

UM ESQUEMA DE PETROV-GALERKIN PARA ONDAS NÃO LINEARES DISPERSIVAS A 2DH

Sandra Plecha, Ana Mesquita e Paulo Avilez-Valente*

Centro de Hidráulica, Recursos Hídricos e Ambiente
Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto
Rua Dr Roberto Frias s/n, P-4200-465 Porto, Portugal
e-mail: pvalente@fe.up.pt, web: <http://www.fe.up.pt>

Palavras-chave: Propagação não-linear de ondas, Ondas dispersivas, Modelo de Boussinesq, Elementos Finitos, Petrov-Galerkin.

Resumo. *Um método de elementos finitos com uma formulação de Petrov-Galerkin é aplicado para a discretização a duas dimensões horizontais das equações de Boussinesq. Este modelo rege a propagação de ondas de superfície fracamente não lineares e dispersivas em águas de pequena profundidade. O esquema utilizado neste trabalho recorre à discretização bilinear no espaço e linear no tempo com condições de continuidade C^0 . O esquema de integração no tempo é do tipo predictor-corrector, a um nível, com precisão e estabilidade condicional de terceira ordem. A utilização de funções de peso bilineares no espaço e quadráticas no tempo permite a introdução de termos de correcção da dispersão numérica e de um mecanismo dissipativo altamente selectivo, mantendo a consistência da formulação e garantindo as suas propriedades conservativas. Os resultados numéricos para configurações batimétricas a duas dimensões horizontais são comparados com resultados experimentais e com outros resultados numéricos, nomeadamente para a propagação de uma onda solitária num canal, contornando um pilar cilíndrico, e para a oscilação em massa de uma bacia quadrangular. Conclui-se que o modelo proposto é estável e preciso, com características óptimas de convergência.*

1 INTRODUÇÃO

A resolução numérica de modelos de propagação de ondas do tipo Boussinesq recorre geralmente ao método das diferenças finitas (e.g. programa Funwave [1][2][3]). Estes esquemas utilizam filtros numéricos para garantir a sua estabilidade e ao método de Runge-Kutta de elevada ordem para assegurar a precisão. Recentemente foram publicados vários trabalhos onde o método dos elementos finitos (MEF) é usado para a discretização espacial de modelos do tipo Boussinesq (e.g. [4][5][6]), nalguns casos com recurso ao método de Runge-Kutta para a integração no tempo. Por outro lado, as formulações de Bubnov-Galerkin para o MEF são conhecidas por produzir soluções com elevada dispersão numérica

[7]. Além disso, em modelos não lineares sem dissipação, a acumulação de energia nas mais pequenas escalas que a malha de cálculo consegue resolver, e o eventual efeito de transferência de energia por efeito de *aliasing* podem causar ruído numérico e em última instância tornar o esquema instável [8]. Os algoritmos numéricos para as equações de Boussinesq devem ser estáveis e ter uma precisão de terceira ordem [9]. A aplicação de filtros numéricos é uma das técnicas utilizadas para garantir a estabilidade dos esquemas numéricos [10], no entanto a sua aplicação com esquemas de elementos finitos a 2DH é bastante complexa, conduzindo geralmente a soluções demasiado dissipativas [11]. A formulação apresentada neste trabalho recorre a um esquema de Petrov-Galerkin para o método dos elementos finitos espaço-temporais. É uma extensão a duas dimensões horizontais de trabalhos prévios [12][13][14]. A função peso da formulação de elementos finitos é definida por forma a garantir uma precisão de quarta ordem na celeridade de fase linear e um mecanismo dissipativo altamente selectivo de terceira ordem. Devido à presença do termo não-linear, recorre-se a um esquema predictor-corrector para a integração no tempo, sendo os coeficientes da função peso definidos para cada um dos passos deste esquema.

Na Secção 2, decribe-se o modelo de Boussinesq, bem como a formulação de Petrov-Galerkin utilizada. Na Secção 3, descrevem-se e comentam-se duas experiências numéricas destinadas a analisar a precisão e convergência do esquema proposto. No primeiro caso, é simulada uma onda solitária que se propaga em torno de um cilindro num canal, e os resultados numéricos obtidos são comparados com resultados experimentais disponíveis na literatura [4]. No segundo caso é simulada a oscilação em massa de uma bacia portuária e as propriedades de conservação e de convergência do método são estudadas. Na Secção 4 são apresentadas as conclusões.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 Modelo de Boussinesq a 2DH

Para o caso bidimensional e considerando fundos de variação suave, o modelo de Boussinesq na forma vectorial é dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{B}_{xx} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x^2 \partial t} + \mathbf{B}_{xy} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial x \partial y \partial t} + \mathbf{B}_{yy} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial y^2 \partial t} + \mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad (1a)$$

definido no domínio espaço-temporal $Q = \Omega \times T$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $T = [0, +\infty[$. O vector \mathbf{U} e as matrizes \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{B}_{xx} , \mathbf{B}_{xy} , \mathbf{B}_{yy} e \mathbf{C} são dados por:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \bar{u} & h + \zeta & 0 \\ g & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \bar{v} & 0 & h + \zeta \\ 0 & \bar{v} & 0 \\ g & 0 & \bar{v} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{xx} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{xy} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{yy} = \frac{h^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1b)$$

onde $\zeta(x, y, t)$ é a elevação da superfície livre, $\bar{u}(x, y, t)$ é a média vertical da velocidade horizontal instantânea, $h(x, y)$ é a profundidade, e g é a aceleração da gravidade. O quadrado da celeridade de fase linear do modelo de Boussinesq, C_{Bou} , é um aproximante de Padé de ordem $[0, 2]$ do quadrado da celeridade de fase do modelo de Airy, quando $kh \rightarrow 0$, sendo k o número de onda:

$$C_{\text{Bou}}^2 = \frac{gh}{1 + \frac{(kh)^2}{3}}. \quad (2)$$

Nestas condições, o modelo de Boussinesq é válido apenas para $kh < \pi/2$, não representando correctamente a propagação de ondas em águas de profundidade relativa elevada.

