

**ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE RELACIONES Y
FUNCIONES FUNDAMENTADO EN LA METODOLOGÍA ABP Y MEDIADO POR
TIC PARA ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA
MARÍA AUXILIADORA DEL MUNICIPIO DE SANTUARIO RISARALDA**

LUIS EDUARDO ABAD QUINTERO

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PEREIRA, COLOMBIA**

2019

**ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE RELACIONES Y
FUNCIONES FUNDAMENTADO EN LA METODOLOGÍA ABP Y MEDIADO POR
TIC PARA ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA
MARÍA AUXILIADORA DEL MUNICIPIO DE SANTUARIO RISARALDA**

LUIS EDUARDO ABAD QUINTERO

**Trabajo de grado para optar el título de
MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA**

DIRECTOR:

Ph.D. CÉSAR AUGUSTO ACOSTA MINOLI

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
PEREIRA, COLOMBIA**

2019

Dedicatoria

A toda mi familia y en especial a mi madre Rocio y mi esposa Carola, mis dos grandes colegas y maestras en esta hermosa labor.

Mi profundo y eterno agradecimiento al Estado Colombiano, presente en todos mis procesos de Educación Formal, a la Institución Educativa María Auxiliadora del Municipio de Santuario Risaralda por su grata acogida y a mi asesor Ph.D. César Augusto Acosta Minoli por compartir sus valiosos conocimientos e infinita paciencia.

Tabla de contenido

1. Capítulo 1. Justificación, planteamiento del problema y objetivos.....	12
1.1 Justificación.....	12
1.2 Planteamiento del problema.....	13
1.3 Objetivos.....	17
1.3.1 Objetivo general.....	17
1.3.1 Objetivos específicos.....	17
2. Capítulo 2. Marco teórico.....	18
2.1 Pensamiento variacional.....	18
2.2 Conjunto producto.....	19
2.3 Relaciones.....	19
2.4 Función.....	19
2.4.1 Desarrollo histórico y epistemológico del concepto de función.....	20
2.5 Sistemas de representación semiótica.....	24
2.6 Aprendizaje basado en problemas ABP.....	28
2.7 TIC en el aprendizaje de las matemáticas.....	31
2.8 Orientaciones curriculares.....	33
2.8.1 Estándares básicos en competencias en matemáticas.....	33
2.8.2 Derechos básicos de aprendizaje.....	34
2.9 Estado del arte.....	35
3. Capítulo 3. Metodología.....	39
3.1 Diseño metodológico.....	39

3.2 Metodología Investigación-Acción.....	40
3.2.1 Ciclos de la metodología de la Investigación-Acción.....	41
3.2.2 Modalidades de la metodología de la Investigación-Acción.....	42
3.3 Población de la investigación.....	44
4. Capítulo 4. Análisis de resultados.....	45
4.1 Prueba diagnóstica.....	45
4.2 Secuencia Didáctica.....	49
4.3 Las vocales de Gauss.....	53
4.4 Software educativo “Bloques Lógicos”.....	55
4.5 Software educativo “Funcirep”.....	61
4.6 Actividades de representación.....	67
4.7 Situación problema “La finca de don José”.....	69
4.8 Prueba Postest.....	72
5. Capítulo 5. Conclusiones.....	75
Bibliografía.....	78
6. Anexos.....	81

Lista de Anexos

6.1 Anexo 1: Informe Siempre Día E. 017.....	81
6.2 Anexo 2: Instrumento pre test.....	84
6.3 Anexo 3: Actividad de lecto-escritura Gauss.....	87
6.4 Anexo 4: Manual Del Usuario aplicación “Funcirep”.....	89
6.5 Anexo 5: Situación problema “La finca de don José”.....	93
6.6 Anexo 6: Instrumento Pos-test.....	94
6.8 Anexo 8. Actividad complementaria “Bloques Lógicos”.....	97
6.9 Anexo 9. Actividad complementaria “Funcirep”.....	100
6.7 Anexo 7. Registro fotográfico, utilización software pedagógico.....	104

Lista de tablas

Tabla1. Recopilación informe Día E 2018, Institución Educativa María Auxiliadora Santuario Risaralda.....	15
Tabla2. Evolución del concepto de función en la época moderna.....	24
Tabla 3. Diferencias entre los procesos de aprendizaje tradicional y ABP.....	29
Tabla 4. Características problema-Ejercicio de clase.....	31
Tabla 5. Modalidades de la Investigación-Acción.....	43
Tabla 6. Actividades semióticas en la prueba diagnóstica.....	46
Tabla 7. Desempeño prueba diagnóstica.....	47
Tabla 8. Desempeño prueba pos test.....	73

Lista de figuras

Figura 1. Resultado Histórico Matemáticas 2014-2015-2016-2017 Saber 9 Institución Educativa María Auxiliadora Santuario Risaralda.....	13
Figura 2. Representación el concepto de función con diagramas de Venn y modelo de maquina.....	21
Figura 3. Espiral de ciclos de la investigación-acción.....	42
Figura 4. Desempeño prueba diagnóstica grado 8B.....	48
Figura 5. Desempeño por pregunta prueba diagnóstica grado 8B.....	48
Figura 6. Registro conversión grafica-tabular E7.....	49
Figura 7. Registro conversión grafica-tabular E10.....	54
Figura 8. Respuesta diferencias entre R_1 y R_2 por parte de E17.....	55
Figura 9. Actividad 1 de validación “bloques lógicos” E17.....	57
Figura 10. Actividad 2 de validación “bloques lógicos” E17.....	59
Figura 11. Actividad 3 de validación “bloques lógicos” E17.....	59
Figura 12. Actividad 1 de validación “Funcirep” E18.....	63
Figura 13. Actividad 2 de validación “Funcirep” E18.....	64
Figura 14. Actividad 3 de validación “Funcirep” E18.....	65
Figura 15. Actividad 4 de validación “Funcirep” E18.....	66
Figura 16. Actividad elementos y conversión semiótica de funciones.....	67
Figura 17. Actividades de representación estudiante E17.....	68
Figura 18. Actividades de representación estudiante E28.....	69
Figura 19. Representación tabular a situación problema estudiante E23, E15 y E18.....	70
Figura 20. Representación cartesiana a situación problema estudiante E8, E10 y E21.....	71
Figura 21. Respuesta a situación problema estudiante E12, E16 y E20.....	72

Figura 22. Desempeño prueba pos test grado 8B..... 74

Figura 23. Desempeño por pregunta prueba pos test grado 8B..... 75

Resumen

El concepto de función se constituye como pilar fundamental sobre el que se cimenta el desarrollo del pensamiento matemático variacional en la educación media, esencial para un buen desempeño en Cálculo y por consiguiente de suma relevancia en la comprensión de gran cantidad de fenómenos naturales, económicos, sociales entre otros, y que son objeto de estudio de diferentes disciplinas científicas.

Esta propuesta pretende diseñar e implementar un ambiente de aprendizaje del concepto de función lineal en el grado octavo B de la Institución Educativa María Auxiliadora del Municipio de Santuario Risaralda, donde los estudiantes, como habitualmente ocurre en esta etapa de la vida académica, experimentan esa difícil y en ocasiones traumática transición de la aritmética al álgebra, generalmente, saturada por el docente, de gran cantidad de ejercicios que buscan desarrollar un dominio sintáctico de los nuevos símbolos.

El trabajo se construye bajo la teoría de aprendizaje basado en problemas ABP, e incorpora el uso de Tic como nuevo medio de representación del conocimiento, que viabiliza el trabajo conexo de las diferentes posibilidades de registro semiótico alrededor del concepto de función, ofreciendo, además, una oportunidad para integrar actividades que derive simultáneamente en el avance de los pensamientos numérico y geométrico.

Palabras clave: Pensamiento variacional, Función, Representación Semiótica, Registros, Aprendizaje Basado en Problemas, Tics

ABSTRACT

The concept of function is constituted as a fundamental pillar on which the development of the variational mathematical thought in the secondary education is based, underpinning ideas in Calculus and consequently of great importance in the comprehension of great amount of natural phenomena, economic, social, among others, and that these are the object of study of different scientific disciplines.

This proposal aims to design and to implement a learning environment of the concept of linear function in the eighth grade B of María Auxiliadora School of the Municipality of Santuario Risaralda, where students, as usually happens in this stage of their academic life, experience that difficult and sometimes traumatic transition from arithmetic to algebra, usually saturated by the teacher, with a lot of exercises that seek to develop a syntactic domain of the new symbols.

This work was done using under the theory of learning based on problem solving ABP, and incorporates the use of Tic as new means of knowledge representation, which make possible the related work of the different possibilities of semiotic registration around the concept of function, offering, in addition, an opportunity to integrate activities that derive simultaneously in the advance of the numerical and geometric thoughts.

Keywords: Variational thinking, Funtion, Semiotic Representation, Registers, Learning Based on Problem Solving, Tics.

1. Capítulo 1. Justificación, planteamiento del problema y objetivos

1.1 Justificación

Si bien los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) nos señalan el camino que propende por la formación del pensamiento variacional desde el inicio de la vida escolar, soportado casi que exclusivamente, por medio del lenguaje natural y las representaciones gráficas; es quizás en grado octavo por el desarrollo de la capacidad de representación en sistemas algebraicos y analíticos, el momento oportuno para construir en los estudiantes el concepto de función.

Varios siglos y el gran esfuerzo de prodigios de la matemática como Descartes, Fermat, Leibniz, Euler, Dirichlet entre otros le ha representado a la humanidad construir el concepto de función, no se trata entonces de una cuestión trivial, sino que por el contrario es fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático y de gran utilidad en diferentes campos del conocimiento como está consagrado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2003) *“Es importante también tener en cuenta que las funciones permiten analizar y modelar distintos fenómenos y procesos no solo en problemas y situaciones del mundo de la vida cotidiana, sino también de las ciencias naturales y sociales y de las matemáticas mismas”* . Actualmente recae sobre el docente la mayor cuota de responsabilidad, en la construcción, algunas veces errada, de significados matemáticos, y este contenido en particular no es la excepción, pues se privilegia, quizás sin premeditarlo, el saber procedimental sobre el conceptual, generando lo que Dolores y Valero (2004) denominan como “reducción de aprendizajes”. Por tal motivo se están concibiendo experiencias de aula, que en pocos casos, conducen a apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto, y que como resultado no

permiten entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, generando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes, como lo señala López (2009).

1.2 Planteamiento del problema

Teniendo como referente los resultados de las pruebas Saber 9, en lo que corresponde al desempeño en Matemáticas, y pese a obtener resultados aceptables, con un promedio de 334 puntos en los años 2014, 2015, 2016 y 2017, se evidencia un incremento significativo en el porcentaje de estudiantes con desempeño insuficiente (Figura 1).

Establecimiento educativo	MARIA AUXILIADORA
Código DANE	166687000248
Dirección	CL 5 6 26
Municipio - Departamento	Santuario-Risaralda
Sector	Oficial
Zona	Urbana
Nivel socioeconómico	2

2. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño. Matemáticas - grado noveno

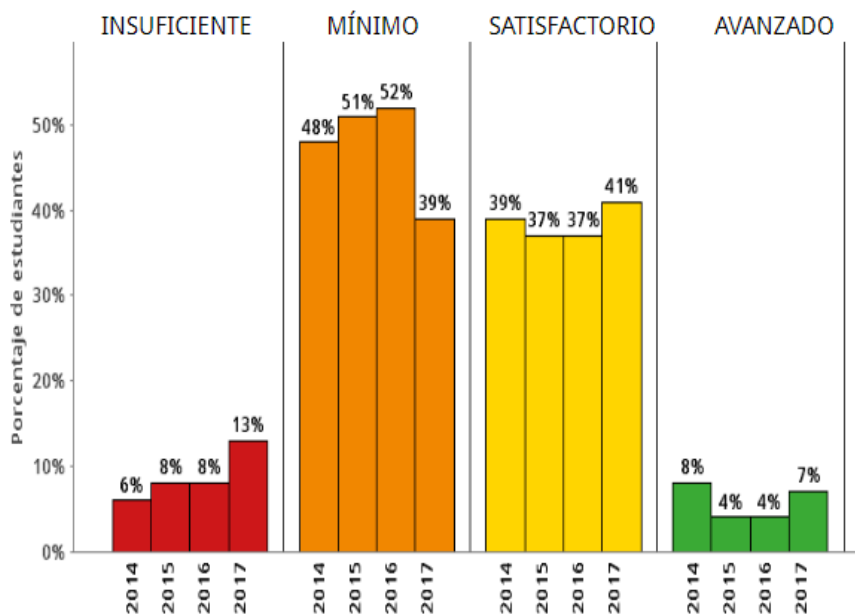


Figura 1. Resultado Histórico Matemáticas 2014-2015-2016-2017 pruebas Saber 9

Institución Educativa María Auxiliadora Santuario Risaralda

Recuperado de: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359//seleccionReporte.jsp>

A inicios del año 2018 la Institución Educativa María Auxiliadora del Municipio de Santuario con el propósito de socializar con los diferentes actores de la comunidad educativa, en el marco de las actividades programadas para el Día E, recibió de parte del Instituto Colombiano de Fomento a la Educación Superior (ICFES, 2017) el informe Colombia, donde se expone detalladamente el desempeño del colegio en las tres competencias: comunicación, resolución y razonamiento, las cuales reagrupan las inicialmente definidas en los estándares básicos Ministerio de Educación nacional (MEN, 2006) y en las que se fundamenta la prueba censal Saber 9 ICFES (2006). El documento establece un comparativo frente al obtenido por las instituciones del país y de los doce municipios no certificados del departamento, regidos por la Secretaria de Educación de Risaralda. En este informe Día E, de acuerdo al porcentaje de aprobación se conforman cuatro grupos, representados por los colores verde con 19% o menos, amarillo entre el 20% y el 39%, naranja entre el 40% y el 69% y rojo con el 70% o más.

Además, expone con el porcentaje de reprobación, los aprendizajes que requieren acciones pedagógicas. En la tabla 1 se exponen los que afectan el desarrollo exitoso del pensamiento variacional y en particular el de concepto de función.

Tabla1. Recopilación informe Día E 2018, Institución Educativa María Auxiliadora Santuario Risaralda

Nivel de desaprobación competencia de Comunicación			
Establecimiento	Municipios no certificados de Risaralda	Colombia	
48%	48%	48%	
Descripción general de los aprendizajes			
Rojo 0%	Naranja 76,9%	Amarillo 23,1%	Verde 0%
Aprendizajes que desfavorecen el desarrollo del concepto de función.			
El 66% no reconoce el lenguaje algebraico como forma de presentar procesos inductivos.			
El 57% no identifica expresiones numéricas y algebraicas equivalentes.			
El 57% no compara, usa o interpreta datos que provienen de situaciones reales ni traduce entre diferentes representaciones de un conjunto de datos.			
El 47% no identifica características de graficas cartesianas en relación con la situación que representan.			
El 46% no reconoce relaciones entre diferentes representaciones de un conjunto de datos ni analiza la pertinencia de la representación.			
El 38% no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación.			
El 34% no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.			
Nivel de desaprobación competencia de Resolución			
Establecimiento	Municipios no certificados de Risaralda	Colombia	
54%	54%	54%	
Descripción general de los aprendizajes			
Rojo 16,7%	Naranja 58,3%	Amarillo 25%	Verde 0%
Aprendizajes que desfavorecen el desarrollo del concepto de función.			
El 67% no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.			
Nivel de desaprobación competencia de Razonamiento			
Establecimiento	Municipios no certificados de Risaralda	Colombia	
48%	48%	48%	
Descripción general de los aprendizajes			
Rojo 6,7%	Naranja 73,3%	Amarillo 20%	Verde 0%
Aprendizajes que desfavorecen el desarrollo del concepto de función.			
El 53% no interpreta ni usa expresiones algebraicas equivalentes.			
El 52% no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación.			
El 38% no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación.			
El 34% no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.			

Adaptado de ICFES (2017)

Se considera pertinente, diseñar e implementar, una estrategia didáctica para el grado 8B de la Institución Educativa María Auxiliadora del Municipio de Santuario Risaralda, que permita revertir esta tendencia.

Esta propuesta basada en la teoría de aprendizaje basado problemas ABP, incorpora el uso de nuevas tecnologías, que como nuevos medios de representación pueden propiciar situaciones idóneas de aprendizaje siempre y cuando, su utilización este enmarcado dentro de un contexto estructurado Guerrero y Flores (2009).

La institución Educativa María Auxiliadora, a finales del año 2015 en el marco del programa Tabletas para Educar del Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, recibió 810 unidades con buenas especificaciones técnicas, esta disponibilidad de recursos se convierte en una fortaleza para la realización de la propuesta y a la vez en un desafío para crear un medio útil donde los estudiantes visualicen, exploren y construyan relaciones matemáticas Castillo y G (2009).

Emerge en estas condiciones el interrogante, que motiva este trabajo de investigación:

¿Cuál es el impacto de diseñar e implementar un ambiente de aprendizaje basado en ABP y TIC para la enseñanza de relaciones y funciones a estudiantes del grado octavo de la Institución Maria Auxiliadora, del Municipio de Santuario Risaralda?.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Diseñar una estrategia didáctica fundamentado en la metodología ABP, mediado por TIC y que permita promover el desarrollo del pensamiento variacional, específicamente el concepto de función lineal en los estudiantes de grado 8 de la institución educativa María Auxiliadora del sector público del Municipio de Santuario departamento de Risaralda.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Analizar los conceptos de relación binaria y función desde la metodología ABP.
- Diseñar una estrategia didáctica para los conceptos de relación y función, considerando la teoría de aprendizaje basado problemas y con la utilización de TIC.
- Desarrollar un recurso educativo digital sobre dispositivos móviles para el aprendizaje del concepto de función.
- Validar la estrategia didáctica por medio de una metodología de investigación cualitativa.

2. Capítulo 2. Marco Teórico

2.1 Pensamiento Variacional

La naturaleza ofrece una gran variedad de fenómenos dinámicos, susceptibles de cambio, generalmente bajo la continua sucesión de patrones. Estos eventos han suscitado la curiosidad del hombre a través del tiempo, como resultado de este interés, se han obtenido conocimientos que han permitido moldear y prever algunos sucesos naturales, lo que ha sido de gran utilidad en el desarrollo tecnológico de diferentes actividades, como la agricultura entre otras.

El permanente desarrollo lingüístico tanto oral como escrito y su consecuente evolución en los diferentes sistemas de representación, le han provisto al hombre de más y mejores herramientas cognitivas para comprender, representar y modelar situaciones de variación. Este conjunto de habilidades es conocido en el ámbito de la educación matemática como pensamiento variacional, y es definido por (MEN,2004) como “la capacidad de darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas”.

Hacia mediados de los años 90 se gestó en Colombia una reforma en la educación matemática, con la promulgación por parte de Ministerio de Educación Nacional de los lineamientos curriculares, indicadores de logro y estándares que les otorgaba a las instituciones educativas autonomía curricular. La intención es lograr el desarrollo articulado de los cinco pensamientos matemáticos: numérico, aleatorio, métrico, geométrico o espacial y variacional, gracias al planteamiento de situaciones problema, con un mayor nivel de contextualización y que no necesariamente obedezcan una secuencia lineal de contenidos.

Contrario a lo que se cree en los ámbitos de la matemática escolar, el desarrollo del pensamiento variacional se puede iniciar desde muy temprano, en las aulas de primaria son de gran valor las actividades de generalización, donde los estudiantes despliegan la capacidad de reconocer patrones, propiciando de manera simultánea avances en los pensamientos geométrico, métrico y numérico. Posteriormente en el nivel de básica secundaria es fundamental la construcción del concepto de función, para lograr efectivamente este propósito, es preciso apropiarse previamente de las nociones de conjunto, producto y relación; los cuales a continuación se extraen del texto de Topología General Lipschutz (1978)

2.2 Conjunto producto.

Dados dos conjuntos A y B , se llama conjunto producto de A y B , y se representa por $A \times B$, al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$, es decir,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

2.3 Relaciones.

Una relación R entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.

El *dominio* de una relación entre R entre A y B es el conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados de R y el *dominio de las imágenes* es el conjunto de los segundos elementos, es decir,

$$\text{dominio de } R = \{a : \langle a, b \rangle \in R\}, \text{ dominio de imágenes de } R = \{b : \langle a, b \rangle \in R\}$$

2.4 Función

Si a cada elemento de un conjunto A se le hace corresponder un único elemento de un conjunto B , se dice que el conjunto, f , de tales asociaciones es una función (o aplicación) de A en B y se denota por

$$f: A \rightarrow B$$

El único elemento de B que, por la función f , le corresponde a $a \in A$ se representa por $f(a)$ y se llama valor de f en a o, también, imagen de a por f . El dominio de f es A , el codominio es B . A toda función $f: A \rightarrow B$ le corresponde en $A \times B$ una relación definida por:

$$\{(a, f(a)): a \in A\}$$

Este conjunto es el grafo de f . El dominio de imágenes o dominio de valores de f , denotado por $f[A]$, es el conjunto de las imágenes, es decir, $f[A] = \{f(a) \in B: a \in A\}$

2.4.1 Desarrollo histórico y epistemológico del concepto de función

No es fácil, afirmar categóricamente cual es el verdadero y absoluto origen del concepto de función, siglos de ejercicio dialéctico ha invertido la humanidad y en particular la comunidad matemática desde que, según los registros históricos, las culturas Babilónicas dieron inicio a tan complejo desarrollo epistemológico.

Según plantea Boyer 1986 citado en Sierra (1998) en su obra “Historia de las Matemáticas” es al matemático alemán Dirichlet (1805-1859) a quien se le atribuye el concepto de función más aceptado en la actualidad:

Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x

No obstante, este se ha ido redefiniendo, como consecuencia del surgimiento y evolución de nuevas ramas de las matemáticas como la teoría de conjuntos o la topología entre otras.

Las formas esquemáticas, de sendos conjuntos de llegada y salida relacionados entre sí y la de un proceso simbolizado por una máquina transformando una variable de entrada como se

aprecian en la figura 2, han sido quizás las representaciones más utilizadas en los diferentes textos utilizados tradicionalmente en el sistema escolar para el propósito de construir la primera noción de función.

