

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Fizika Doktori Iskola
Részecskefizika és csillagászat doktori program

Lineáris perturbációk és a kényszeregyenletek megoldásainak numerikus vizsgálata az általános relativitáselméletben

Doktori értekezés

Csukás Károly Zoltán

PhD hallgató

Wigner Fizikai Kutatóközpont

Részecske- és Magfizikai Intézet



Témavezető

Dr. Rácz István

tudományos tanácsadó, Wigner FK

az MTA doktora

Iskolavezető

Dr. Gubicza Jenő

egyetemi tanár, ELTE

az MTA doktora

Programvezető

Dr. Petrovay Kristóf

egyetemi tanár, ELTE

az MTA doktora

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Spinsúly és a harmonikus gömbfüggvények	6
2.1. Gömbi harmonikusok	7
2.2. Spinléptető operátorok	10
2.3. A spinsúlyozott harmonikus gömbfüggvények	14
2.4. Nemlineáris kifejezések és a spinsúlyozott gömbi harmonikusok	16
2.5. Integrálás a gömbön	19
2.6. Összefoglalás	20
3. Kerr-téridő lineáris perturbációi	22
3.1. A Kerr-téridő	23
3.2. Lineáris perturbációk és Teukolsky egyenlete	26
3.2.1. A spinegyütthetős formalizmus alapjai	27
3.2.2. Teukolsky mesteregyenlete	30
3.3. Regularizáció	33
3.3.1. Bemenő Kerr-koordináták	34
3.3.2. Hiperboloidális kompaktifikáció	35
3.3.3. A reguláris TME	36
3.4. Megmaradó áramok	37
3.4.1. Kanonikus megmaradó áramok	37
3.4.2. Adjungált megoldások	39
3.5. A perturbációk hosszútávú időfejlődése	41
3.5.1. Korábbi analitikus és numerikus eredmények a lecsengésről	42
3.5.2. A lokális lecsengési együtthetős	44
3.6. Alkalmazott numerikus módszerek	45
3.6.1. Multipólus kifejtés	45
3.6.2. Az alkalmazott kezdőadatok	45

3.6.3.	Diszkretizációs eljárás	46
3.6.4.	A bemeneti paraméterek	47
3.7.	Energia és impulzusmomentum megmaradás	48
3.7.1.	Az adjungált megoldások	49
3.7.2.	Konvergencia	50
3.7.3.	Energia és impulzusmomentum áramlások	53
3.8.	Lecsengési együtthatók	56
3.8.1.	Az LPI-k elrendezése	56
3.8.2.	Tengelyszimmetrikus konfigurációk	57
3.8.3.	Nem-tengelyszimmetrikus konfigurációk	59
3.9.	Szuperradiancia	64
3.9.1.	A szuperradiáns szórások elméleti háttere	64
3.9.2.	Szuperradianciára optimalizált kezdőadat	66
3.9.3.	Az ergoszféritól távolról indított hullámcsomag	69
3.9.4.	II. típusú kezdőadatokra vonatkozó eredmények	76
3.9.5.	III. típusú kezdőadatokra vonatkozó eredmények	82
3.9.6.	Forgás és impulzusmomentum-nyereség	86
3.10.	Összegzés: lineáris perturbációk Kerr-háttéren	87
4.	Schwarzschild kezdőadat nemlineáris perturbációi	90
4.1.	A kényszeregyenletek evolúciós alakja	92
4.1.1.	A téridő $(3 + 1)$ -es felbontása	92
4.1.2.	A kezdőfelület $(2 + 1)$ -es felbontása	94
4.1.3.	Spinsúlyozott változók	96
4.2.	Aszimptotikus síkság	99
4.3.	Schwarzschild téridő spinsúlyozott változókkal	102
4.4.	Nemlineáris perturbatív módszer	104
4.5.	Numerikus módszerek	106
4.5.1.	Multipólus sorfejtés	106
4.5.2.	Konvergencia	107
4.6.	Analitikus megoldások gömbszimmetria mellett	109
4.6.1.	Parabolikus-hiperbolikus rendszer	109
4.6.2.	Algebrai-hiperbolikus rendszer	111
4.7.	Szigorúan közel-Schwarzschild numerikus eredmények	113
4.7.1.	Parabolikus-hiperbolikus rendszer	114
4.7.2.	Algebrai-hiperbolikus rendszer	114