2.2 Formulação de Petrov-Galerkin

A formulação de Petrov-Galerkin para o modelo (1) baseada numa discretização em elementos finitos no espaço e no tempo, consiste em encontrar a função vectorial aproximada $\hat{U}(x, y, t) = (\hat{\zeta}, \hat{u}, \hat{v})$ definida em $]0, L[\times]t^{(n)}, t^{(n+1)}[$ que satisfaz a equação:

$$\int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{W}} \cdot \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} + \mathbf{B}_{xx} \frac{\partial^3 \hat{U}}{\partial x^2 \partial t} + \mathbf{B}_{xy} \frac{\partial^3 \hat{U}}{\partial x \partial y \partial t} + \mathbf{B}_{yy} \frac{\partial^3 \hat{U}}{\partial y^2 \partial t} + \mathbf{C} \hat{U} \right) d\Omega dt = \mathbf{0}, \quad \forall \hat{\mathbf{W}}(x, y, t). \quad (3)$$

Os elementos finitos adoptados são bilineares no espaço e lineares no tempo. As soluções aproximadas $\hat{\zeta}$, \hat{u} e \hat{v} são interpoladas sobre cada elemento e (ver Figura 1) por ¹:

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}(x, y, t) = & N_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i,j}^{(n)} + N_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i+1,j}^{(n)} + N_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i+1,j+1}^{(n)} \\ & + N_4(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i,j+1}^{(n)} + N_5(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i,j}^{(n+1)} + N_6(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i+1,j}^{(n+1)} \\ & + N_7(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i+1,j+1}^{(n+1)} + N_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{\zeta}_{i,j+1}^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, y, t) = & N_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i,j}^{(n)} + N_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i+1,j}^{(n)} + N_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i+1,j+1}^{(n)} \\ & + N_4(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i,j+1}^{(n)} + N_5(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i,j}^{(n+1)} + N_6(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i+1,j}^{(n+1)} \\ & + N_7(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i+1,j+1}^{(n+1)} + N_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{u}_{i,j+1}^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (4b)$$

¹Para ilustração do processo optou-se por utilizar uma malha uniforme de elementos finitos.

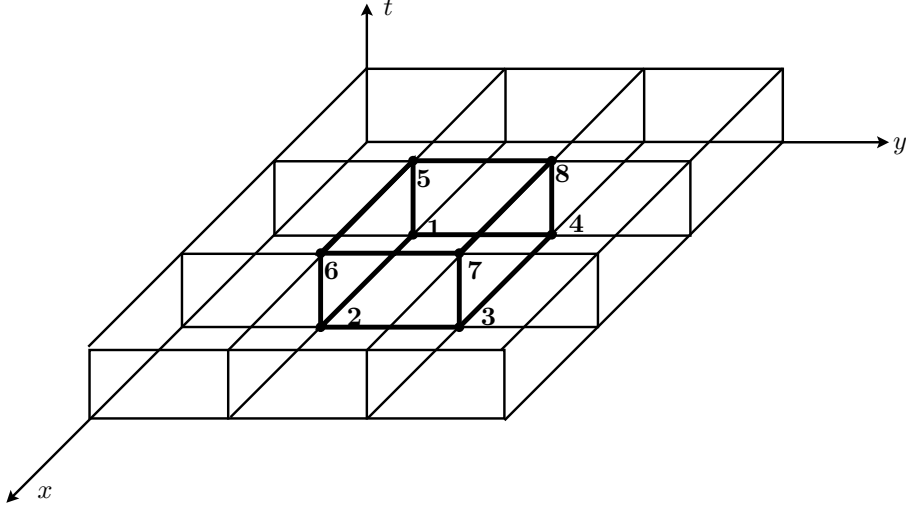


Figura 1: Discretização espaço-temporal para o caso de elementos bilineares no espaço e lineares no tempo.

$$\begin{aligned}
 \hat{v}(x, y, t) = & N_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i,j}^{(n)} + N_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i+1,j}^{(n)} + N_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i+1,j+1}^{(n)} \\
 & + N_4(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i,j+1}^{(n)} + N_5(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i,j}^{(n+1)} + N_6(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i+1,j}^{(n+1)} \\
 & + N_7(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i+1,j+1}^{(n+1)} + N_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \hat{v}_{i,j+1}^{(n+1)}, \quad (4c)
 \end{aligned}$$

sendo $\hat{\zeta}_i$, \hat{u}_i e \hat{v}_i os valores nodais das variáveis ζ , u e v , e \bar{x} , \bar{y} e \bar{t} as coordenadas locais sobre o elemento.

As funções de interpolação N_j são dadas por:

$$N_1 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (5a)$$

$$N_2 = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (5b)$$

$$N_3 = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{y}}{\Delta y} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (5c)$$

$$N_4 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{y}}{\Delta y} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (5d)$$

$$N_5 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (5e)$$

$$N_6 = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (5f)$$

$$N_7 = \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (5g)$$

$$N_8 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t}, \quad (5h)$$

onde \bar{x} , \bar{y} e \bar{t} são coordenadas locais sobre o elemento e $\Delta x = x_{i+1,j} - x_{i,j}$, $\Delta y = y_{i,j+1} - y_{i,j}$, e $\Delta t = t^{(n+1)} - t^{(n)}$.

As funções de peso para a formulação de Petrov-Galerkin são funções vectoriais, bilineares no espaço e quadráticas no tempo, definidas em cada elemento por [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i(x, y, t) = & \mathbf{P}_i + \alpha_x \frac{\Delta x}{2C_0} \mathbf{T}_\alpha (\mathbf{A}_x^\ell)^T \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial x} + \alpha_y \frac{\Delta y}{2C_0} \mathbf{T}_\alpha (\mathbf{A}_y^\ell)^T \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial y} \\ & + \beta_x \frac{\Delta x \Delta t}{4C_0} \mathbf{T}_\beta (\mathbf{A}_x^\ell)^T \frac{\partial^2 \mathbf{P}_i}{\partial x \partial t} + \beta_y \frac{\Delta y \Delta t}{4C_0} \mathbf{T}_\beta (\mathbf{A}_y^\ell)^T \frac{\partial^2 \mathbf{P}_i}{\partial y \partial t} \\ & + \frac{\Delta x \Delta y \Delta t}{8h^2/3} \mathbf{T}_\gamma \mathbf{B}_{xy}^T \frac{\partial^3 \mathbf{P}_i}{\partial x \partial y \partial t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Na equação (6), $\mathbf{P}_i = (P_i, P_i, P_i)^T$, as matrizes \mathbf{A}_x^ℓ e \mathbf{A}_y^ℓ são

$$(\mathbf{A}_x^\ell) = \begin{bmatrix} 0 & h & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (\mathbf{A}_y^\ell) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

e os tensores \mathbf{T}_α , \mathbf{T}_β e \mathbf{T}_γ são dados por

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

As funções peso escalares P_i são apenas definidas para os nós para os quais $\bar{t} = \Delta t$, onde a solução é calculada a cada passo de tempo. Ter-se-á [16]:

$$P_5 = 6 \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (9a)$$

$$P_6 = 6 \frac{\bar{x}}{\Delta x} \left(1 - \frac{\bar{y}}{\Delta y}\right) \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (9b)$$

$$P_7 = 6 \frac{\bar{x}}{\Delta x} \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right), \quad (9c)$$

$$P_8 = 6 \left(1 - \frac{\bar{x}}{\Delta x}\right) \frac{\bar{y}}{\Delta y} \frac{\bar{t}}{\Delta t} \left(1 - \frac{\bar{t}}{\Delta t}\right). \quad (9d)$$

Os coeficientes escalares β_x e β_y são escolhidos por forma a eliminar os erros de dispersão numérica de segunda ordem, enquanto os coeficiente α_x e α_y introduzem termos dissipativos de terceira ordem nas equações de conservação da quantidade de movimento, por forma a garantir a estabilidade do esquema numérico. Finalmente a formulação de Petrov-Galerkin pode ser escrita como um sistema de três equações escalares, após a integração por partes dos termos dispersivos (para detalhes ver [12][15]).

