 2{,}27 \\ k = 0{,}6561\ \text{W/mK} \end{cases}$

A continuación se calcula el número de Reynolds para comprobar si el flujo es laminar o turbulento:

$$Re_D = \frac{u_m D}{\nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu} = 597{,}9 < 2300 \quad \rightarrow \quad \text{flujo laminar}$$

A continuación se calcula el inverso del número de Graetz para comprobar si el flujo es desarrollado o no desarrollado:

$$Gz^{-1} = \frac{x/D}{Re_D \Pr} = 0{,}086 > 0{,}05 \quad \rightarrow \quad \text{flujo desarrollado}$$

Como el flujo es laminar desarrollado y el flujo de calor se puede asumir uniforme, el número de Nusselt resulta 4,36. A partir del mismo se obtiene el coeficiente de transferencia de calor a la salida:

$$Nu_D = \frac{h_s D}{k} \quad \rightarrow \quad h_s = \frac{Nu_D k}{D} = 47{,}68\ \text{W/m}^2\text{K}$$

Por tanto, la temperatura de la superficie a la salida del tubo resulta:

$$\dot{q}_s'' = h_s (T_{ss} - T_{ms}) \quad \rightarrow \quad 2000 = 47{,}68 (T_{ss} - 80) \quad \rightarrow \quad T_{ss} = 122\ ^\circ\text{C}$$

Problema 5.2

Un aceite de propiedades k = 0,1443 W/m·K; ν = 2,03·10^{-3} m^2/s y Pr = 23182 fluye a una velocidad de 2 m/s por el interior de una tubería de 30 cm de diámetro. La tubería tiene una longitud de 200 mm y su superficie se mantiene a una temperatura prácticamente uniforme de 0 ºC. Calcular el coeficiente de transferencia de calor para el aceite que circula por el interior de la tubería.

Solución:

Primeramente se procederá a calcular el número de Reynolds para ver si se trata de flujo laminar o turbulento:

$$Re_D = \frac{u_m D}{\nu} = \frac{2 \cdot 0{,}3}{2{,}03 \cdot 10^{-3}} = 294{,}8 < 2300 \quad \rightarrow \quad \text{flujo laminar}$$

Dado que se trata de flujo laminar, es necesario si se trata de flujo desarrollado o no desarrollado. Se calculará la inversa del número de Graetz a la salida del tubo, correspondiente a x = 0,2:

$$Gz^{-1} = \frac{x/D}{Re_D\,Pr} = \frac{0,2/0,3}{294,8 \cdot 23182} = 9,75 \cdot 10^{-8} < 0,05 \quad \rightarrow \quad \text{flujo no desarrollado}$$

Resulta por tanto flujo no desarrollado a la salida del tubo y por tanto para cualquier punto del tubo, que tendría un valor de x todavía menor. Para flujo laminar no desarrollado con un número de Prandtl tan elevado se utilizará la siguiente expresión para determinar el número de Nusselt promedio desde la entrada hasta la salida del tubo:

$$\overline{Nu_D} = \frac{\bar{h}D}{k} = 3,66 + \frac{0,0668(D/L)Re_D\,Pr}{1+0,04\left[(D/L)Re_D\,Pr\right]^{2/3}} = 366,6$$

A partir del número de Nusselt promedio se obtiene el coeficiente de transferencia de calor promedio desde la entrada hasta la salida del tubo:

$$\overline{Nu_D} = \frac{\bar{h}D}{k} \quad \rightarrow \quad \bar{h} = \frac{k\overline{Nu_D}}{D} = 176,3\ W/m^2K$$

Problema 5.3

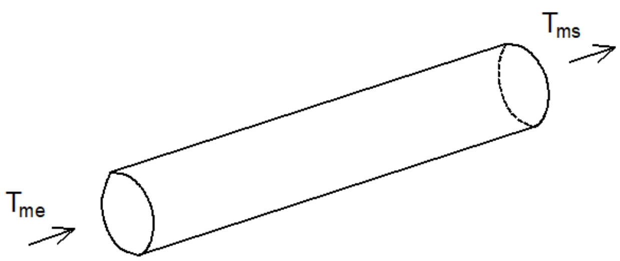
Un tubo circular de 50 mm de diámetro está sometido a un flujo de calor constante 10000 W/m^2. Por el interior del tubo fluyen 0,5 kg/s de un líquido de propiedades k = 0,5 W/m·K, μ = $500 \cdot 10^{-6}$ $N \cdot s/m^2$, Pr = 3 y c = 4100 J/kg·K, el cual entra a 15 ºC y sale a 60 ºC. La pared externa del tubo está bien aislada, de forma que todo este calor pasa al fluido. Calcular:

a) Longitud de tubo.

b) Temperatura de la superficie del tubo a la salida.

Solución apartado a:

Aplicando balance de energía al sistema abierto que constituye el conducto:



$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} + \sum_e \dot{m}_e(h_e + v_e^2/2 + gz_e) - \sum_s \dot{m}_s(h_s + v_s^2/2 + gz_s)$$

En estado estacionario, con potencia nula y despreciando variaciones de energía cinética y potencial:

$$\cancel{\frac{dE}{dt}} = \dot{Q} - \cancel{\dot{W}} + \sum_e \dot{m}_e(h_e + \cancel{v_e^2/2} + \cancel{gz_e}) - \sum_s \dot{m}_s(h_s + \cancel{v_s^2/2} + \cancel{gz_s})$$

$$0 = \dot{Q} + \dot{m}(h_e - h_s)$$

Como el calor específico es constante, la diferencia de entalpías resulta $h_e - h_s = c(T_{me} - T_{ms})$. Por tanto:

$$0 = \dot{Q} + \dot{m}c_p(T_{me} - T_{ms})$$

$$0 = \dot{q}_s''\pi DL + \dot{m}c_p(T_{me} - T_{ms}) \quad \rightarrow \quad L = 58{,}7 \text{ m}$$

<u>Solución apartado b:</u>

En todo punto se cumple que $\dot{q}'' = h(T_s - T_{fluido})$. Particularmente, a la salida también se cumple: $\dot{q}'' = h_s(T_{ss} - T_{ms})$

Para calcular h_s es necesario primeramente calcular el número de Reynolds para comprobar si el flujo es laminar o turbulento:

$$Re_D = \frac{u_m D}{\nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D\mu} = 25477 > 2300 \quad \rightarrow \quad \text{flujo turbulento}$$

Aplicando la correlación de Dittus-Boelter:

$$Nu_D = 0{,}023 Re_D^{4/5} Pr^n = 119{,}53$$

Despejando h a partir del número de Nusselt resulta:

$$Nu_D = \frac{hD}{k} \quad \rightarrow \quad h = \frac{Nu_D k}{D} = 1195{,}3 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Por tanto, la temperatura de la superficie del tubo a la salida resulta:

$$\dot{q}'' = h_s(T_{ss} - T_{ms}) \quad \rightarrow \quad T_{ss} = 68{,}36 \text{ ºC}$$

Problema 5.4

0,05 kg/s de aire caliente fluyen por un conducto circular de diámetro 0,15 m y 5 m de largo. El conducto se encuentra a una temperatura menor que la del aire, por lo que éste se enfría y abandona el tubo a 77 ºC. Calcular el coeficiente de transferencia de calor por convección a la salida del tubo.

<u>Solución</u>:

Se evalúan las propiedades necesarias: $T_m = 77 \text{ ºC} \begin{cases} \mu = 20{,}82 \cdot 10^{-6} \text{ Ns/m}^2 \\ Pr = 0{,}7163 \\ k = 0{,}0293 \text{ W/mK} \end{cases}$

A continuación se calcula el número de Reynolds para comprobar si el flujo es laminar o turbulento:

$$Re_D = \frac{u_m D}{\nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D\mu} = 20395 > 2300 \quad \rightarrow \quad \text{flujo turbulento}$$

Al tratarse de flujo turbulento no es cecesario comprobar si es desarrollado o no desarrollado porque en flujo turbulento la región de entrada es despreciable. Son de aplicación las correlaciones de Dittus-Boelter, Sieder-Tate, Petukhov, Gnielinski, etc pero con los datos que aporta el enunciado únicamente se puede utilizar la correlación de Dittus-Boelter:

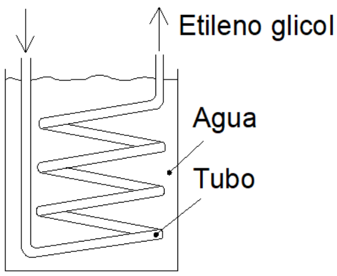
$$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n = 58,33$$

Nótese que el coeficiente n se ha tomado como 0,3 por tratarse de un enfriamiento. A partir del número de Nusselt, el coeficiente de transferencia de calor a la salida del tubo resulta:

$$Nu_D = \frac{hD}{k} \quad \rightarrow \quad h = \frac{Nu_D k}{D} = 11,38 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Problema 5.5

Un flujo de 0,15 kg/s de etileno glicol (c_p = 2562 J/kg·K, μ = 0,00522 N·s/m², k = 0,26 W/m·K, Pr = 51,3) fluye por el interior de un tubo de pared delgada y diámetro 3 mm. El tubo se enrolla y se sumerge en un baño de agua que mantiene la superficie del tubo a una temperatura prácticamente constante de 10 ºC. El etileno glicol entra al tubo a 85 ºC y sale a 35 ºC. Despreciar la transferencia de calor por radiación. Calcular la longitud del tubo.



Solución:

En este caso no es necesario consultar las propiedades en tablas puesto que se proporcionan en el enunciado. A continuación se calcula el número de Reynolds para comprobar si el flujo es laminar o turbulento:

$$Re_D = \frac{u_m D}{\nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu} = 12202 > 2300 \quad \rightarrow \quad \text{flujo turbulento}$$

Al tratarse de flujo turbulento no es cecesario comprobar si es desarrollado o no desarrollado porque en flujo turbulento la región de entrada es despreciable. Son de aplicación las correlaciones de Dittus-Boelter, Sieder-Tate, Petukhov, Gnielinski, etc pero con los datos que aporta el enunciado únicamente se puede utilizar la correlación de Dittus-Boelter:

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n = 139,28$$

Nótese que el coeficiente n se ha tomado como 0,3 por tratarse de un enfriamiento. A partir del número de Nusselt, el coeficiente de transferencia de calor resulta:

$$Nu_D = \frac{hD}{k} \quad \rightarrow \quad h = \frac{Nu_D k}{D} = 12071,4 \text{ W/m}^2\text{K}$$

La longitud de tubo se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\frac{T_s - T_{ms}}{T_s - T_{me}} = e^{-\frac{\bar{h}\pi D}{\dot{m}c_p}L} \quad \rightarrow \quad \frac{10-35}{10-85} = e^{-\frac{12071{,}4\cdot\pi\cdot 0{,}003}{0{,}15\cdot 2562}L} \quad \rightarrow \quad L = 3{,}71\ \text{m}$$

Otra forma de resolver el problema es de la siguiente manera:

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p(T_{ms} - T_{me}) = -19215\ \text{W}$$

$$\dot{Q} = \bar{h}A\Delta T_{ml} = \bar{h}\pi DL\Delta T_{ml} \quad \rightarrow \quad L = 3{,}71\ \text{m}$$

$$\text{siendo: } \Delta T_{ml} = \frac{(T_s - T_{ms}) - (T_s - T_{me})}{\ln\left(\frac{T_s - T_{ms}}{T_s - T_{me}}\right)} = -45{,}51$$

Problema 5.6

Por el interior de un conducto rectangular de 1,5 m de largo y sección 50 x 100 mm circulan 0,15 kg/s de aire. La superficie del conducto se mantiene a una temperatura prácticamente uniforme de 150 ºC y el aire abandona el mismo a 40 ºC y presión atmosférica. Calcular el coeficiente de transferencia de calor a la salida del conducto.

Solución:

El primer paso consiste en evaluar las propiedades necesarias. Como el enunciado pide el coeficiente de transferencia de calor a la salida de tubo, las propiedades del aire se evaluarán a la salida del tubo, cuya temperatura se indica que es de 40ºC:

$$T_m = 77\ ºC \begin{cases} \mu = 19{,}17\cdot 10^{-6}\ \text{Ns/m}^2 \\ \Pr = 0{,}7245 \\ k = 0{,}0266\ \text{W/mK} \end{cases}$$

Como no se trata de un conducto circular es necesario calcular el diámetro hidráulico:

$$D_h = \frac{4A_t}{P} = \frac{4\cdot 0{,}05\cdot 0{,}1}{2\cdot(0{,}05+0{,}1)} = 0{,}0033\ \text{m}$$

Para comprobar si el flujo es laminar o turbulento se calcula el número de Reynolds relativo al diámetro hidráulico:

$$Re_D = \frac{u_m D_h}{\nu} = \frac{\dot{m}D_h}{A_t\mu} = \frac{0{,}15\cdot 0{,}0033}{0{,}05\cdot 0{,}1\cdot 19{,}17\cdot 10^{-6}} = 5164 > 2300 \quad \rightarrow \quad \text{flujo turbulento}$$

Al tratarse de flujo turbulento se pueden aplicar las correlaciones correspondientes a conductos circulares. En flujo turbulento la región de entrada es despreciable y son de aplicación las correlaciones de Dittus-Boelter, Sieder-Tate, Petukhov, Gnielinski, etc pero con los datos que aporta el enunciado únicamente se puede utilizar la correlación de Dittus-Boelter:

$$Nu_D = 0{,}023 Re_D^{4/5} \Pr^n = 19{,}49$$

Nótese que el coeficiente n se ha tomado como 0,4 por tratarse de un calentamiento. A partir del número de Nusselt, el coeficiente de transferencia de calor a la salida del tubo resulta:

$$Nu_D = \frac{hD_h}{k} \quad \rightarrow \quad h = \frac{Nu_D k}{D_h} = 157{,}16 \text{ W/m}^2\text{K}$$

TEMA 6

CONVECCIÓN LIBRE

Problema 6.1

Una placa delgada de 0,5 × 0,5 m se mantiene a una temperatura prácticamente uniforme de 80 ºC. La parte inferior de la placa está perfectamente aislada, mientras que la parte superior se expone a aire en reposo a 25 ºC. La emisividad superficial es unitaria y los alrededores también se encuentran a 25 ºC. Calcular la transferencia de calor al ambiente.