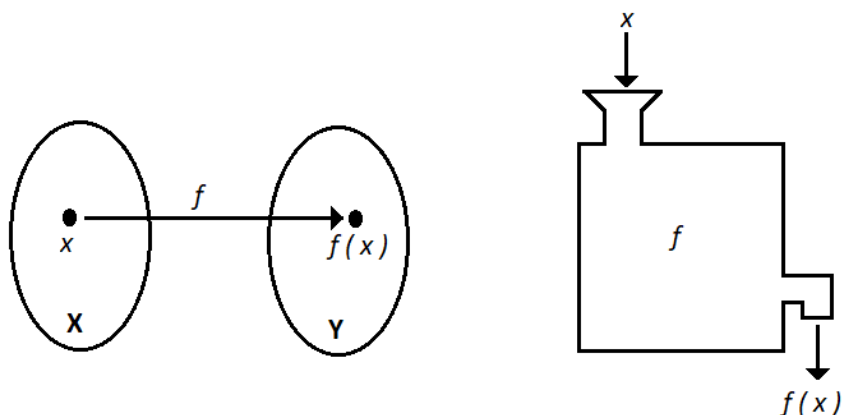


Figura 2. Representación el concepto de función con diagramas de Venn y modelo de máquina

El conocimiento por parte del docente sobre el desarrollo histórico y epistemológico que a lo largo de los siglos ha experimentado el concepto de función, puede ofrecerle ventajas en su proceso de enseñanza, no solo porque fortalece su conocimiento matemático y le permite desarrollar el interés de sus estudiantes, sino porque además como sugieren Sierra, González y López (1998), existe cierta similitud en la evolución de las diferentes formas de representación que se registran en la historia y las empleadas en los diferentes niveles de la etapa escolar, que permiten establecer semejanzas entre el desarrollo social y cultural de un concepto, y la construcción individual del mismo .

Sastre, Boubée y Rey (2008), en su estudio subrayan tres momentos fundamentales en el desarrollo histórico y epistemológico del concepto de función.

Edad Antigua (2000 A.C. – 600 A.C.) Registros arqueológicos pertenecientes a las culturas prehistóricas dan testimonio de una temprana actividad matemática en torno al concepto de función representada en conteos. En el periodo de tiempo comprendido entre los años 2000 y 500 a.c. las culturas Babilónicas, evidencian a través de hallazgos arqueológicos, desarrollos matemáticos que exponen tácitamente el concepto de función, como son tablas con las cuatro operaciones básicas, cuadrados, raíces reglas de tres, además de registros de observaciones astronómicas que acreditan un impulso del pensamiento variacional, entre otras.

Posteriormente, entre los años 500 a.c. y 500 d.c. la cultura helénica tomo el relevo en el desarrollo de las matemáticas, en su legado, si bien no se desarrolló explícitamente la noción de función y mucho menos su simbolización, se hallan trabajos de carácter geométrico sobre áreas, longitudes, centros de gravedad entre otros que pueden ser considerados como valiosos aportes en la construcción de la misma.

Edad Media (600 A.C. – 1453 D.C.) Como consecuencia del aislamiento cultural de los diferentes pueblos que la conformaban y de la influencia de la iglesia, Europa atraviesa un periodo de escasos avances científicos, en el caso de las matemáticas y por concurso de los árabes se destaca el arribo del algebra. El avance más significativo en la construcción del concepto de función se originó en el interés de modelar matemáticamente fenómenos físicos, destacándose los trabajos de Heytesbury y Swineshead en Inglaterra y de Oresme en Francia, sobre los cuales se apoyarían posteriormente Descartes y Galileo.

Época Moderna (Desde finales del siglo XV) (Sastre et al, 2008) recurre a Kleiner (1989) para identificar cuatro acontecimientos decisivos en el desarrollo del concepto de función durante los

albores del renacimiento: la extensión al concepto de los números reales, la aparición del álgebra simbólica, el estudio del movimiento y la fusión entre el álgebra y la geometría.

El desarrollo del álgebra simbólica por parte del matemático francés Vieta es ampliamente aprovechado por los ya mencionados Galileo para introducir los primeros conceptos de variación y Descartes quien sienta las bases de la geometría analítica. Posteriormente y de manera simultánea Newton y Leibniz contribuyeron enormemente al desarrollo del concepto, es este último quien por primera vez utiliza el término *función*, con sus representaciones mediante series de potencias lograron rebasar los límites que imponía la representación analítica. Especial mención merece Leonard Euler quien aporta al proceso con las nociones de *constante* y *cantidad variable*, es quien eleva el concepto de función a objeto de estudio, más allá de servir como herramienta para modelar fenómenos físicos.

Es así como hacia 1720 y con la función como ente matemático sobre el cual se centra la discusión nace el Análisis, donde se abordan aspectos como la continuidad, logrando con los trabajos de Fourier y Dirichlet principalmente la independencia de los registros algebraicos y logrando establecer de forma más general como una correspondencia arbitraria entre conjuntos. En la tabla 2 (Sastre et al., 2008) resumen la evolución del concepto de función entre los siglos XVII y XIX

Tabla2. Evolución del concepto de función en la época moderna

Época	Definición
Siglo XVII	Cualquier relación entre variables
	Una cantidad obtenida de otras cantidades mediante operaciones algebraicas o cualquier otra operación imaginable
	Cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva
	Cantidades formadas usando expresiones algebraicas y trascendentales de variables y constantes
Siglo XVIII	Cantidades que dependen de una variable
	Función de cierta variable como una cantidad que está compuesta de alguna forma por variables y constantes
	Cualquier expresión útil para calcular
Siglo XIX	Correspondencia entre variables
	Correspondencia entre un conjunto A y los números reales
	Correspondencia entre dos conjuntos

Recuperado de (Sastre et al., 2008)

2.5 Sistemas de representación semiótica

El objetivo esencial de toda actividad de enseñanza y aprendizaje en cualquier área del conocimiento es la adquisición de nuevos conceptos, desde la antigua Grecia a este proceso se le dio el nombre de *noética*; particularmente en las matemáticas sus objetos de estudio corresponden a construcciones mentales, carentes de cualquier propiedad física, para lograr este fin es imprescindible apoyarse en la utilización de conjuntos de signos, regidos por una sintaxis

particular, denominados registros semióticos, y a los que Jhon Locke (1632-1704) identifico en su totalidad y en razón de su función, con el nombre de *semiótica*; convirtiéndose en el único medio para incorporar acertadamente diferentes lenguajes especializados que permitan construir cognitivamente los objetos matemáticos, tal como lo señala y sintetiza Duval (1993) al afirmar que “*sin semiótica no hay noética*”.

D’Amore, Fandiño y Lori (2013) definen el *reenvió ostensivo* como la posibilidad de tener experiencias sensoriales sobre los objetos de estudio, que favorezcan la experimentación, como en el caso de las Ciencias Naturales, pero en el caso de la matemática, que como ciencia apunta a objetos de estudios abstractos, inaccesibles a través de los sentidos, no se dispone de esta opción; esta carencia acentúa la dificultad para los sujetos que se encuentran en proceso de aprendizaje; la única posibilidad de comunicar y por consiguiente construir estos significados u objetos mentales, recae en el uso con cierto dominio de diversas registros semióticos, cuidadosamente instituidos y aceptados por la comunidad académica.

Radford(2001) reivindica la función de la mediación semiótica, como la única forma de generar conocimiento matemático, otorgándole un rol de mayor relevancia, que la de ser una simple mediadora, por tal motivo, es importante tener presente, que cada registro favorece la comprensión de diferentes atributos de un concepto, obteniendo una noción parcializada, por esta razón es que una variedad moderada en la utilización de los mismos, sea conveniente en los procesos de aprendizaje(D’Amore et al,2013); en este escenario, el docente debe proponer en el aula actividades en pro de lograr que el estudiante obtenga una correcta articulación de los diferentes registros semióticos, en consecuencia, es fundamental la importancia en una acertada elección en cuanto a la cantidad y las características de los mismos se refiere.

En el ejercicio de la actividad matemática y particularmente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la misma, se identificaron tres operaciones (expresión del objeto matemático en un determinado registro semiótico, las transformaciones y la conversión); en cuanto al dominio sobre sistemas de representación se refiere; el correcto desempeño del educando al respecto, generalmente evidencia la adquisición satisfactoria de un concepto, de tal manera que se convierte en un objetivo primordial para el docente.

Siguiendo a (D'Amore et al,2013) las operaciones semióticas se realizan generalmente en el siguiente orden de acuerdo con el nivel de desarrollo y consolidación de los nuevos conocimientos

la representación que consiste en la expresión del objeto matemático en un determinado registro semiótico. Independiente de la motivación que genera la actividad de representación, el objetivo es generar unidades significantes de mayor complejidad, sobre las que se tenga la posibilidad de realizar transformaciones; para lograr esta articulación los registros deben tener un proceso de estandarización que faciliten su aceptación, incluso de quien no produjo la representación y que no necesariamente logra comprender su contenido; por tal motivo deben cumplir con las siguientes tres reglas de conformidad definidas por Duval (2017).

- La determinación de unidades elementales.
- Las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior
- Las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa

Posteriormente se da lugar a las transformaciones, de las que se pueden distinguir dos categorías:

El tratamiento llevado a cabo en el interior del mismo registro, obteniendo una nueva representación que evidencie características diferentes del objeto, en lo que Duval (2017) identificara como *expansión* discursiva del registro.

La conversión cuyo objetivo es el de obtener una nueva representación simultáneamente con un cambio de registro; es sin duda, la actividad que mayor dificultad genera al docente en el diseño de sus actividades curriculares, pues no responde a parámetros definidos tal y como lo expresa Duval (2017) “La conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos”, señalando igualmente que se requiere por parte del sujeto una capacidad mayor de diferenciar el contenido del objeto a ser construido cognitivamente de los registros empleados.

En particular sobre la representación del concepto de función se disponen de cuatro registros semióticos: lenguaje natural, tablas, gráficas y lenguaje algebraico y como lo señalan (Sierra, González y López (1998), tradicionalmente en el sistema escolar las prácticas de aula se fundamentan sobre un tratamiento de registros simbólicos y gráficos, presentando a los educandos los elementos constitutivos del concepto como dominio, rango, entre otros de una manera poco articulada, valorando su adquisición a partir del rigor evidenciado en la capacidad de tratamiento de los registros algebraicos, ocasionando un detrimento en el desarrollo de una verdadera competencia analítica, generando confusión en el estudiante y privándolo de obtener un significado integral del concepto de función.

2.6 Aprendizaje basado en problemas ABP.

La cantidad de información disponible y la facilidad de acceso a la misma de que dispone la sociedad contemporánea crecen vertiginosamente, no es un secreto que estas nuevas dinámicas moldean casi todas las facetas de nuestra vida, y la educación formal no es la excepción.

Padmavathy(2013), señala que, el estudiante moderno se desenvuelve en un mundo desbordado de datos y para llegar a ser competitivo en los entornos laborales que le esperan, debe desarrollar nuevas competencias que le permitan adaptarse a contextos variables; la labor de la escuela en este escenario es propiciar los ambientes adecuados para este fin.

Se deben entonces replantear las estrategias metodológicas, de la enseñanza tradicional, donde a un educando de actitud pasiva se le transfiere el conocimiento bajo la línea autoritaria del docente, basada en la repetición axiomática de una gran cantidad de conceptos, llamada comúnmente educación bancaria. En la actualidad el objetivo es desplegar la capacidad de aprender a aprender, desarrollando entre los estudiantes una comunicación asertiva que les permita establecer conexiones y negociar significados, tal y como lo expresan Rúa, Bernaza y Bedoya (2017).

Como una alternativa de origen constructivista, desde las escuelas de medicina de mediados del siglo XX surge el aprendizaje basado en problemas ABP, el cual Según Vásquez (2010), propone que el docente, asumiendo un rol de apoyo y mediación, enfrente al alumno a una situación no estructurada o problemática, comprometiéndolo para que a partir de sus conocimientos previos, participe activamente en la elaboración de estrategias de trabajo que le permitan obtener y corroborar una respuesta; en el cumplimiento de este objetivo va adquiriendo, aplicando y consolidando nuevos conceptos, y logrando de manera simultánea el desarrollo de nuevas habilidades individuales y colectivas. Si bien esta estrategia didáctica se inició en la educación

superior donde es mayor la capacidad de trabajo autónomo, con el pasar de los años se ha venido implementando en niveles básicos, no sin que se presenten dificultades, generadas especialmente por la poca resiliencia de los docentes y la pasividad de los estudiantes, heredadas de años de aplicación de la enseñanza tradicional en las aulas, para la cual, Vásquez(2010) sintetiza en la tabla 3 las diferencias más notorias con el proceso ABP.

Tabla 3. Diferencias entre los procesos de aprendizaje tradicional y ABP.

<i>Es un proceso de enseñanza tradicional</i>	<i>Es un proceso ABP</i>
El profesor asume el rol de experto o autoridad formal	El profesor asume el rol de facilitador, tutor, guía, asesor.
El profesor transmite la información a los Alumnos, los alumnos son vistos como receptores pasivos de la información	Los alumnos son vistos como sujetos que pueden aprender por cuenta propia, se fomenta la responsabilidad y son motivados por el profesor
Los profesores organizan el contenido en exposiciones de acuerdo a su disciplina. La comunicación maestro-alumno es unidireccional	Los profesores diseñan el curso basado en problemas abiertos y lo más reales posibles. La comunicación maestro-alumno es bidireccional.
Los alumnos absorben, transcriben, memorizan y repiten la información para exámenes.	Los alumnos participan activamente en el problema, identifican sus necesidades y se vuelven más críticos
Los alumnos y maestros buscan una única respuesta correcta.	Los alumnos pueden darse cuenta que existen diversas estrategias para llegar a una solución, el maestro los impulsa a explorar alternativas.
La evaluación es sumatoria y la realiza el profesor.	La evaluación es integral: procesos y resultados. Se fomenta la autoevaluación y la coevaluación.

Nota. Recuperado de: Vasquez(2010)

El primer paso que debe dar el docente hacia una correcta transformación de los procesos tradicionales, es la acertada formulación de la situación problemática, de tal manera que le permita al estudiante encontrar sentido a todos esos axiomas, teoremas, procedimientos entre otros, que componen su actividad matemática y que generalmente se les presenta inconexa con su cotidianidad. Como lo señala Guy Brosseau (citado por Castro y Castro, 2015)

Saber matemáticas, no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, sino que es ocuparse de problemas en un sentido amplio, lo cual incluye tanto encontrar buenas preguntas como encontrar soluciones. Una buena reproducción por parte del alumno, de la actividad matemática exige que este intervenga como actor de la actividad (p, 21).

De acuerdo a las recomendaciones hechas por D'Amore (2011) quien lo sintetiza en la tabla 4, es esencial para el docente identificar con claridad los ejercicios rutinarios de clase, generalmente tomados de los textos escolares, de gran utilidad para afianzar conceptos y desarrollar algunas capacidades específicas, y no confundirlos con las situaciones problemáticas propuestas; estas últimas, deben tener la capacidad de encaminar al estudiante en un verdadero proceso de aprendizaje, como propone Piaget, mediante la confrontación de sus saberes previos.

Tabla 4. Características problema-Ejercicio de clase.

	<i>Problema</i>	<i>Ejercicio</i>
<i>En la enseñanza</i>	Instrumento de adquisición de conocimiento objeto de enseñanza	Instrumento para consolidar conocimientos y habilidades Instrumento para verificar conocimientos y habilidades
<i>Privilegia</i>	Procesos	Productos
<i>El maestro</i>	Elige los problemas sigue los procesos	Elige los ejercicios corrige y valora los productos
<i>El sujeto tiene un papel</i>	Productivo	Ejecutivo

Nota. Recuperado de: D'Amore (2011)

2.7 TICs en el aprendizaje de la matemática.

Las últimas décadas se han visto marcadas por un acelerado desarrollo de las tecnologías de la información, la aparición de múltiples artefactos digitales y el vertiginoso desarrollo del software, impactan dramáticamente nuestra cotidianidad, y el sistema educativo no es la excepción, la cada vez más accesible y creciente cantidad de información disponible, determina nuevas formas de aprender. Atrás está quedando ese escenario tradicional donde el docente monopoliza el acceso a la información, ahora el estudiante, motivado por sus propios intereses y provisto cada vez de más y mejores herramientas asume un rol protagónico en su proceso de formación.

Nuestro sistema escolar público ha experimentado en los últimos años una creciente dotación en infraestructura tecnológica, desde que en la década de los noventa el Gobierno Nacional dio inicio al programa Computadores para Educar, el cual se ha ido transformando y complementando con el concurso de otras Instituciones, cada vez es menor el número de

estudiantes por dispositivo digital, de igual manera la cantidad de conexiones a Internet de nuestras instituciones educativas y el ancho de banda de las mismas, han aumentado significativamente, particularmente las ubicadas en zonas urbanas.

Pero en este contexto surge el interrogante si este incremento y modernización de herramientas ha impactado significativamente en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que la disposición de una gran cantidad de datos en los procesos de aula, no garantiza por si sola el éxito en la generación de conocimiento, como afirma Diaz-Barriga (2013) es necesario una acertada orientación del docente, quien amparado fundamentalmente en el conocimiento de su disciplina debe fomentar la construcción de un pensamiento crítico en sus estudiantes, que les permita descubrir información relevante, para articular con sus propios saberes en la construcción de nuevos esquemas mentales. El temor a ser superado por sus discípulos en la capacidad de manipulación de los nuevos mediadores tecnológicos, sumado a la rápida evolución de los programas informáticos y su consecuente dificultad para asimilar en los procesos didácticos, son algunos de los obstáculos que debe superar el educador contemporáneo en la incorporación de estas nuevas herramientas.

Los nuevos medios tecnológicos ofrecen la posibilidad de obtener formas dinámicas de representación, complementarias a las tradicionales a base de lápiz y papel, estos conceptos matemáticos doblemente representados, denominados por Moreno-Armella (2013) como *objetos borde*, permiten nuevas posibilidades de resignificación en los estudiantes, como consecuencia de los niveles de interactividad. La posibilidad de manipular más eficientemente las características y propiedades de un determinado objeto matemático, liberando al aprendiz de excesivos procesos, con altas probabilidades de error, permite convocar su esfuerzo y atención en los aspectos relevantes del concepto a aprender, en concordancia, Lupiáñez y Moreno (2001)

sostienen que la mediación simbólica de nuevos artefactos digitales en la construcción de nuevos conocimientos matemáticos, admiten la posibilidad de explotar diferentes registros semióticos de gran riqueza gráfica, para no depender casi que predominantemente de las representaciones algebraicas, y sobre las que como evidencian múltiples investigaciones, realizadas en diferentes países, se recargan las actividades propuestas por el docente en su proceso de enseñanza.

Siguiendo a Guerrero y Flores(2009), en la actualidad si se pretende implementar un entorno de aprendizaje de enfoque predominantemente constructivista, las Tic como herramientas, se convierten en un insumo imprescindible, donde el estudiante despojado del temor, pueda acceder a la mediación semiótica, para resolver problemas y consecuentemente crear su conocimiento matemático; en concordancia, con lo que Hegedus et al(2016) denominan como una “Actividad Instrumentada”.

2.8 Orientaciones curriculares

2.8.1 Estándares básicos de competencias en matemáticas

El Ministerio de Educación Nacional, es el ente rector del servicio educativo en Colombia, administrando los recursos del sector público y regulando el privado, a nivel de los once grados de educación básica y media, su función es también direccionar a las Instituciones Educativas para que en el marco de la autonomía que les otorga la ley 115 o general de Educación promulgada en 1994, desarrollen sus procesos de diseño curricular.

Para este propósito el Ministerio acorde con las políticas de estándares curriculares, originadas en Europa y Estados Unidos a mediados de los 80, y en aras de promover la calidad, emitió hacia 1994 “Los lineamientos Curriculares” y en 2006 los “Estándares Básicos en Competencias” para las áreas de Lenguaje, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales y Matemáticas; para esta última

propone en el desarrollo de pensamiento variacional, para el ciclo conformado por los grados octavo y noveno, donde se centra el interés de esta investigación los siguientes nueve estándares:

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
- Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
- Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.
- Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que representan.
- Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

2.8.2 Derechos básicos de aprendizaje

En concordancia con los estándares básicos, el Ministerio publicó en el año 2015 y 2016 la primera y segunda versión, respectivamente, de los Derechos Básicos de aprendizaje, más conocidos como DBA, su objetivo es proporcionar a todos los miembros de la comunidad educativa, entre ellos a los padres de familia, un referente para monitorear los procesos curriculares.

Los DBA que promueven el desarrollo del pensamiento variacional, la construcción cognitiva del concepto de función y la actividad semiótica alrededor del mismo, en el grado octavo son:

- Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relación de la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y característicos de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.
- Propone relaciones o modelos funcionales e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formada por segmentos, etc.):

2.9. Estado del arte

La trascendencia del concepto de función en el desarrollo tanto de las matemáticas, como de otras ciencias, ha suscitado el interés de la comunidad científica al servicio de la educación matemática por mejorar sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Es así como se dispone, desde diferentes enfoques y particularmente para los niveles de educación media y universitaria, de numerosos trabajos de investigación, los cuales favorecidos por el desarrollo que en las últimas décadas ha experimentado la didáctica de las matemáticas, nos sirven como referentes en la permanente búsqueda de mejores resultados en las aulas; a continuación se hace una breve reseña de algunos de ellos.

Quizas una de las investigaciones más completas sobre el aprendizaje y la enseñanza del concepto de función en nuestro idioma es la de Ruiz-Higueras (1994) quien apoyada bajo el lente teórico de la Transposición Didáctica examina de manera exhaustiva el desarrollo

epistemológico del concepto de función en los estudiantes de secundaria, y logra identificar múltiples situaciones que conforman la cotidianidad de los centros educativos y que obstaculizan la correcta aprehensión del concepto.

Respecto al concepto de función Guzmán (1998) pone en evidencia la falta de articulación entre diferentes registros, observada en estudiantes de nivel universitario, señala como cuando se les pone a prueba en diferentes situaciones, sus respuestas se limitan casi que exclusivamente al registro algebraico.