2.3 Esquema de integração temporal

Para a integração no tempo e devido à presença de termos não lineares no modelo de Boussinesq, recorre-se a um esquema iterativo do tipo predictor-corrector. Este esquema tem dois passos correctores, sendo os dos coeficientes escalares α_x , α_y , β_x , β_y , γ_{22} e γ_{33} escolhidos em cada passo por forma a garantir uma precisão de 4ª ordem na celeridade de fase, e um termo dissipativo de 3ª ordem no segundo passo corrector (para detalhes ver [17]).

2.4 Análise da precisão e da estabilidade

Os coeficientes α e β são definidos por forma a garantir a estabilidade e a precisão da formulação e do processo iterativo. Recorrendo ao método da equação diferencial equivalente [18], Avilez-Valente [15] determinou as expressões para α_x , α_y , β_x , β_y , γ_{22} e γ_{33} , que conduzem a uma formulação estável, com termo dissipativo de 3ª ordem em $k\Delta x$, e/ou $k\Delta y$, e celeridade de fase com precisão de 4ª ordem. As equações diferenciais equivalentes do modelo de Boussinesq a 2DH são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}_y}{\partial y} = & -\frac{1}{12} h C_0 \Delta x \Delta t (Cr_x - 3\beta_x) \left(\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial x^2 \partial y} \right) \\ & -\frac{1}{12} h C_0 \Delta y \Delta t (Cr_y - 3\beta_y) \left(\frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial x \partial y^2} \right) + O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x), \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) = & -\frac{1}{12} \frac{C_0^3}{h} \Delta x \Delta t (3\beta_x - Cr_x) \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right) \\ & -\frac{1}{12} C_0 \Delta x^3 (1 - Cr_x^2) \alpha_x \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^4} + \frac{1}{12} C_0 \Delta x^3 Cr_x^2 \alpha_x \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^3 \partial y} \\ & + \frac{1}{12} C_0 \Delta x^3 \left(\frac{3}{2} \frac{\Delta y}{\Delta x} Cr_x \gamma_{33} + Cr_x^2 \alpha_x \right) \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x \partial y^3} \right) \\ & + O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x), \end{aligned} \quad (10b)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}}{\partial y} - \frac{h^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y \partial t} \right) = -\frac{1}{12} \frac{C_0^3}{h} \Delta y \Delta t (3\beta_y - Cr_y) \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12} C_0 \Delta y^3 (1 - Cr_y^2) \alpha_y \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial y^4} + \frac{1}{12} C_0 \Delta y^3 Cr_y^2 \alpha_y \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x \partial y^3} \\
& + \frac{1}{12} C_0 \Delta y^3 \left(\frac{3}{2} \frac{\Delta x}{\Delta y} Cr_y \gamma_{22} + Cr_y^2 \alpha_y \right) \left(\frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial x^3 \partial y} + \frac{\partial^4 \hat{v}}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \\
& + O(\epsilon (k\Delta x)^2, \epsilon^2 k\Delta x).
\end{aligned} \tag{10c}$$

sendo ϵ o coeficiente de não linearidade, $\epsilon = a/h$, E:

$$C_0 = \sqrt{gh}, \quad Cr_x = C_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad e \quad Cr_y = C_0 \frac{\Delta t}{\Delta y}, \tag{11}$$

em que C_0 é a celeridade para uma onda longa não dispersiva, e Cr_x e Cr_y são os números de Courant direccionais. Através da análise das equações (10), é possível concluir que para garantir uma precisão de 4ª ordem e a estabilidade do esquema numérico os coeficientes β_x e β_y , α_x e α_y são:

$$\beta_x = \frac{Cr_x}{3}, \quad \beta_y = \frac{Cr_y}{3}, \quad \alpha_x = \frac{Cr_x^2}{1 - Cr_x^2} \quad e \quad \alpha_y = \frac{Cr_y^2}{1 - Cr_y^2}, \tag{12a}$$

e, admitindo a irrotacionalidade do escoamento, i.e. $\partial v / \partial x = \partial u / \partial y$,

$$\gamma_{22} = -\frac{4}{3} Cr_x \alpha_y \quad e \quad \gamma_{33} = -\frac{4}{3} Cr_y \alpha_x. \tag{12b}$$

A condição de estabilidade foi estabelecida heurísticamente, dado que diferentes definições podem ser estabelecidas para α_x e α_y e para γ_{22} e γ_{33} , sendo: $Cr_x < \sqrt{2}/2$ e $Cr_y < \sqrt{2}/2$ [15]. No entanto, a utilização de um esquema de integração no tempo do tipo predictor-corrector pode conduzir a resultados diferentes. Um estudo via método de Von Neumann [18] permite estabelecer expressões para α_x , α_y , β_x , β_y , γ_{22} e γ_{33} para cada passo predictor-corrector, embora neste caso o estudo seja restringido à versão linearizada das equações (10) [17]. Resulta então:

$$\beta_{x(0)} = 0, \quad \beta_{y(0)} = 0, \quad \alpha_{x(0)} = Cr_x, \quad \alpha_{y(0)} = Cr_y, \tag{13a}$$

$$\beta_{x(1)} = \frac{Cr_x}{3}, \quad \beta_{y(1)} = \frac{Cr_y}{3}, \quad \alpha_{x(1)} = 0, \quad \alpha_{y(1)} = 0, \tag{13b}$$

$$\beta_{x(2)} = \frac{Cr_x}{3}, \quad \beta_{y(2)} = \frac{Cr_y}{3}, \quad \alpha_{x(2)} = \frac{Cr_x^2}{1 - Cr_x^2}, \quad \alpha_{y(2)} = \frac{Cr_y^2}{1 - Cr_y^2}. \tag{13c}$$

3 TESTES COMPUTACIONAIS

Para analisar a precisão e convergência do esquema numérico descrito são realizados dois teste computacionais. No primeiro teste, simula-se a propagação de uma onda solitária em torno de um pilar cilíndrico, e os resultados numéricos são comparados com os resultados