4.8.	Gyengén közel-Schwarzschild numerikus eredmények	120
4.8.1.	Parabolikus-hiperbolikus rendszer	120
4.8.2.	Algebrai-hiperbolikus rendszer	121
4.9.	Összegzés: Schwarzschild-kezdőadat nemlineáris perturbációi	126
5.	Összefoglalás	131
A.	A homogén TME	ii
B.	A megmaradó áramok	v
B.1.	Energiasűrűség	v
B.2.	Energiaáram	vi
B.3.	Impulzusmomentum-sűrűség	vi
B.4.	Impulzusmomentum-áram	vii
C.	Az adjungált megoldások	ix
C.1.	Elektromágneses perturbációk	ix
C.1.1.	Wald első tétele elektromágneses perturbációkra	x
C.1.2.	Wald második tétele elektromágneses perturbációkra	xi
C.2.	Gravitációs perturbációk	xi
C.2.1.	Wald második tétele gravitációs perturbációkra	xiii
D.	A kényszerek nemlineáris perturbatív alakja	xv
D.1.	A parabolikus-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív alakja	xv
D.2.	Az algebrai-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív alakja	xvii

Konvenciók

Az alábbiakban a dolgozat írásakor alkalmazott fontosabb konvenciókat összegezzük.

A dolgozatban végig geometriai egységeket fogunk használni, tehát $c = G = 1$.

A metrika szignatúrája ezzel szemben fejezetről fejezetre változik:

- a **2.** részben az egységgömbön dolgozunk és az egységgömb metrikájának jól ismert alakját használjuk.
- a **3.** részben az érvelések egy része hivatkozik a spinegyütthetős formalizmusra, ezért a vonatkozó irodalomban megszokott $(+, -, -, -)$ szignatúrát alkalmazzuk.
- végül a **4.** részben a **2.** részben bemutatott formulák közvetlen alkalmazása érdekében a $(-, +, +, +)$ szignatúrát alkalmazzuk.

Az indexekre vonatkozó konvenciók:

- a latin ábécé kis betűi absztrakt indexeket jelölnek, szerepük a tenzor típusának, illetve a tenzorműveletek megjelenítése. Például T_{ab} egy $(0, 2)$ típusú tenzort, míg a $T_{ae}S^{eb}$ kifejezés a T_{ab} és S^{ab} tenzorok egy-egy indexében vett kontrakcióját jelöli.
- a latin ábécé nagy betűi a diád, illetve tetrad elemek megkülönböztető névindexek. Például a Newman–Penrose-féle komplex fényszerű $\{\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a\}$ tetrad esetén az $A = 0, 1, 2, 3$ névindexértékek mellett e_A^a , külön-külön, az ℓ^a, n^a, m^a és \bar{m}^a bázisvektorokat jelöli.
- a görög ábécé kisbetűivel valamely koordinátafült felett értelmezett komponenseket jelöljük. Például a T_{ab} tenzor az $\{x_\alpha\}$ lokális koordinátákhoz tartozó $(\partial/\partial x_\alpha)^a$ bázisra vonatkozó komponenseit $T_{\alpha\beta}$ jelöli.