Ante el bajo rendimiento académico en matemáticas de los estudiantes de primer semestre en las universidades y particularmente en la Universidad Tecnológica de Pereira, situación que incluso repercute en un alto índice de deserción, Murillo (2012) para su tesis de maestría se propuso investigar sobre las concepciones de función en estudiantes de los grados noveno y once de los colegios de La Virginia, su trabajo indaga tanto en el campo del aprendizaje (estudiantes) como en el de la enseñanza (docentes). Tomando como referente la teoría de la Reificación de Anna Sfard, donde se plantea una construcción jerárquica del conocimiento, partiendo desde una etapa operacional, la cual con el tiempo debe llevar a una estructural donde se construye el concepto, se concluye que los estudiantes presentan un bajo nivel operacional, lo que impide dar el salto hacia el siguiente nivel y que los docentes deben enriquecer sus procesos de aula para lograr un mayor grado de significación y pertinencia en los conceptos transmitidos.

Quintero y Cadavid (2012), reconocen la mediación semiótica entre el sujeto y el objeto en la construcción del conocimiento matemático, y abordan particularmente el concepto de función lineal en estudiantes de octavo grado, señalando la importancia del contexto social y cultural, en la articulación de los diferentes registros y así poder dotar de pertinencia a los conceptos aprendidos con el fin de lograr un mayor y mejor impacto en los estudiantes.

En su trabajo de investigación para optar el título de Maestría, Ospina (2012) indagó sobre el aprendizaje del concepto de función en grado octavo, adoptando como referente teórico las representaciones semióticas de Raymond Duval, concluye que los docentes generalmente proponen a los estudiantes situaciones que implican exclusivamente las actividades semióticas de representación y tratamiento de registros, excluyendo las de conversión, situación que genera dificultades en el proceso de aprendizaje. Señala además la importancia de las representaciones gráficas por su capacidad de expresar de manera más clara los diferentes significantes, y sugiere que esta situación se debe aprovechar para tomarlo como registro de partida en las actividades de conversión.

El algebra de Baldor es casi que de manera exclusiva el libro con el que se impartió la enseñanza matemática en el sistema de educación formal durante muchos años, particularmente en los grados octavo y noveno. Sobre el concepto de función lineal, Cordoba (2013) plantea que en este texto, los contenidos y actividades se presentan mayoritariamente entre dos registros semióticos. En este sentido Marcos del Olmo (2016) señala una desarticulación entre ellos, ya que únicamente se proponen conversiones tomando como partida el registro algebraico y de llegada el registro cartesiano, sin plantearlo en el sentido contrario, teniendo como consecuencia una aprehensión fragmentada del concepto.

Gracias a una investigación realizada con estudiantes de grado once en la ciudad de Sincelejo Gómez, Hernández, y Chaucanes (2015) lograron evidenciar la poca o escasa habilidad de estos para realizar conversiones entre los diferentes registros semióticos, al momento de trabajar con representaciones de función. Los investigadores advierten que como consecuencia de ello, no se genera una capacidad de modelar múltiples situaciones de la vida real, impidiendo así un

desarrollo en su pensamiento variacional con los correspondientes efectos negativos en su desempeño académico.

Marcos del Olmo (2016) en su investigación le apuesta a la utilización de la graficadora online Desmos en estudiantes de tercer grado de la ESO, y registra importantes avances en el desarrollo del concepto de función, los cuales atribuye a lograr concentrar un mayor esfuerzo en los procesos analíticos, como consecuencia de la incorporación de nuevas tecnologías como medios de representación.

La incorporación de las TICs en los procesos de enseñanza y aprendizaje, favorece la construcción de entornos comunicativos y expresivos, propicios para el desarrollo del trabajo colaborativo, característico de la metodología ABP como lo señala Moreta(2016) en su trabajo de investigación sobre la enseñanza de la matemática para estudiantes de ciencias exactas en la Universidad Nacional de Chimborazo, Ecuador. En este mismo contexto, para estudiantes de bachillerato, se plantea además, aprovechar parte de la gran cantidad de tiempo que invierten haciendo uso de la redes sociales, generalmente en actividades de ocio, para implementar actividades didácticas, en esta propuesta coinciden Íñigo(2012) y González(2014) en sus trabajos para obtener el título de Magister; donde reportan resultados satisfactorios en el sistema de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) de España, el primero focalizado de manera exclusiva, en la enseñanza de funciones para grado cuarto y la segunda de la matemática en general, para grado tercero.

3. Capítulo 3. Metodología

3.1 Diseño metodológico

Por tratarse de una propuesta que pretende mejorar las prácticas de aula, con el propósito de superar los obstáculos naturales en un proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de relación binaria de conjuntos y función lineal, se aborda desde un enfoque de investigación de carácter cualitativo, apropiado para indagar en un escenario donde entran en juego múltiples aspectos sociales, culturales y cognitivos.

La realización de dos torneos con uso de programas informáticos de ejercitación y diferentes productos realizados en papel, resultado de la actividad semiótica, en torno a los conceptos de relaciones binarias y función; como actividades auxiliares en la búsqueda de la respuesta a una situación problema, formulada con base en la actividad cafetera, la cual representa una situación propia, de la gran mayoría de sus hogares; proveerán de insumos para definir indicadores que permitan evaluar, de la manera más acertada posible, el impacto de la propuesta, además de generar el ambiente adecuado para indagar, por medio de la entrevista, sobre sus nociones, conceptos, capacidades de representación en torno al concepto de función, sin desestimar las habilidades sociales, que les permitan construir un entorno propicio para adelantar el intercambio de significados, a través del trabajo colaborativo, característico de la metodología ABP.

La presencia de tres estudiantes repitentes en el grado octavo B de la Institución Educativa María Auxiliadora, grupo de investigación, puede representar una oportunidad para inquirir sobre sus experiencias previas en torno al objeto de estudio, más si tiene en cuenta que el curso reprobado tuvieron el acompañamiento de otro docente.

3.2 Metodología Investigación-Acción

La labor docente implica enfrentarse a múltiples situaciones problemáticas dentro y fuera del aula, que les niegan a los estudiantes la posibilidad de lograr buenos procesos de aprendizaje. Este contexto demanda del educador un esfuerzo por buscar soluciones, para cumplir este propósito es necesario complementar su labor pedagógica y asumir el rol de investigador, para lo que debe reconsiderar el salón de clase como un laboratorio donde poder realizar un proceso de indagación.

La metodología investigación-Acción en el aula, a diferencia de las tradicionales, no tiene como prioridad divulgar hallazgos científicos a una comunidad académica especializada, su razón de ser es la de dar soluciones a situaciones problema, que afectan los procesos educativos, obtener respuestas desde y en beneficio del trabajo de los estudiantes, superando el divorcio existente entre quienes señalan como llevar el conocimiento científico a las aulas y quienes efectivamente lo hacen, tal y como lo señala Latorre (2005) “Como es reconocido, la investigación tradicional se ha enfocado más a crear las teorías sobre la educación que ha mejorar la práctica educativa, separando y distanciando a quienes investigan en educación de quienes están en la práctica”(p.8).

Como lo dice Suárez (2002), La investigación-acción instiga al docente a sistematizar sus experiencias, utilizando diversas fuentes de información, es la reivindicación de los docentes como profesionales, su transformación de objetos de estudio a investigadores de esos escenarios naturales donde se desenvuelven profesionalmente y que pretenden ser mejorados, mediante un proceso de reflexión y el consecuente cambio en sus prácticas.

3.2.1 Ciclos de la Investigación-Acción

Planeación, acción y reflexión son las tres fases que, según Latorre (2005), e ilustrada en la figura 3, conforman el ciclo que enmarca el desarrollo de la investigación-acción, el cual a su vez, se puede reiniciar indefinidamente, de tal manera que forme una espiral de acción, en esta tarea el docente y sus colaboradores, deben esgrimir un rigor, que permita diferenciar un proceso reflexivo y sistemático de investigación de una actividad rutinaria de clase.

Como ya se mencionó y coincidiendo con múltiples autores, el ciclo de la investigación-acción lo componen tres fases, la primera de planeación, donde se debe primero identificar claramente una dificultad que se presente de manera cotidiana y para la que se requiere una solución práctica. Realizar un diagnóstico acertado, para establecer las causas del problema y poder diseñar mecanismos de solución flexibles ante posibles eventualidades pero al mismo tiempo eficientes en sus resultados.

Posteriormente se da paso a una fase de acción, si bien se trata de una actividad controlada, no se debe descartar la posibilidad de cambios, ante situaciones inesperadas, es también el momento para observar la incidencia de las acciones tomadas, por tal motivo debe acompañarse de un riguroso proceso de recolección de información, por medio de diferentes instrumentos cuidadosamente diseñados, preferiblemente con la asesoría de expertos y que sirva de insumo para la etapa definitiva del ciclo.

Finalmente se tiene la fase de reflexión, donde a partir de un exhaustivo análisis se obtienen las conclusiones que permitan proponer alternativas de solución a los interrogantes que generaron el estudio, o que ponga en evidencia otras dificultades, y así dar inicio a un nuevo ciclo de planeación, acción y reflexión.

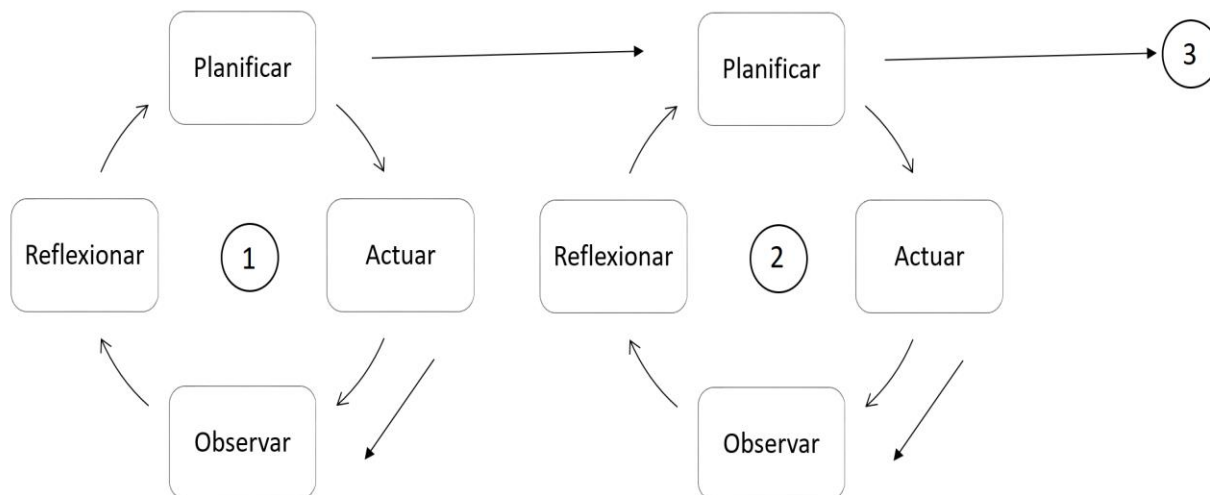


Figura 3: Espiral de ciclos de la investigación-acción

Recuperado de Latorre (2005)

3.2.2 Modalidades de la Investigación-Acción.

Diferentes autores coinciden con Bauselas (2004.) en señalar la existencia de tres tipos diferentes de metodología de investigación-acción, como lo sintetiza en la tabla 5.

- La investigación-acción técnica, cuyo objetivo primordial es la mejora de las prácticas sociales, a través de un plan de intervención, diseñado con el apoyo de un experto interno, que permita mejorar los desempeños profesionales. El asesor es quien elige entre otras cosas a los participantes y el rol que a ellos corresponde.
- La investigación-acción práctica, en esta tipología, los participantes ejercen control del proyecto, desde la formulación hasta la ejecución del mismo, la presencia de un experto ajeno al contexto, se da como la de un asesor, que ayuda a los ejecutantes, únicos

protagonistas, en la articulación de ideas para allanar el camino de la observación y la reflexión.

- La investigación social crítica o emancipatoria, retomando las palabras de Suárez (2002) “La investigación-acción crítica o emancipatoria incorpora las finalidades de las otras modalidades, añadiendo la emancipación de los participantes de la tradición coercitiva y de las relaciones jerárquicas, a través de una transformación profunda, y no solo superficial, de las organizaciones sociales”(p.11). Fundamentada en la praxis educativa, pero en el permanente intento de permear otras prácticas sociales, bajo el absoluto protagonismo del docente, sin descartar la colaboración de un experto.

Tabla 5. Modalidades de la Investigación-Acción

MODALIDADES	TIPO DE CONOCIMIENTO QUE GENERAN	OBJETIVOS	FORMAS DE ACCION	NIVEL DE PARTICIPACION
Técnica	Técnico/Explicativo	Mejorar las acciones y la eficacia del sistema	Sobre la acción	Cooptación Designación
Práctica	Práctico	Para la acción	Para la acción	Cooperación
Emancipadora	Emancipativo	Por la acción	Por la acción	Implicación

Recuperado de (Bauselas, 2004.)

3.3 Población de Investigación.

La Institución Educativa María Auxiliadora del Municipio de Santuario Risaralda atiende en la actualidad aproximadamente a 900 estudiantes en los once grados correspondientes a los ciclos de educación básica primaria, básica secundaria y media vocacional. Distribuidos en cuatro sedes rurales y dos urbanas, siendo en estas últimas donde más cantidad de estudiantes concentra.

La gran mayoría de los estudiantes pertenecientes a los estratos uno, dos y tres provienen de familias que derivan su sustento del cultivo del café, situación que genera gran movilidad en la población.

El grado octavo B, sobre el cual se realiza la propuesta está compuesto por 34 estudiantes, en su gran mayoría entre los 13 y 14 años de edad, 15 de ellos del género masculino y las restantes 19 del femenino, en el grupo se encuentran tres estudiantes repitentes y otros tres registrados en el SIMAT (Sistema de Información de Matrícula) como estudiantes con Necesidades Educativas Especiales NEE.

4 capítulo 4. Análisis de resultados

4.1 Prueba Diagnóstica

El instrumento de diagnóstico es un cuestionario de siete preguntas, las primeras cinco, con formato de selección múltiple única respuesta, transcritas de los cuadernillos saber 9 de los años 2015 y 2016, las dos últimas son preguntas abiertas, adaptadas del artículo “Funciones: Traducción entre representaciones” publicado en 1998 y escrito de manera conjunta por Modesto Sierra Vásquez, María Teresa González Astudillo y Carmen López Esteban investigadores de la Universidad de Salamanca.

Para el desarrollo de la prueba se dispuso de un tiempo de una hora y media (90 minutos) y su correcto diligenciamiento exige por parte de los estudiantes articular las tres actividades semióticas: representación, tratamiento y conversión del concepto de función a través de diferentes registros, tal y como se relaciona en la tabla 6.

Con el fin de obtener una valoración numérica de la prueba, a las primeras cinco preguntas se les asigna un valor de una (1) unidad en caso de acierto, a la pregunta seis, compuesta por cinco literales un valor de tres (3) y a la pregunta siete con dos literales un valor de dos (2) para un total de diez (10) como máxima calificación posible.

Tabla 6. Actividades semióticas en la prueba diagnóstica.

PREGUNTA	ACTIVIDAD SEMIOTICA REQUERIDA
1	Representación y Tratamiento desde el Lenguaje Natural
2	Conversión Tabular - Gráfica
3	Conversión Tabular - Gráfica
4	Representación y Tratamiento desde el Lenguaje Natural
5	Conversión Lenguaje Natural - Gráfica
6	Conversión Gráfica – Lenguaje Natural Conversión Gráfica - Tabular Conversión Tabular - Algebraica Conversión Algebra - Tabular
7	Conversión Lenguaje Natural – Tabular Conversión Tabular - Gráfica

En la tabla 7 se puede apreciar el desempeño de cada uno de los 34 estudiantes del grado 8B. Si se tiene en cuenta que el máximo puntaje es de 10, y se establece a partir de 6 una valoración cualitativa de “APROBADO”, los resultados obtenidos evidencian que tan solo seis estudiantes, los cuales representan un 18% obtuvieron un desempeño satisfactorio, como se puede apreciar en la figura 4. en contraste con los 28 estudiantes, quienes conforman el 82% del grupo que no logro superar la prueba.

Tabla 7. Desempeño prueba diagnóstica.

ESTUDIANTE	PREGUNTAS							VALORACION
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	
E1	1	1	1	0	0	0	0	3
E2	1	1	1	1	1	0	1	6
E3	0	0	1	0	0	0	0	1
E4	1	0	0	0	0	2	1	4
E5	0	1	0	0	0	0	0	1
E6	0	0	0	0	1	0	0	1
E7	1	1	1	0	1	2	1	7
E8	0	1	0	0	0	0	0	1
E9	0	0	1	1	1	0	0	3
E10	1	1	1	1	0	2	0	6
E11	0	0	0	0	0	0	0	0
E12	1	0	0	0	0	0	1	2
E13	0	1	1	0	0	0	0	2
E14	1	1	1	1	1	2	0	7
E15	1	1	0	0	1	0	1	4
E16	0	0	0	0	0	2	1	3
E17	1	1	1	0	1	0	0	4
E18	1	1	1	0	0	0	1	4
E19	1	0	1	0	0	0	0	2
E20	1	0	1	0	1	0	0	3
E21	1	1	0	1	1	2	0	6
E22	0	1	1	0	0	0	0	2
E23	1	0	1	0	0	2	0	4
E24	1	0	0	1	0	0	0	2
E25	0	1	1	1	1	0	0	4
E26	0	0	0	0	1	2	1	4
E27	1	0	1	1	1	0	0	4
E28	0	1	0	1	0	0	0	2
E29	1	0	1	1	0	0	0	3
E30	1	0	0	1	0	0	0	2
E31	1	0	1	1	0	0	0	3
E32	0	1	1	0	1	0	1	4
E33	1	0	0	1	0	0	0	2
E34	1	0	1	1	1	2	1	7

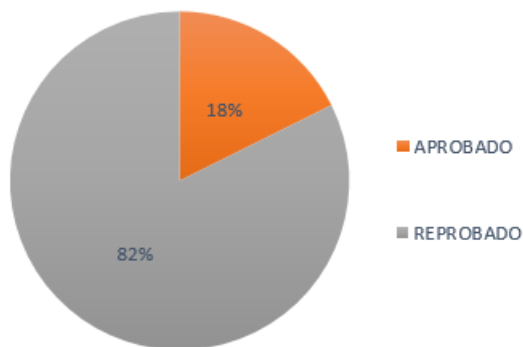


Figura 4. Desempeño prueba diagnóstica grado 8B.

La figura 5 registra el desempeño por cada pregunta, se puede evidenciar que la 6 y la 7 son las de menor grado de acierto por parte de los estudiantes, probablemente porque además de mayor tiempo, demandan un mayor esfuerzo cognitivo, evidenciado en la capacidad de articular diferentes registros, a diferencia de las cinco primeras, donde por su formato, el azar podría incidir en el momento de responder por parte de algunos estudiantes.

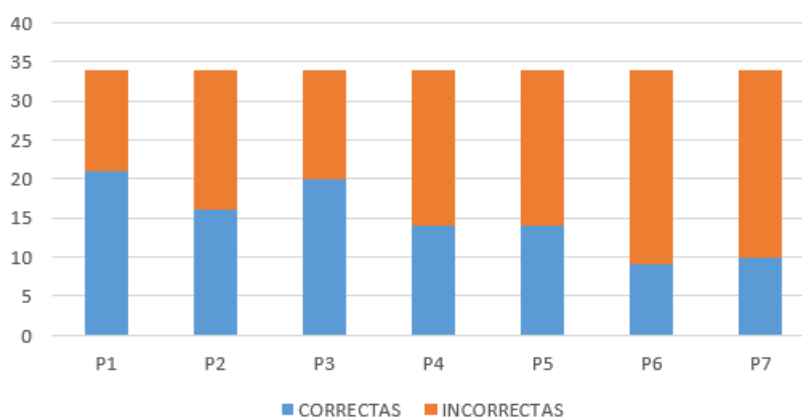
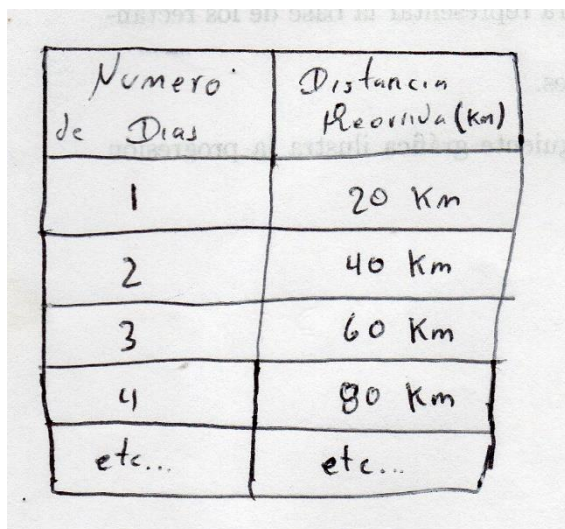


Figura 5. Desempeño por pregunta prueba diagnóstica grado 8B.

La figura 6 expone el trabajo del estudiante etiquetado como E7, en su propósito de solucionar la pregunta 7, se puede observar la conversión de la representación planteada, desde el registro

gráfico hacia el registro tabular, solamente en 3 de los 34 cuestionarios se puede apreciar un fenómeno similar



Numero de Dias	Distancia Recorrida (km)
1	20 Km
2	40 Km
3	60 Km
4	80 Km
etc...	etc...

Figura 6. Registro conversión grafica-tabular E7.

4.2. Secuencia didáctica.

Los bajos resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba anterior, reafirman la necesidad de una intervención didáctica; en respuesta a esa situación y como soporte de esta investigación, se diseñó e implementó una secuencia didáctica, que favorezca la construcción cognitiva del concepto de función, basada en la metodología ABP y con la incorporación de las Tic. La secuencia está conformada por ocho actividades (incluida el pre test), relacionadas a continuación en el formato disponible a través del portal de colombiaaprende.

Formato estándar para el diseño de secuencias didácticas
Fuente: www.colombiaaprende.edu.co

1. DATOS GENERALES	
Título de la secuencia didáctica: Función lineal	Secuencia didáctica #: 1
Institución Educativa: María Auxiliadora	Sede Educativa: María Auxiliadora
Dirección: Calle 5 No. 6-26	Municipio: Santuario
Docente responsable: Luis Eduardo Abad Quintero	Departamento: Risaralda
Área de conocimiento: Matemáticas	Tema: Función lineal
Grado: Octavo	Tiempo: 6 bloques (12h)
<p>Descripción de la secuencia didáctica: Inicialmente realizara una prueba diagnóstica, tomada en su gran mayoría de Pruebas saber 9 de años anteriores.</p> <p>Posteriormente se planteará un problema, originado en una situación del contexto de economía cafetera, el cual se le dedicará la última sección para dar respuesta.</p> <p>Después, se abordarán algunos conceptos básicos, utilizando metodología tradicional y elaborando actividades en el papel.</p> <p>Se utilizarán de forma alterna con las actividades escritas, dos programas informáticos, organizando torneos que generen motivación entre los estudiantes.</p>	
1. OBJETIVOS, COMPETENCIAS Y CONTENIDOS	
Objetivo de aprendizaje: Realizar y reconocer las diferentes representaciones semióticas de función lineal.	
Contenidos a desarrollar: Producto cartesiano, relaciones, función lineal.	