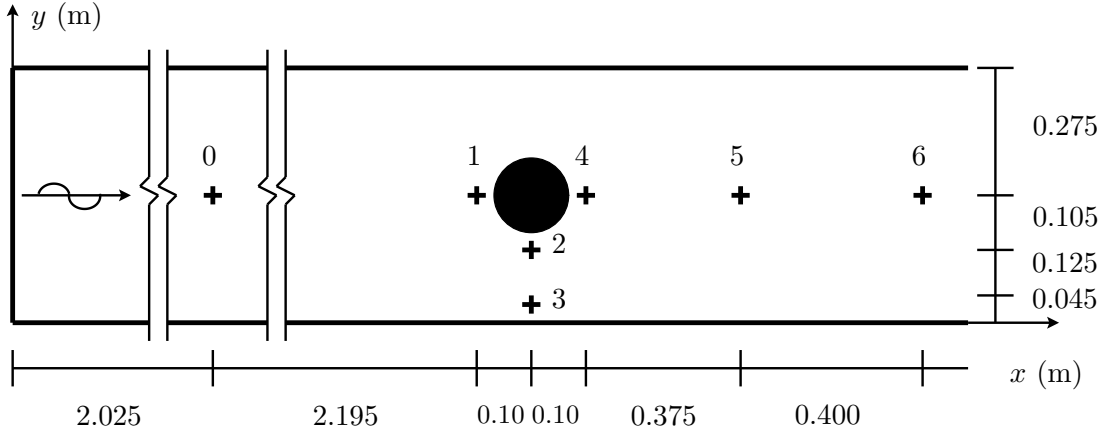


Figura 2: Canal de ondas e posição das sondas.

Sonda	0	1	2	3	4	5	6
x (m)	2.025	4.220	4.320	4.320	4.420	4.795	5.195
y (m)	0.275	0.275	0.170	0.045	0.275	0.275	0.275

Tabela 1: Posição da sondas no canal do IMG.

experimentais obtidos por Antunes do Carmo et al. [19], no canal de ondas do Institut Mécanique de Grenoble (IMG). O segundo teste consiste na simulação da oscilação em massa de uma bacia quadrada fechada. Este teste permite verificar as propriedades de conservação da massa do esquema numérico. Por outro lado, utilizando diferentes malhas e passos de tempo, é feita uma análise de convergência do algoritmo, considerando duas ondas: uma onda quase linear; uma onda com não-linearidade mais elevada permitindo averiguar qual a influência da não linearidade nas propriedades de convergência do modelo.

3.1 Propagação de uma onda solitária em torno de um cilindro

Instalação e dados experimentais

O canal de ondas tem 15 m de comprimento e 0.55 m de largura. O cilindro de 16 cm de diâmetro foi colado no ponto de coordenadas (4.320, 0.275) m (ver Figura 2). Os registos experimentais foram obtidos em sete sondas de profundidade (ver posições na Tabela 1). A aquisição de sinal foi feita a uma frequência de 15 Hz. A profundidade da água em repouso é $h = 0.15$ m, e a amplitude da onda registada na sonda 0 foi $a = 0.03528$ m, a que corresponde o coeficiente de não linearidade $\epsilon = a/h = 0.235$. A celeridade desta onda é $c = \sqrt{g(h+a)} = 1.36$ m/s. O batedor encontra-se situado em $x = 0$, propagando-se a

onda no sentido positivo do eixo OX .

Canal numérico e condições fronteira

O canal numérico tem 4.59 m de comprimento e 0.55 m de largura. A malha de elementos finitos utilizada nas simulações é constituída por 3800 elementos bilineares e 4030 nós. A discretização temporal utilizada foi $\Delta t = 0.004$ s, a que corresponde um número de Courant direccional máximo $Cr_{x\text{máx}} = Cr_{y\text{máx}} = 0.746$. No modelo computacional, a fronteira de barlamar coincide com a secção transversal que contém a sonda 0. Na fronteira de montante foram impostas condições na elevação da superfície livre e na velocidade longitudinal:

$$\zeta(t) = \zeta_0(t), \quad \text{para } x = 0, \quad (14a)$$

$$u(t) = c \frac{\zeta_0(t)}{h + \zeta_0(t)} \quad \text{para } x = 0, \quad (14b)$$

onde $\zeta_0(t)$ corresponde ao sinal registado na sonda 0. Não foi imposta qualquer condição para a componente transversal da velocidade, v . Verificou-se que neste caso não foi necessária a imposição de qualquer condição na fronteira de sotamar, tendo a onda saído do domínio sem qualquer reflexão. Considerou-se que $t = 0$ s no instante em que a crista da onda coincide com a posição da sonda 0. O cálculo iniciou-se para $t = -1.5$ s e prolongou-se até $t = 5.5$ s. As paredes do canal e do cilindro foram tratadas como totalmente reflectoras.

Resultados e discussão

Séries temporais: na Figura 3 estão representadas as séries temporais obtidas nas sondas 0 a 6. Da análise dos gráficos conclui-se que de uma forma geral os resultados experimentais são bem reproduzidos. Esta característica é particularmente evidente nas sondas 5 e 6, situadas a sotamar do cilindro. As sondas 2 e 3 registam as maiores discrepâncias na amplitude de pico da onda e na sua cauda dispersiva. As sondas 2 e 3 situam-se entre a parede do canal e o cilindro, pelo que este efeito pode ser devido às características reflectoras das paredes do canal e/ou do cilindro. Um efeito semelhante verifica-se na sonda 1, colocada junto ao cilindro e barlamar deste. Na sonda 4 essas discrepâncias são já menores.

Espectros de potência: na Figura 4 estão representados os espectros de potência para as Sondas 1 a 6. Para esta análise foi utilizada uma janela temporal de 4 s, entre os instantes $t = 1.5$ s e $t = 5.5$ s. Os espectros de potência mostram que, para as Sondas 1 a 4, os registos experimentais têm energia nas frequências mais elevadas, que não se encontra presente nas simulações, e que provavelmente explica o facto de ser a cauda dispersiva mais acentuada nos resultados experimentais. Nas frequências mais baixas parece ter