Solución:

La transferencia de calor se debe a convección y a radiación:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{rad} + \dot{Q}_{conv}$$

El calor disipado por radiación viene dado por:

$$\dot{Q}_{rad} = \sigma\varepsilon A(T_s^4 - T_{alr}^4) = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot (353^4 - 298^4) = 112,7 \text{ W}$$

El calor disipado por convección viene dado por:

$$\dot{Q}_{conv} = hA(T_s - T_\infty)$$

Es necesario calcular el coeficiente de transferencia de calor por convección, h. Se trata de la región superior de una superficie caliente. Es necesario calcular la longitud característica mediante la siguiente expresión:

$$L_C = \frac{A_s}{P} = \frac{L^2}{4L} = \frac{L}{4} = 0,125 \text{ m}$$

Las propiedades necesarias se evalúan a la temperatura de película:

$$T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = \frac{25 + 80}{2} = 52,5 \text{ ºC} \begin{cases} \nu = 18,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ Pr = 0,7216 \\ k = 0,02753 \text{ W/mK} \\ \alpha = 25,22 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ \beta \approx 1/T_f = 1/325,5 = 0,0031 \text{ K}^{-1} \end{cases}$$

El número de Rayleigh resulta:

$$Ra_{L_C} = \frac{g\beta|T_s - T_\infty|L_C^3}{\alpha\nu} = \frac{9,81 \cdot 0,0031 \cdot (80 - 25) \cdot 0,125^3}{25,22 \cdot 10^{-6} \cdot 18,2 \cdot 10^{-6}} = 7,1 \cdot 10^6$$

A la vista del numero de Rayleigh obtenido, se puede aplicar la siguiente correlación para el número de Nusselt:

$$\overline{Nu}_{L_C} = 0,54 Ra_{L_C}^{1/4} = 27,9$$

A partir del número de Nusselt se obtiene el coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$\overline{Nu}_{L_C} = \frac{hL_C}{k} \quad \rightarrow \quad h = \frac{k\overline{Nu}_{L_C}}{L_C} = 6,14 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Y el calor disipado por convección resulta:

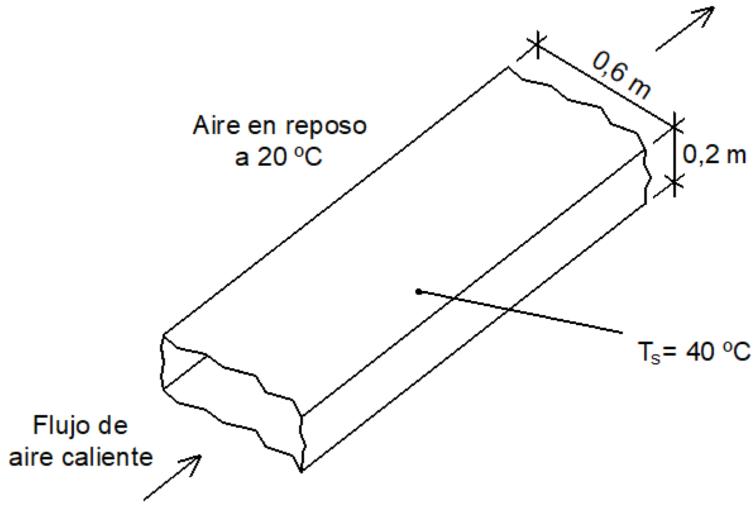
$$\dot{Q}_{conv} = hA(T_s - T_\infty) = 6,14 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot (80 - 25) = 84,5 \text{ W}$$

Finalmente, el calor total resulta:

$$\dot{Q} = 112,7 + 84,5 = 197,2 \text{ W}$$

Problema 6.2

Un flujo de aire caliente que circula a través de un largo conducto rectangular de sección 0,2 × 0,6 m mantiene la superficie externa del conducto a una temperatura prácticamente uniforme de 40ºC. El conducto se encuentra rodeado de aire en reposo a 20 ºC y alrededores también a 20 ºC. La emisividad superficial es de ε = 0,6. Calcular la pérdida de calor por unidad de longitud.



Solución:

El flujo de calor disipado por el conducto es mediante radiación y convección:

$$\dot{q}' = \dot{q}'_{rad} + \dot{q}'_{conv}$$

El calor disipado por radiación, por unidad de longitud, viene dado por:

$$\dot{q}'_{rad} = \sigma\varepsilon\frac{A}{L}(T_s^4 - T_{alr}^4) = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot (2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,6) \cdot (313^4 - 293^4) = 121,2 \text{ W/m}$$

El calor disipado por convección, en la parte externa del conducto es debido a convección libre. Se debe a la aportación de las dos superficies laterales más la superior más la inferior, tal y como se indica en la siguiente expresión:

$$\dot{q}'_{conv} = 2\dot{q}'_{lat} + \dot{q}'_{sup} + \dot{q}'_{inf} = 2 \cdot 0,2 \cdot \bar{h}_{lat}(T_s - T_\infty) + 0,6 \cdot \bar{h}_{sup}(T_s - T_\infty) + 0,6 \cdot \bar{h}_{inf}(T_s - T_\infty)$$

Es necesario calcular los coeficientes de transmisión de calor por convección $\bar{h}_{lat}$, $\bar{h}_{sup}$ y $\bar{h}_{inf}$. El procedimiento se indica a continuación.

$$\text{Evaluación de propiedades a } T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = 30\ \text{ºC} \begin{cases} \nu = 16{,}06 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ Pr = 0{,}7269 \\ k = 0{,}02587\ W/mK \\ \alpha = 22{,}1 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ \beta \approx 1/T_f = 1/303 = 0{,}0033\ K^{-1} \end{cases}$$

<u>Superficies laterales</u>:

Se trata de superficies verticales. Se comprobará si se trata de flujo laminar o turbulento mediante el número de Rayleigh:

$$Ra_{Llat} = \frac{g\beta |T_s - T_\infty| L_{lat}^3}{\alpha\nu} = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}0033 \cdot (40-20) \cdot 0{,}2^3}{22{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 16{,}06 \cdot 10^{-6}} = 1{,}46 \cdot 10^7 < 10^9 \quad \rightarrow \quad \text{flujo laminar}$$

Nótese que en la expresión anterior se ha puesto como longitud L_{lat} la dimensión vertical 0,2 m. Al tratarse de flujo laminar, la siguiente expresión es apropiada para calcular el número de Nusselt para las superficies laterales:

$$\overline{Nu}_{Llat} = 0{,}68 + \frac{0{,}67 Ra_{Llat}^{1/4}}{\left[1 + (0{,}492/Pr)^{9/16}\right]^{4/9}} = 32{,}5$$

A partir del Número de Nusselt se obtiene el coeficiente de transferencia de calor para las superficies laterales:

$$\overline{Nu}_{Llat} = \frac{\bar{h}_{lat} L}{k} \quad \rightarrow \quad \bar{h}_{lat} = \frac{k Nu_{Llat}}{L} = \frac{0{,}02587 \cdot 32{,}5}{0{,}2} = 4{,}2\ W/m^2K$$

<u>Superficie superior</u>:

Se trata de analizar la región superior de una superficie caliente. Es necesario determinar la longitud característica, la cual viene dada por:

$$L_c = \frac{A_s}{P} = \frac{L \cdot 0{,}6}{2 \cdot (L + 0{,}6)} \approx \frac{\cancel{L} \cdot 0{,}6}{2 \cdot \cancel{L}} = 0{,}3\ m$$

En la expresión anterior se ha considerado que la longitud del tubo es lo suficientemente elevada como para considerar que L + 0,6 ≈ L.
El número de Rayleigh para la superficie superior resulta:

$$Ra_{Lcsup} = \frac{g\beta |T_s - T_\infty| L_c^3}{\alpha\nu} = \frac{9{,}81 \cdot 0{,}0033 \cdot (40-20) \cdot 0{,}3^3}{22{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 16{,}06 \cdot 10^{-6}} = 4{,}92 \cdot 10^7$$

Para el número de Rayleigh obtenido, se utilizará la siguiente correlación para calcular el número de Nusselt para la superficie superior:

$$\overline{Nu}_{L_{Csup}} = 0{,}15 Ra_{L_C}^{1/3} = 54{,}95\ W/m^2K$$

A partir del Número de Nusselt se obtiene el coeficiente de transferencia de calor para la superficie superior:

$$\overline{Nu}_{L_{C\,sup}} = \frac{\bar{h}_{sup} L_C}{k} \quad \rightarrow \quad \bar{h}_{sup} = \frac{k\overline{Nu}_{L_{C\,sup}}}{L_C} = 4,74\ W/m^2K$$

<u>Superficie inferior</u>:

Se trata de analizar la región inferior de una superficie caliente. La longitud característica resulta la misma que la que se ha calculado para la superficie superior, es decir, 0,3 m.

El número de Rayleigh también resulta el mismo que para la superficie superior, es decir, $4{,}92 \cdot 10^7$. Para este valor, se utilizará la siguiente correlación para calcular el número de Nusselt para la superficie inferior:

$$\overline{Nu}_{L_{C\,inf}} = 0,27 Ra_{L_C}^{1/4} = 22,62$$

A partir del Número de Nusselt se obtiene el coeficiente de transferencia de calor para la superficie inferior:

$$\overline{Nu}_{L_{C\,inf}} = \frac{\bar{h}_{inf} L_C}{k} \quad \rightarrow \quad \bar{h}_{inf} = \frac{k\overline{Nu}_{L_{C\,inf}}}{L_C} = 1,95\ W/m^2K$$

Por tanto, una vez calculados los coeficientes de transferencia de calor por convección para las superficies laterales, superior e inferior, ya se está en condiciones de calcular el calor disipado por convección, por unidad de longitud, el cual resulta:

$$\dot{q}'_{conv} = 2\dot{q}'_{lat} + \dot{q}'_{sup} + \dot{q}'_{inf} = 2 \cdot 0,2 \cdot \bar{h}_{lat}(T_s - T_\infty) + 0,8 \cdot \bar{h}_{sup}(T_s - T_\infty) + 0,8 \cdot \bar{h}_{inf}(T_s - T_\infty) =$$

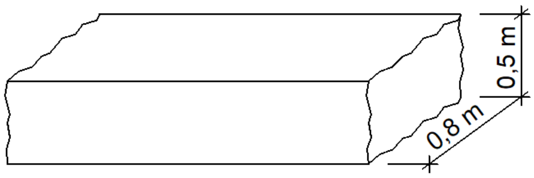
$$= 2 \cdot 0,2 \cdot 4,2 \cdot (40-20) + 0,6 \cdot 4,74 \cdot (40-20) + 0,6 \cdot 1,95 \cdot (40-20) = 113,9\ W/m$$

Y, finalmente, el calor total disipado por unidad de longitud resulta:

$$\dot{q}' = \dot{q}'_{rad} + \dot{q}'_{conv} = 151,6 + 125,7 = 265,5\ W/m$$

Problema 6.3

La placa de la figura, de 0,8 × 0,5 m, se mantiene a una temperatura prácticamente uniforme de 60 ºC. Tanto por la parte superior como inferior, la placa se expone a aire en reposo a 20ºC. Los alrededores también se encuentran a 20 ºC. La emisividad superficial es de ε = 0,9. Calcular la tasa de transferencia de calor por metro de longitud.



Solución:

El flujo de calor disipado por el conducto es mediante radiación y convección:

$$\dot{q}' = \dot{q}'_{rad} + \dot{q}'_{conv}$$

El calor disipado por radiación, por unidad de longitud, viene dado por:

$$\dot{q}'_{rad} = \sigma\varepsilon \frac{A}{L}(T_s^4 - T_{alr}^4) = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot (2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,8) \cdot (333^4 - 293^4) = 653,6\ W/m$$

El calor disipado por convección, en la parte externa del conducto es debido a convección libre. Se debe a la aportación de las dos superficies laterales más la superior más la inferior, tal y como se indica en la siguiente expresión:

$$\dot{q}'_{conv} = 2\dot{q}'_{lat} + \dot{q}'_{sup} + \dot{q}'_{inf} = 2 \cdot 0,5 \cdot \overline{h}_{lat}(T_s - T_\infty) + 0,8 \cdot \overline{h}_{sup}(T_s - T_\infty) + 0,8 \cdot \overline{h}_{inf}(T_s - T_\infty)$$

Es necesario calcular los coeficientes de transmisión de calor por convección $\overline{h}_{lat}$, $\overline{h}_{sup}$ y $\overline{h}_{inf}$. El procedimiento se indica a continuación.