Competencias del MEN: Modelación, comunicación, resolución de problemas.	Estándar de competencia del MEN: Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
Qué se necesita para trabajar con los estudiantes: Computadores , Tabletas, video proyector, hojas, lápices.	

2. METODOLOGÍA:

FASES	ACTIVIDADES
	<p>El docente inicialmente debe realizar una prueba diagnóstica, posteriormente plantear un problema sobre los costos en el proceso de secado del café, principal producto agrícola del Municipio.</p> <p>Se realizarán exposiciones por parte del docente sobre los conceptos de producto cartesiano y relación, acompañadas de actividades en papel.</p> <p>Seguidamente se realizará una actividad en papel “las vocales de Gauss”, que permitirá introducir el concepto de función, como un caso especial de relación donde se cumple el principio de univocidad.</p> <p>Se utilizará el software “bloques lógicos” para afianzar el concepto de relación binaria entre dos conjuntos.</p> <p>Acto seguido se empleará el software “funrep” bajo Android donde los estudiantes ejercitaran sus habilidades en el manejo de registros semióticos alrededor del concepto de función.</p> <p>A continuación, realizaran actividades semióticas sobre el concepto de función en el papel, tomadas de un texto de secuencias en matemáticas del Ministerio de Educación nacional.</p> <p>Posteriormente, se dedicará una sesión para responder de manera profunda el interrogante planteado inicialmente sobre la situación problema del secado del café.</p> <p>Y finalmente se realizará un pos test, que servirá de contraste para diagnosticar la eficiencia de la secuencia</p>

¡Preguntémonos!	En este caso el estudiante se preguntará sobre los costos que se generan en torno al proceso de la caficultura del café, el producto agrícola predominante del Municipio.
¡Exploremos!	Los estudiantes accederán a nuevos conceptos que afianzarán con el desarrollo de actividades, entre ellas dos diseñadas en ambientes informáticos.
¡Produzcamos!	Los estudiantes realizarán diferentes operaciones semióticas en torno al concepto de función, para tal propósito emplearán diferentes medios de representación desde el tradicional papel hasta programas informáticos.
¡Apliquemos!	Los estudiantes modelarán una situación que, si bien hace parte de su contexto económico y cultural, les puede ser ajena por su edad, en esta fase darán pertinencia a los nuevos conceptos adquiridos.

2. RECURSOS

Nombre del recurso	Descripción del recurso
Software educativo “Bloques Lógicos”	Es un software de ejercitación bajo Windows, desarrollado por el Grupo Gedes de la Universidad del Quindío y que desde un ambiente gráfico permite establecer el concepto de relación binaria.
Software educativo “Funrep”	Es un software de ejercitación bajo Android, desarrollado por el candidato a magister, con la colaboración del Ingeniero Cesar Patiño Vélez y que permite al usuario realizar diferentes representaciones semióticas sobre el concepto de función en una interfaz muy intuitiva.
Papel, lápices, tablero video proyector	Constituyen los medios de representación tradicionales sobre los cuales se desarrollarán diferentes actividades, como prueba diagnóstica, actividades de clase entre otras.

3. EVALUACIÓN Y PRODUCTOS ASOCIADOS

La evaluación se realizará a través de las actividades de clase, la utilización de los dos programas informáticos y la correcta elaboración de la respuesta a la situación problema.

4. INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

Se recopilará la información en papel de la prueba diagnóstica, de otras cuatro actividades de clase incluyendo la elaboración de la respuesta al problema planteado. Además, se reconocerá una calificación acorde al desempeño, evidenciado en los cuadros de posiciones en cada uno de los dos torneos organizados para emplear los recursos informáticos.

5. BIBLIOGRAFÍA

Lipschutz, S. (1978). *Topología General*. Norma.

Ministerio de Educación Nacional. (2013). *Secuencias didácticas en Matemáticas Educación Básica Secundaria Matemáticas-Secundaria*. Bogotá: San Martín Obregón & Cía Ltda.

Sierra, G. L. (1998). *Funciones: Traducción entre representaciones*. Obtenido de Gestión del repositorio documental de la Universidad de Salamanca: <https://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/69318>

Centro Nacional de Investigaciones del Café CENICAFE. (2004). Cartilla 21, Secado del café pergamino. *Cartilla Cafetera*.

4.3. Las vocales de Gauss

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes logren identificar, el componente conceptual de la condición de univocidad y como la relación R_1 , a diferencia de R_2 , al cumplirlo puede ser clasificada como función. Previamente, se había introducido al grupo en el concepto de

producto cartesiano y de relación binaria entre dos conjuntos, con la realización de ejercicios de clase que requerían de la formación y conversión en diferentes registros.

El planteamiento es el siguiente:

Se tienen dos conjuntos

$$P = \{a, e, i, o, u\} \text{ y } N = \{x : x \text{ es un número natural}\}$$

$$R_1 = \left\{ (x, y) : x \in P, y \in N, y \text{ es la cantidad de veces que esta } x \text{ en la palabra "johancarlfriedrichgauss"} \right\}$$

$$R_2 = \left\{ (x, y) : x \in P, y \in N, y \text{ es el orden de aparición (de izquierda a derecha) de } x \text{ en la palabra "johancarlfriedrichgauss"} \right\}$$

Realizar las representaciones de R_1 y R_2 en notación de conjuntos, en plano cartesiano, en tablas y en diagrama sagital.

Responder qué diferencias encuentra entre R_1 y R_2

En la figura 7 se puede observar como el estudiante E10 realiza de forma satisfactoria la representación de R_2 en los cuatro registros solicitados, este nivel de desempeño se evidencia en la gran mayoría de los integrantes del grupo.

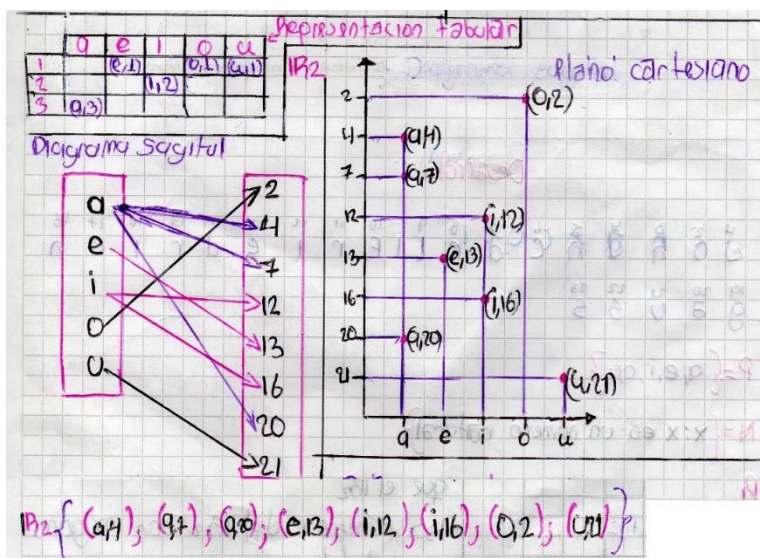
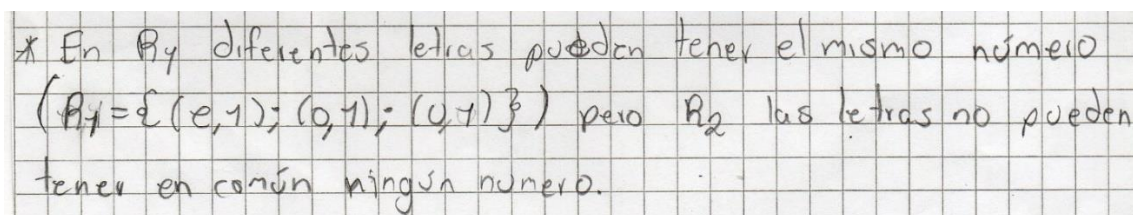


Figura 7. Registro conversión grafica-tabular E10.

En cuanto al interrogante sobre las diferencias observadas, la respuesta más encontrada es la presencia de mayor cantidad de parejas ordenadas en R_2 , pocos plantean otras diferencias, únicamente E17 es quien más se aproxima, sugiere la repetición en los elementos del conjunto de llegada en R_1 restringiendo este comportamiento en R_2 , y lo argumenta con la utilización de los registros de notación conjuntista y lenguaje natural (figura 8).



* En R_1 diferentes letras pueden tener el mismo número ($R_1 = \{(e, 1); (o, 1); (u, 1)\}$) pero R_2 las letras no pueden tener en común ningún número.

Figura 8. Respuesta diferencias entre R_1 y R_2 por parte de E17.

Finalmente se hace necesario la intervención magistral para evidenciar, por medio de las diferentes representaciones, que en R_1 , se cumple la condición de univocidad, es decir que al conjunto de salida le corresponde únicamente una imagen en el conjunto de llegada.

4.4 Software educativo “Bloques Lógicos”

La implementación del modelo ABP, implica entre los estudiantes, la necesidad de intercambiar conocimientos, opiniones, explorar conjuntamente fuentes de información, concertar estrategias de trabajo y consolidar las respuestas; todas estas exigencias, requieren inevitablemente, un buen ejercicio de Comunicación (Rúa et al, 2017), inicialmente entre los miembros del grupo de trabajo y de estos con el docente; pero que finalmente se debe hacer extensivo a la totalidad del grupo. La utilización de Tic en una metodología ABP, que busca explotar todo el potencial del trabajo colaborativo, no va en detrimento de la implementación de un entorno comunicativo y expresivo.

Aún con herramientas utilizadas por un solo estudiante, la tecnología dinámica puede fomentar un estilo de exploración que contiene las “semillas” de la colaboración.

(Brady,2010,p.3)

Para esta investigación en particular, esta fase se ambientó con la realización de dos torneos, en donde los mismos estudiantes, administraron de manera colectiva el cuadro con las diferentes fases de eliminación, cumplieron ellos mismos el rol de árbitros con el diligenciamiento de planillas, e incluso tejieron alianzas en busca de obtener la victoria y por consiguiente acceder a los diferentes incentivos.

Previa introducción al manejo del programa de ejercitación “Bloques Lógicos” desarrollado por el Magister Efraín Alberto Hoyos, profesor de la Universidad del Quindío, se da inicio al torneo, formando parejas y haciendo uso del sistema de eliminación directa. Cada participante desarrolla las cuatro actividades propuestas:

- Identificar figura
- Relación directa
- Relación Inversa
- Hallar relación

En el nivel de dificultad 3, para determinar los ganadores se recurre en primera instancia al menor número de errores y como criterio de desempate al menor tiempo empleado. El ganador del evento es el estudiante etiquetado como E17, quien además de los tres restantes semifinalistas logran realizar la prueba sin presentar errores y haciendo necesario recurrir al cronometro para determinar los vencedores.

La utilización del software permite a los estudiantes establecer relaciones binarias entre diferentes conjuntos, a través de tres transformaciones, representadas iconográficamente en un

registro visual, allí se recurre a la utilización de los significados de color, tamaño y forma, fomentando el desarrollo de su pensamiento variacional, en un contexto altamente estimulante para ellos.

Al día siguiente se realizó una actividad complementaria (anexo 6.8) con el ganador del torneo a quien identificaremos como E17, allí le fueron planteadas en papel, mediante los registros sagital y visual, tres relaciones binarias entre dos conjuntos, identificadas como R_1 , R_2 y R_3 empleando los mismos elementos gráficos del software “Bloques Lógicos” para representar los elementos de los conjuntos y los operadores binarios.

En menos de un minuto el estudiante E17 identificó señalando en el icono correcto, la relación existente, como se aprecia en la figura 9. A continuación, se transcribe el dialogo entre el profesor

Señala con una "X" en los bloques lógicos la relación o relaciones que se representan en el diagrama sagital

Escribe sobre el espacio la regla que relaciona a los dos conjuntos

$$R_1 = \{(x, y) : x \in A, y \in B, \text{cuando la figura es pequeña } \}$$

la otra es grande

Figura 9. Actividad 1 de validación “bloques lógicos” E17

(P:) y el estudiante (E17:), direccionado por el primero con el fin de que el estudiante expresara correctamente la relación R_1 en lenguaje natural

P: si tuviéramos que colocarle un nombre, ¿cómo sería?

E17: x pertenece al conjunto A y al conjunto B

P: ¿Tal que, como lo describiría con sus palabras?

E17: Sería lo contrario porque si acá está grande acá está chiquito y si acá está chiquita acá está grande

P: ¿y cómo se llama cambiar de pequeño grande y de grande a pequeño?

E17: Hummm (no responde)

P: Un cambio de tamaño

E17: si

En la segunda actividad propuesta, el estudiante E17 identifica la relación existente rápidamente marcando correctamente los íconos superiores como se aprecia en la figura 10, y completando el enunciado que define a R_2 dando lugar a la siguiente conversación:

P: Identifique nuevamente la relación pueden ser uno, dos o tres bloques

E17: ya

P: ¿Cómo escribiría esta relación, como la complementarías?

E17: Cambian de tamaño y de color porque este amarillo pasa al azul

Señala con una "X" en los bloques lógicos la relación o relaciones que se representan en el diagrama sagital

Escribe sobre el espacio la regla que relaciona a los dos conjuntos:

$R = \{(x, y) : x \in A, y \in B, \text{cambia de tamaño, y de color.}\}$

Figura 10. Actividad 2 de validación “bloques lógicos” E17

Seguidamente, se le solicita a E17 que mediante flechas una las parejas ordenadas que componen el grafo de la relación representada mediante los tres íconos de la parte superior, rápidamente E17 cumple con lo solicitado (figura 11) sin cometer ningún error y complementa el enunciado de la relación escribiendo “cambia de forma de tamaño y de color”.

Representa en el diagrama sagital la relación expresada en los bloques lógicos

Escribe sobre el espacio la regla que relaciona a los dos conjuntos:

$R = \{(x, y) : x \in A, y \in B, \text{cambia de forma, tamaño, y color}\}$

Porque cada elemento del conjunto A, tiene una pareja en el conjunto B, y no se repite con otra.

es una función

Figura 11. Actividad 3 de validación “bloques lógicos” E17

Para finalizar se le exponen simultáneamente las tres relaciones a E17, con el objetivo de saber si puede identificar la existencia de una o varias funciones entre ellas, en actitud insegura y como se extracta del siguiente dialogo, solo señala a R_3 desconociendo la condición de que a cada elemento del conjunto de salida le corresponde únicamente un elemento del conjunto de llegada tal y como también ocurre en R_1 .

P: observando los tres diagramas, ¿quiere hacer una observación?

E17: que todas cambian de tamaño

P: ¿Todas tres son relaciones?

E17: si

P: ¿usted recuerda cuando una relación puede considerarse una función?

E17: Cuando cada una aquí del conjunto A, esta con una pareja, serian parejas ordenadas y no se repite el conjunto de llegada

P: Entonces de las tres, ¿cuál o cuáles puede considerarse una función?

E17: señala R_3

E17: ¿sólo esta?

E17: Si (asiente con la cabeza)

P: Me escribe por qué por favor

E17: porque al conjunto B no le llegan Varios no tiene así repetido como en esta línea

Con la realización de esta actividad se puede apreciar como E17 realiza las tres transformaciones de forma satisfactoria, en ambos sentidos, entre los registros visual y sagital, además de complementar con lenguaje natural la determinación por comprensión de las mismas, respondiendo a demandas cognitivas similares a las de la utilización del programa “bloques Lógicos” y resolviendo acertadamente al interrogante, de identificar a R_3 , como la única de las

tres relaciones planteadas que cumple con la condición de univocidad, propia de una función (figura 11).

4.5 Software Educativo “Funcirep”

La aplicación “Funcirep” es uno de los productos de esta investigación, fue diseñada y desarrollada, conjuntamente con los docentes César Augusto Acosta Minoli director del grupo GEDES de la Universidad del Quindío y José Rodrigo González Granada director del programa de Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, tiene como propósito, utilizar efectivamente la dotación del programa tabletas para Educar, obtenida del Ministerio de la TICs y de la cual la Institución María Auxiliadora del Municipio de Santuario es beneficiaria.

Es un software de ejercitación, que funciona bajo el sistema operativo Android, y está diseñado para que a partir de funciones básicas, que son de conocimiento general como alimentos de animales, implementos deportivos, vehículos de trabajo y clubes de futbol, los estudiantes realicen de forma interactiva las correspondientes representaciones en los registros de casillas o cuadros, sagital y cartesiano, por último presenta dos pruebas donde teniendo los valores del dominio y a partir de la expresión analítica de una función se debe calcular el valor numérico, para determinar el rango, representar las parejas ordenadas, inicialmente en una tabla y posteriormente en un esquema animado de máquina con entradas y salidas, la aplicación indica los errores, generando un proceso de realimentación en el proceso de aprehensión del concepto de función.

Para la utilización de este software se realizó un torneo de características similares al de la actividad con el software de “bloques lógicos” lo cual genero gran motivación por parte de los

estudiantes, alcanzando en su gran mayoría altos niveles de desempeño, haciendo necesario recurrir al criterio de menor tiempo para definir los ganadores. En esta actividad se alternaban diferentes sistemas de representación, logrando que los educandos se familiarizaran con ellos y de esta manera facilitar eventualmente futuras operaciones de conversión entre registros, de mayor complejidad que las de representación y tratamiento.

De igual manera se realiza otra prueba escrita con el ganador del torneo “Funcirep”, a quien se ha identificado durante la investigación como E18; se le proponen cuatro funciones representadas algebraicamente para que realice la conversión al registro tabular y posteriormente al registro cartesiano (anexo 6.9).

Pese a mostrarse motivado a participar de la actividad, incluso teniendo previo conocimiento que se haría un registro fílmico, E18 presentaba un alto grado de nerviosismo, lo que se evidenciaba en su actitud y en la pregunta de “¿qué profesores van a ver esto?”, esta situación claramente afectó el desempeño de E18 en las segunda y cuarta pruebas, correspondientes a expresiones algebraicas compuestas, particularmente al momento de encontrar los valores numéricos, ya que confundió la ley de los signos de la adición, con la del producto. Situación que casi no se presentaba en el trabajo cotidiano del aula, y que durante esta sesión le costaba trabajo corregir, pese a las observaciones reiteradas.

Al visualizar la primera prueba E18, no consigue diferenciar el objeto matemático representado (significado), de los registros empleados (significante), tal y como se infiere del siguiente fragmento del diálogo sostenido entre el profesor identificado como P y el estudiante identificado como E18

P: ¿cómo se llama esta forma de representación? (señalando la representación algebraica)

E18: esta se llama funciones

P: ¿cómo se llama cada representación?

E18: Algebraica y este plano cartesiano, la otra....

Inicialmente se propone la función $f(x) = 2 \cdot x$ la que en poco tiempo y sin dificultad realiza, tal y como se observa en la figura 12.

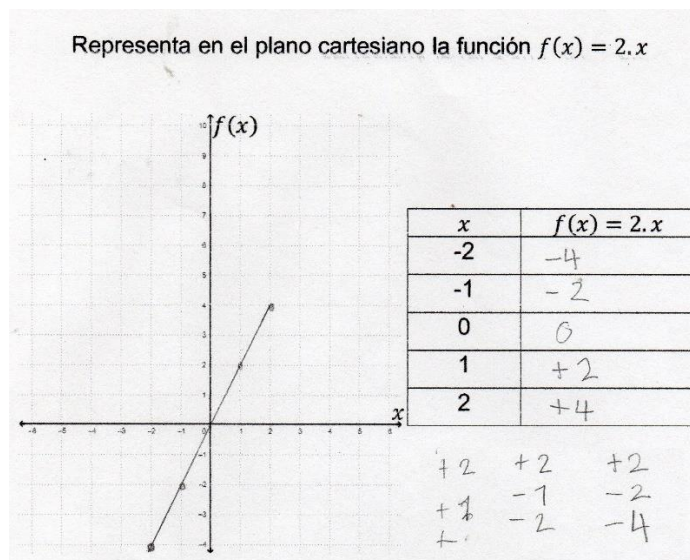


Figura 12. Actividad 1 de validación “Funcirep” E18

La segunda función es $f(x) = 2 \cdot x + 1$, como ya se había señalado antes, al tratarse de un polinomio que contiene un producto y una adición, E18 evidenciaba confusión en el manejo de los signos al momento de calcular el valor numérico, incluso se percató de ello a momento de graficar en el plano cartesiano y observar que el punto que representa la pareja ordenada (1,4) no era colineal a las demás, lo que ocasiono que encerrara el cálculo correspondiente y lo realizaría nuevamente para determinar que la correcta era (1,3) cuya representación si le permitía unirse a las demás con una línea recta (figura 13).

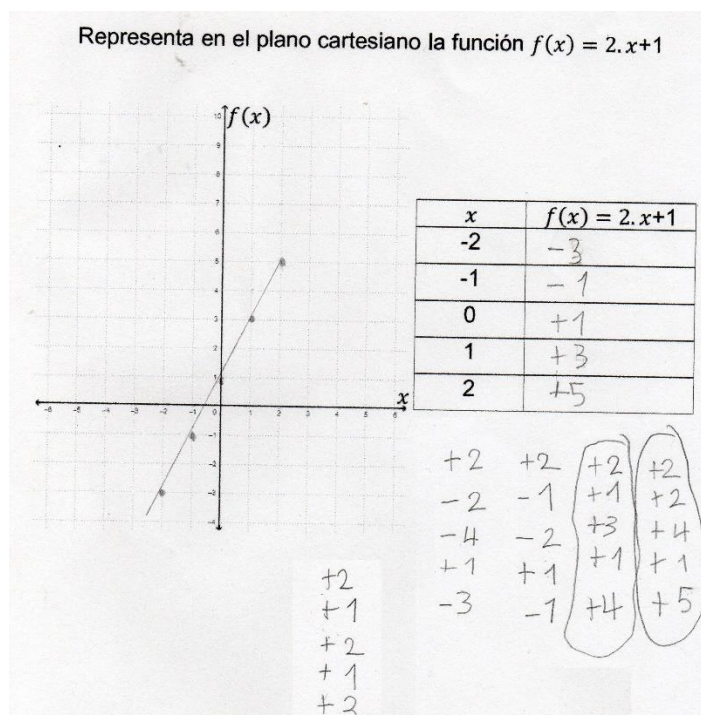


Figura 13. Actividad 2 de validación “Funcirep” E18

En la tercera prueba se le plantea por primera vez una función cuadrática, escrita de la forma $f(x) = x \cdot x$, originalmente E18 la identifica como una adición, siendo necesario interrogarlo para corregir:

E18: f de equis más equis

P: ¿cuánto vale equis?