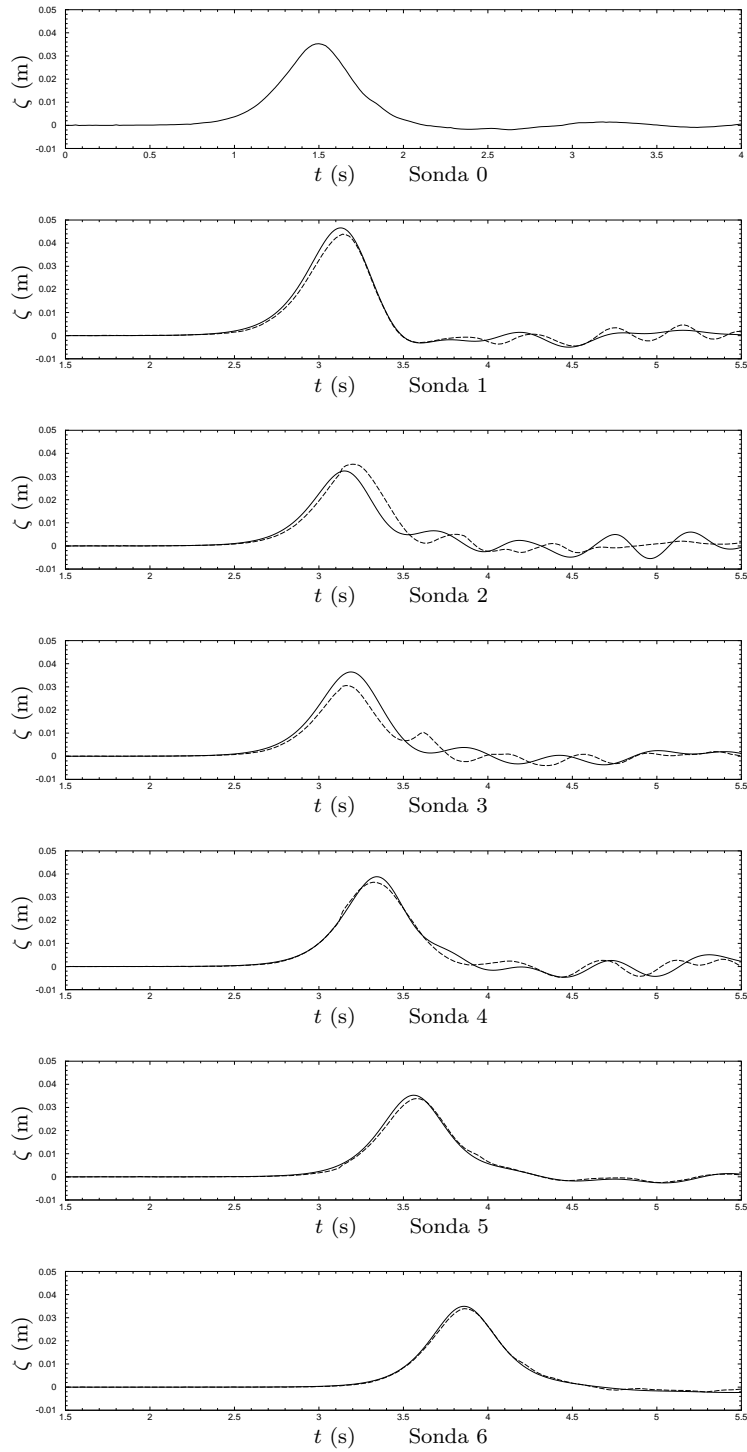


Figura 3: Onda solitária em torno de um cilindro vertical. Ensaio numérico (—) e ensaio experimental (---). Sondas 0 a 6.

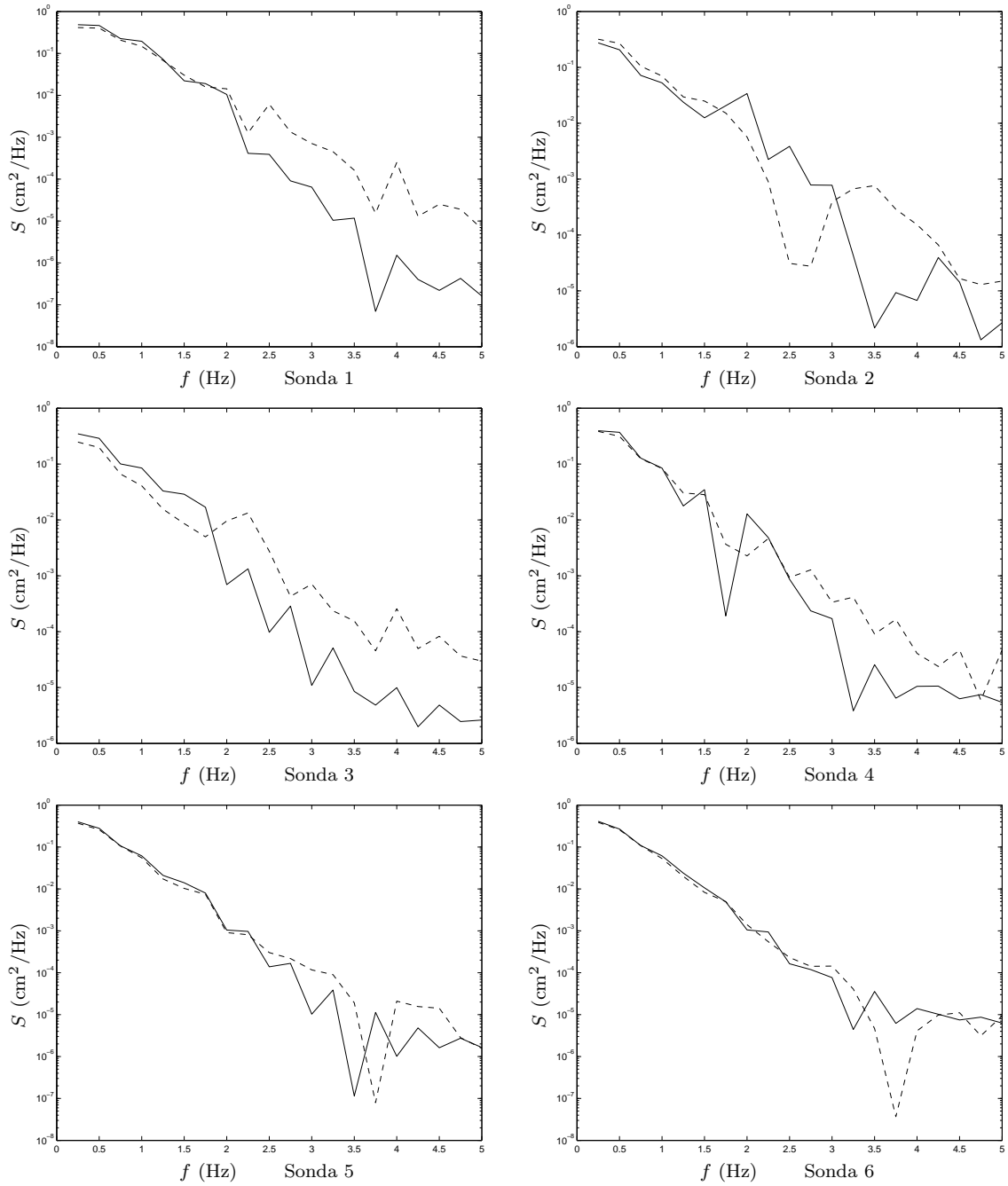


Figura 4: Espectros de potência nas Sonda 1 a 6. Ensaio numérico (—) e ensaio experimental (---).