Evaluación de propiedades a $T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = 313\ K$ $\begin{cases} \nu = 17 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ Pr = 0,7245 \\ k = 0,02661\ W/mK \\ \alpha = 23,47 \cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ \beta \approx 1/T_f = 1/313 = 0,0032\ K^{-1} \end{cases}$

Superficies laterales:

Se trata de superficies verticales. Se comprobará si se trata de flujo laminar o turbulento mediante el número de Rayleigh:

$$Ra_{Llat} = \frac{g\beta|T_s - T_\infty|L_{lat}^3}{\alpha\nu} = \frac{9,81 \cdot 0,0032 \cdot (60-20) \cdot 0,5^3}{17 \cdot 10^{-6} \cdot 23,47 \cdot 10^{-6}} = 3,93 \cdot 10^8 < 10^9 \quad \rightarrow \quad \text{flujo laminar}$$

Nótese que en la expresión anterior se ha puesto como longitud L_{lat} la dimensión vertical 0,5 m. Al tratarse de flujo laminar, la siguiente expresión es apropiada para calcular el número de Nusselt para las superficies laterales:

$$\overline{Nu}_{Llat} = 0,68 + \frac{0,67 Ra_{Llat}^{1/4}}{\left[1 + (0,492/Pr)^{9/16}\right]^{4/9}} = 73,27$$

A partir del Número de Nusselt se obtiene el coeficiente de transferencia de calor para las superficies laterales:

$$\overline{Nu}_{Llat} = \frac{\overline{h}_{lat} L}{k} \quad \rightarrow \quad \overline{h}_{lat} = \frac{k Nu_{Llat}}{L} = \frac{0,02661 \cdot 73,27}{0,5} = 3,9\ W/m^2K$$

Superficie superior:

Se trata de analizar la región superior de una superficie caliente. Es necesario determinar la longitud característica, la cual viene dada por:

$$L_c = \frac{A_s}{P} = \frac{L \cdot 0,8}{2 \cdot (L + 0,8)} \approx \frac{\cancel{L} \cdot 0,8}{2 \cdot \cancel{L}} = 0,4 \text{ m}$$

En la expresión anterior se ha considerado que la longitud del tubo es lo suficientemente elevada como para considerar que L + 0,8 ≈ L.
El número de Rayleigh para la superficie superior resulta:

$$Ra_{Lc\,sup} = \frac{g\beta\left|T_s - T_\infty\right|L_c^3}{\alpha\nu} = \frac{9,81 \cdot 0,0032 \cdot (60 - 20) \cdot 0,8^3}{17 \cdot 10^{-6} \cdot 23,47 \cdot 10^{-6}} = 2,01 \cdot 10^8$$

Para el número de Rayleigh obtenido, se utilizará la siguiente correlación para calcular el número de Nusselt para la superficie superior:

$$\overline{Nu}_{L_C sup} = 0,15 Ra_{L_C}^{1/3} = 87,92 \text{ W/m}^2\text{K}$$

A partir del Número de Nusselt se obtiene el coeficiente de transferencia de calor para la superficie superior:

$$\overline{Nu}_{L_C sup} = \frac{\overline{h}_{sup} L_C}{k} \quad \rightarrow \quad \overline{h}_{sup} = \frac{k\overline{Nu}_{L_C sup}}{L_C} = 5,85 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Superficie inferior:

Se trata de analizar la región inferior de una superficie caliente. La longitud característica resulta la misma que la que se ha calculado para la superficie superior, es decir, 0,4 m.

El número de Rayleigh también resulta el mismo que para la superficie superior, es decir, $2,01 \cdot 10^8$. Para este valor, se utilizará la siguiente correlación para calcular el número de Nusselt para la superficie inferior:

$$\overline{Nu}_{L_C inf} = 0,27 Ra_{L_C}^{1/4} = 32,16$$

A partir del Número de Nusselt se obtiene el coeficiente de transferencia de calor para la superficie inferior:

$$\overline{Nu}_{L_C inf} = \frac{\overline{h}_{inf} L_C}{k} \quad \rightarrow \quad \overline{h}_{inf} = \frac{k\overline{Nu}_{L_C inf}}{L_C} = 2,14 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Por tanto, una vez calculados los coeficientes de transferencia de calor por convección para las superficies laterales, superior e inferior, ya se está en condiciones de calcular el calor disipado por convección, por unidad de longitud, el cual resulta:

$$\dot{q}'_{conv} = 2\dot{q}'_{lat} + \dot{q}'_{sup} + \dot{q}'_{inf} = 2 \cdot 0,5 \cdot \overline{h}_{lat}(T_s - T_\infty) + 0,8 \cdot \overline{h}_{sup}(T_s - T_\infty) + 0,8 \cdot \overline{h}_{inf}(T_s - T_\infty) =$$

$$= 2 \cdot 0,5 \cdot 3,9 \cdot (60 - 20) + 0,8 \cdot 5,85 \cdot (60 - 20) + 0,8 \cdot 2,14 \cdot (60 - 20) = 569,2 \text{ W/m}$$

Y, finalmente, el calor total disipado por unidad de longitud resulta:

$$\dot{q}' = \dot{q}'_{rad} + \dot{q}'_{conv} = 653,6 + 569,2 = 1222,8 \text{ W/m}$$

Problema 6.4

En una bombilla incandescente de 100 W se ha medido la temperatura superficial resultando 180 ºC. Asumir que esta temperatura superficial es prácticamente uniforme y que la bombilla es esférica, con un diámetro de 10 cm. La emisividad de la superficie del cristal es 0,85 y el aire ambiente se encuentra en reposo y a una temperatura de 20 ºC. Determinar el porcentaje de energía que se pierde en forma de calor.
DATO: Área de la superficie de una esfera: $4\pi R^2$.

Solución:

La energía que se pierde en forma de calor es el disipado por radiación y por convección:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{rad} + \dot{Q}_{conv} = \varepsilon\sigma A(T_s^4 - T_{alr}^4) + \bar{h}_D A(T_s - T_\infty) = \varepsilon\sigma 4\pi R^2(T_s^4 - T_{alr}^4) + \bar{h}_D 4\pi R^2(T_s - T_\infty)$$

Es necesario calcular el coeficiente de transferencia de calor por convección, $\bar{h}_D$:

Se evalúan las propiedades necesarias: $T_f = \dfrac{T_s + T_\infty}{2} = 100$ ºC $\begin{cases} \nu = 23,04 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ Pr = 0,7199 \\ k = 0,031 \text{ W/mK} \\ \alpha = 32,36 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ \beta \approx 1/T_f = 1/373 = 0,002681 \text{ K}^{-1} \end{cases}$

Número de Rayleigh: $Ra_D = \dfrac{g\beta|T_s - T_\infty|D^3}{\alpha\nu} = 5,643 \cdot 10^6$

El número de Nusselt se obtiene a partir de la siguiente correlación:

$$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0,589 Ra_D^{1/4}}{\left[1 + (0,469/Pr)^{9/16}\right]^{4/9}} = 22,76$$

A partir del número de Nusselt se obtiene el coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$\overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}_D D}{k} \quad \rightarrow \quad \bar{h}_D = \frac{k\overline{Nu}_D}{D} = 7,041 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Por tanto, la energía que se pierde en forma de calor resulta:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{rad} + \dot{Q}_{conv} = \varepsilon\sigma 4\pi R^2 (T_s^4 - T_{alr}^4) + \bar{h}_D 4\pi R^2 (T_s - T_\infty) = 52,57 + 35,37 = 87,94 \text{ W}$$

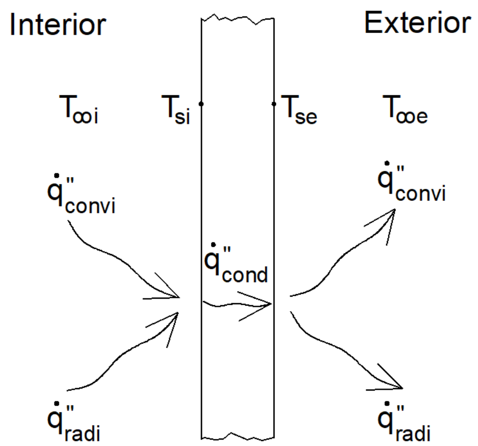
Si la energía que se pierde por calor resulta 87,94 W, esto supone un 87,94% teniendo en cuenta que la bombilla es de 100 W.

Es interesante notar de las importantes pérdidas de calor que presentan este tipo de bombillas. Una bombilla incandescente produce luz mediante el calentamiento por efecto Joule de un filamento de tungsteno hasta ponerlo al rojo blanco. Debido a su baja eficiencia este tipo de bombillas están actualmente prohibidas ya que, por ejemplo en el caso de la bombilla de este problema, un 87,94% de la electricidad se transforma en calor mientras que solamente el restante, es decir, un 12,06%, se transforma en luz.

Problema 6.5

La condensación del vapor de agua del aire sobre una superficie se produce si la temperatura de dicha superficie es inferior a la temperatura de rocío del aire. En la superficie interior de los parabrisas de los automóviles la condensación puede evitarse impulsando aire caliente paralelamente a dicha superficie. Calcular la temperatura mínima a la que debe de impulsarse aire caliente a 6 m/s para desempañar el parabrisas de un automóvil que circula a 72 km/h cuando la temperatura exterior es de 0 ºC y la de rocío se estima en 10 ºC para la humedad existente bajo las condiciones que se desean analizar. Tomar como longitud del parabrisas 60 cm, espesor 6 mm y conductividad térmica del vidrio 0,95 W/m·K. Asumir que tanto el aire exterior como el interior fluyen en dirección paralela al parabrisas. Despreciar la transferencia de calor por radiación y asumir que en el exterior del cristal no se produce condensación.

Solución:



Haciendo un balance de energía resulta:

$$\dot{q}''_{convi} + \dot{q}''_{radi} = \dot{q}''_{cond} = \dot{q}''_{conve} + \dot{q}''_{rade}$$

Para simplificar los cálculos, el enunciado sugiere despreciar la transferencia de calor por radiación, por tanto:

$$\dot{q}''_{convi} + \cancel{\dot{q}''_{radi}} = \dot{q}''_{cond} = \dot{q}''_{conve} + \cancel{\dot{q}''_{rade}}$$

$$\bar{h}_i(T_{\infty i} - T_{si}) = k\frac{T_{si} + T_{se}}{e} = \bar{h}_i(T_{\infty i} - T_{si})$$

Para simplificar los cálculos, las temperaturas interior y exterior del cristal, T_{si} y T_{se}, se asumirán uniformes. Lo que indica el problema es que $T_{si} \geq 10$ ºC. Se para el caso límite de $T_{si} = 10$ ºC.

Son necesarias las temperaturas $T_{\infty i}$ y T_{se} indicadas en la figura para evaluar algunas de las propiedades necesarias para resolver el problema pero dichas temperaturas no se pueden determinar sin antes resolver el problema. Se realizará por tanto un procedimiento iterativo.

<u>1ª iteración</u>:

En esta primera iteración se asumirá por ejemplo que $T_{\infty i} = 30$ ºC y $T_{se} = 8$ºC.

- Cálculo de $\bar{h}_i$ (convección forzada):

$$T_{fi} = \frac{T_{si} + T_{\infty i}}{2} = \frac{30 + 10}{2} = 20 \text{ ºC} \begin{cases} \nu_i = 15{,}14 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ Pr_i = 0{,}7293 \\ k_i = 0{,}02513 \text{ W/mK} \end{cases}$$

$$Re_i = \frac{u_{\infty i} L}{\nu_i} = 237723 < 5 \cdot 10^5 \quad \rightarrow \quad \text{flujo laminar}$$

Como se indicó anteriormente, como aproximación que se está considerando que las temperaturas en cada cara del parabrisas, T_{se} y T_{si}, son uniformes. Por tanto, para calcular el número de Nusselt se va a utilizar una correlación para temperatura de superficie constante, concretamente la siguiente:

$$\overline{Nu}_i = 0{,}064 Re_i^{1/2} Pr_i^{1/3} = 294{,}1$$

$$\overline{Nu}_i = \frac{\bar{h}_i L}{k_i} \quad \rightarrow \quad \bar{h}_i = 12{,}2 \text{ W/m}^2\text{K}$$

- Cálculo de $\bar{h}_e$ (convección forzada):

$$T_{fe} = \frac{T_{se} + T_{\infty e}}{2} = \frac{8 + 0}{2} = 4 \text{ ºC} \begin{cases} \nu_e = 13{,}72 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ Pr_e = 0{,}7333 \\ k_e = 0{,}02393 \text{ W/mK} \end{cases}$$

$$Re_e = \frac{u_{\infty e} L}{\nu_e} = 874863 > 5 \cdot 10^5 \quad \rightarrow \quad \text{flujo turbulento}$$

$$\overline{Nu}_e = (0{,}037 Re_e^{4/5} - 871{,}3) Pr_e^{1/3} = 1106$$

$$\overline{Nu}_e = \frac{\bar{h}_e L}{k_e} \quad \rightarrow \quad \bar{h}_e = 44{,}1 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Por tanto:

$$\bar{h}_i(T_{\infty i}-T_{si}) = k\frac{T_{si}+T_{se}}{e} = \bar{h}_i(T_{\infty i}-T_{si}) \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} T_{\infty i} = 38,27\ ^{o}C \\ T_{se} = 7,821\ ^{o}C \end{matrix}$$

Con estos valores de $T_{\infty i}$ y T_{se} se inicia la segunda iteración.

2ª iteración:

- Cálculo de h_i:

$$T_{fi} = \frac{T_{si}+T_{\infty i}}{2} = \frac{38,27+10}{2} = 24,13\ ºC \ \begin{cases} \nu_i = 15,52\cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ Pr_i = 0,7283 \\ k_i = 0,02543\ W/mK \end{cases}$$

$$Re_i = \frac{u_{\infty i}L}{\nu_i} = 231943 < 5\cdot 10^5 \quad \rightarrow \quad \text{flujo laminar}$$

$$\overline{Nu}_i = 0,064\,Re_i^{1/2}\,Pr_i^{1/3} = 287,7$$

$$\overline{Nu}_i = \frac{\bar{h}_i L}{k_i} \quad \rightarrow \quad \bar{h}_i = 12,2\ W/m^2K$$

- Cálculo de h_e:

$$T_{fe} = \frac{T_{se}+T_{\infty e}}{2} = \frac{7,821+0}{2} = 3,91\ ºC \ \begin{cases} \nu_e = 13,71\cdot 10^{-6}\ m^2/s \\ Pr_e = 0,7334 \\ k_e = 0,02392\ W/mK \end{cases}$$

$$Re_e = \frac{u_{\infty e}L}{\nu_e} = 875363 > 5\cdot 10^5 \quad \rightarrow \quad \text{flujo turbulento}$$

$$\overline{Nu}_e = (0,037\,Re_e^{4/5} - 871,3)Pr_e^{1/3} = 1107$$

$$\overline{Nu}_e = \frac{\bar{h}_e L}{k_e} \quad \rightarrow \quad \bar{h}_e = 44,13\ W/m^2K$$

Por tanto:

$$\bar{h}_i(T_{\infty i}-T_{si}) = k\frac{T_{si}+T_{se}}{e} = \bar{h}_i(T_{\infty i}-T_{si}) \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} T_{\infty i} = 38,29\ ^{o}C \\ T_{se} = 7,821\ ^{o}C \end{matrix}$$

Estos valores de $T_{\infty i}$ y T_{se} son prácticamente iguales que los obtenidos en la primera iteración, por tanto, se asumen como correctos y ya no es necesario seguir iterando. La temperatura que se pide en el enunciado es $T_{\infty i} \geq 38,29$ ºC.