E18: -2

P: ¿y cuánto es equis por equis?

Seguidamente E18 diligencia la tabla y realiza la gráfica en el plano cartesiano sin ningún inconveniente como se aprecia en la figura 14, cuando finaliza se le indaga infructuosamente por una expresión algebraica equivalente, luego se le escribe en el papel $f(x) = 2x$ y $f(x) = x^2$ y se presenta el siguiente diálogo:

P: ¿Con cuál de esta dos ($f(x) = 2x$ y $f(x) = x^2$) podemos remplazar esta ($f(x) = x \cdot x$) para que quede más abreviada?

E18: esta (indicando $f(x) = x^2$)

P: La escribe por favor, como se lee

E18: f de equis igual x al cuadrado

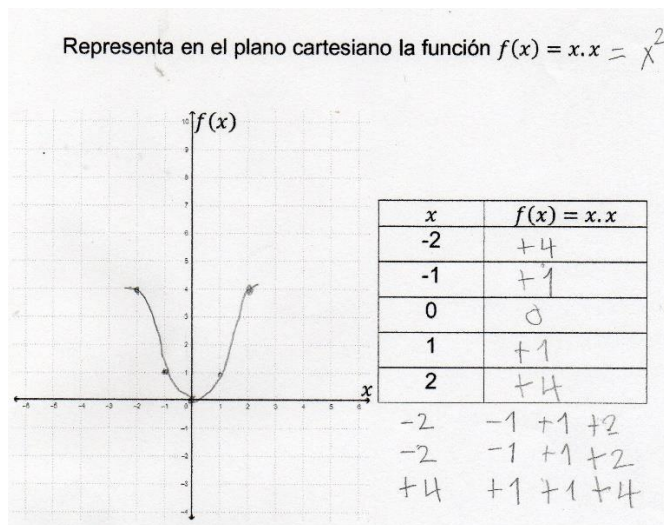


Figura 14. Actividad 3 de validación “Funcirep” E18

En la última prueba la función es $f(x) = x \cdot x + 1$, en la que E17, excluyendo la dificultad ya mencionada para calcular el valor numérico y seguramente basado en la experiencia de la función anterior, en poco tiempo completo la labor solicitada como se puede observar en la figura 15.

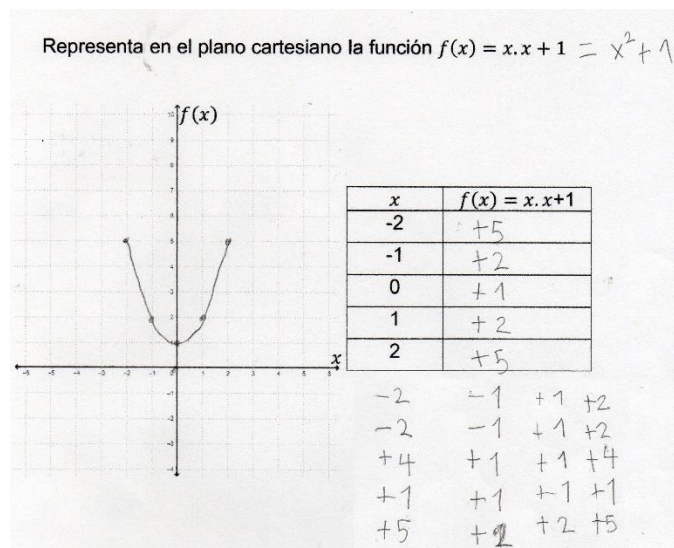


Figura 15. Actividad 4 de validación “Funcirep” E18

Para finalizar se le presentan de manera simultánea las cuatro funciones, con el objetivo de que logre establecer un patrón entre los registros algebraico y cartesiano, para cumplir este propósito se entabla la siguiente conversación:

P: mirando las cuatro gráficas, ¿cómo puedo establecer donde hay una línea recta?

E18: (Señala $f(x) = 2x$ y $f(x) = 2 \cdot x + 1$)

P: ¿que tienen esas dos?

E18: que las equis se multiplican por un dos

P: ¿cuál es el exponente de la x?

E18: uno

P: ¿y en las otras dos?

E18: dos

En el caso particular de E18, desarrolla satisfactoriamente la actividad semiótica propuesta, estableciendo claramente una correspondencia entre la formación de una línea recta en el registro cartesiano y el polinomio primer grado en el registro algebraico, para el caso de la función lineal

y afín, en contraste con las funciones de segundo grado cuya representación cartesiana entrega como resultado una curva. Es necesario reiterar que el desempeño de E18 en esta actividad, a diferencia del presentado en la utilización del software, se vio afectado negativamente por un aspecto emocional, donde el estudiante, probablemente intimidado por la implementación del registro fílmico, incurría frecuentemente en errores básicos de cálculo.

4.6 Actividad de representación.

Adaptada de (MEN, 2013), esta actividad (figura 16) plantea inicialmente cuatro funciones representadas por medio de diagramas sagitales, y a partir de ellas se propone a los estudiantes identificar elementos como el dominio, el rango y el grafo, además realizar actividad semiótica de conversión a los registros verbal y cartesiano.

Observen cada uno de los diagramas sagitales

Determinen

- Los elementos del dominio
- Los elementos del rango
- Las parejas que se establecen según la función
- Un enunciado verbal de la regla que defina cada función
- La representación en el plano cartesiano

Figura 16. Actividad elementos y conversión semiótica de funciones.

Las producciones escritas, como la de la figura 17, permiten visibilizar casi que de forma generalizada, por parte de todos los estudiantes, un muy buen desempeño en la diferentes

actividades de representación semiotica, incluso se puede destacar una actividad de conversión, ya que a pesar de que no se exige directamente en el planteamiento inicial, la gran mayoría de los participantes, para la actividad de conversión desde el registro sagital hasta el registro del plano cartesiano, realizo por iniciativa propia, a manera de tránsito una conversión previa por el registro tabular.

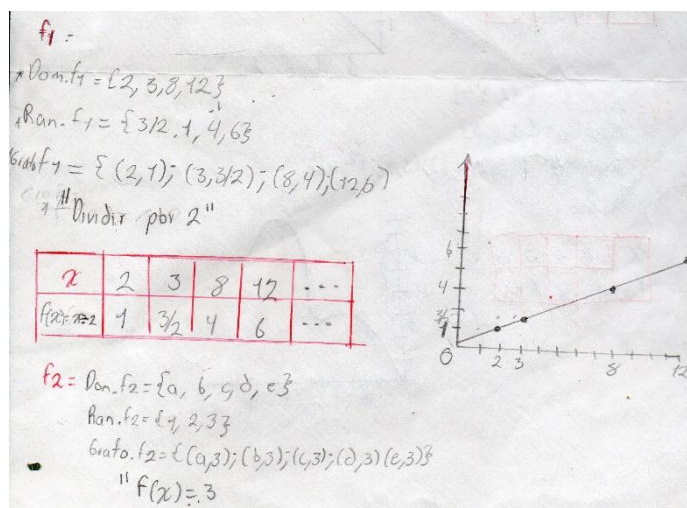


Figura 17. Actividades de representación estudiante E17

Es también frecuente observar falencias a la hora de graficar la representación del plano cartesiano, evidenciadas en un incorrecto manejo de la escala y un intercambio en los ejes para representar el dominio y el codominio, tal y como se observa en la figura 18, que conllevan a romper la primera regla de conformidad en la conversión semiótica, la cual establece la equivalencia entre componentes conceptuales de un mismo objeto en los diferentes registros (Duval, 1999), en este caso particular, la situación se presenta, al definir el rango y el grafo de la función.

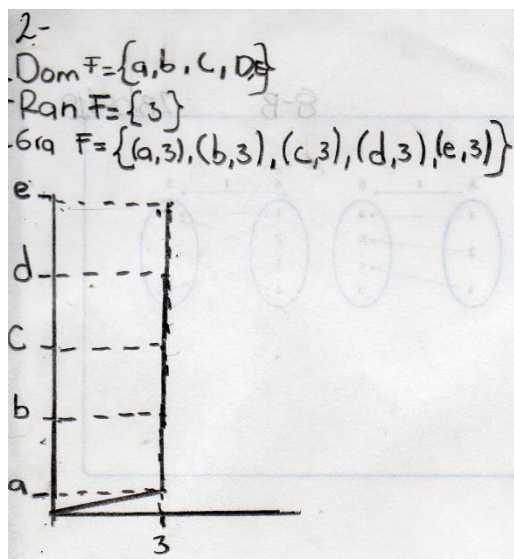


Figura 18. Actividades de representación estudiante E28

4.7 Situación problema “La finca de don José”

La situación problema (anexo 6), se planteo con base en el contexto socioeconómico del Municipio, Santuario Risaralda es un pueblo de vocación agrícola con un marcado predominio hacia el cultivo del café, y por consiguiente la mayoría de los estudiantes provienen de familias que estan vinculadas a la cadena de producción cafetera.

Durante la ejecución de la prueba diagnóstica se llevo impreso el enunciado, en ese momento se hizo lectura en voz alta del mismo y se dejo pegado en el tablero mural del aula, para sembrar la inquietud, previo a la realización de la actividad.

Al momento de realizar la actividad se conformaron los grupos de trabajo, integrado cada uno por tres estudiantes, luego se procedio a leer detenidamente la información, e indagar por una estrategia a seguir, luego de un instante, varios grupos tomaron la iniciativa, indicando que se debía “crear una tabla”, expresando la necesidad de una actividad semiótica de conversión

desde el registro de lengua natural al registro tabular; seguidamente se originó en el tablero del aula una construcción colectiva de los encabezados de la tabla que serviría para representar simultáneamente dos funciones. En los documentos recolectados, como en el de la figura 19, se observa que en general todos los grupos realizaron correctamente el cambio de registro.

Ambos @ cps	Costos de secado con Carbon mineral \$	Costos de secado con ACPM \$
250	1.225.000	1.516.550
500	2.250.000	3.033.100
750	3.375.000	4.549.650
1000	4.500.000	6.066.200
1250	5.625.000	7.582.750
1500	6.750.000	9.099.300
1750	7.875.000	10.615.850
2.000	9.000.000	12.132.400
2.250	1.012.500	13.648.950

Figura 19. Representación tabular a situación problema estudiante E23, E15 y E18

Posteriormente los estudiantes se encaminaron nuevamente a crear la misma representación, pero esta vez en un registro cartesiano, teniendo como referencia la actividad anterior, en esta ocasión, se evidenció un menor manejo de las escalas en los ejes, además se observa claramente, mediante el uso de colores o marcas, la intención de diferenciar las dos funciones representadas en el mismo plano (figura 20)

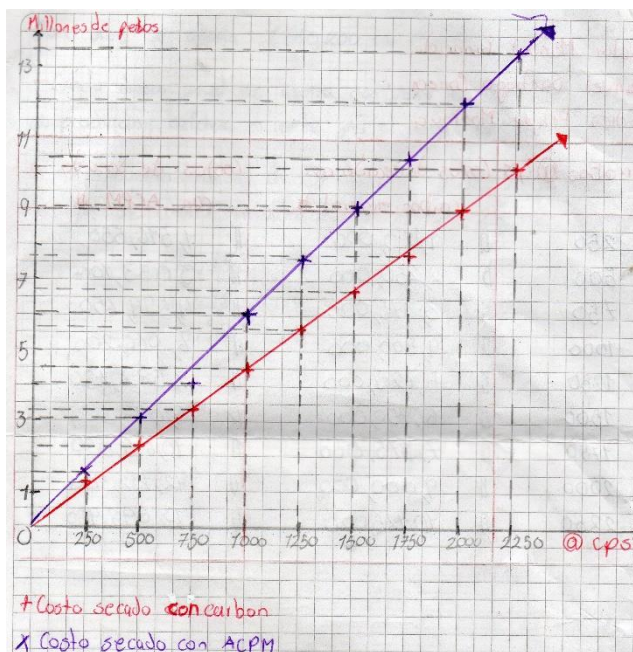


Figura 20. Representación cartesiana a situación problema estudiante E8, E10 y E21.

Para finalizar y a partir de las anteriores representaciones y particularmente de la correspondiente al registro tabular, los estudiantes respondieron acertadamente las preguntas puntuales sobre los costos de secado para diferentes niveles de producción (figura 21), sin embargo no se debe subestimar la representación cartesiana, pues es el resultado de una actividad semiótica que por su naturaleza ayudará a afianzar el concepto de función y porque quizás resulte, por su naturaleza visual, más propicia para desarrollar el concepto de variación para cada una de las funciones contenidas en esta situación, permitiendo además relacionar las pendientes de las rectas obtenidas, con las tasas de crecimiento .

- Cuanto dinero anual se ahorra don Jose en cada una de las fincas si opta por el combustible más económico?

* En la finca que 500 @ de cps se ahorra

3,033,100	cps con ACPM
- 2,250,000	cps con Carbon
9,883,100	

- Don Jose se ahorra 883,100 \$ con el combustible más económico

* En la finca que produce 750 @ de cps se ahorra

4,549,650	cps con ACPM
- 3,371,000	cps con Carbon
1,174,650	

- Don Jose se ahorra 1,174,650 \$ con el combustible más económico

* En la finca que produce 1000 @ de cps se ahorra

6,060,200	cps con ACPM
- 4,500,000	cps con Carbon
1,560,200	

- Cuanto dinero anual se ahorra don Jose en el secado de toda su producción cafetera opta por el combustible más económico?

*) La producción anual de @ de cps es 2.250 lo que se ahorra anualmente es 3,523,950 \$

13,648,950
- 10,125,000
3,523,950

Figura 21. Respuesta a situación problema estudiante E12, E16 y E20.

4.8 Prueba Pos test

El instrumento para finalizar la secuencia fue diseñado con base en la prueba diagnóstica, compuesto por el mismo número de preguntas, y la misma estructura en cuanto al requerimiento de actividades semióticas se refiere; de igual manera ocurre con la ponderación de la prueba, las primeras cinco preguntas otorgan una unidad en caso de acierto, la sexta hasta tres unidades y por último la séptima hasta dos unidades. Las calificaciones obtenidas por cada uno de los integrantes del grupo se puede observar en la tabla 8.

Tabla 8. Desempeño prueba pos test

ESTUDIANTE	PREGUNTAS							VALORACION
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	
E1	1	0	1	0	0	0	0	2
E2	1	1	0	0	1	0	2	5
E3	1	1	0	0	0	2	1	5
E4	1	0	0	0	0	0	0	1
E5	0	0	0	1	0	2	0	3
E6	0	0	0	0	0	1	1	2
E7	1	1	0	0	1	2	0	5
E8	1	1	0	0	1	1	1	5
E9	0	0	1	0	1	2	1	5
E10	1	0	1	0	1	0	0	3
E11	1	0	0	0	0	0	0	1
E12	1	1	0	0	1	2	1	6
E13	1	1	0	0	1	2	1	6
E14	1	0	0	1	0	2	1	5
E15	0	1	0	0	0	0	1	2
E16	1	0	0	0	0	0	0	1
E17	1	1	1	1	1	2	2	9
E18	1	1	0	0	1	0	0	3
E19	1	1	0	1	1	2	2	8
E20	1	1	1	1	1	0	2	7
E21	1	1	0	0	1	2	1	6
E22	0	1	1	0	1	1	1	5
E23	1	0	0	0	0	0	0	1
E24	1	1	0	0	1	0	2	5
E25	1	1	0	1	1	0	0	4
E26	0	0	0	0	1	0	0	1
E27	1	1	0	1	0	0	0	3
E28	1	1	0	1	1	2	0	6
E29	1	0	1	1	1	2	1	7
E30	0	0	0	1	0	0	0	1
E31	1	1	0	1	1	2	2	8
E32	1	0	0	0	1	0	0	2
E33	1	0	0	0	0	1	0	2
E34	0	1	0	0	1	2	1	5

Tomando de igual manera una puntuación igual o superior a seis para asignar la valoración de aprobado, se puede apreciar un incremento de cinco estudiantes aprobados, que representan catorce (14) puntos porcentuales (figura 22). En cuanto a la media de las valoraciones, para la

pueba postest se obtiene un valor de 4,23 frente, al 3,32 de la prueba diagnóstica, lo que a pesar de que señala la persistencia de las dificultades, supone una tendencia al alza.

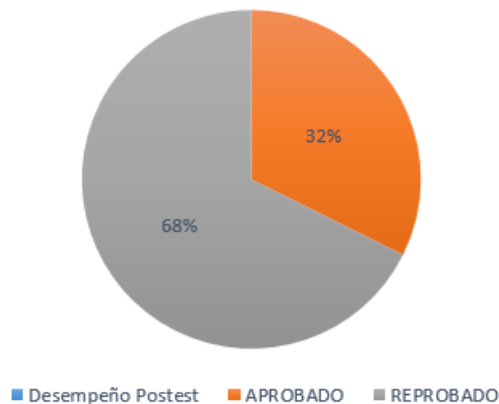


Figura 22. Desempeño prueba pos test grado 8B.

También se observa una notable mejoría sobre el desempeño de las preguntas 6 y 7 (figura 23), recordando que son abiertas y que requieren entregar procedimientos que implican actividad semiótica.

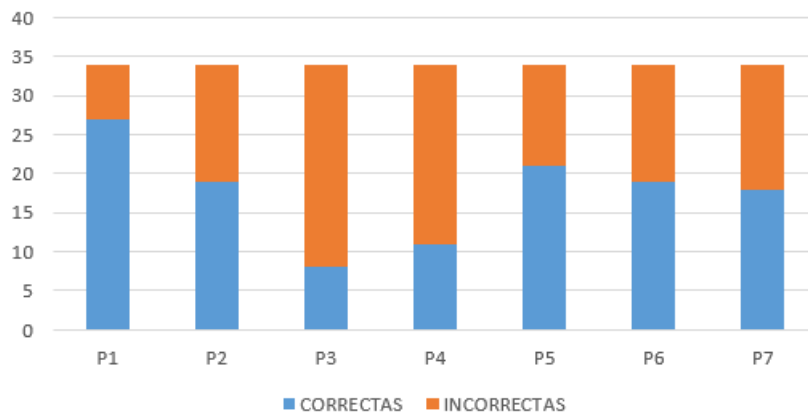


Figura 23. Desempeño por pregunta prueba pos test grado 8B.

5. Capítulo 5. Conclusiones

Se logró evidenciar con base en la metodología de investigación cualitativa y a partir de las diferentes producciones escritas y el desempeño en la utilización de los recursos digitales “Bloques Lógicos” y “Funcirep” de los estudiantes del grado 8B de la Institución Educativa María Auxiliadora del Municipio de Santuario que, como señala Duval (2017), la articulación de diferentes registros semióticos aporta al desarrollo del pensamiento variacional y de manera particular en esta investigación, a la construcción cognitiva del concepto de relación binaria de conjuntos y a partir de este último, identificar la condición de univocidad que determina una función; ratificando de esta manera, la conveniencia de moderar la utilización del registro algebraico, tradicionalmente sobreestimado por los docentes en las aulas y que como ocurre con todos los registros semióticos, solo le permite al sujeto un acceso limitado al objeto por aprehender.

El diseño y ejecución de una situación problema de la producción cafetera, inspirada en el contexto socio-económico del Municipio de Santuario Risaralda, generó las condiciones propicias para que los estudiantes del grupo 8B de la Institución Educativa María Auxiliadora, basados en experiencias previas de gran significación para ellos, adoptarán como estrategia de solución, la representación sucesiva de la función planteada por medio de los diferentes registros semióticos utilizados durante la ejecución de la secuencia didáctica, como se aprecia en las producciones escritas.

La utilización de software de ejercitación, representado en los programas “bloques lógicos” y “funcirep”, en el diseño e implementación de la secuencia didáctica para el aprendizaje de los conceptos de relaciones binarias y función lineal en el grado 8B, permitió la realización de

actividades de representación semiótica en un ambiente con un mayor nivel de interactividad que el obtenido con el uso de los medios tradicionales como el papel, propiciando de esta manera, un trabajo más eficiente en cuanto al tiempo y el esfuerzo empleado; generando la posibilidad de que los estudiantes obtengan mejores resultados cognitivos en la aprehensión de los conceptos de relaciones binarias, función lineal y afin, e incluso prepararlos para el aprendizaje de funciones polinómicas de mayor grado.

Particularmente en cuanto al concepto de función se refiere, el prototipo de software disponible más utilizado para las actividades didácticas son los sistemas computarizados de álgebra, CAS por sus siglas en inglés (Computer Algebra System), y que seguramente podemos mencionar como el más difundido entre los de libre distribución a “geogebra”, estos programas solo ofrecen la posibilidad de realizar actividad semiótica en los registros algebraico y cartesiano, se puede afirmar que se han convertido en una valiosa herramienta para el aprendizaje de algunos componentes conceptuales de función, como continuidad por citar un ejemplo, requerido en los cursos de Análisis de los grados superiores de la Básica secundaria e incluso a nivel universitario. Por tal razón es importante resaltar la importancia de los dos programas utilizados en la secuencia, “Bloques Lógicos” de la autoría del Magister Efraín Alberto Hoyos y “Funcirep” diseñado y desarrollado de manera conjunta por los docentes José Rodrigo González Granada, César Augusto Acosta Minoli y el autor de esta investigación; con el propósito inicial de ser utilizado para esta investigación, estos programas de ejercitación disponen de agradables interfaces gráficas que motivan la participación de los estudiantes del grado octavo, para que de manera muy básica e interactiva, logren crear y manipular las representaciones de relación binaria y función, con el uso de diferentes registros, impactando

positivamente en su construcción cognitiva, tal y como se evidencia en las diferentes producciones.