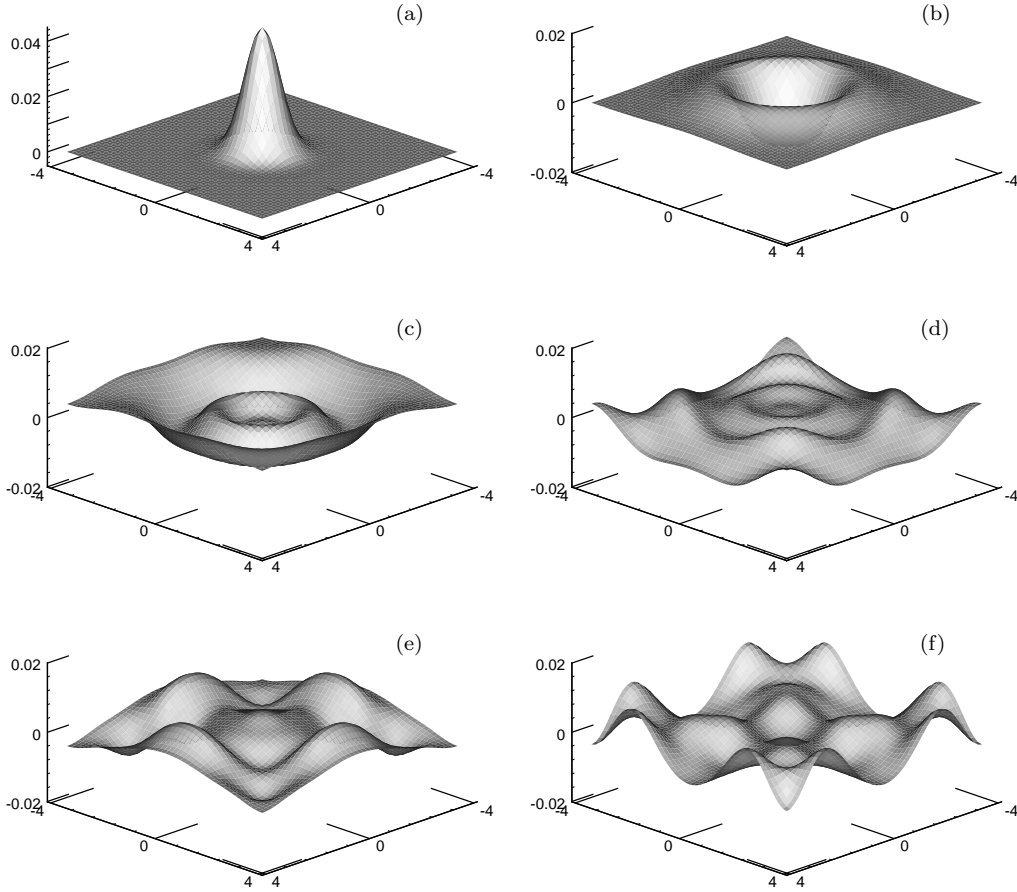


Figura 5: Oscilação da superfície livre para a Onda 1. (a) $t = 0$ s; (b) $t = 1$ s; (c) $t = 2$ s; (d) $t = 3$ s; (e) $t = 4$ s; (f) $t = 5$ s.

havido transferência de energia da Sonda 2 a Sonda 3, e *vice-versa* na gama média de frequências, o que deverá estar ligado às discrepâncias verificadas na amplitude máxima da onda registada nestas sondas. As Sondas 5 e 6 não apresentam desvios significativos entre os espectros de potências experimentais e numéricos.

Conclusão: pode-se concluir que este ensaio, embora pouco exigente por não incluir efeitos de refração e de empolamento da onda, mostrou que o modelo reproduziu convenientemente a difracção da onda em torno do pilar. Por outro lado, as características reflectivas do canal e do cilindro não parecem ter sido correctamente reproduzidas nas condições fronteira do modelo numérico, tendo levado a algumas discrepâncias nos registos das sondas colocadas entre o cilindro e as paredes do canal.

3.2 Oscilação de uma onda numa bacia quadrada fechada

O tratamento dos termos de derivadas cruzadas no modelo 2DH, a convergência do esquema numérico e as suas propriedades conservativas, podem ser analisados no caso da oscilação de uma onda numa bacia quadrada fechada. Os resultados obtidos são comparados com os obtidos pelo modelo Funwave nas suas versões cartesiana [1] e com coordenadas curvilineas [2].

As dimensões da bacia são $L_x \times L_y$, com $L_x = L_y = L = 7.5$ m, e a profundidade é $h = 0.45$ m, constante. As fronteiras são paredes totalmente reflectoras. A condição inicial é uma sobrelevação da superfície livre, com velocidade nula em todo o domínio. A sobrelevação é uma superfície gaussiana, centrada no centro da bacia (x_0, y_0) :

$$\zeta(x, y) = H_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\}, \quad (15)$$

onde H_0 é a amplitude da sobrelevação, $\sigma = 0.5$ é o coeficiente de forma e a superfície está centrada em $(x_0 = 0, y_0 = 0)$. Estuda-se o comportamento do modelo para duas ondas: Onda 1, fracamente não linear com $H_0 = 0.045$ m, a que corresponde $\epsilon = 0.1$; Onda 2 com não linearidade média: $H_0 = 0.0225$ m, $\epsilon = 0.5$.

Os modos próprios de oscilação da bacia, lineares, têm números de onda

$$k_{nm}^2 = (n\lambda)^2 + (m\lambda)^2 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (n^2 + m^2), \quad (16a)$$

com

$$\lambda = \frac{\pi}{L}. \quad (16b)$$

As frequências naturais correspondentes são dadas pela relação de dispersão linear do modelo de Boussinesq:

$$\omega_{nm}^2 = gk_{nm} \frac{k_{nm}h}{1 + \frac{(k_{nm}h)^2}{3}}. \quad (17)$$

Na Figura 5 pode-se ver a evolução da superfície livre para a Onda 1, nos primeiros 5 s de oscilação. Neste caso a discretização recorreu a elementos bilineares regulares, $\Delta x = \Delta y = 0.15$ m, e $\Delta t = 0.05$ s. O período de ressonância mais baixo, correspondente ao modo de oscilação simétrico relevante para a forma da condição inicial, $(2, 2)$, é $T_{2,2} = 2.64$ s. Desta forma o número de Courant direccional é $Cr_x = Cr_y = 0.70$. A correcção das condições fronteira pode ser testada verificando a conservação da massa no interior do domínio. Correndo o modelo até $t = 100$ s verificou-se uma variação da massa de água inicialmente contida na sobrelevação da ordem de 10^{-10} , muito inferior ao erro da ordem de 10^{-2} do programa Funwave registado em [1] para as mesmas condições de cálculo. Este resultado é certamente devido à melhor integração das condições finitas no método dos elementos finitos, quando comparado com o método das diferenças finitas. A utilização de filtros pelo programa Funwave pode também contribuir para o pior resultado deste.