Problema 6.6

Por una larga tubería horizontal de diámetro 50 mm y espesor despreciable fluyen 0,3 kg/s de agua líquida saturada a una temperatura uniforme de 80 ºC. La tubería se cubre con una capa de material aislante de 5 mm de espesor y conductividad térmica 0,05 W/m·K y se expone a aire que se encuentra a 25 ºC, presión atmosférica y en reposo. Se mide la temperatura del aislante en contacto con el aire, resultando un valor uniforme de 50 ºC. Calcular:

a) Coeficiente de transferencia de calor por convección para el agua.

b) Coeficiente de transferencia de calor por convección para el aire.

c) Calor por unidad de longitud, en W/m, transferido por radiación.

Solución apartado a:

Se trata de un caso de convección forzada, flujo interno.

Se evalúan las propiedades necesarias: $T_m = 80\ ºC \begin{cases} \mu = 355{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{Ns/m^2} \\ Pr = 2{,}27 \\ k = 0{,}06561\ \mathrm{W/mK} \end{cases}$

$$Re_D = \frac{u_m D}{\nu} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu} = 21522 > 2300 \quad \rightarrow \quad \text{flujo turbulento}$$

Para calcular el coeficiente de transferencia de calor por convección se aplica, por ejemplo, la correlación de Dittus-Boelter. El coeficiente n en este caso es 0,3 porque el fluido se enfría:

$$Nu_{Di} = 0{,}023 Re_D^{4/5} Pr^n = 86{,}07$$

A partir del número de Nusselt se obtiene el coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$Nu_{Di} = \frac{h_i D}{k} \quad \rightarrow \quad h_i = \frac{Nu_{Di} k}{D} = 1129\ \mathrm{W/m^2K}$$

Solución apartado b:

Se trata de un caso de convección libre.

Se evalúan las propiedades necesarias: $T_f = \frac{T_\infty + T_s}{2} = 37{,}5\ ºC \begin{cases} \nu = 16{,}76 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s} \\ Pr = 0{,}7251 \\ k = 0{,}0264\ \mathrm{W/mK} \\ \alpha = 23{,}12 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s} \\ \beta \approx 1/T_f = 1/310{,}5 = 0{,}0032\ \mathrm{K^{-1}} \end{cases}$

Número de Rayleigh: $Ra_D = Gr_D Pr = \frac{g\beta |T_s - T_\infty| D^3}{\alpha\nu} = 387150$

El número de Nusselt se obtiene a partir de la siguiente correlación:

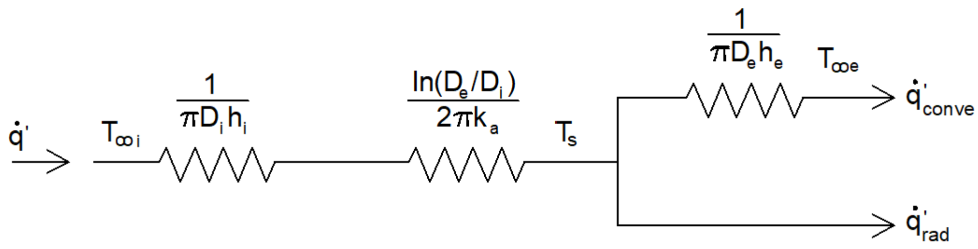
$$\overline{Nu}_{De} = \left\{ 0{,}6 + \frac{0{,}387 Ra_D^{1/6}}{\left[1 + (0{,}559/Pr)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\}^2 = 11{,}2$$

A partir del número de Nusselt se obtiene el coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$\overline{Nu}_{De} = \frac{\bar{h}_e D}{k} \quad \rightarrow \quad \bar{h}_e = \frac{k\overline{Nu}_{De}}{D} = 4,93\ \mathrm{W/m^2K}$$

<u>Solución apartado c</u>:

Este apartado se resolverá aplicando analogía eléctrica. El circuito eléctrico equivalente se indica en la siguiente figura. La transferencia de calor por radiación no se puede representar mediante resistencias porque no es lineal con la variación de temperatura, por lo que simplemente se indica de modo ilustrativo para entender como se comporta.



Con los datos que da el enunciado, la única manera de calcular el calor transferido por radiación es mediante la resta del calor total, $\dot{q}'$, menos el calor disipado por convección en la parte exterior del cilindro, $\dot{q}'_{conve}$:

$$\dot{q}'_{rad} = \dot{q}' - \dot{q}'_{conve}$$

El calor total por unidad de longitud se calcula como:

$$\dot{q}' = \frac{T_{\infty i} - T_s}{\dfrac{1}{\pi D_i h_i} + \dfrac{\ln(D_e/D_i)}{2\pi k_a}} = 51,17\ \mathrm{W/m}$$

El calor por convección en la parte exterior por unidad de longitud se calcula como:

$$\dot{q}'_{conve} = \pi D_e h_e (T_s - T_{\infty e}) = 23,22\ \mathrm{W}$$

Por tanto, el calor disipado por radiación por unidad de longitud resulta:

$$\dot{q}'_{rad} = \dot{q}' - \dot{q}'_{conve} = 51,17 - 23,22 = 27,9\ \mathrm{W}$$

TEMA 7

CONDENSACIÓN Y EBULLICIÓN

Problema 7.1

25 tubos de diámetro 15 mm se disponen formando un haz cuadrado. Exteriormente a los tubos circula vapor de agua a presión atmosférica. Asumir que la superficie de los tubos se mantiene a una temperatura uniforme de 98ºC y utilizar las siguientes propiedades para el agua a presión atmosférica: T_{sat} = 100ºC, ρ_l = 960 kg/m^3, μ_l = 2,82·10^{-4} kg/m·s, k_l = 0,66 W/m·K, ρ_v = 0,6 kg/m^3 y h_{lv} = 2257 kJ/kg. Calcular la masa de vapor de agua condensado por unidad de longitud de tubos.

Solución:

El coeficiente de transferencia de calor por convección viene dado por:

$$h = 0{,}729\left[\frac{g\rho_l(\rho_l-\rho_v)k_l^3 h_{lv}}{N\mu_l(T_{sat}-T_s)D}\right]^{1/4} = 0{,}729\left[\frac{9{,}81\cdot 960\cdot(960-0{,}6)\cdot 0{,}66^3\cdot 2257000000}{5\cdot 2{,}82\cdot 10^{-4}(100-98)\cdot 0{,}015}\right]^{1/4} =$$

$$= 14065{,}9\ \mathrm{W/mK}$$

El área de la superficie total por unidad de longitud de tubos es:

$$\frac{A}{L} = N\pi D = 25\cdot\pi\cdot 0{,}015 = 1{,}18\ \mathrm{m}$$

De modo que la transferencia de calor por unidad de longitud de tubos es:

$$\dot{q}' = \frac{\dot{Q}}{L} = h\frac{A}{L}(T_{sat}-T_s) = 14065{,}9\cdot 1{,}18\cdot(100-2) = 33125{,}2\ \mathrm{W/m}$$

Finalmente, el flujo másico de condensado resulta:

$$\frac{\dot{m}}{L} = \frac{\dot{q}'}{h_{lv}} = \frac{33125{,}2}{2257000} = 0{,}015\ \mathrm{kg/s\cdot m}$$

Problema 7.2

En un condensador se condensa un flujo de 2,5 kg/s de R12 a 37,8º C. Se basa en un haz de tubos cuadrado de 20 $\times$ 20 tubos. Cada tubo tiene un diámetro de 10 mm. El R12 circula por el exterior de los tubos, mientras que por el interior circula agua que mantiene la temperatura de la superficie a una temperatura prácticamente uniforme de 32,2 ºC. Utilizar como propiedades del R12 a la presión de operación las siguientes: T_{sat} = 37,8ºC, ρ_l = 1274 kg/m^3, μ_l = 2,1·10^{-4} kg/m·s, k_l = 0,06 W/m·K, ρ_v = 48,2 kg/m^3 y h_{lv} = 132003 J/kg. Calcular la longitud de tubo.

Solución:

El coeficiente de transferencia de calor por convección viene dado por:

$$h = 0{,}729\left[\frac{g\rho_l(\rho_l-\rho_v)k_l^3 h_{lv}}{N\mu_l(T_{sat}-T_s)D}\right]^{1/4} = 0{,}729\left[\frac{9{,}81\cdot 1274\cdot(1274-48{,}2)\cdot 0{,}06^3\cdot 132003}{20\cdot 2{,}1\cdot 10^{-4}(37{,}8-32{,}2)\cdot 0{,}01}\right]^{1/4} =$$

$$= 851\ \mathrm{W/mK}$$

El calor se puede calcular como:

$$\dot{Q} = \dot{m}h_{lv} = 2{,}5 \cdot 132003 = 330007{,}5\ \text{W}$$

A su vez, el calor también viene dado por la siguiente expresión:

$$\dot{Q} = hA(T_{sat} - T_s) = hN\pi DL(T_{sat} - T_s)$$

Igualando las expresiones anteriores se obtiene la longitud de tubo:

$$\dot{Q} = hN\pi DL(T_{sat} - T_s) \quad \rightarrow \quad 330007{,}5 = 851 \cdot 400 \cdot \pi \cdot 0{,}01 \cdot L \cdot (37{,}8 - 32{,}2) \quad \rightarrow \quad L = 5{,}51\ \text{m}$$

Problema 7.3

Por el interior de un tubo de 25 mm de diámetro circula agua a 5 bar en condiciones de ebullición de convección forzada, estando la superficie del tubo a una temperatura 10 ºC por encima de la de saturación. Calcular la transferencia de calor por longitud de tubo.

Solución:

Se empleará la correlación de Levy, según la cual el flujo de calor por unidad de superficie viene dada por:

$$\dot{q}'' = 283{,}2p^{4/3}\Delta T^3$$

Siendo p la presión en MPa. Sustituyendo valores resulta:

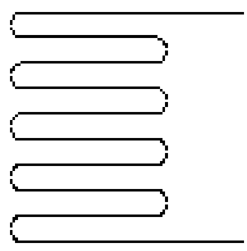
$$\dot{q}'' = 283{,}2p^{4/3}\Delta T^3 = 283{,}2 \cdot 0{,}5^{4/3} \cdot 10^3 = 112388{,}2\ \text{W/m}^2$$

El flujo de calor por unidad de longitud de tubo resulta:

$$\dot{q}' = \dot{q}''\pi D = 112388{,}2 \cdot \pi \cdot 0{,}025 = 8822{,}5\ \text{W/m}$$

Problema 7.4

Un condensador se basa en un serpentín de 10 tubos horizontales. Por el interior de los tubos circula lentamente el agua a condensar a 4,25 kPa. Cada tubo tiene un diámetro interno de 6 mm, una longitud de 0,4 m y, para simplificar los cálculos, asumir que la temperatura de la superficie interna se mantiene a una temperatura uniforme de 20ºC. Calcular la tasa de transferencia de calor. Utilizar como propiedades del agua a 4,25 kPa las siguientes T_{sat} = 30 ºC, c_l = 4183 J/kg·K, h_{lv} = 2429000 J/kg, ρ_l = 995,6 kg/m^3, ρ_v = 0,03 kg/m^3, μ_l = 0,0008 kg/m·s y k_l =0,6 W/m·K.



Solución:

El coeficiente de transferencia de calor se calculará mediante la correlación de Chato:

$$h = 0{,}555\left[\frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)k_l^3 h_{lv}^{'}}{\mu_l(T_{sat} - T_s)D}\right]^{1/4}$$

Dicha correlación es aplicable para números de Reynolds a la entrada menores de 35000. Con los datos aportados por el enunciado no es posible calcular el número de Reynolds, pero como se indica que el agua circula lentamente se asumirá que el número de Reynolds es inferior a ese valor.

El parámetro viene dado por:

$$h_{lv}^{'} = h_{lv} + \frac{3}{8}c_l(T_{sat} - T_s) = 2447000\ \mathrm{J/kg}$$

Por tanto, sustituyendo valores el coeficiente de transferencia de calor por convección resulta:

$$h = 0{,}555\left[\frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)k_l^3 h_{lv}^{'}}{\mu_l(T_{sat} - T_s)D}\right]^{1/4} = 6738\ \mathrm{W/m^2K}$$

Y, finalmente, la tasa de transferencia de calor resulta:

$$\dot{Q} = hA(T_{sat} - T_s) = h\pi DNL(T_{sat} - T_s) = 6738 \cdot \pi \cdot 0{,}006 \cdot 8 \cdot 0{,}4 \cdot (30 - 20) = 4062{,}2\ \mathrm{W}$$

Problema 7.5

Agua a presión 84,5 kPa hierve en un cazo de acero inoxidable pulido mecánicamente. Se estima que la base del cazo aporta al agua un flujo de calor por unidad de área de 100000 W/m^2. Determinar la temperatura de la base del cazo en contacto con el agua. Asumir como propiedades del agua a 84,5 kPa: T_{sat} = 95 ºC, c_l = 4212 J/kg·K, h_{lv} = 2270000 J/kg, ρ_l = 961 kg/m^3, ρ_v = 0,5 kg/m^3, σ = 0,06 kg/s^2, μ_l = 0,0003 kg/m·s y Pr_l = 1,8.