Recomendaciones y trabajo futuro

- Incluir actividades que propicien el desarrollo del pensamiento variacional y particularmente el concepto de función desde el ciclo de básica primaria, utilizando registros diferentes al algebraico.
- Fomentar el desarrollo de software personalizado bajo diferentes plataformas que permitan la realización de las diferentes actividades semióticas, especialmente de traducción, en torno a los conceptos de relaciones binarias y función.
- Diseñar secuencias didácticas mediante el aprendizaje basado en problemas, que generen procesos de aula pertinente al interés del estudiantado.

BIBLIOGRAFIA

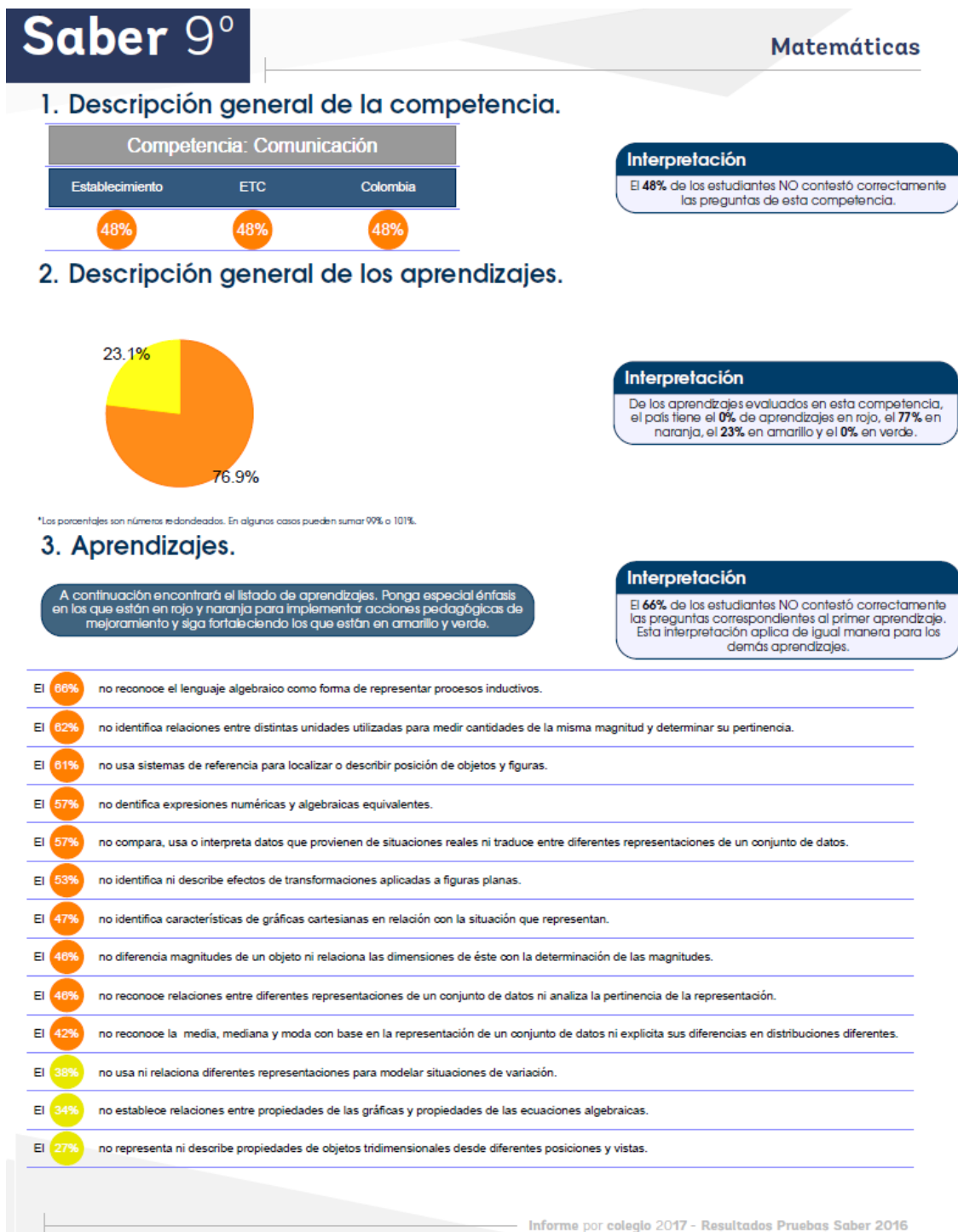
- Bausela, E. (2004). La docencia a través de la Investigación-Acción. *Revista Iberoamericana de la Educación*.
- Bauselas, E. (2004.). La docencia a través de la investigación. *Revista iberoamericana de Educación*. Vol. 35. Num. 1.
- Brady, C. (2010). El aprendizaje colaborativo con tecnología. *Innovaciones Educativas*.
- Castillo, A., & G., M. (2009). Desarrollo del pensamiento covariacional en un ambiente gráfico dinámico. Hacia una génesis instrumental.
- Castro, R., & Castro, R. (2015). *Enseñanza de las Matemáticas a través de la formulación de problemas*. Bogotá: ECOE Ediciones.
- Centro Nacional de Investigaciones del Café CENICAFE. (2004). Cartilla 21, Secado del cafe pergamino. *Cartilla Cafetera*.
- Cordoba, R. (2013). Análisis semiótico de la función lineal en el álgebra de Baldor. *Encuentro colombiano de matemática educativa*, (págs. 1-6). Bogota.
- D'Amore. (2011). *Didáctica de la Matemática*. Bogota: Cooperativa Editorial Magisterio.
- D'Amore, B., Fandiño, M., & Lori, M. (2013). *La Semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio.
- Díaz-Barriga, A. (2013). TIC en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, 3-21.
- Dolores, C., & Valero, M. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar. *Epsilon*, 45-73.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for learning. *Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of mathematics Education*. Cuernavaca.
- Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento Humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Restrepo Vega, Trad.) Cali: Universidad del valle programa Editorial.
- Gómez, E., Hernández, H., & Chaucanes, A. (2015). Dificultades en el aprendizaje y trabajo inicial con funciones en estudiantes de Educación Media. *Scientia et Technica Año XX, Vol 20, No. 3*, 278-285.
- Gonzalez, A. (2014). *ABP, redes sociales y matemáticas en 3° de ESO*. Oviedo: Universidad de Oviedo.
- Guerrero, T., & Flores, H. (2009). Teorías del aprendizaje y la instrucción en el diseño de materiales didácticos informáticos. *Educere*.
- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Relime*, vol 1, Num 1, 5-21.
- Hegedus, E., Laborde, C., Brady, C., Dalton, S., Siller, H.-S., Tabach, M., . . . Luis. (2016). *Uses of technology in upper secondary Mathematics Education*. Hamburgo.
- ICFES. (2016). *Saber 9° Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal 2016*.
- ICFES. (2017). <http://www2.icfesinteractivo.gov.co>. Obtenido de <http://www2.icfesinteractivo.gov.co>:

- <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/seleccionListaInstituciones.jsp>
- ICFES. (2017). *Siempre Día E, informe por colegio 2017, resultados Pruebas Saber 3°, 5°, 9°*.
- Íñigo, A. (2012). *La metodología del aprendizaje basado en problemas, con las redes sociales como herramienta educativa, para la enseñanza del bloque de funciones en 4° curso de ESO*. Madrid: Universidad Internacional de la Rioja.
- Latorre, A. (2005). *La investigación-acción conocer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona: Editorial Graó.
- Lipschutz, S. (1978). *Topología General*. Norma.
- López. (2009). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.
- Lupiáñez, J. L., & Moreno, L. E. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. *Iniciación en investigación en didáctica de la matemática*.
- Marcos del Olmo, E. (2016). *Uso de la calculadora gráfica Desmos para la enseñanza de funciones y gráficas en 3° ESO*. Madrid.
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento variacional y teorías computacionales*. Bogotá: Enlace Editores.
- Ministerio de Educación nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Escribe y edita.
- Ministerio de Educación Nacional. (2013). *Secuencias didácticas en Matemáticas Educación Básica Secundaria Matemáticas-Secundaria*. Bogotá: San Martín Obregón & Cía Ltda.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas vol. 2*. Bogotá: Panamericana Formas e Impresos S.A.
- Moreno-Armella, L. (2013). Cómo impactan las tecnologías los currículos de la educación matemática. *Cinestav*.
- Moreta, A. (2016). *Utilización de las TICs en la resolución de problemas de matemáticas en los estudiantes de las carreras de ciencias exactas*. Riobamba: Universidad Nacional de Chimborazo.
- Murillo, A. (2012). *Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grado noveno y once de los colegios públicos de La Virginia*. Pereira.
- Ospina, D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal*. Manizales.
- Padmavathy, R. D. (2013). Effectiveness of Problem Basic Learning in Mathematics, Vol-II. *International Multidisciplinary e-Journal*, 48.
- Quintero, C., & Cadavid, A. (2012). Construcción del concepto de función en estudiantes de octavo grado. *Décimo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, (págs. 1-9). Bogotá.
- Radford, L. (2001). *On the relevance of semiotics in Mathematics Education*. Ontario: École de Sciences de l'éducation Université Laurentienne.

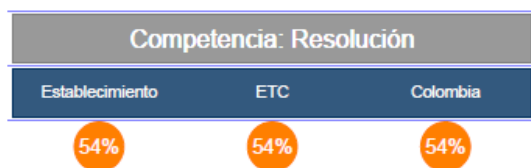
- Rúa, J., Bernaza, G., & Bedoya, J. (2017). El trabajo colaborativo y la solución de problemas de tipo matemático: una vía para la formación ciudadana. *Pedagogía Universitaria*. Vol XXII No.2.
- Ruiz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función análisis epistemológico y didáctico*. Granada.
- Sastre, P., Boubée, C., & Rey, G. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática Número 16*, 141-155.
- Sierra, G. L. (1998). *Funciones: Traducción entre representaciones*. Obtenido de Gestión del repositorio documental de la Universidad de Salamanca: <https://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/69318>
- Suárez, M. (2002). Algunas reflexiones sobre la investigación-acción colaboradora en la educación. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias Vol. 1 N° 1*.
- Vasquez, A. (2010). Consideraciones Sobre el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en Matemáticas. *Educación y Ciencia*.

6.ANEXOS

6.1 Anexo 1: Informe Siempre Día E. 2017.



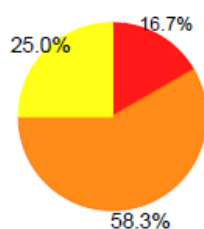
1. Descripción general de la competencia.



Interpretación

El 54% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas de esta competencia.

2. Descripción general de los aprendizajes.



*Los porcentajes son números redondeados. En algunos casos pueden sumar 99% o 101%.

Interpretación

De los aprendizajes evaluados en esta competencia, el país tiene el 17% de aprendizajes en rojo, el 58% en naranja, el 25% en amarillo y el 0% en verde.

3. Aprendizajes.

A continuación encontrará el listado de aprendizajes. Ponga especial énfasis en los que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que están en amarillo y verde.

Interpretación

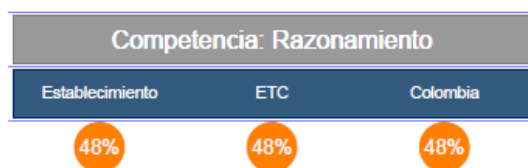
El 71% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes.

- El 71% no resuelve problemas que involucran potenciación, radicación y logaritmicación.
- El 68% no resuelve ni formula problemas geométricos o métricos que requieren seleccionar técnicas adecuadas de estimación y aproximación.
- El 67% no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.
- El 61% no resuelve problemas de medición utilizando de manera pertinente instrumentos y unidades de medida.
- El 59% no establece ni utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficies y volúmenes.
- El 48% no resuelve problemas que requieren el uso e interpretación de medidas de tendencia central para analizar el comportamiento de un conjunto de datos.
- El 48% no resuelve ni formula problemas a partir de un conjunto de datos presentado en tablas, diagramas de barras y diagrama circular.
- El 45% no plantea ni resuelve situaciones relativas a otras ciencias utilizando conceptos de probabilidad.
- El 38% no resuelve ni formula problemas usando modelos geométricos.
- El 30% no resuelve problemas en situaciones aditivas y multiplicativas en el conjunto de los números reales.
- El 33% no resuelve ni formula problemas que requieren hacer inferencias a partir de un conjunto de datos estadísticos provenientes de diferentes fuentes.

Saber 9^o

Matemáticas

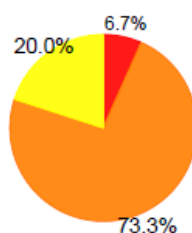
1. Descripción general de la competencia.



Interpretación

El 48% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas de esta competencia.

2. Descripción general de los aprendizajes.



Interpretación

De los aprendizajes evaluados en esta competencia, el país tiene el 7% de aprendizajes en rojo, el 73% en naranja, el 20% en amarillo y el 0% en verde.

*Los porcentajes son números redondeados. En algunos casos pueden sumar 99% o 101%.

3. Aprendizajes.

A continuación encontrará el estado de aprendizajes. Ponga especial énfasis en los que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que están en amarillo y verde.

Interpretación

El 72% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes.

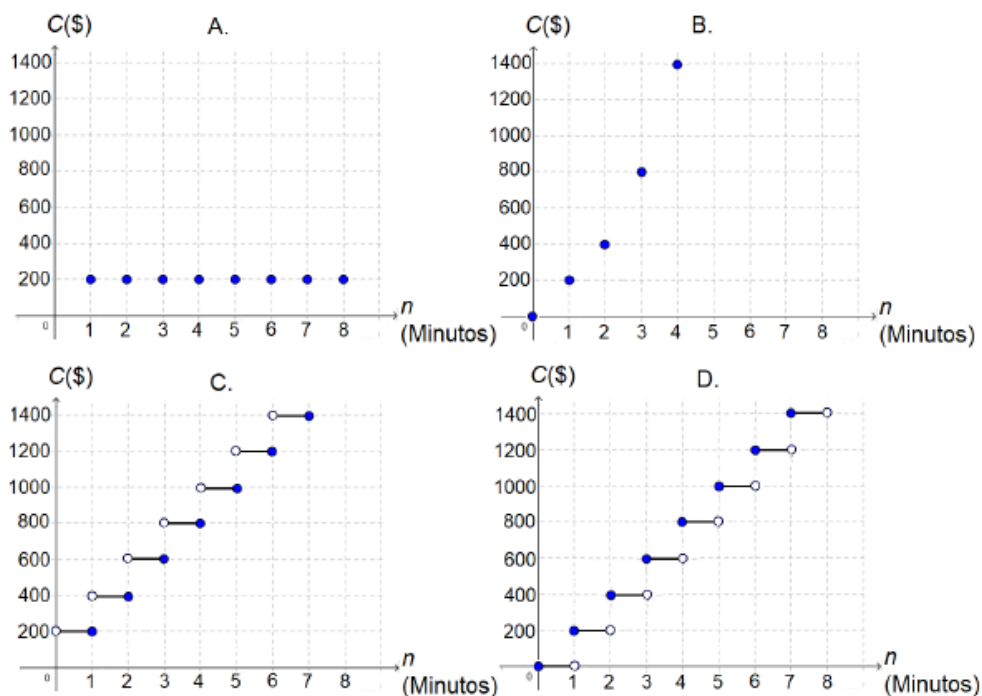
EI 72%	no verifica conjeturas acerca de los números reales, usando procesos inductivos y deductivos desde el lenguaje algebraico.
EI 85%	no generaliza procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de algunos sólidos.
EI 50%	no utiliza propiedades y relaciones de los números reales para resolver problemas.
EI 50%	no fundamenta conclusiones utilizando conceptos de medidas de tendencia central.
EI 50%	no formula inferencias ni justifica razonamientos y conclusiones a partir del análisis de información estadística.
EI 55%	no analiza la validez o invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
EI 53%	no hace conjeturas ni verifica propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales.
EI 53%	no interpreta ni usa expresiones algebraicas equivalentes.
EI 52%	no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación.
EI 52%	no predice ni explica los efectos de aplicar transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales.
EI 51%	no usa modelos para discutir acerca de la probabilidad de un evento aleatorio.
EI 43%	no argumenta formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.
EI 37%	no utiliza diferentes métodos ni estrategias para calcular la probabilidad de eventos simples.
EI 30%	no identifica ni describe las relaciones (aditivas, multiplicativas, de recurrencia) que se pueden establecer en una secuencia numérica.
EI 22%	no establece conjeturas ni verifica hipótesis acerca de los resultados de un experimento aleatorio usando conceptos básicos de probabilidad.

6.2 Anexo 2: Instrumento pre test

- Un obrero se demora aproximadamente 2 minutos para pintar 4 m^2 de un muro.
Pintando a este mismo ritmo, después de una hora de trabajo, el obrero habrá pintado
 - 20 m^2
 - 30 m^2
 - 60 m^2
 - 120 m^2
- La siguiente tabla muestra el costo de algunas llamadas que un usuario realizó desde un teléfono celular.
Cada minuto o fracción tiene un costo fijo

Cantidad de minutos	Mayor que 2 y menor o igual que 3	Mayor que 6 y menor o igual que 7	Mayor que 9 y menor o igual que 10	Mayor que 15 y menor o igual que 16
Costo	600	1.400	2.000	3.200

En cuál de las siguientes gráficas se representa correctamente el costo (C) de una llamada en función del número de minutos (n) de duración?

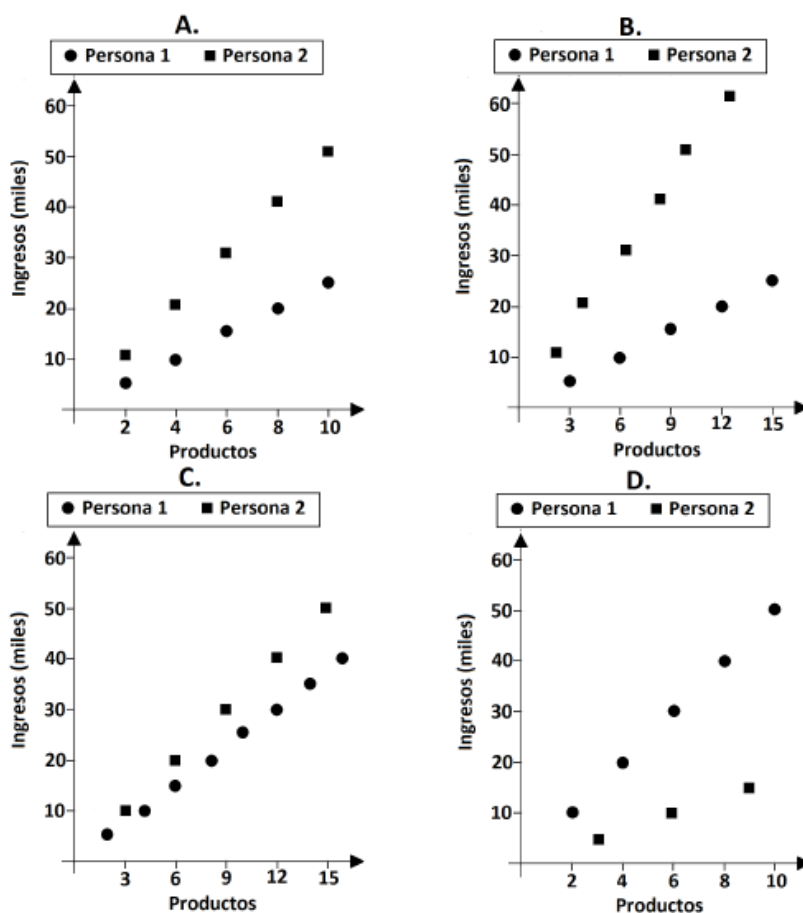


3. Dos personas venden el mismo producto en diferentes negocios. Las tablas 1 y 2 muestran los ingresos que obtiene cada persona, según la cantidad de productos vendidos.

persona 1	
Productos	Ingresos (miles de \$)
2	5
4	10
6	15
8	20
10	25

persona 2	
Productos	Ingresos (miles de \$)
3	10
6	20
9	30
12	40
15	50

Cuál de las siguientes gráficas representa la información de las tablas ?

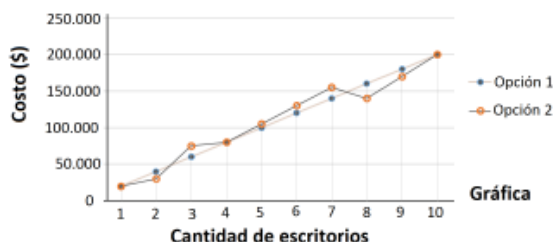


4. Se necesita pintar un muro cuya superficie es $253 m^2$. En un almacén se vende pintura en canecas; cada caneca alcanza para pintar un área de $10 m^2$.

Cuál es el mínimo número de canecas que se deben comprar para pintar el muro ?

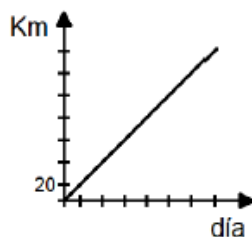
- a) 2 b) 3 c) 25 d) 26

5. Una compañía tiene dos opciones para adquirir una cantidad de escritorios necesaria para el trabajo. La gráfica muestra el costo total de cada opción dependiendo de los escritorios comprados.



Para cuál de las siguientes cantidades de escritorios, el costo de las opciones 1 y 2 es diferente?

- a) 10 b) 7 c) 4 d) 1
6. Un peregrino quiere cubrir la distancia de Pereira a Buga (140 km). La siguiente gráfica ilustra la progresión después de t días:



- a) Describe la situación con tus propias palabras.
- b) Qué distancia ha recorrido durante el primer día y cuánto le falta para llegar a Buga?.
- c) Idéntico para el segundo día.
- d) Construye una tabla que represente la distancia recorrida cada día.
- e) Cuánto habrá recorrido después de t días?.
7. Un vendedor de un puesto de comida rápida se da cuenta que puede vender 60 perros cada sábado obteniendo un beneficio total de \$ 105.000. de acuerdo a esta información :

- a) completa la tabla siguiente

<i>Beneficio total en pesos</i>							
Número de perros calientes vendidos	60	50	40	30	20	10	0

- b) Dibuja el gráfico correspondiente a esa tabla.