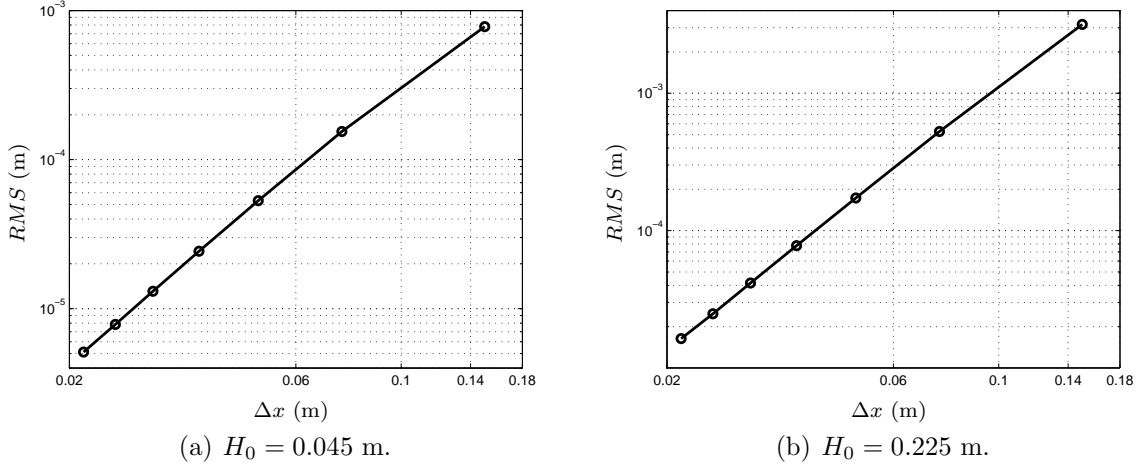


Figura 6: Convergência com o refinamento da malha.

Convergência

Para as duas ondas, Onda 1 e Onda 2, foi analisada a convergência do esquema, em função da discretização espacial. A discretização espacial foi estudada numa sequência $\Delta_x/i = \Delta_y/i$, com $\Delta_x = 0.30$ m e $i = 1, \dots, 8$. A discretização temporal foi mantida constante com $\Delta t = 0.0125$ s, em todas as simulações. A raiz quadrada da diferença quadrática média, RMS , das superfícies livre calculadas para $t = 5$ s, entre duas simulações com $i - 1$ e i é calculada para os mesmos nós computacionais: nós da malha com $i = 1$:

$$RMS_i = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N [(\zeta_k)_i - (\zeta_k)_{i-1}]^2}{N_1}}, \quad (18)$$

sendo N_1 o número de nós da malha com $i = 1$. Da análise da Figura 6, conclui-se que o logaritmo de RMS decresce de uma forma praticamente linear com o refinamento da malha, o que presume uma razão de convergência praticamente constante. A razão de convergência de Cauchy é dada por

$$R_i = \frac{\log(RMS_{i-1}/RMS_i)}{\log(\Delta x_{i-1}/\Delta x_i)}. \quad (19)$$

Verifica-se que o valor médio de R_i para estes dois casos é subóptimo, $\bar{R} = 2.7$ tanto para a Onda 1 como para a Onda 2, sendo muito próximo do valor óptimo de 3.

A convergência foi também analisada para a variação da discretização temporal. Utilizou-se uma sequência $\Delta t/i$, com $\Delta t = 0.05$ s e $i = 1, \dots, 8$. A malha espacial manteve-se constante com $\Delta_x = \Delta_y = 0.15$ m. A variação da convergência com a discretização temporal pode-se observar na Figura 7, para o instante $t = 5$ s, sendo bastante semelhante aos resultados obtidos para o refinamento espacial. A razão de convergência de Cauchy

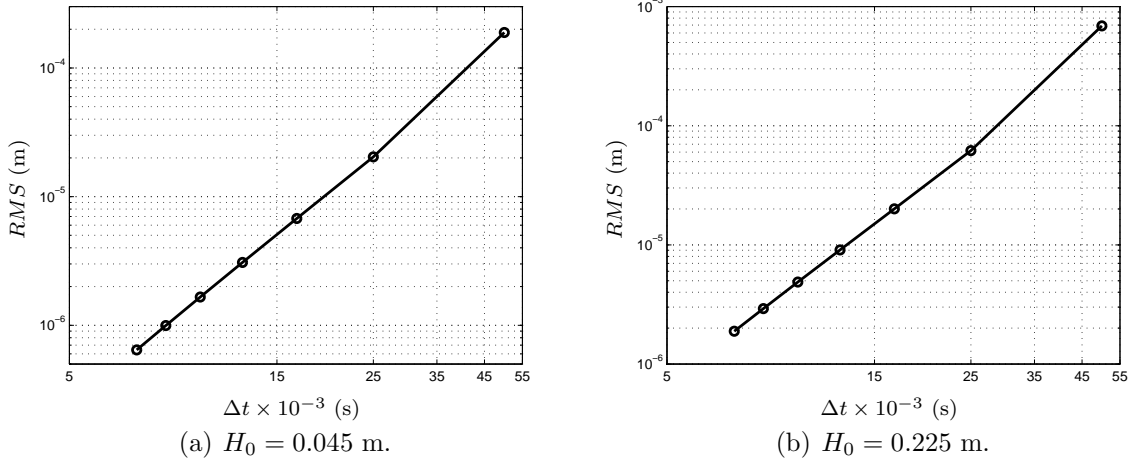


Figura 7: Convergência com o refinamento da discretização temporal.