Solución:

Se aplicará la correlación de Rohsenow, la cual viene dada por:

$$\frac{c_l(T_s - T_{sat})}{h_{lv}} = C_{sf}\left[\frac{\dot{q}''}{\mu_l h_{lv}}\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_v)}}\right]^m Pr_l^n$$

Sustituyendo valores se obtiene la temperatura de base en contacto con el fluido:

$$\frac{4212\cdot(T_s-95)}{2270000}=0{,}013\left[\frac{100000}{0{,}0003\cdot 2270000}\sqrt{\frac{0{,}06}{9{,}81\cdot(961-0{,}5)}}\right]^{0,33}1{,}8 \quad\rightarrow\quad T_s=104{,}1\ ºC$$

Problema 7.6

Una placa genera un flujo de calor uniforme de 50000 W/m². La parte de abajo se encuentra perfectamente aislada, mientras que la parte superior se refrigera mediante ebullición de un fluido de propiedades T_{sat} = 55 ºC, c_l = 1100 J/kg·K, h_{lv} = 85000 J/kg, ρ_l = 1600 kg/m³, ρ_v = 15 kg/m³, σ = 0,007 kg/s², μ_l = 450·10⁻⁶ kg/m·s y Pr_l = 9. Utilizando la correlación de Rohsenow con las constantes C_{sf} = 0,005, n = 1,7 y m = 0,33 calcular la temperatura de la parte superior de la placa en contacto con el fluido en estado estacionario.

Solución:

La correlación de Rohsenow viene dada por:

$$\frac{c_l(T_s-T_{sat})}{h_{lv}}=C_{sf}\left[\frac{\dot{q}''}{\mu_l h_{lv}}\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_l-\rho_v)}}\right]^m Pr_l^n$$

Sustituyendo valores se obtiene la temperatura de la superficie en contacto con el fluido:

$$\frac{1600\cdot(T_s-55)}{85000}=0{,}005\left[\frac{50000}{450\cdot 10^{-6}\cdot 85000}\sqrt{\frac{0{,}007}{9{,}81\cdot(1600-15)}}\right]^{0,33}9^{1,7} \quad\rightarrow\quad T_s=65{,}66\ ºC$$

Problema 7.7

Agua a presión atmosférica fluye con una velocidad media de 1,5 m/s por el interior de un tubo de acero de 15 mm de diámetro cuya superficie se mantiene a 110 ºC. Calcular la transferencia de calor por unidad de longitud de tubo. Utilizar como propiedades del agua a presión atmosférica: T_{sat} = 100ºC, ρ_l = 958 kg/m³, μ_l = 2,82·10⁻⁴ kg/m·s, k_l = 0,66 W/m·K, ρ_v = 0,6 kg/m³ y h_{lv} = 2257 kJ/kg.

Solución:

Se trata de un caso de convección forzada, flujo interno. Rohsenow y Griffith (1955) propusieron que el mecanismo de cambio de fase de un líquido fluyendo en un tubo consiste en dos fenómenos superpuestos: el de ebullición nucleada y el de ebullición estrictamente convectiva, tal y como indica la siguiente expresión:

$$\dot{q}''=\dot{q}''_{en}+\dot{q}''_{ec}$$

El término de ebullición nucleada según la correlación de Rohsenow viene dado por:

$$\frac{c_l(T_s-T_{sat})}{h_{lv}}=C_{sf}\left[\frac{\dot{q}''_{en}}{\mu_l h_{lv}}\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_l-\rho_v)}}\right]^m Pr_l^n \quad\rightarrow\quad \dot{q}''_{en}=131546\ W/m^2$$

El término de ebullición convectiva viene dado por la correlación de Dittus-Boelter pero utilizando un factor de 0,019 en lugar de 0,023:

$$Nu = \frac{h_{ec} D}{k_l} = 0{,}019 Re_D^{0,8} Pr_l^{0,4}$$

El número de Reynolds viene dado por:

$$Re_D = \frac{uD}{\nu_l} = \frac{uD\rho_l}{\mu_l} = 770{,}14$$

Con el número de Reynolds calculado, el número de Nusselt y h resultan:

$$Nu = \frac{h_{ec} D}{k_l} = 0{,}019 Re_D^{0,8} Pr_l^{0,4} = 4{,}88 \quad \rightarrow \quad h_{ec} = 8622\ W/m \cdot K$$

Y el término de ebullición convectiva resulta:

$$\dot{q}_{ec}'' = h_{ec}(T_s - T_{sat}) = 86220\ W/m^2$$

Por tanto, el calor como suma del término de ebullición nucleada más el de ebullición convectiva resulta:

$$\dot{q}'' = \dot{q}_{en}'' + \dot{q}_{ec}'' = 131546 + 86220 = 217766\ W/m^2$$

Y el calor por unidad de longitud:

$$\dot{q}' = \dot{q}''\pi D = 10261\ W/m$$

TEMA 8

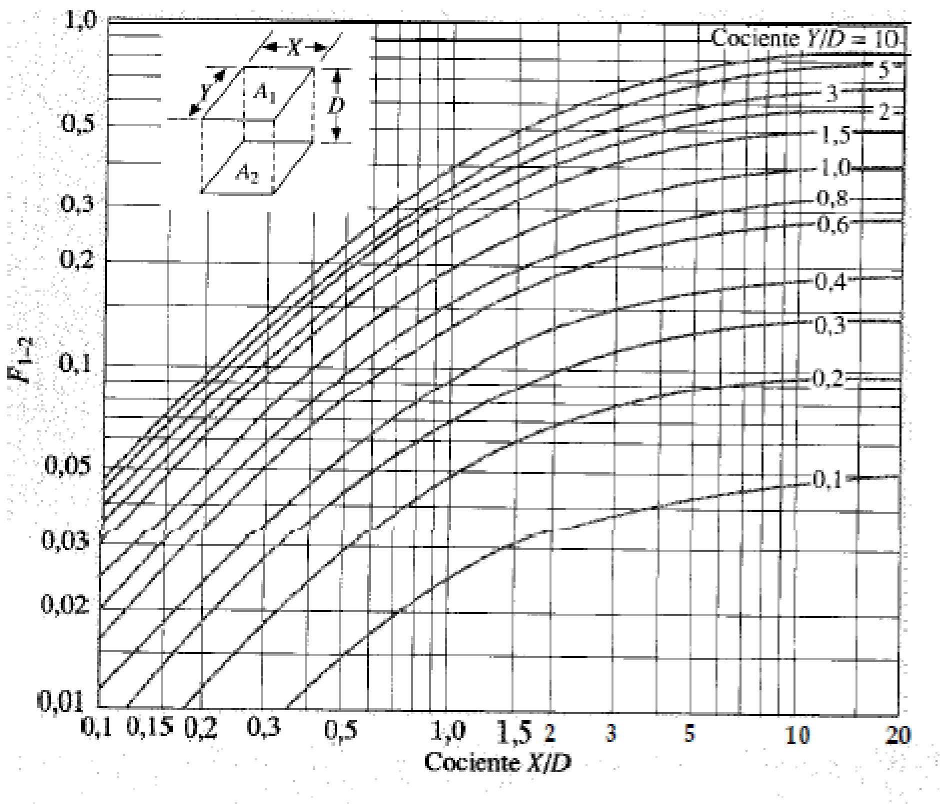
RADIACIÓN TÉRMICA

Problema 8.1

Dos placas negras paralelas de 0,6 × 0,6 m están separadas una distancia de 0,3 m. Una de las placas se mantiene a 800 ºC y la otra a 400 ºC. Calcular el intercambio neto de radiación entre ambas placas.

Solución:

El factor de forma se obtiene de la gráfica. Teniendo en cuenta que X/D e Y/D resultan 0,6/0,3 = 2, la gráfica proporciona F aproximadamente 0,3.



La transferencia de calor por radiación resulta:

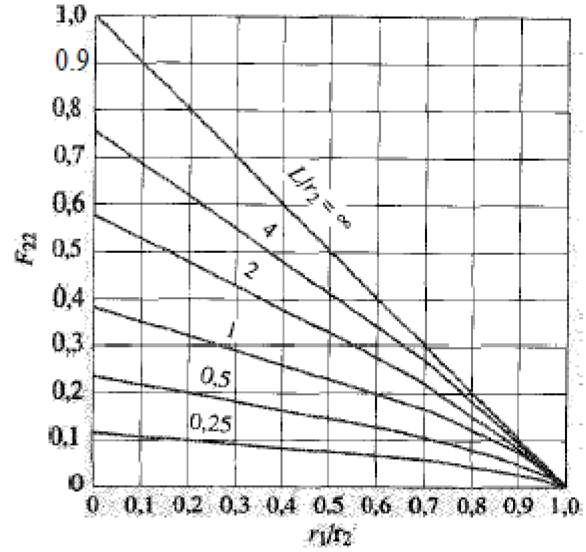
$$\dot{Q} = AF_{12}(E_{b1} - E_{b2}) = \sigma AF_{12}(T_1^4 - T_2^4) = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,3 \cdot (1073^4 - 673^4) = 6861\ \mathrm{W}$$

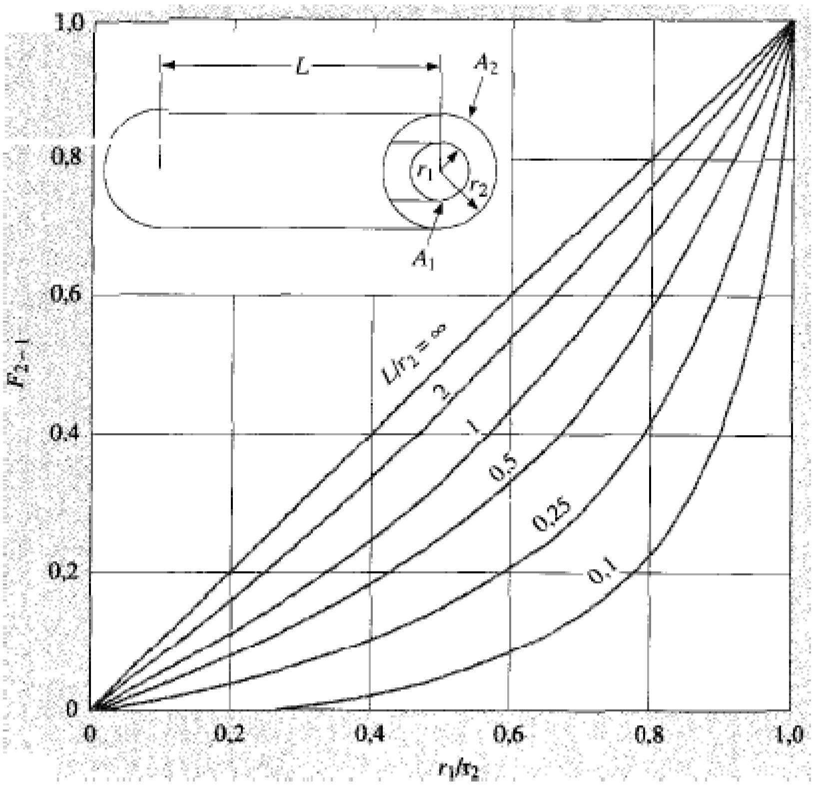
Problema 8.2

Dos cilindros concéntricos de longitud 10 cm tienen diámetros 10 y 20 cm. Calcular el factor de forma entre los extremos abiertos de los cilindros.

Solución:

Se utilizará la nomenclatura indicada en las siguientes figuras, y los extremos abiertos se designarán como 3 y 4:





De acuerdo con los datos proporcionados en el enunciado, L/r_2 = 20/10 = 2 y $r_1/r_2 = D_1/D_2$ = 10/20 = 0,5. Por tanto, a partir de las figuras se obtiene que $F_{22} \approx 0,3286$ y $F_{21} \approx 0,4126$.

Con la relación de reciprocidad se tiene:

$$A_1F_{12} = A_2F_{21} \quad \rightarrow \quad F_{12} = \frac{D_2}{D_1}F_{21} = \frac{20}{10}0,4126 = 0,8253$$

Para la superficie 2 se tiene:

$$F_{21} + F_{22} + F_{23} + F_{24} = 1$$

Por simetría $F_{23} = F_{24}$, por tanto:

$$F_{23} = F_{24} = \frac{1}{2}(1 - 0,4126 - 0,3286) = 0,1294$$

Aplicando nuevamente la relación de reciprocidad:

$$A_2F_{23} = A_3F_{32} \quad \rightarrow \quad F_{32} = \frac{\pi \cdot 0,2 \cdot 0,2}{\pi(0,2^2 - 0,1^2)/4} 0,1294 = 0,6901$$

Se cumple que $F_{11} = F_{33} = F_{44} = 0$, y para la superficie 3:

$$F_{31} + F_{32} + F_{34} = 1$$

Para la superficie 1:

$$F_{12} + F_{13} + F_{14} = 1$$

Y por simetría $F_{13} = F_{14}$, de modo que:

$$F_{13} = \frac{1}{2}(1 - 0,8253) = 0,0874$$

Utilizando la relación de reciprocidad se tiene:

$$A_1F_{13} = A_3F_{31} \quad \rightarrow \quad F_{31} = \frac{\pi \cdot 0,1 \cdot 0,2}{\pi(0,2^2 - 0,1^2)/4} 0,0874 = 0,233$$

Por tanto:

$$F_{31} + F_{32} + F_{34} = 1 \quad \rightarrow \quad F_{34} = 1 - 0,233 - 0,6901 = 0,0769$$

Problema 8.3

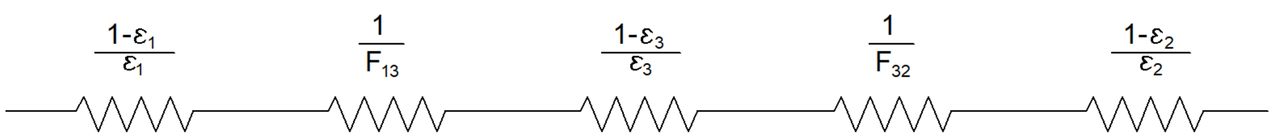
Dos planos paralelos muy grandes con emisividades 0,4 y 0,9 intercambian calor. Calcular el porcentaje de reducción de transferencia de calor cuando se coloca entre ellos un apantallamiento radiante de emisividad 0,05.