6.3 Anexo 3: Actividad de lecto-escritura Gauss

El príncipe de las Matemáticas (1777-1855)



El don de Gauss se hizo evidente tan pronto como pisó una clase a los siete años. Ante el barullo reinante en el aula, el profesor J.G. Bütner ordenó a los alumnos sumar los números enteros entre el 1 y el 100. Mientras sus compañeros llenaban sus cuadernos con más y más números, Gauss escribió enseguida la respuesta: 5050. Gauss se dio cuenta de que el conjunto de los números del 1 al 100 estaba formado por 50 pares de enteros cuya suma siempre daba como resultado 101: $\{1,100\}, \{2,99\} \dots \{50,51\}$.

Her Bütner se dirigió a los padres de Gauss para convencerles de que dejarán a su hijo quedarse después del horario escolar para recibir clases especiales de matemáticas. Al principio fueron un poco escépticos, aunque ellos habían reconocido las cualidades de su hijo a los tres años, cuando corrigió un error que su padre había cometido al pagar el salario de los hombres que trabajaban para él. El señor Gebhard Gauss había nacido en 1744, había sido jardinero, obrero y capataz, y provenía de un linaje marcado por la pobreza. Era un trabajador inculto que había conseguido | alcanzar la clase media. La madre, nacida en 1743 con el nombre de Dorothea Benze, trabajo como sirvienta antes de convertirse en la segunda mujer de Gebhard, en 1776. Su único hijo, Carl Friedrich, nacería un año después en la ciudad de Brunswick Alemania.

Tras pasar estudiar tres años en el Collegium Carolinum de Brunswick, donde desarrollo su conocimiento matemático, Gauss se inclinó por la Universidad de Gotinga, a cien kilómetros de Brunswick, antes que la universidad del Ducado, cerca de Helmstedt, seguramente porque aquella poseía una mayor biblioteca matemática. Sorprendentemente los registros de la biblioteca muestran que Gauss retiro más libros de humanidades que de matemáticas.

Gauss alcanzaría grandes logros en la matemática como la construcción de un polígono regular de 17 lados con regla y compas, complementando el trabajo realizado por los griegos siglos atrás, posteriormente se interesaría en el campo de la astronomía, haciendo grandes aportes a la construcción de las orbitas elípticas de los planetas, este hecho le haría miembro honorifico de la Academia de Ciencias de la capital rusa de San Petersburgo en 1802, situación que le haría acreedor a un aumento en su mecenazgo por parte del duque de Brunswick, y que duraría hasta la muerte de este último en la batalla de Auerstädt contra las tropas de Napoleón en 1806.

En su testamento estipulaba que un polígono regular de diecisiete lados fuera grabado en su tumba. Pero el albañil a cargo del trabajo pensó que los visitantes lo confundirían con un círculo, así que grabo una estrella de diecisiete picos. Aunque el obrero no siguió las instrucciones del científico, acabo por marcar a Gauss con una estrella, la mayor estrella del firmamento matemático.

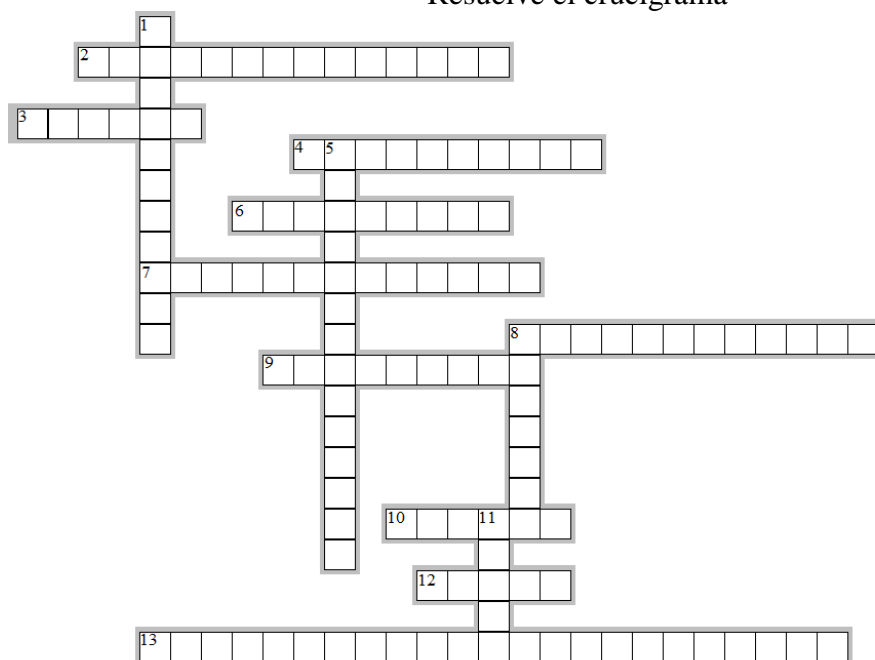
Tomado de: Dios creo a los números, Stephen Hawking, página 493

Subraya las siguientes palabras

Brunswick	Astronomía
Jardinero	Ceres
Gebhard Gauss	Compas
San Petersburgo	Fermat
Dorothea Benze	Disquisiciones Aritméticas
Gotinga	Johanna Osthoff
Humanidades	Giuseppe Piazzi

D	E	B	F	A	E	C	D	A	W	A	G	S	B	D	Z	
J	O	U	R	E	Z	B	L	D	Y	U	S	E	A	G	V	W
E	O	R	J	U	R	F	T	G	T	P	T	B	N	I	C	M
D	C	H	O	I	N	M	J	U	S	C	R	H	P	U	O	I
H	I	E	A	T	I	S	A	Y	P	I	O	A	E	S	M	O
J	U	S	R	N	H	Y	W	T	W	J	N	R	T	E	P	J
N	A	M	Q	E	N	E	E	I	O	K	O	D	E	P	A	Q
H	R	R	A	U	S	A	A	Y	C	R	M	G	R	P	S	C
Y	I	J	D	N	I	X	O	B	Y	K	I	A	S	E	X	D
W	T	Q	C	I	I	S	G	S	E	E	A	U	B	P	X	Z
O	M	D	B	V	N	D	I	O	T	N	X	S	U	I	X	H
H	E	U	D	S	I	E	A	O	T	H	Z	S	R	A	E	J
E	T	U	D	E	T	L	R	D	N	I	O	E	G	Z	R	P
E	I	Q	I	A	Y	O	R	O	E	E	N	F	O	Z	C	N
R	C	I	T	X	Y	I	O	H	A	S	S	G	F	I	A	O
E	A	E	E	V	K	R	Y	T	Y	O	R	W	A	O	W	D
U	S	Y	B	E	X	L	G	M	E	I	C	E	R	E	S	L

Resuelve el crucigrama



Horizontales

- Astrónomo italiano quien creía haber descubierto un nuevo planeta en 1801 al que llamo Celeste
- Celebre matemático y abogado francés, del cual Gauss complementaría su trabajo sobre números primos
- Ciencia en la que Gauss realizaría grandes aportes describiendo orbitas elípticas
- Ciudad natal de Gauss
- Madre de Gauss
- Padre de Gauss
- Oficio que desempeñara su padre
- Uno de los instrumentos con los que Gauss construyo un polígono regular de diecisiete lados
- Cuerpo celeste, inicialmente considerado un planeta y del que Gauss logro predecir su orbita
- Celebre tratado matemático de Gauss

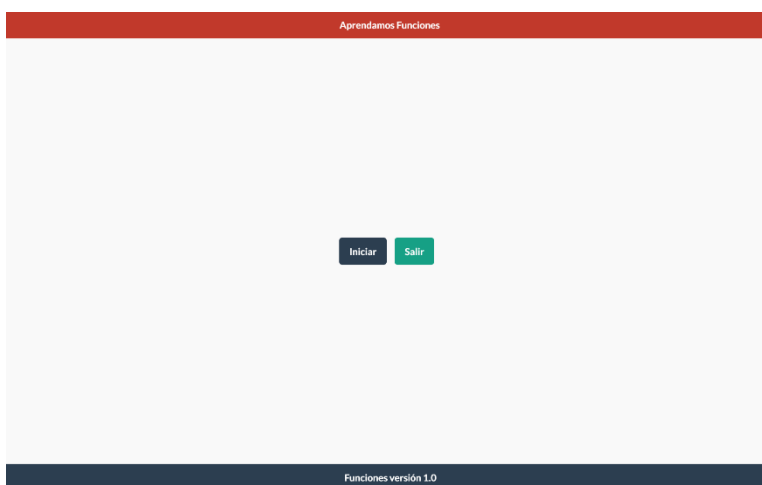
Verticales

- Ciencia sobre la cual Gauss disfrutaba leer
- Ciudad Rusa de donde Gauss seria miembro honorifico de su Academia de Ciencias
- Universidad a la que asistió Gauss
- Capital de Francia considerada epicentro matemático del mundo a inicios del siglo XIX

6.4 Anexo 4: Manual Del Usuario aplicación “FUNCIREP”

El software de ejercitación “FunciRep” fue diseñado y desarrollado para realizar actividades de representación y conversión semióticas, funciona bajo el sistema operativo Android, versión 5.0 o superior, y las tabletas deben estar en modo Landscape y con resolución 1280 X 800, similares a las dotadas a la Institución María Auxiliadora del Municipio de Santuario en el marco del programa Tabletas Para Educar del Ministerio de las TICs.

El pantallazo inicial permite desplegar al usuario dos botones con sendas opciones de “Iniciar” o “Salir”

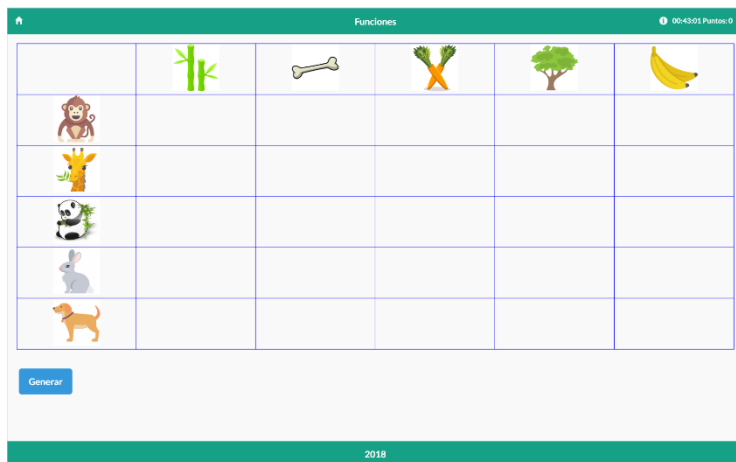
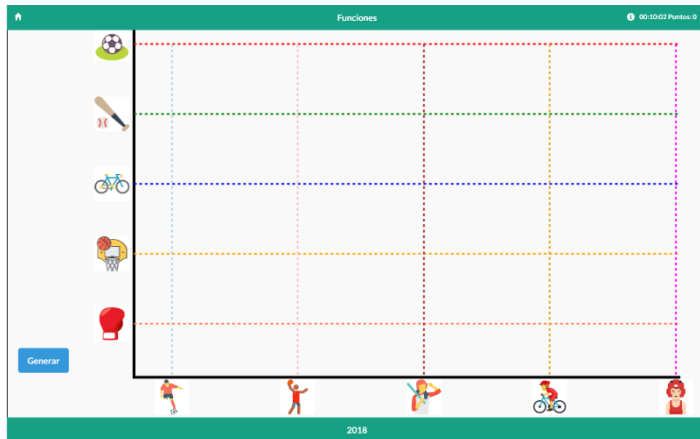


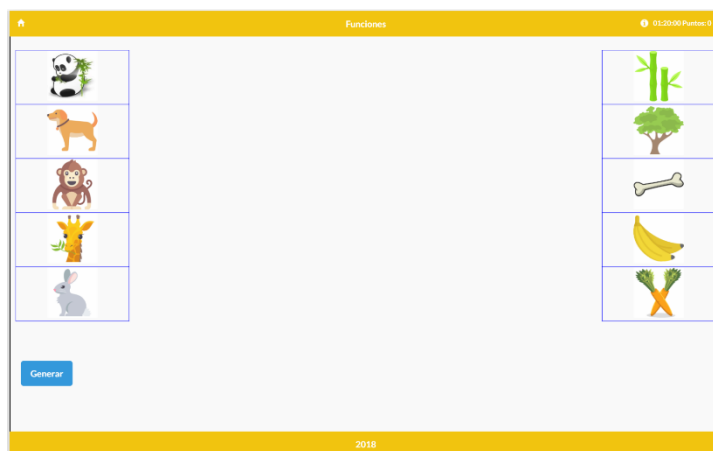
Posteriormente se inicia una secuencia de 5 actividades, el objetivo es realizarlas sin cometer errores y en el menor tiempo posible, para este propósito cada respuesta incorrecta será penalizada con cinco puntos, al final de la prueba se visualizará el puntaje obtenido y el tiempo empleado, de esta manera se le da un matiz de exigencia al usuario.

En las tres primeras (figura 12, figura 13 y figura 14), se deberá representar parejas ordenadas correspondientes a relaciones básicas, en los registros cartesiano, diagrama de cuadrados o

casillas y sagital, en cada uno de ellas dispondrá de un botón “Generar” que le permita cambiar de domino y codominio.

Cada actividad solo será superada cuando el usuario logre realizarla sin errores, de lo contrario, deberá repetirla, modificando el dominio y el codominio, y el ya mencionado incremento en puntos y tiempo empleado.



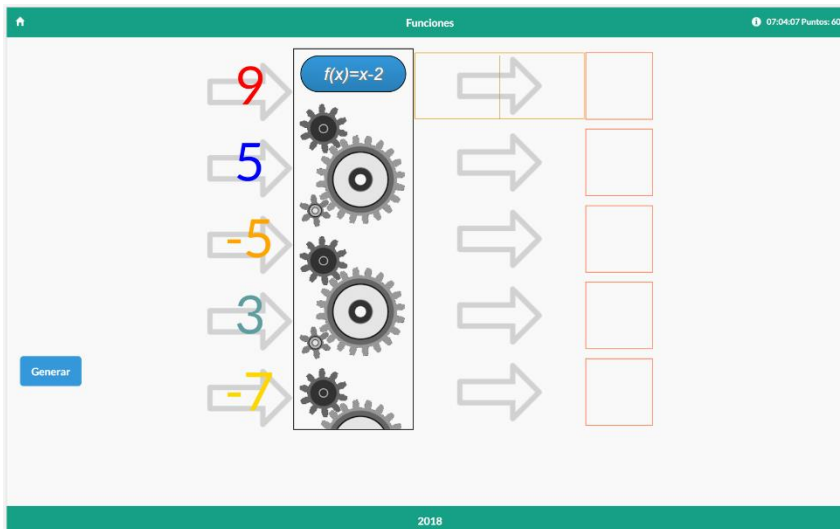


En la cuarta y quinta actividad se le proporciona una representación algebraica de una función lineal o afín y el usuario a partir de unos valores de dominio, debe encontrar el valor numérico para determinar el correspondiente codominio. En la cuarta actividad (figura 15) se le proporcionan los valores de codominio y deben emparejar en la tabla, si comete un error reiniciara esta actividad con valores diferentes y similares penalizaciones.

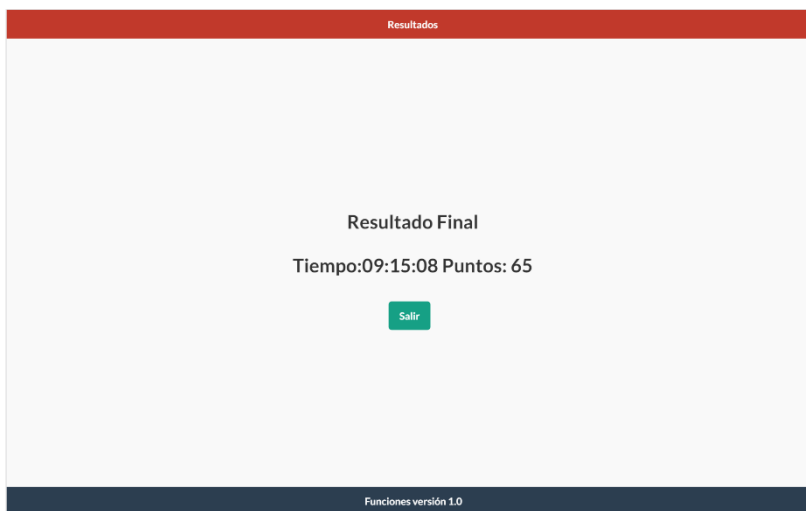
$f(x) = -9x - 6$					
75					
39					
-51					
12					
-42					
Generar	-9	-5	5	4	-2

En la Quinta figura 16 y última actividad se genera un dominio y se expone nuevamente, por medio de una interfaz animada, una función lineal o afín en un registro algebraico, en esta

instancia, pulsando sobre las flechas del codominio y por medio del teclado se debe ingresar los correspondientes valores.



Una vez ingresados todos los valores se verifican tocando la barra de título azul, donde se encuentra la expresión analítica de la función, en caso de ser todos correctos terminara la secuencia y mostrara en pantalla (figura 17) el desempeño reflejado en puntaje y tiempo empleado. De lo contrario reiniciara este nivel.



6.5 Anexo 5: Situación problema “La finca de don José”

“Don José tiene tres fincas cafeteras: La Siria, La Cristalina y La Coqueta; y proyecta construir un silo en cada una de ellas, sus producciones por año son de 500, 750 y 1000 arrobas respectivamente. Don José debe decidir entre ACPM y carbón coque que combustible le ofrece mayor rentabilidad en el proceso de secado”

Responda las siguientes preguntas y susténtelas realizando representación tabular y cartesiana

- ¿Cuánto dinero anual se ahorra don José en cada una de las fincas si opta por el combustible más económico?
- ¿Cuánto dinero se ahorra don José en el secado de toda su producción cafetera si opta por el combustible más económico?

Para responder el interrogante puede recurrir a la siguiente información:

Combustible	Consumo por @ cps.
Carbón mineral	3,0 Kilogramos
ACPM	0,7 Galones

Fuente: Cartilla 21. Beneficio del café II: secado del café pergamino Cenicafe

Combustible	Valor en el mercado
Carbón mineral	\$1.500 por Kilogramo
ACPM	\$8.666 por Galón

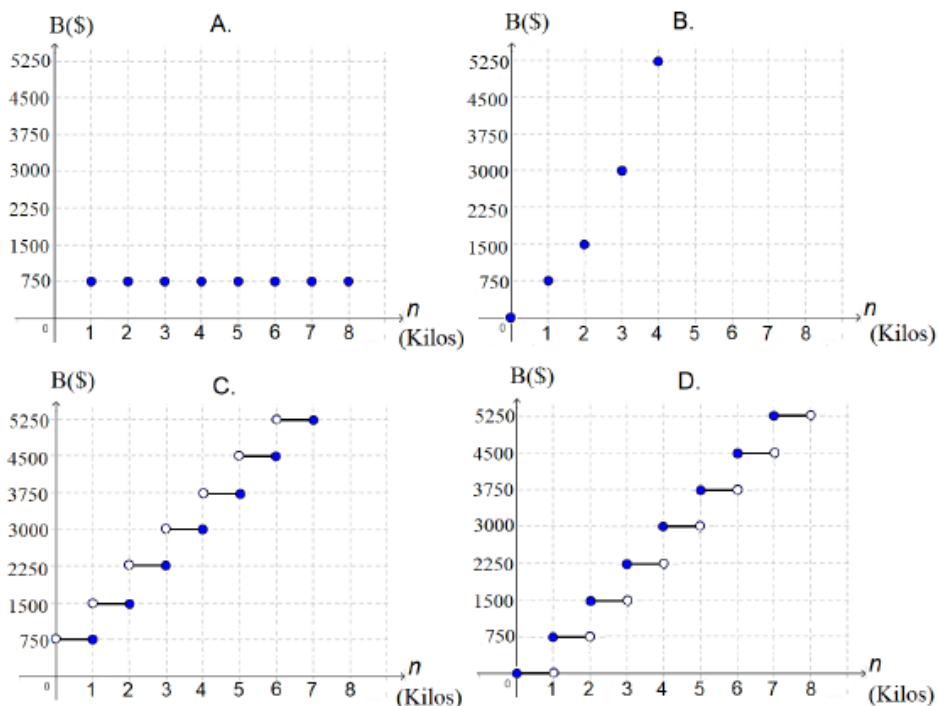
Fuente: www.minminas.gov.co/precios-ano-2018

6.6 Anexo 6: Instrumento Pos test.

- Un auto pequeño consume aproximadamente 1 galón de combustible para recorrer 75 Km .
Conduciendo a este mismo ritmo, después de una viaje de 2.250 km , el auto habrá consumido
 - 20 Galones.
 - 30 Galones.
 - 40 Galones.
 - 60 Galones.
- La siguiente tabla muestra el descuento en dinero que la empresa de Municipal de Servicios realiza en la factura, como estímulo a la correcta separación de residuos solidos

Cantidad de kilos	Mayor que 2 y menor o igual que 3	Mayor que 6 y menor o igual que 7	Mayor que 9 y menor o igual que 10	Mayor que 15 y menor o igual que 16
Beneficio	1.500	4.500	6.750	11.250

En cuál de las siguientes gráficas se representa correctamente el descuento (B) de una factura en función del número de kilos (n) de residuos reciclables?