1. fejezet

Bevezetés

A XX. század csillagászati áttöréseivel szoros kölcsönhatásban fejlődő általános relativitáselmélet visszavonhatatlanul beépült a modern ember világképébe. A gravitációs téregyenletek publikálása után csupán pár hónappal, 1916-ban, Schwarzschild közzétette gömbszimmetrikus, sztatikus, aszimptotikusan sík vákuum megoldását [1, 2]. A széles közönség számára ma ez **A feketelyuk** megoldás, de ennek a viszonylag egyszerű megoldásnak a megértéséhez is évtizedekre volt szükség. Az eseményhorizonton található szingularitás nem fizikai voltára elsőként Eddington [3] és Le-maître [4] munkái mutattak rá, de a megoldás ezen a fényszerű hiperfelületen belülré történő teljes kiterjesztése évtizedekkel később Synge [5], Kruskal [6] és Szekeres [7] által valósult meg. A belső, valódi szingularitást illetően a helyzet a 60-as években, a differenciálgeometria eszköztárának bevetésével tisztult le. Penrose 1965-ben mutatta meg, hogy ehhez hasonló szingularitások természetes módon jelennek meg a megoldásokban, ha olyan régiók alakulnak ki, ahonnan már a fény sem tud a végtelenbe távozni [8]. Ezzel az eredménnyel eldöntötte a kérdést, hogy vajon a szingularitás csak a Schwarzschild-megoldás szimmetriái miatt jöhet-e létre, vagy akár szimmetriákat nélkülöző, a valóságos folyamatokat pontosabban leíró megoldásokban is megjelenhet¹.

Az általánosabb, forgó feketelyuk megoldást csak Schwarzschild után 47 évvel, 1963-ban találta meg Kerr [10]. Ugyanebben az évben fedezte fel Schmidt a kvazárokat [11]. Az, hogy ilyen extrém fényességű objektumok működésében relativisztikus effektusoknak is szerepet kell kapniuk, gyanítható abból, hogy míg hidrogén fúziója során „csak” a nyugalmi tömeg 0.7%-a alakul energiává, a Schwarzschild-megoldás legbelső stabil körpályájáról behulló anyag a nyugalmi tömege

¹Az általános relativitáselméletben felbukkanó szingularitások megértését célzó munkákról érdekes tudománytörténeti összefoglaló található az Einstein Studies sorozat 7. kötetében [9].

5.7%-ának megfelelő energiát tud kisugározni (extrém Kerr-megoldás esetében ugyanakkor már 42%-ot) [12]. Ez a felismerés motiválta az első dallasi Texas Symposium on Relativistic Astrophysics megrendezését, hogy közelebb hozza egymáshoz az asztrofizikát és a relativitáselméletet. Kerr előadásában azzal érvelt, hogy a Schwarzschild-megoldás esetén a gravitációs idődilatació miatt a távoli megfigyelő csak végtelen idő elteltével érzékelné a teljes kiáramló energiát, de forgó feketelyukak esetén más effektusok is fellépnek, amelyek megmagyarázhatják a kvazárok működését [13]. Penrose 1971-ben fedezte fel a róla elnevezett folyamatot, amely során energiát lehet kinyerni a Kerr-feketelyukból [14], melynek forrásaként a feketelyuk forgási energiája szolgál. A mai megértésünk szerint a Penrose-folyamatra épülő, az akkretáló plazma mágneses erővonalait is figyelembe vevő Blandford–Znajek-folyamat [15] magyarázza az aktív galaxismagok környezetében kialakuló erősen anizotróp és relativisztikus anyagáramlást és a kvazárok működését.

Egy másik, a közelmúlt kísérleti eredményeinek köszönhetően széles körben ismert jelenség a *gravitációs hullámoké*. A létezésüket már a speciális relativitáselmélet alapján valószínűsítette Poincaré [16], majd Einstein 1916-ban fel is fedezte a linearizált Einstein-egyenlet hullám megoldásait [17]. Erre a felfedezésre azonban hamar árnyékot vetett Eddington észrevétele: Az Einstein által felfedezett hullámok három típusát Weyl longitudinális-longitudinális, longitudinális-transzverzális és transzverzális-transzverzális hullámoknak nevezte [18]. Eddington megmutatta, hogy az első két típus terjedési sebessége a koordináták megválasztásától függően akár mekkora lehet [19]. Ezt követően sokáig nem volt tisztázott, hogy a gravitációs hullámok valós fizikai jelenségek, így képesek energiát szállítani, vagy csupán a koordinátaválasztás melléktermékei. Végül Pirani 1956-ban koordinátaválasztással szemben invariáns módon megmutatta, hogy a gravitációs hullámok képesek a szabadon eső megfigyelők közötti távolságot megváltoztatni [20]. 1957-ben, az utólag GR1-nek nevezett Chapel Hill konferencián Feynman egy meggyőző gondolkísérlettel is érvelt a gravitációs hullámok valóságos volta mellett [21].