Solución:

La transferencia de calor sin apantallamiento viene dada por:

$$\dot{q}'' = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{1/\varepsilon_1 + /\varepsilon_2 - 1} = 0,323\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

El circuito de radiación es el indicado en la siguiente figura:



Las resistencias son las siguientes:

$$\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1} = \frac{1-0,4}{0,4} = 1,5$$

$$\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2} = \frac{1-0,9}{0,9} = 0,11$$

$$\frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3} = \frac{1-0,05}{0,05} = 19$$

La resistencia total viene dada por:

$$1,5 + 2 \cdot 19 + 2 \cdot 1 + 0,11 = 41,61$$

Y el calor total por unidad de área:

$$\dot{q}'' = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{41,61} = 0,024\sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

Por tanto, la transferencia de calor se reduce en el siguiente porcentaje:

$$\frac{0,323 - 0,024}{0,323} \cdot 100 = 92,6\ \%\ \%.$$

TEMA 9

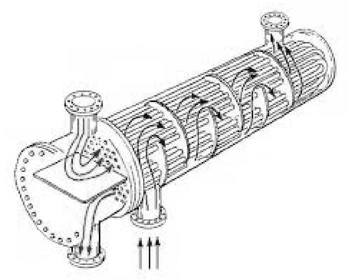
INTERCAMBIADORES DE CALOR

Problema 9.1

Por la carcasa de un intercambiador de calor de carcasa y tubos entra aceite a 160 ºC y sale a 100 ºC. Por los tubos circulan 5 kg/s de agua, que entra a 20 y sale a 50 ºC. Se trata de 30 tubos de diámetro 25 mm que se disponen formando dos pasos, mientras que el flujo en la carcasa se dispone de un único paso. Según el catálogo del fabricante, el coeficiente global de transferencia de calor es de 300 $W/m^2 \cdot K$. Calcular:

a) Flujo de aceite.

b) Longitud de los tubos.



Solución apartado a:

En primer lugar se calculará el calor específico para el agua y para el aceite:

$$\text{Aceite (fluido caliente), } \overline{T}_c = \frac{T_{ce} + T_{cs}}{2} = \frac{160 + 100}{2} = 130\ ^{\circ}C \quad \rightarrow \quad c_{pc} = 2350\ J/kgK$$

$$\text{Agua (fluido frío), } \overline{T}_f = \frac{T_{fe} + T_{fs}}{2} = \frac{20 + 50}{2} = 35\ ^{\circ}C \quad \rightarrow \quad c_{pf} = 4182\ J/kgK$$

Despreciando pérdidas de calor hacia el exterior del intercambiador de calor, a partir de un balance de energía se obtiene que el calor intercambiado entre el fluido caliente y el fluido frío viene dado por:

$$\dot{Q} = \dot{m}_c c_{pc}(T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f c_{pf}(T_{fs} - T_{fe})$$

A partir de la expresión anterior se obtiene el flujo de aceite (fluido caliente):

$$\dot{m}_c c_{pc}(T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f c_{pf}(T_{fs} - T_{fe}) \quad \rightarrow \quad \dot{m}_f \cdot 2350 \cdot (160 - 100) = 5 \cdot 4182 \cdot (50 - 20) \quad \rightarrow \quad \dot{m}_c = 4{,}4\ kg/s$$

Solución apartado b:

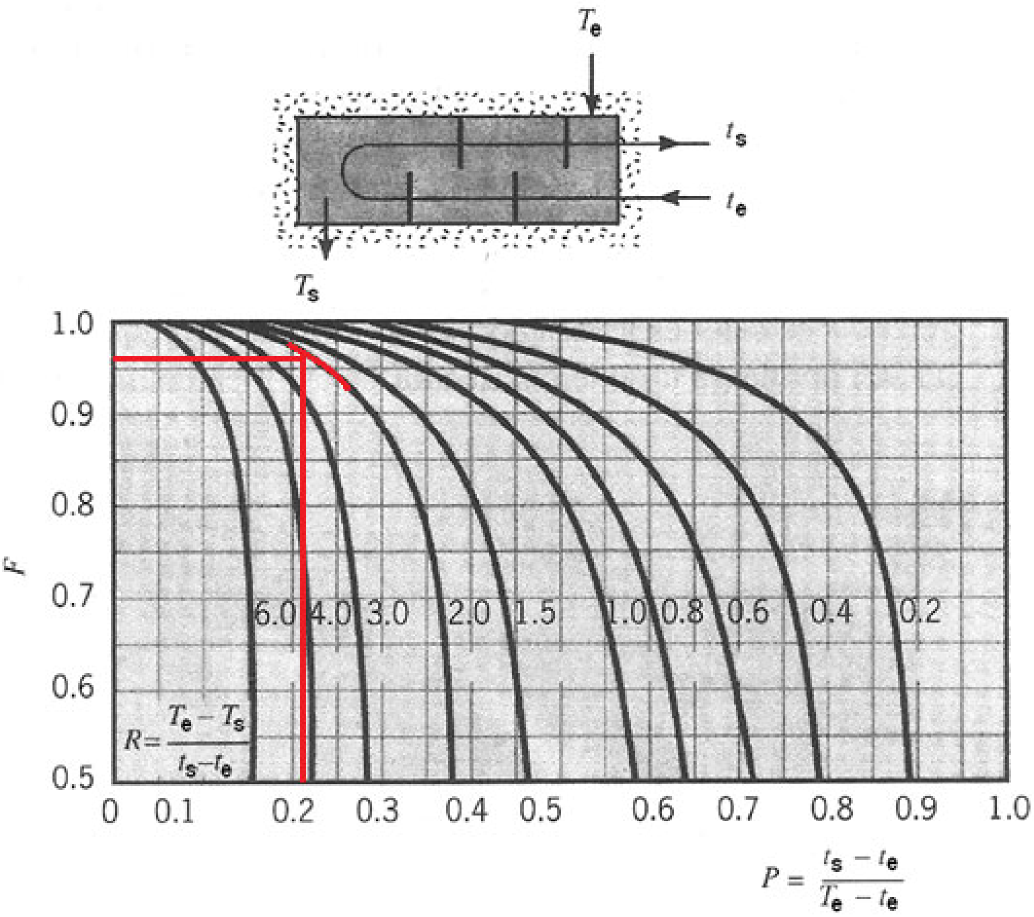
Este apartado se puede realizar utilizando dos métodos, el DTML y el ε–NUT. A continuación se muestra el procedimiento para ambos métodos.

Método DTML:

$$\dot{Q} = UA\Delta T$$

$$\text{siendo } \Delta T = F\Delta T_{mlcontraflujo}$$

El factor de corrección F se determina a partir de la siguiente gráfica:



En la gráfica anterior se entra con los siguientes datos y se obtiene que F es aproximadamente 0,96. Nótese que, según la figura, t representa el fluido que circula por el interior de los tubos (en este caso el agua) y T el que circula exteriormente a los tubos (en este caso el aceite):

$$\left.\begin{array}{l} P=\dfrac{t_s-t_e}{T_e-t_e}=\dfrac{50-20}{160-20}=0,21 \\ R=\dfrac{T_e-T_s}{t_s-t_e}=\dfrac{160-100}{50-20}=2 \end{array}\right\} F\approx 0,96$$

La diferencia de temperaturas media logarítmica para un intercambiador de calor a contraflujo es:

$$\Delta T_{mlcontraflujo}=\frac{(T_{ce}-T_{fs})-(T_{cs}-T_{fe})}{\ln\left(\dfrac{T_{ce}-T_{fs}}{T_{cs}-T_{fe}}\right)}=\frac{(160-50)-(100-20)}{\ln\left(\dfrac{160-50}{100-20}\right)}=94,2\ °C \text{ o K}$$

Tal y como se indicó anteriormente, la transferencia de calor viene dada por $\dot{Q}=UAF\Delta T_{mlcontraflujo}$. Como se trata de 20 tubos, el área total es NπDL, siendo N el número de tubos. Por tanto resulta:

$$\dot{Q}=UN\pi DLF\Delta T_{mlcontraflujo} \quad \rightarrow \quad 627450=300\cdot 30\cdot \pi\cdot 0,025\cdot L\cdot 0,96\cdot 94,2 \quad \rightarrow \quad L=9,8\text{ m}$$

Es decir, se necesitan 30 tubos de 9,8 m cada uno. Como cada tubo tiene dos pasos, serían 4,9 m por cada paso.

Método ε–NUT:

Primeramente se calcularán las capacidades térmicas tanto para el fluido caliente como para el fluido frío:

$$C_f = \dot{m}_f c_{pf} = 5 \cdot 4182 = 20910 \text{ W/K}$$

$$C_c = \dot{m}_c c_{pc} = 4,45 \cdot 2350 = 10457 \text{ W/K}$$

A continuación se calculará el cociente entre la capacidad térmica mínima, que en este caso se corresponde con el fluido caliente, y la capacidad térmica máxima, que se corresponde con el fluido frío:

$$\frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{10457}{20910} = 0,5$$

El calor máximo viene dado por:

$$\dot{Q}_{max} = C_{min}(T_{ce} - T_{fe}) = 10457 \cdot (160 - 20) = 1464050 \text{ W}$$

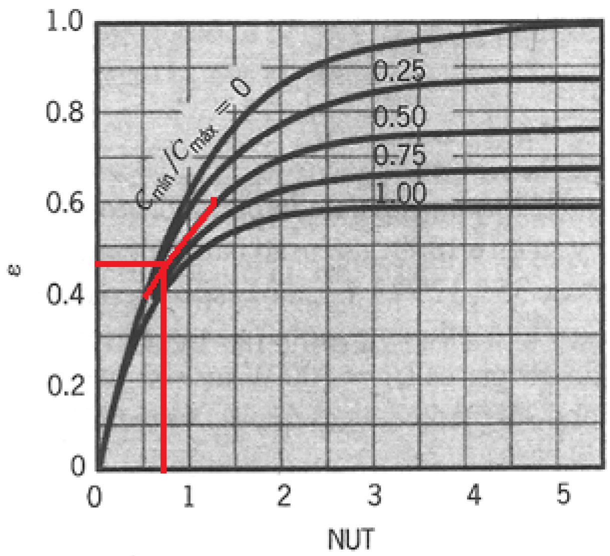
El calor real viene dado por:

$$\dot{Q} = \dot{m}_c c_{pc}(T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f c_{pf}(T_{fs} - T_{fe}) = 627450 \text{ W}$$

El rendimiento del intercambiador de calor viene dado por:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} = \frac{624750}{1464050} = 0,43$$

De la siguiente gráfica se obtiene que el NUT es de aproximadamente 0,65:



A partir del NUT se obtiene el área según la siguiente expresión:

$$NUT = \frac{UA}{C_{min}} \quad \rightarrow \quad A = \frac{C_{min}NUT}{U} = \frac{10457 \cdot 0{,}65}{300} = 22{,}6 \ m^2$$

Y a partir del área la longitud de cada tubo:

$$A = N\pi DL \quad \rightarrow \quad L = 9{,}6 \ m$$

Como se puede observar, el resultado obtenido mediante ambos métodos es parecido pero no igual debido a la limitada precisión que se puede obtener al utilizar las gráficas.

Problema 9.2

Un flujo de gases de escape calientes entra a un intercambiador de calor de tubos con aletas de flujo cruzado a 300 ºC y sale a 100 ºC. Por los tubos fluye 1 kg/s de agua presurizada que entra a 35 ºC y sale a 125 ºC. Asumir el calor específico de los gases de escape como 1000 J/kg·K y el coeficiente global de transferencia de calor U = 100 W/m²·K. Calcular:
a) Flujo de gases.
b) Área de intercambio de calor.

Solución apartado a:

Aplicando balance de energía:

$$\dot{Q} = \dot{m}_c c_{pc}(T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f c_{pf}(T_{fs} - T_{fe})$$

El calor específico del fluido caliente (gases de escape) es dato del problema, c_{pc} = 1000 kJ/kgK. El calor específico del fluido frío (agua) se consulta en tablas evaluándolo a la temperatura promedio del fluido frío, es decir:

$$\text{Agua, } \overline{T}_f = \frac{T_{fe} + T_{fs}}{2} = \frac{35 + 125}{2} = 80 \ ^{o}C \quad \rightarrow \quad c_{pf} = 4194 \ J/kgK$$

Por tanto:

$$\dot{m}_c c_{pc}(T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f c_{pf}(T_{fs} - T_{fe}) \ \rightarrow \ \dot{m}_c \cdot 1000 \cdot (300 - 100) = 1 \cdot 4194 \cdot (125 - 35) \ \rightarrow \ \dot{m}_c = 1{,}89 \ kg/s$$

Solución apartado b:

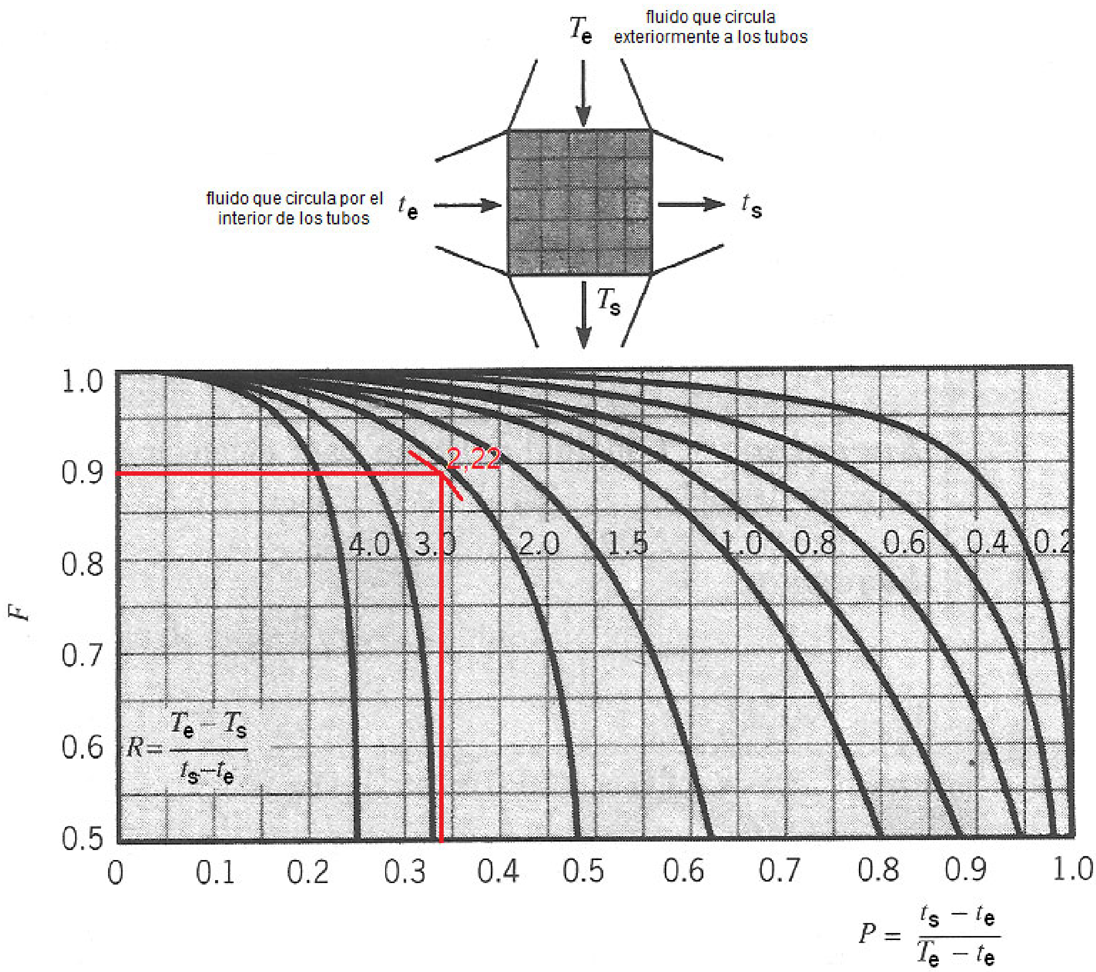
Este apartado se puede realizar utilizando dos métodos, el DTML y el ε–NUT. A continuación se muestra el procedimiento para ambos métodos.