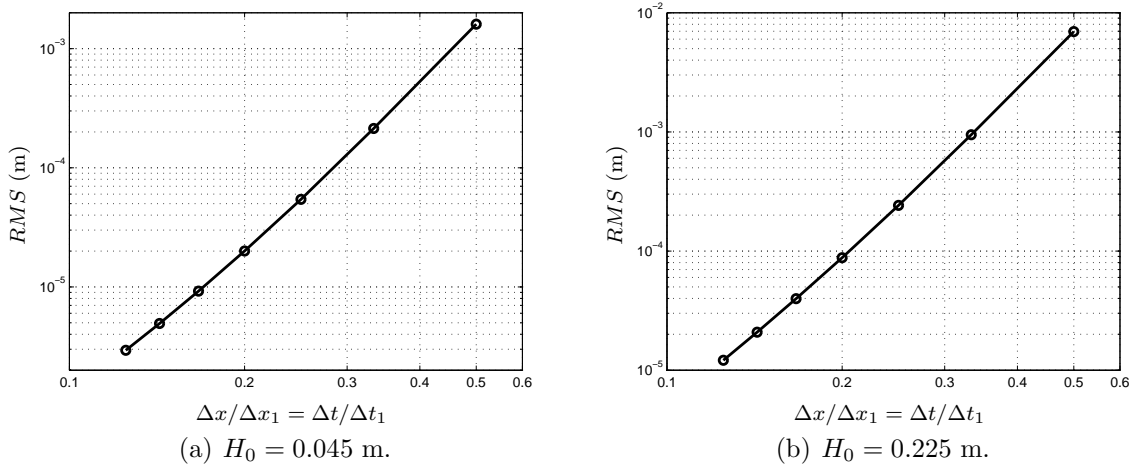


Figura 8: Velocidade de convergência para o refinamento simultâneo de Δx e Δt .

apresenta neste casos os valores médios de $\bar{R} = 2.8$ e $\bar{R} = 2.9$ respectivamente para as Ondas 1 e 2, valores subóptimos, muito próximos do valor óptimo de 3. No entanto, a flexibilidade espacial do método dos elementos finitos faz com que seja possível criar malhas, tais que o número de Courant se mantenha constante em todo o domínio. Desta forma, é conveniente o estudo da convergência do método para o refinamento conjunto da malha espacial e da discretização temporal. Recorreu-se a uma sequência de pares $(\Delta x/i, \Delta t/i)$, com $\Delta x = 0.3$ m, $\Delta t = 0.1$ s, e $i = 1, \dots, 8$. O número de Courant mantém-se constante, $Cr = 0.70$ para o modo de oscilação (2, 2). O estudo é feito para o instante $t = 5$ s. A convergência está representada na Figura 8, e a razão de convergência de Cuachy toma os valores médios $\bar{R} = 3.3$ e $\bar{R} = 3.4$, para as Ondas 1

e 2, valores super-óptimos, superiores aos obtidos pela versão do programa Funwave em coordenadas curvilíneas [2].

4 CONCLUSÕES

Apresentou-se um esquema de elementos finitos para a resolução das equações de Boussinesq a duas dimensões horizontais. Este esquema tem uma precisão teórica da celeridade fase linear de 4^a ordem e está associado a um mecanismo dissipativo altamente selectivo de 3^{text} ordem.

Os testes numéricos efectuados permitiram concluir que a convergência do método com uma malha regular pode atingir razões de convergência superiores ao valor teórico.

Agradecimento: Este trabalho foi financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia, através do projecto POCTI/ECM/41800/2001, com verbas da União Europeia, programa FEDER, e verbas próprias da República Portuguesa.

REFERÊNCIAS

- [1] G. Wei e J. T. Kirby, Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations, *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, **121**, 251–261 (1995).
- [2] F. Shi, R. A. Dalrymple, J. T. Kirby, Q. Chen e A. Kennedy, A fully nonlinear Boussinesq model in generalized curvilinear coordinates, *Coastal Engineering*, **42**, 337–358 (2001).
- [3] G. Wei, J. T. Kirby e A. Sinha, Generation of waves in Boussinesq models using a source function method, *Coastal Engineering*, **36**, 271–299 (1999).
- [4] J. S. Antunes do Carmo, F. J. Seabra-Santos e E. Barthélemy, Surface waves propagation in shallow water: a finite element model, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **16**, 447–459 (1993).
- [5] Y. S. Li, S.-X. Liu, Y.-X. Yu e G.-Z. Lai, Numerical modeling of Boussinesq equations by finite element method, *Coastal Engineering*, **37**, 97–122 (1999).
- [6] S.-B. Woo e P. L.-F. Liu, Finite-element model for modified Boussinesq equations. i: model development, *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg.*, **130**, 1–16 (2004).
- [7] P. Avilez-Valente e F. J. Seabra-Santos, Características dispersivas do método dos elementos finitos aplicado às equações de Boussinesq, in *Actas do V Encontro Nacional de Mecânica Computacional, 20–22 Out. 1997, Guimarães, PT*, 815–823, APMTAC, Lisboa, PT (1997).

- [8] G. J. Haltiner e R. T. Williams, *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*, J.Wiley & Sons (1980).
- [9] M. B. Abbott, H. M. Petersen e O. Skovgaard, On the numerical modelling of short waves in shallow water, *J. Hydr. Res.*, **16**, 173–203 (1978).
- [10] D. R. Durran, *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlim (1999).
- [11] J. L. Fernandes e C. J. E. M. Fortes, Análise do desempenho de filtros num modelo não-linear de propagação de ondas, in *Cong. Métodos Numéricos en Ingeniería 2005*, (eds. J. L. Perez Aparício, A. Rodríguez Ferran, J. A. C. Martins, R. Gallego e J. César de Sá), CD-ROM, SEMNI, Barcelona (2005).
- [12] P. Avilez-Valente e F. J. Seabra-Santos, A 2DH finite element method for the propagation of water waves around coastal structures, in *Coastal Structures'99*, (ed. I. Losada), 159–167, Balkema, NL (2000).
- [13] P. Avilez-Valente e F. J. Seabra-Santos, A Petrov-Galerkin finite element scheme for the regularized long wave equation, *Computational Mechanics*, **34**, 256–270 (2004).
- [14] S. Plecha e P. Avilez-Valente, Modelação da propagação de ondas não lineares e dispersivas com espectro de banda estreita, in *Cong. Métodos Numéricos en Ingeniería 2005*, (eds. J. L. Perez Aparício, A. Rodríguez Ferran, J. A. C. Martins, R. Gallego e J. César de Sá), CD-ROM, SEMNI, Barcelona (2005).
- [15] P. Avilez-Valente, *Métodos de Elementos Finitos para a Modelação a Uma e a Duas Dimensões Horizontais da Propagação de Ondas de Gravidade em Engenharia Costeira*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra (2000).
- [16] C.-C. Yu e J. C. Heinrich, Petrov-Galerkin method for multidimensional, time-dependent, convective-diffusion equations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **24**, 2201–2215 (1987).
- [17] S. Plecha, *Esquemas de Elementos Finitos para Ondas Dispersivas*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto (2005).
- [18] C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume I: Fundamentals of Numerical Discretization.*, John Wiley & Sons (1992).
- [19] J. S. Antunes do Carmo, F. J. Seabra-Santos e A. B. Almeida, Numerical solution of the generalized Serre equations with the MacCormack finite-difference scheme, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **16**, 725–738 (1993).