A GR1-en szintén részt vevő Weber a következő években megépítette az első gravitációshullám-detektort [22, 23]. Ugyan a korai időszakban az interferométerek alkalmazását is megfontolta, de végül Weber mégis a rezonátor típusú antennák konstrukciójánál maradt [21]. A Weber-antennák több tonnás fémhengerek, amelyek a rezonanciafrekvenciájuknak megfelelő gravitációs hullámok hatására rezgésbe jönnek. Ezeket a kis rezgéseket piezoelektromos érzékelők rögzítik. A 70-es évek közepére azonban világossá vált, hogy ezek a detektorok nem eléggé érzékenyek a gravitációs hullámok kimutatásához. Ekkor jött a Hulse–Taylor-pulzár felfedezése [24], aminek a pályadataiból 1979-re közvetett módon következtetni lehetett a gravitációs hullámok létezésére [25]. Ezt követően új lendületet kapott a lézerinterferométeres detektorok fejlesztése. Napjainkban ezek közül már működik a GEO600, a LIGO két amerikai állomása, a Virgo és a KAGRA detektorok. A LIGO és a Virgo már több tucat hullámot érzékeltek és várakozásaink szerint hamarosan a KAGRA is eléri

a szükséges érzékenységet.²

Ezen a ponton ismét fontos szerephez jutnak a feketelyukak, ugyanis ezeknek a detektoroknak a fő jelforrása a kompakt objektumokból (feketelyukak és neutroncsillagok) álló kettősök összeolvadása. Míg a gyenge hullámokat a linearizált elmélet is le tudja írni, az észlelések számára pont az erős gravitációs térben végbemenő nemlineáris folyamatokat kell pontosan modellezni. A folyamat bizonyos szakaszait különféle közelítésekkel lehet kezelni, de a teljes jelenséget csak numerikus eljárásokkal tudjuk vizsgálni. Éppen ezért a detektorok építésével párhuzamosan a numerikus relativitáselmélet is látványos fejlődésen ment keresztül. Pretorius 2005-ben számolt be az első szimulációról, amely képes volt az utolsó néhány körpályán át végigkövetni két egyforma tömegű, nem forgó feketelyuk összeolvadását, valamint a hullámformát meghatározni [26]. Az ezt követő években újabb és újabb módszerek felhasználásával jelentősen bővült az elérhető konfigurációk tere, de a numerikus relativitáselmélet előtt álló kihívások sokrétűek.

Egyrészt a szimulációk még nem képesek lefedni a teljes paraméter teret. A kezdeti feketelyukak tömegeiben az 1 : 100 körüli arányt Lousto és Zlochower [27], Sperhake és társai [28], valamint Lousto és Healy [29] érték el. A legnagyobb perdülettel rendelkező végállapotú feketelyuk, amit sikerült előállítani Lovelace és társai [30], valamint Scheel és társai [31] munkáihoz köthető. Más jellegű kihívás, hogy a számolások nagy erőforrásigénye miatt nagyon kevés olyan szimuláció van, amelyek a kezdeti nagy szeparációnak köszönhetően illeszthetőek a poszt-newtoni sorfejtés eredményeihez. Ezen a téren Lousto és társai [32] és Szilágyi és társai [33] munkáját kell megemlítenünk. A harmadik kihívás a kezdőadatok fizikai értelmezéséhez kapcsolódik. Mivel nincs analitikus megoldása a problémának, nem ismert, hogy milyen módon állítsunk elő olyan kezdőadatot, ami egyszerre rendelkezik a kívánt fizikai paraméterekkel és nem tartalmaz semmi más, nem kívánt jelenséget [34]. Ezek a kihívások egymástól nem függetlenek. A tömegarány esetében is korlátozó tényező, hogy hány körpályát kell lemodellezni és a perdület esetében is jelentős javulást sikerült elérni új típusú kezdőadatok alkalmazásával. Hasonlóan a kezdőadatok fizikai tartalmának meghatározására is irányulnak kísérletek poszt-newtoni sorfejtést alkalmazva [35, 36, 37, 38, 39].