Método DTML:

$$\dot{Q} = UA\Delta T$$

$$\text{siendo } \Delta T = F\Delta T_{mlcontraflujo}$$

El factor de corrección F se determina a partir de la siguiente gráfica:



En la gráfica anterior se entra con los siguientes datos y se obtiene que F es aproximadamente 0,89. Nótese que, según la figura, t representa el fluido que circula por el interior de los tubos y T el que circula exteriormente a los tubos:

$$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{t_s - t_e}{T_e - t_e} = \dfrac{125-35}{300-35} = 0,34 \\ R = \dfrac{T_e - T_s}{t_s - t_e} = \dfrac{300-100}{125-35} = 2,22 \end{array}\right\} F \approx 0,89$$

La diferencia de temperaturas media logarítmica para un intercambiador de calor a contraflujo es:

$$\Delta T_{mlcontraflujo} = \frac{(T_{ce} - T_{fs}) - (T_{cs} - T_{fe})}{\ln\left(\dfrac{T_{ce} - T_{fs}}{T_{cs} - T_{fe}}\right)} = 111\ ^{o}C$$

Por tanto:

$$\dot{Q} = UAF\Delta T_{mlcontraflujo} \quad \rightarrow \quad 37460 = 100 \cdot A \cdot 0,89 \cdot 111 \quad \rightarrow \quad A = 38,2\ m^2$$

Método ε–NUT:

Primeramente se calcularán las capacidades térmicas tanto para el fluido caliente como para el fluido frío:

$$C_f = \dot{m}_f c_{pf} = 1 \cdot 4194 = 4194 \text{ W/K}$$

$$C_c = \dot{m}_c c_{pc} = 1{,}89 \cdot 1000 = 1890 \text{ W/K}$$

A continuación se calculará el cociente entre la capacidad térmica mínima, que en este caso se corresponde con el fluido caliente, y la capacidad térmica máxima, que se corresponde con el fluido frío:

$$\frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{1890}{4194} = 0{,}45$$

El calor máximo viene dado por:

$$\dot{Q}_{max} = C_{min}(T_{ce} - T_{fe}) = 1890 \cdot (300 - 35) = 500850 \text{ W}$$

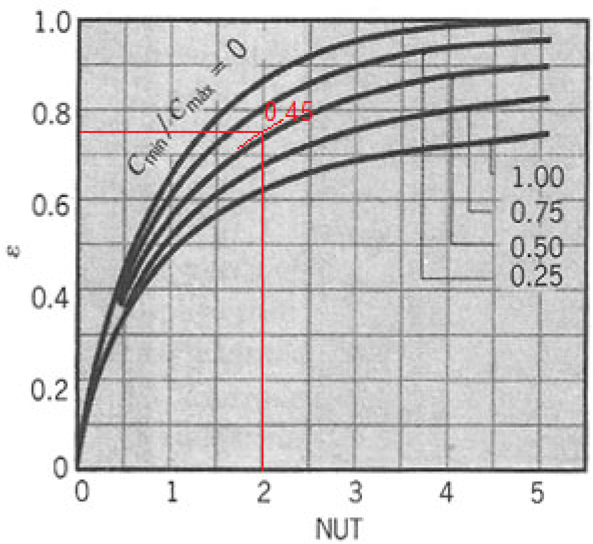
El calor real viene dado por:

$$\dot{Q} = \dot{m}_c c_{pc}(T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f c_{pf}(T_{fs} - T_{fe}) = 377460 \text{ W}$$

El rendimiento del intercambiador de calor viene dado por:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} = \frac{377460}{500850} = 0{,}75$$

De la siguiente gráfica se obtiene que el NUT es de aproximadamente 2:



A partir del NUT se obtiene el área según la siguiente expresión:

$$NUT = \frac{UA}{C_{min}} \quad \rightarrow \quad A = \frac{C_{min} NUT}{U} = \frac{2 \cdot 1890}{100} = 37{,}8 \text{ m}^2$$

Como se puede observar, el área obtenida mediante ambos métodos es muy parecida. No proporcionan el mismo resultado debido a la limitada precisión que se puede obtener al utilizar las gráficas.

Problema 9.3

El radiador de un automóvil se puede ver como un intercambiador de calor en flujo cruzado con ambos fluidos sin mezclar. Analizar el caso para el que el agua entra al radiador a 90 ºC y sale a 85 ºC con un flujo de 0,8 kg/s. El agua se enfría mediante aire que entra a 20 ºC con un flujo de 0,9 kg/s. El coeficiente global de transferencia de calor es 200 $W/m^2 \cdot K$. Para simplificar los cálculos, asumir estado estacionario.
a) Calcular la temperatura de salida del aire.
b) Calcular el área de transferencia de calor.

Solución apartado a:

Aplicando balance de energía:

$$\dot{Q} = \dot{m}_c c_{pc} (T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f c_{pf} (T_{fe} - T_{fs})$$

El calor específico de cada fluido se evalúa a la temperatura promedio del fluido. Del fluido caliente (agua) resulta:

$$\text{Agua, } \overline{T}_c = \frac{T_{ce} + T_{cs}}{2} = \frac{90 + 85}{2} = 87{,}5\ °C \quad \rightarrow \quad c_{pc} = 4201\ J/kgK$$

Del fluido frío (aire) se conoce la temperatura de entrada pero precisamente la temperatura de salida es lo que se pide calcular en el apartado a. Se seguirá por tanto un procedimiento iterativo

1ª iteración:

Se asumirá que por ejemplo $\overline{T}_f$ = 310 K, con lo cual resulta un calor específico de c_{pf} = 1005 J/kgK.

Por tanto:

$$\dot{m}_c c_{pc} (T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f c_{pf} (T_{fe} - T_{fs}) \quad \rightarrow \quad 0{,}8 \cdot 4201(90 - 85) = 0{,}9 \cdot 1005(T_{fs} - 20) \quad \rightarrow \quad T_{fs} = 38{,}6\ °C$$

2ª iteración:

Se utilizará el valor de T_{fs} = 38,6 ºC obtenido en la primera iteración. Utilizando este valor, el calor específico del agua resulta:

$$\text{Aire, } \overline{T}_f = \frac{T_{fe} + T_{fs}}{2} = \frac{20 + 38{,}6}{2} = 29{,}3\ °C \quad \rightarrow \quad c_{pf} = 1007\ J/kgK$$

Por tanto:

$$\dot{m}_c c_{pc} (T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f c_{pf} (T_{fe} - T_{fs}) \quad \rightarrow \quad 0{,}8 \cdot 4201(90 - 85) = 0{,}9 \cdot 1007(T_{fs} - 20) \quad \rightarrow \quad T_{fs} = 38{,}6\ °C$$

Como se puede observar, la temperatura de salida del aire presenta el mismo valor que en la primera iteración (tomando un decimal no se percibe la diferencia), por lo que se asumirá este valor como correcto y ya no es necesario realizar más iteraciones.

Solución apartado b:

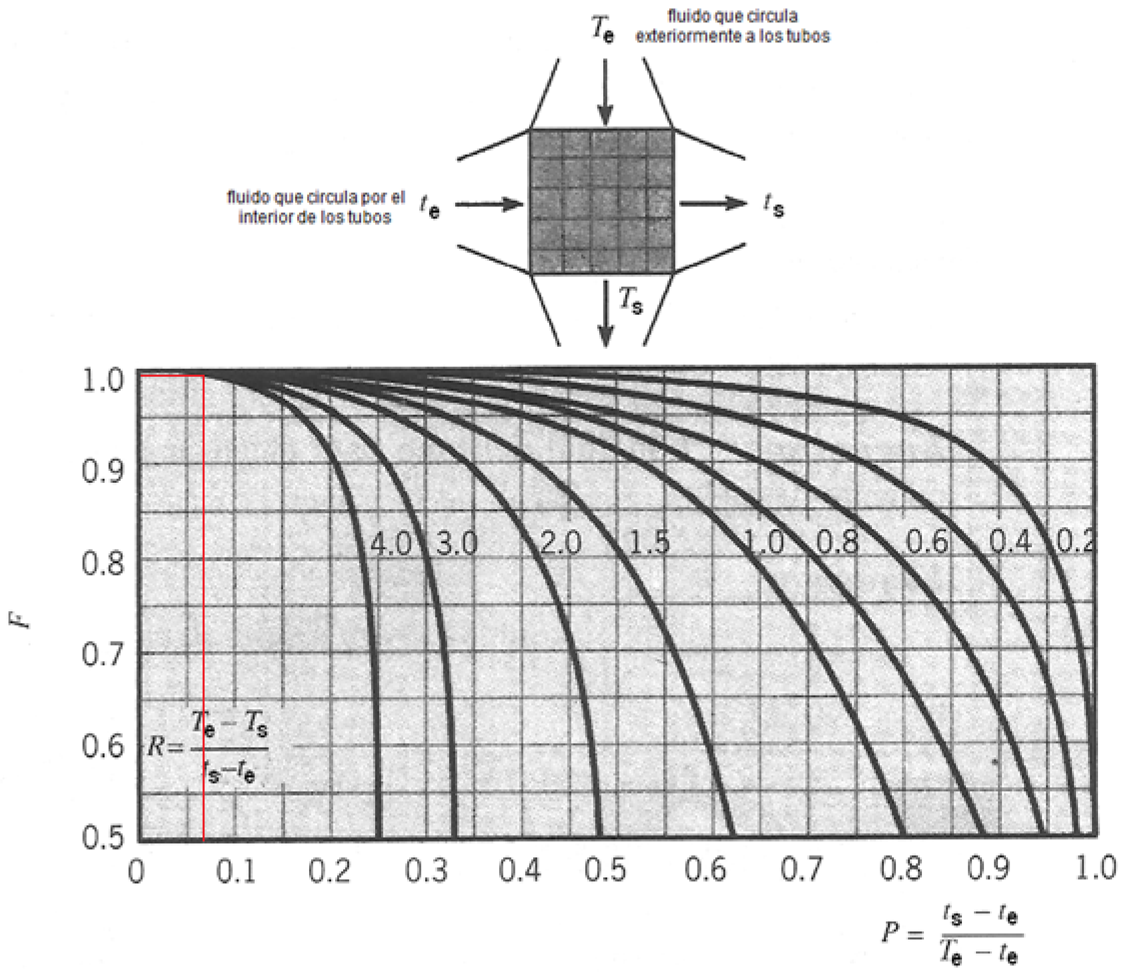
Este apartado se puede realizar utilizando dos métodos, el DTML y el ε–NUT. A continuación se muestra el procedimiento para ambos métodos.