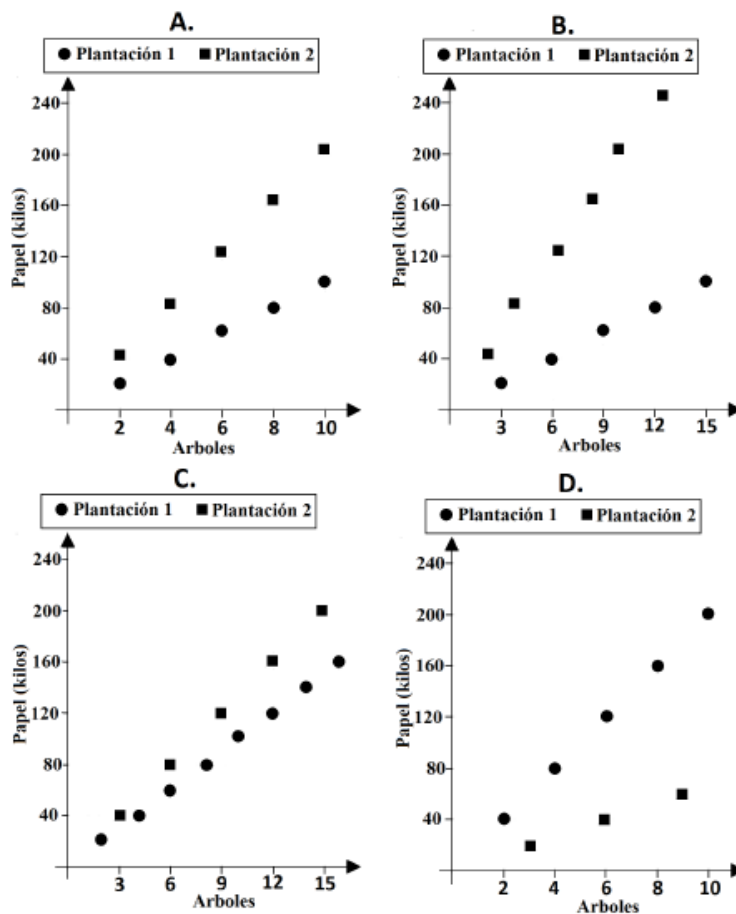


3. Dos plantaciones de pinos sembradas con 10 años de diferencia entre si están destinadas a la producción de papel. Las tablas 1 y 2 muestran la cantidad de papel que se obtiene a cada plantación, según la cantidad de arboles talados.

plantación 1	
Arboles	Papel (kilos)
2	40
4	80
6	120
8	160
10	200

plantación 2	
Arboles	Papel (kilos)
3	30
6	60
9	90
12	120
15	150

Cuál de las siguientes gráficas representa la información de las tablas ?

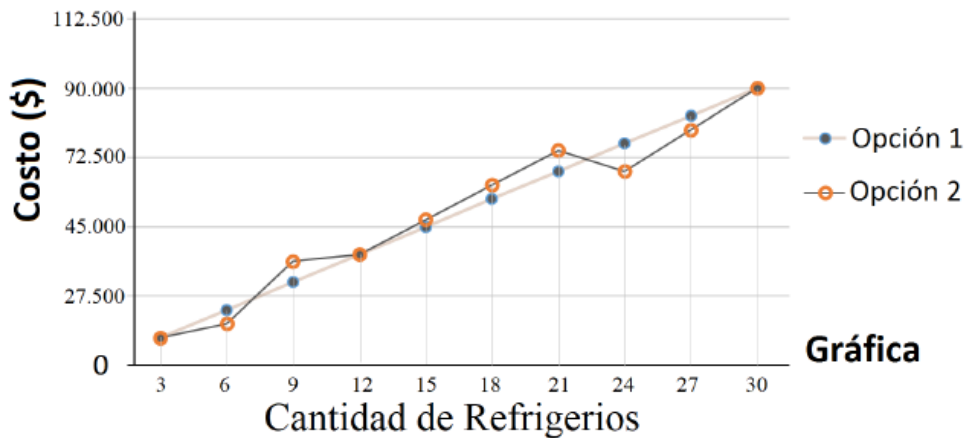


4. Se necesita empacar 38 tabletas. En cada caja disponible se pueden empacar 6 tabletas.

Cuál es el mínimo número de cajas que se deben emplear para guardar las tabletas ?

- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 8

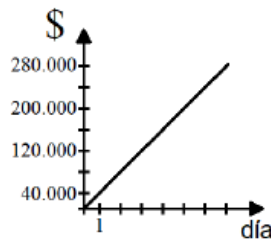
5. Una colegio tiene dos opciones para adquirir una cantidad de refrigerios para la celebración del día del niño. La gráfica muestra el costo total de cada opción dependiendo de los refrigerios comprados.



Para cuál de las siguientes cantidades de refrigerios, el costo de las opciones 1 y 2 es diferente?

- a) 30
- b) 3
- c) 12
- d) 21

6. Un recolector de café debe ahorrar \$ 280.000 . La siguiente gráfica ilustra la progresión de sus ingresos después de t días:



- a) Describe la situación con tus propias palabras.
- b) Qué dinero ha ganado durante el primer día y cuánto le falta lograr su propósito?.
- c) Idéntico para el segundo día.
- d) Construye una tabla que represente el dinero acumulado cada día.
- e) Cuánto habrá ganado después de t días?.

7. Un productor de plátanos se da cuenta que puede vender 120 kilos cada sábado obteniendo un beneficio total de \$ 24.000. De acuerdo con esta información :

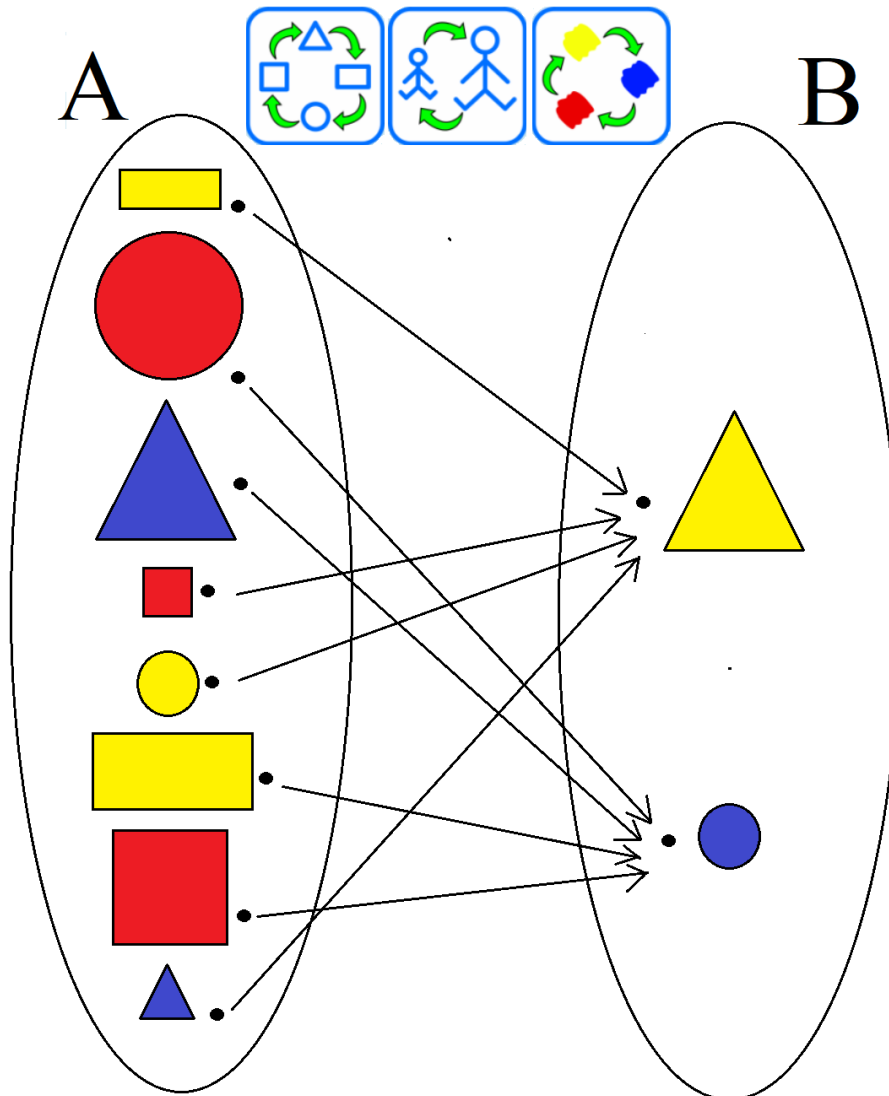
a) completa la tabla siguiente

<i>Beneficio total en pesos</i>							
Número de kilos de platanos vendidos	120	100	80	60	40	20	0

b) Dibuja el gráfico correspondiente a esa tabla.

6.7 Anexo 7. Actividad complementaria “bloques lógicos”

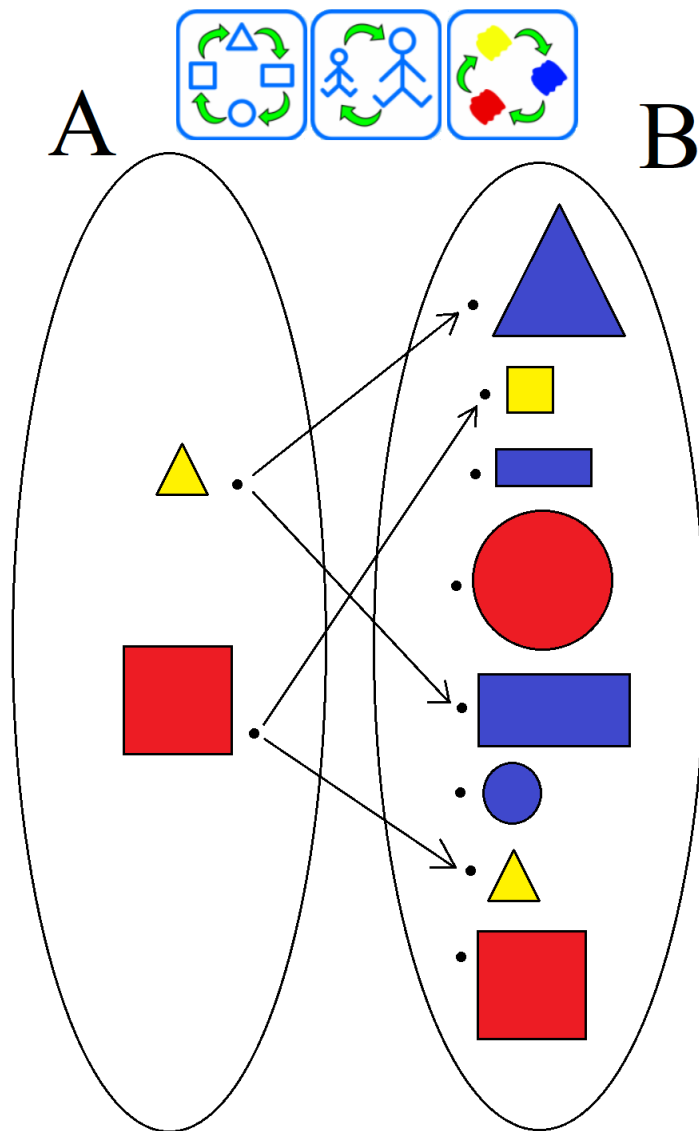
Señala con una “X” en los bloques lógicos la relación o relaciones que se representan en el diagrama sagital



Escribe sobre el espacio la regla que relaciona a los dos conjuntos

$$R_1 = \{(x, y): x \in A, y \in B, \underline{\hspace{15em}}\}$$

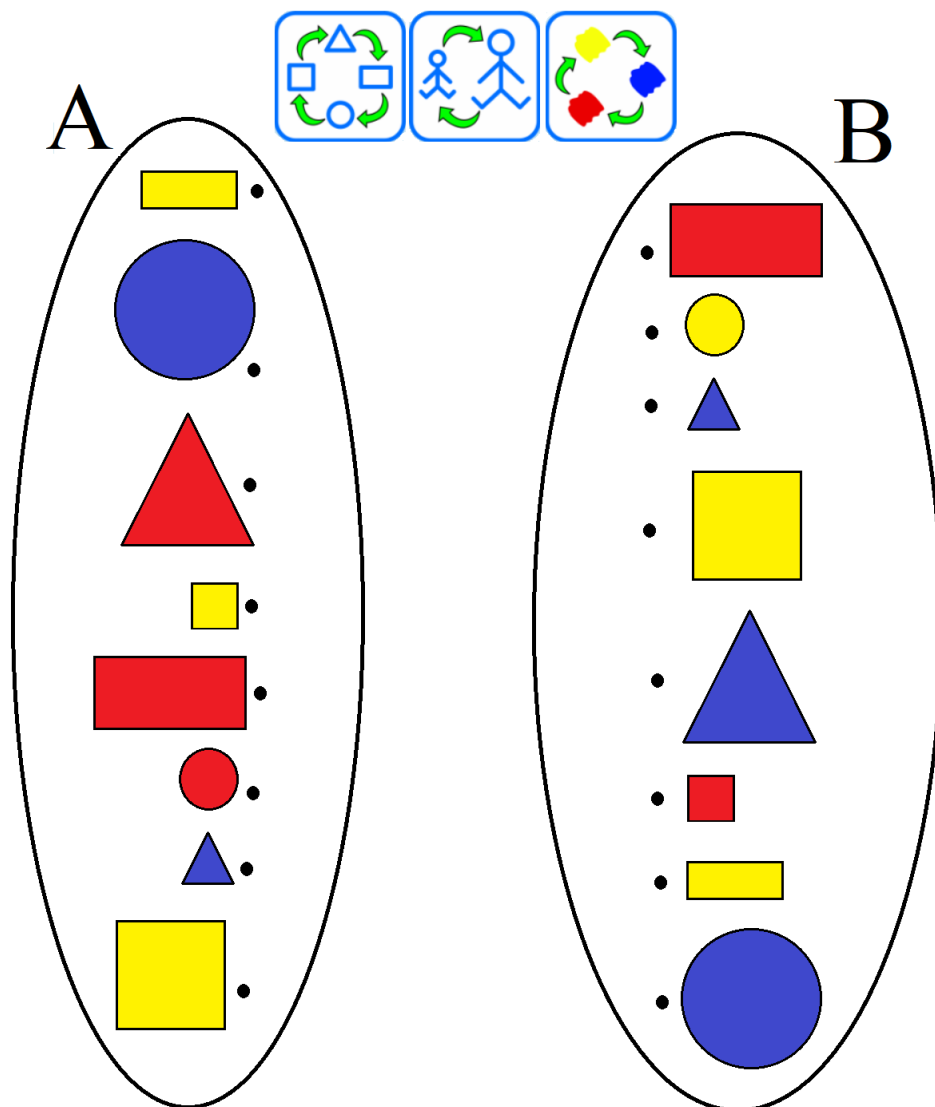
Señala con una “X” en los bloques lógicos la relación o relaciones que se representan en el diagrama sagital



Escribe sobre el espacio la regla que relaciona a los dos conjuntos

$$R_2 = \{(x, y): x \in A, y \in B, \underline{\hspace{10cm}}\}$$

Representa en el diagrama sagital la relación expresada en los bloques lógicos

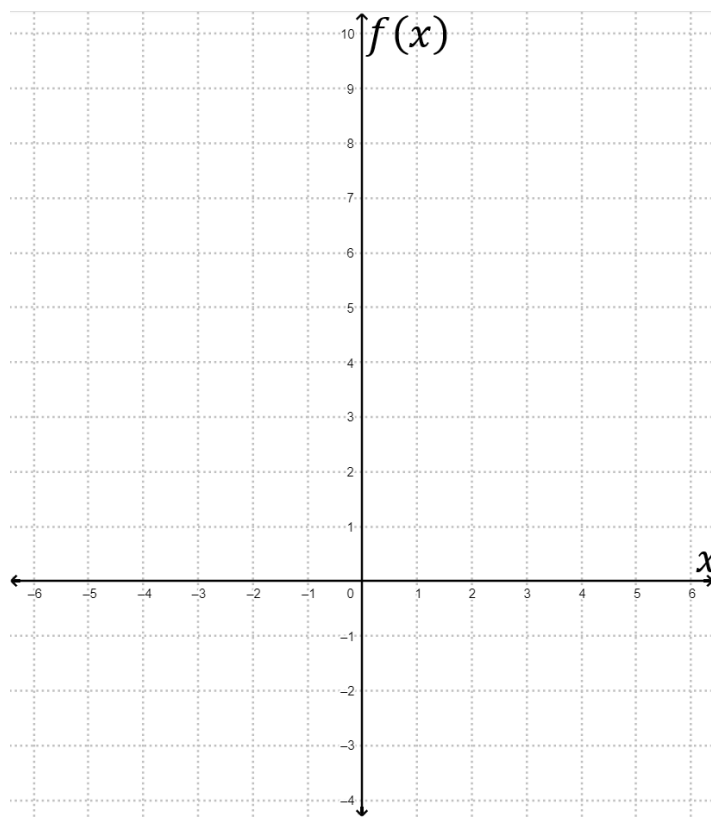


Escribe sobre el espacio la regla que relaciona a los dos conjuntos

$$R_3 = \{(x, y): x \in A, y \in B, \underline{\hspace{10em}}\}$$

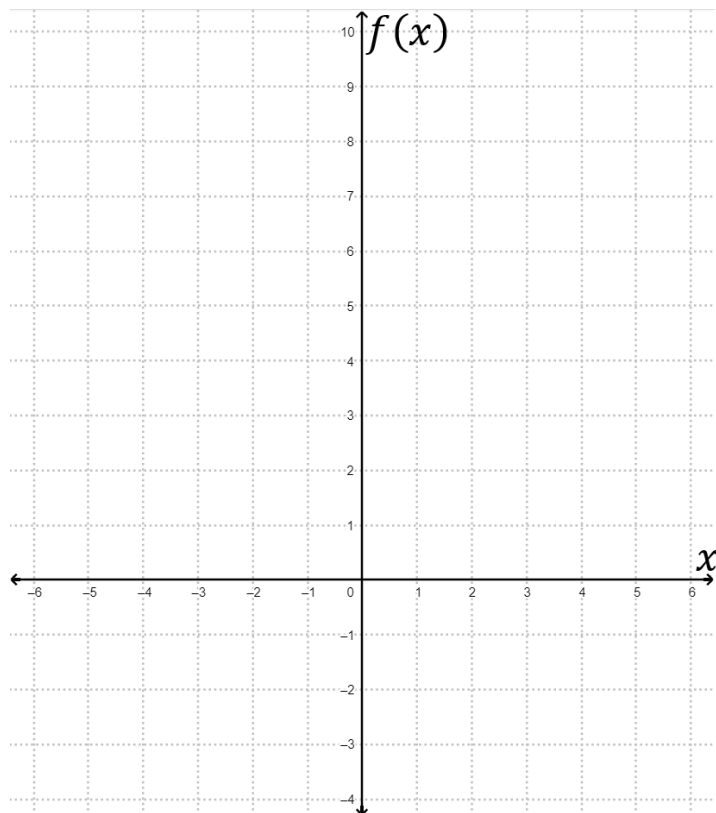
6.8 Anexo 8. Actividad Complementaria “Funcirep”

Representa en el plano cartesiano la función $f(x) = 2 \cdot x$



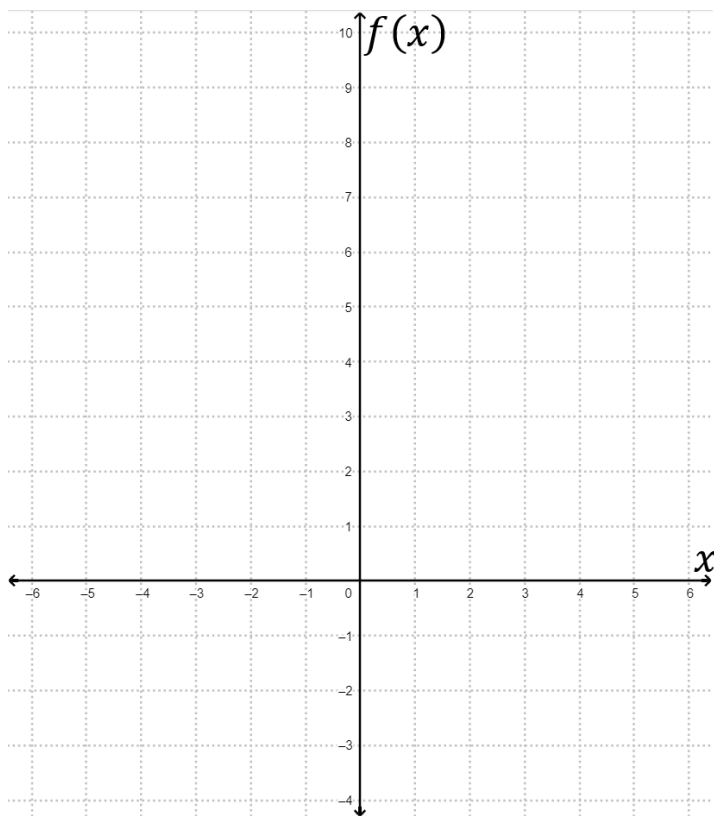
x	$f(x) = 2 \cdot x$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Representa en el plano cartesiano la función $f(x) = 2 \cdot x + 1$



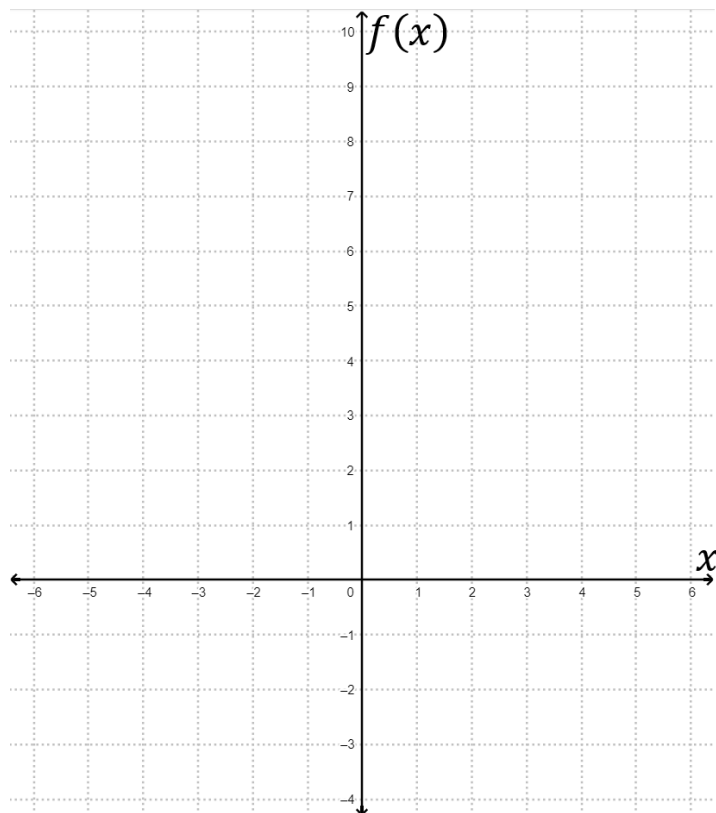
x	$f(x) = 2 \cdot x + 1$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Representa en el plano cartesiano la función $f(x) = x \cdot x$



x	$f(x) = x \cdot x$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Representa en el plano cartesiano la función $f(x) = x \cdot x + 1$



x	$f(x) = x \cdot x + 1$
-2	
-1	
0	
1	
2	

6.9 Anexo 9. Registro fotográfico utilización software pedagógico