A dolgozatban ismertetett munkák új numerikus eljárások kidolgozásán keresztül gazdagítják a feketelyukakkal kapcsolatos ismereteinket. A kidolgozott módszer bizonyította alkalmazhatóságát olyan fundamentális kérdés vonatkozásában, mint a Kerr-megoldás stabilitása lineáris perturbációkkal szemben és ezek szuperradiáns szóródása a feketelyukon, valamint olyan gyakorlatiasabb tárgykörben, mint kezdőadatok előállítása deformált feketelyuk szimulációk számára. Mivel mindkét alkalmazás mögött a spinsúlyozott gömbharmonikusokon alapuló spektrális eljárás áll, a dolgozat 2. fejezetében röviden ismertetjük az eljárás alapjait képező főbb összefüggéseket. Ezt követően

²A gravitációshullámok történelméről tömör összefoglalást ad [21].

a 3. fejezetben a Kerr-téridő lineáris perturbációival kapcsolatos munkánk ismertetése. A közös elméleti háttér tárgyalása után a stabilitásvizsgálat szempontjából jelentős hosszútávú időfejlődéssel kapcsolatos eredményeink, majd a szuperradiáns szórás folyamatok leírását célzó vizsgálataink ismertetése olvasható. A 4. fejezetben a közel-Schwarzschild deformált feketelyuk kezdőadatok előállítására alkalmazott eljárásunk és a kapcsolódó eredmények bemutatása következik. A dolgozat végén összefoglaljuk az eredményeket és a függelékben mutatunk be olyan összefüggéseket, amelyek ugyan lényeges alkotóelemei az ismertetett problémák megoldásának, ugyanakkor a szövegtörzsben való közlésük szükségtelenül megakasztotta volna a gondolatmenetet.

2. fejezet

Spinsúly és a harmonikus gömbfüggvények

Az általunk használt numerikus módszerek olyan események leírását célozzák, amelyek esetén a téridő topológiája $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^2$, vagyis fóliázható topológiai gömbök egy $\mathcal{S}_{t,r}$ családjával. Ezekben az esetekben koordináta reprezentáció használata nem célszerű, mivel a hagyományos gömbi koordináták szingulárisak a pólusokon. Ebből kifolyólag általánosan elterjedt spektrális módszerek használata [40, 41, 42].

A harmonikus gömbfüggvények használatával a szögváltozók szerinti deriválás analitikusan elvégezhetővé válik, azonban nemlineáris egyenleteknél olyan műveletekkel szembesülhetünk, amelyeknek elvégzése nem magától értetődő spektrális reprezentációban. Ilyen művelet gömbfüggvények szorzatának kifejtése, gömbfüggvények hányadosának kifejtése és a gyökvonás művelete is. Ennek a problémának a megközelítése alapján a módszereket két csoportba sorolhatjuk. A pszeudospektrális módszerek esetén ilyen műveletek elvégzésének erejéig a mezőt koordinátákon ábrázolják, majd az eredményt ismét kifejtik gömbfüggvényeken. A kérdéses műveletek azonban tisztán spektrális módon is elvégezhetőek. Az általunk kifejlesztett módszer ez utóbbi, a teljesen spektrális módszerek csoportjába tartozik, így nem kell az ábrázolások között váltanunk minden lépésben.

Pszeudospektrális megközelítésre példaként Florian Beyer és társai [40] munkáját hozzuk fel. Egy adott s spinsúlyú ${}_s f$ függvény kifejtési együtthatóinak meghatározását Huffenberger és Wandelt [43] módszere alapján végzik: A gömbön definiált ${}_s f$ függvényt kiterjesztik a tóruszra, ahol a művelet gyors Fourier-transzformációra vezethető vissza. Az inverz transzformációt, a kifejtési együtthatókból a függvényértékek meghatározását, pedig egy hibrid lineáris/nemlineáris rekurzió segítségével végzik el.