Método DTML:

$$\dot{Q} = UA\Delta T$$

siendo $\Delta T = F\Delta T_{mlcontraflujo}$

El factor de corrección F se determina a partir de la siguiente gráfica:



En la gráfica anterior se entra con los siguientes datos y se obtiene que F es aproximadamente 0,99. Nótese que, según la figura, t representa el fluido que circula por el interior de los tubos, es decir, el agua y T el que circula exteriormente a los tubos, es decir, el aire:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{t_s - t_e}{T_e - t_e} = \frac{85-90}{20-85} = 0{,}07 \\ R &= \frac{T_e - T_s}{t_s - t_e} = \frac{20-38{,}6}{85-90} = 3{,}71 \end{aligned}\right\} F \approx 0{,}99$$

La diferencia de temperaturas media logarítmica para un intercambiador de calor a contraflujo es:

$$\Delta T_{mlcontraflujo} = \frac{(T_{ce} - T_{fs}) - (T_{cs} - T_{fe})}{\ln\left(\frac{T_{ce} - T_{fs}}{T_{cs} - T_{fe}}\right)} = 58\ ^{o}C$$

Por tanto:

$$\dot{Q} = UAF\Delta T_{mlcontraflujo} \quad \rightarrow \quad 16806 = 200 \cdot A \cdot 0,98 \cdot 58 \quad \rightarrow \quad A = 1,46\ m^2$$

<u>Método ε–NUT</u>:

Primeramente se calcularán las capacidades térmicas tanto para el fluido caliente como para el fluido frío:

$$C_f = \dot{m}_f c_{pf} = 0,9 \cdot 1007 = 905,9\ W/K$$

$$C_c = \dot{m}_c c_{pc} = 0,8 \cdot 4201 = 3361\ W/K$$

A continuación se calculará el cociente entre la capacidad térmica mínima, que en este caso se corresponde con el fluido frío, y la capacidad térmica máxima, que se corresponde con el fluido caliente:

$$\frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{905,9}{3361} = 0,27$$

El calor máximo viene dado por:

$$\dot{Q}_{max} = C_{min}(T_{ce} - T_{fe}) = 63415\ W$$

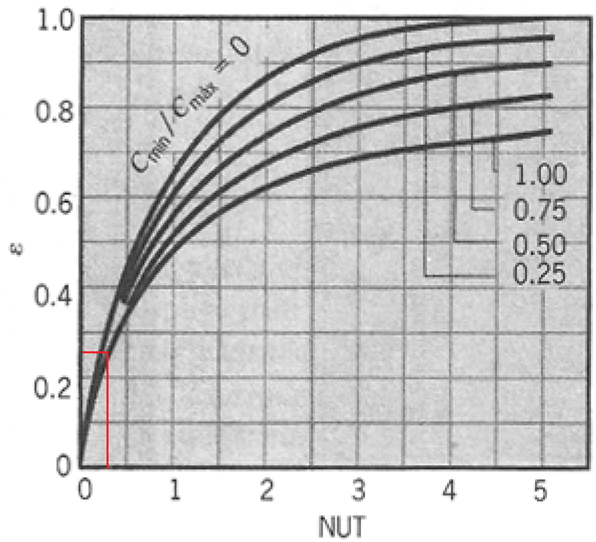
El calor real viene dado por:

$$\dot{Q} = \dot{m}_c c_{pc}(T_{ce} - T_{cs}) = \dot{m}_f c_{pf}(T_{fs} - T_{fe}) = 16806\ W$$

El rendimiento del intercambiador de calor viene dado por:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} = \frac{16806}{63415} = 0,26$$

De la siguiente gráfica se obtiene que el NUT es de aproximadamente 0,3:



A partir del NUT se obtiene el área según la siguiente expresión:

$$NUT = \frac{UA}{C_{min}} \quad \rightarrow \quad A = \frac{C_{min} NUT}{U} = 1{,}35 \ m^2$$

Como se puede observar, el área obtenida mediante ambos métodos es muy parecida. No proporcionan el mismo resultado debido a la limitada precisión que se puede obtener al utilizar las gráficas.

Problema 9.4

Vapor saturado a 100 ºC se condensa en un intercambiador de calor de carcasa y tubos de un paso por la carcasa y dos pasos por los tubos, con un área superficial de 0,5 m^2 y coeficiente global de transferencia de calor de 2000 $W/m^2 \cdot K$. Como fluido frío se utiliza un flujo de 0,5 kg/s de agua que entra a 15 ºC. Determinar la temperatura de salida del agua fría.

<u>Solución:</u>

Se resolverá el problema utilizando al método ε–NUT porque con los datos que proporciona el enunciado la resolución utilizando el método DTML sería muy tediosa.

Es necesario determinar el calor específico del fluido frío. Como solamente se conoce la temperatura de entrada pero no la de salida se realizará un procedimiento iterativo.

- 1ª iteración´:

En esta primera iteración se asumirá, por ejemplo, que la temperatura promedio del fluido frío es de 27 ºC. A esta temperatura se evalúa el calor específico, que resulta el indicado a continuación:

$$\text{Agua, } \overline{T}_f = \frac{T_{fe} + T_{fs}}{2} = 27 \ ^oC \quad \rightarrow \quad c_{pf} = 4183{,}4 \ J/kgK$$

Las capacidades térmicas tanto para el fluido caliente como para el fluido frío. Se indican a continuación. Nótese que para el fluido caliente la capacidad térmica tiende a infinito por estar a temperatura constante:

$$C_f = \dot{m}_f c_{pf} = 0{,}5 \cdot 4183 = 2091{,}7 \ W/K$$

$$C_c \rightarrow \infty$$

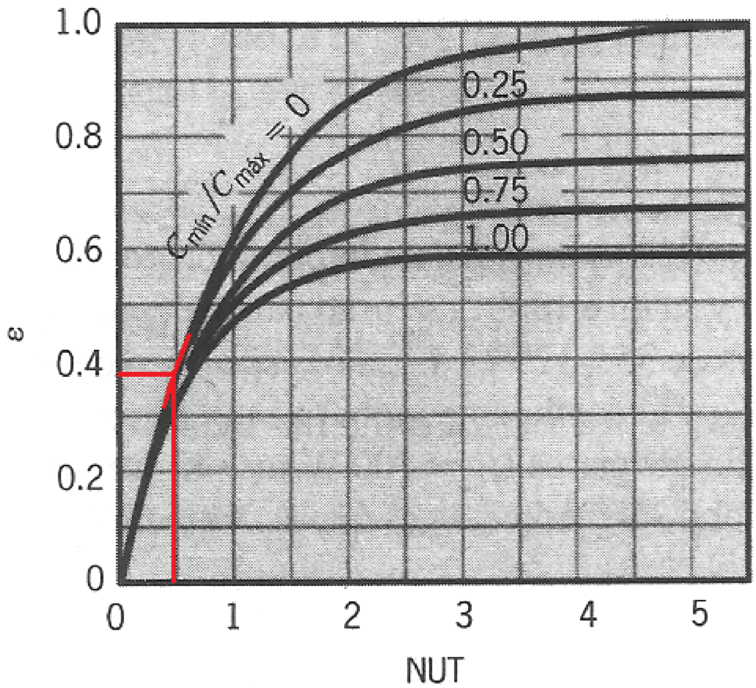
El cociente entre la capacidad térmica mínima resulta cero:

$$\frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{2091{,}7}{\infty} = 0$$

El número de unidades de transferencia resulta:

$$NUT = \frac{UA}{C_{min}} = \frac{2000 \cdot 0{,}5}{2091{,}7} = 0{,}48$$

Para un valor de C_{min}/C_{max} = 0 y NUT = 0,48, de la siguiente gráfica se obtiene la eficiencia, que resulta aproximadamente 0,38:



Teniendo en cuenta el rendimiento, el calor transferido en esta primera iteración resulta:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} \quad \rightarrow \quad \dot{Q} = \varepsilon \dot{Q}_{max} = \varepsilon C_{min}(T_{ce} - T_{fe}) = 0{,}38 \cdot 2091{,}7 \cdot (100 - 15) = 67561{,}9 \text{ W}$$

Y, finalmente, la temperatura de salida del agua fría obtenida en esta primera iteración resulta:

$$\dot{Q} = \dot{m}_f c_{pf}(T_{fs} - T_{fe}) \quad \rightarrow \quad 67651{,}9 = 0{,}5 \cdot 4183{,}4 \cdot (T_{fs} - 15) \quad \rightarrow \quad T_{fs} = 47{,}3 \text{ ºC}$$

- 2ª iteración:

En esta segunda iteración se utilizará el valor de la temperatura de salida del agua fría obtenida en la primera iteración. El calor específico del agua fría resulta:

$$\text{Agua, } \overline{T}_f = \frac{T_{fe} + T_{fs}}{2} = \frac{15 + 47{,}3}{2} = 31{,}1 \text{ °C} \quad \rightarrow \quad c_{pf} = 4183{,}3 \text{ J/kgK}$$

Las capacidades térmicas resultan:

$$C_f = \dot{m}_f c_{pf} = 0,5 \cdot 4183,3 = 2091,6 \text{ W/K}$$

$$C_c \to \infty$$

El cociente entre la capacidad térmica mínima resulta cero:

$$\frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{2091,6}{\infty} = 0$$

El número de unidades de transferencia resulta:

$$NUT = \frac{UA}{C_{min}} = \frac{2000 \cdot 0,5}{2091,6} = 0,48$$

Para un valor de C_{min}/C_{max} = 0 y NUT = 0,48, de la gráfica anterior se obtiene que la eficiencia resulta aproximadamente 0,38, al igual que en la primera iteración.

El calor transferido en esta segunda iteración resulta:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} \quad \to \quad \dot{Q} = \varepsilon \dot{Q}_{max} = \varepsilon C_{min}(T_{ce} - T_{fe}) = 0,38 \cdot 2091,6 \cdot (100 - 15) = 67558,7 \text{ W}$$

Y, finalmente, la temperatura de salida del agua fría obtenida en esta primera iteración resulta:

$$\dot{Q} = \dot{m}_f c_{pf}(T_{fs} - T_{fe}) \quad \to \quad 67558,7 = 0,5 \cdot 4183,3 \cdot (T_{fs} - 15) \quad \to \quad T_{fs} = 47,3 \text{ ºC}$$

Como se puede observar, en la segunda iteración se ha obtenido el mismo valor de temperatura de salida del agua fría que en la primera iteración, por lo cual se considera este resultado como válido y ya no se continúa iterando.

Problema 9.5

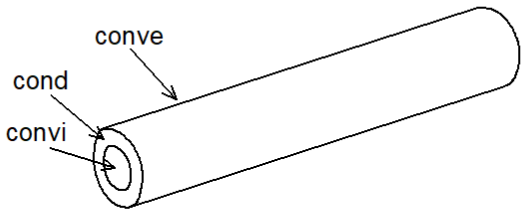
Vapor saturado a 0,14 bar (T_{sat} = 52,5 ºC y h_{cf} = 2376000 J/kg) se condensa en un intercambiador de carcasa y tubos con un paso por la carcasa y dos pasos por los tubos que consisten en 130 tubos de bronce (k = 114 W/m·K), cada uno con una longitud por paso de 2 m. Los tubos tienen diámetros interior y exterior de 13,4 y 15,9 mm, respectivamente. El coeficiente de transferencia de calor para la condensación en las superficies exteriores de los tubos es de 13500 W/m²·K. El agua de enfriamiento entra en los tubos a 20 ºC con una velocidad media de 1,25 m/s. Utilizar como propiedades del agua de enfriamiento ν = 6,6·10^{-7} m²/s, k = 0,6176 W/m·K, Pr = 4,437, ρ = 995,7 kg/m³ y c_p = 4183 J/kg·K.
Calcular:
a) Coeficiente global de transferencia de calor.
b) Temperatura de salida del agua de enfriamiento.
c) Flujo de condensación de vapor.

Solución apartado a:

El coeficiente global de transferencia de calor viene dado por la siguiente expresión:

$$U = \frac{1}{R_{global} A} = \frac{1}{R_{global} 2\pi r_e L}$$

Contabilizando la convección en el interior de los tubos, la conducción a lo largo del espesor del tubo y la convección exterior a los tubos, resulta:



$$R_{global} = R_{convi} + R_{cond} + R_{conve} = \frac{1}{2\pi r_i h_i L} + \frac{\ln(r_e / r_i)}{2\pi k_{bronce} L} + \frac{1}{2\pi r_e h_e L}$$

Por tanto:

$$U = \frac{1}{R_{global} 2\pi r_e L} = \frac{1}{\frac{1}{h_i}\frac{r_e}{r_i} + \frac{\ln(r_e / r_i)}{k_{bronce}} r_e + \frac{1}{h_e}}$$

Cálculo de h_i:

Se trata de un problema de convección, flujo interior. Es necesario calcular el número de Reynolds, el cual resulta:

$$Re_D = \frac{u_m D_i}{\nu} = \frac{1,25 \cdot 0,0134}{6,602 \cdot 10^{-7}} = 25370$$

Como el número de Reynolds resultó mayor de 2300 se trata de flujo turbulento. Por ejemplo, empleando la correlación de Dittus-Boelter resulta:

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^{0,4} = 139,3$$

$$Nu_D = \frac{h_i D_i}{k_{agua}} \quad \rightarrow \quad h_i = 6421\ W/m^2K$$

Por tanto:

$$U = \frac{1}{R_{global} 2\pi r_e L} = \frac{1}{\frac{1}{h_i}\frac{r_e}{r_i} + \frac{\ln(r_e / r_i)}{k_{bronce}} r_e + \frac{1}{h_e}} = \frac{1}{\frac{1}{6421}\frac{15,9}{13,4} + \frac{\ln(15,9/13,4)}{114}\frac{0,0159}{2} + \frac{1}{13500}} = 3693 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Solución apartado b:

Utilizando el método ε–NUT:

$$C_c \to \infty$$

$$C_f = \dot{m}_f c_{pf}$$

El flujo másico de agua fría viene dado por:

$$\dot{m}_f = \rho_f u_m A_f N = \rho_f u_m \frac{\pi D_i^2}{4} N = 995,7 \cdot 1,25 \cdot \frac{\pi 0,0134^2}{4} 130 = 22,81 \text{ kg/s}$$

Por tanto:

$$C_f = \dot{m}_f c_{pf} = 22,81 \cdot 4183 = 95404 \text{ W/K}$$

A partir de las gráficas de ε-NUT se obtiene la eficiencia ε:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{C_{min}}{C_{max}} = 0 \\[2ex] NUT = \dfrac{UA}{C_{min}} = \dfrac{3693 \pi D_e L N N_{pasos}}{95404} = \dfrac{3693 \cdot \pi \cdot 0,0159 \cdot 2 \cdot 130 \cdot 2}{95404} = 1 \end{array}\right\} \varepsilon \approx 0,6$$

El calor transferido se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} \quad \rightarrow \quad \dot{Q} = \varepsilon \dot{Q}_{max} = \varepsilon C_{min}(T_{ce} - T_{fe}) = 0,6 \cdot 95404 \cdot (52,5 - 20) = 1,86 \cdot 10^6 \text{ W}$$

Y finalmente la temperatura de salida del agua fría resulta:

$$\dot{Q} = \dot{m}_f c_{pf}(T_{fs} - T_{fe}) \quad \rightarrow \quad 1,86 \cdot 10^6 = 22,81 \cdot 4183 \cdot (T_{fs} - 20) \quad \rightarrow \quad T_{fs} = 39,5 \text{ °C}$$

Solución apartado c:

El flujo de condensación de vapor se obtiene calculando el calor mediante la siguiente expresión:

$$\dot{Q} = \dot{m}_c h_{cf} \quad \rightarrow \quad 1,86 \cdot 10^6 = \dot{m}_c 2376000 \quad \rightarrow \quad \dot{m}_c = 0,783 \text{ kg/s}$$