A tisztán spektrális megközelítést a Wigner Fizikai Kutatóintézetben Csizmadia Péter és társai [42] által kifejlesztett GridRipper [44] csomag képviseli. A dolgozatban ismertetett munkák ezt a módszert gondolják tovább olyan értelemben, hogy az eredetileg hagyományos gömbi harmonikusok bevonásával kialakított eljárásokat általánosítsuk úgy, hogy azok a spinsúlyozott gömbi

harmonikusok esetén is alkalmazhatóak legyenek.

Ezt a fejezetet az algoritmusokban alkalmazott fontosabb összefüggések felidézésének szenteljük. A 2.1. alfejezetben röviden összefoglaljuk a hagyományos gömbharmonikusok néhány, az alkalmazás szempontjából fontos tulajdonságát. Ezt követően a 2.2. alfejezetben geometriai megfontolásokat követve bemutatjuk a spinsúlyozott operátorokat. A 2.3. alfejezetben alkalmazzuk a 2.2. alfejezetben bemutatott összefüggéseket gömbi koordináták felett és segítségével bemutatjuk a spinsúlyozott harmonikus gömbfüggvényeket gömbi koordinátákban kifejezve. Zárásként a 2.4. alfejezetben ismertetjük a nemlineáris kifejezések kiértékelésére alkalmazott eljárások alapjául szolgáló összefüggéseket, konkrétan spinsúlyozott gömbharmonikusok szorzatának és hányadosának kiértékelését a kifejtési együtthatók segítségével, valamint a 2.5. alfejezetben néhány szorzat kifejezés gömbön vett integráljának meghatározását tárgyaljuk.

2.1. Gömbi harmonikusok

A harmonikus gömbfüggvények az egységgömbön értelmezett

$$\Delta f = q^{\mu\nu} \mathring{D}_\mu \mathring{D}_\nu f = \partial_{\vartheta\vartheta} f + \text{ctg}\vartheta \partial_{\vartheta} f + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \partial_{\varphi\varphi} f \quad (2.1.1)$$

Laplace-operátor sajátfüggvényei [45], ahol q^{ab} az egységgömb inverz metrikája, \mathring{D}_a a q_{ab} metrikával kompatibilis deriváló operátor, (ϑ, φ) pedig a szokásos gömbi koordináták. A sajátértékprobléma megoldása

$$\Delta Y_\ell^m = -\ell(\ell + 1) Y_\ell^m, \quad (2.1.2)$$

ahol $Y_\ell^m = Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ jelöli a harmonikus gömbfüggvényeket. Az m azimutális index mutatja, hogy a sajátfüggvények adott sajátértékhez tartozó altere degenerált. A degeneráció feloldásához a ∂_φ operátorral közös sajátfüggvényrendszert tekintjük:

$$\partial_\varphi Y_\ell^m = i m Y_\ell^m. \quad (2.1.3)$$

Az adott ℓ poláris indexhez tartozó altéren belül különböző m -hez tartozó függvények között léptetnek az

$$\begin{aligned} L_+ Y_\ell^m &= e^{i\varphi} (\partial_\vartheta + i \text{ctg}\vartheta \partial_\varphi) Y_\ell^m \\ &= \sqrt{(\ell - m)(\ell + m + 1)} Y_\ell^{m+1}, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$$\begin{aligned} L_- Y_\ell^m &= e^{-i\varphi} (-\partial_\vartheta + i \text{ctg}\vartheta \partial_\varphi) Y_\ell^m \\ &= \sqrt{(\ell + m)(\ell - m + 1)} Y_\ell^{m-1} \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

léptető operátorok [45]. Fontos megjegyezni, hogy

$$L_+ Y_\ell^\ell = 0 \quad \text{és} \quad L_- Y_\ell^{-\ell} = 0, \quad (2.1.6)$$

vagyis $|m| \leq \ell$ teljesülése esetén kapunk nem eltűnő gömbfüggvényeket. A (2.1.3)-(2.1.5) összefüggésekből láthatjuk, hogy az Y_ℓ^m függvények komplex értékeket is felvehetnek. A komplex konjugálás

$$\overline{Y_\ell^m} = (-1)^m Y_\ell^{-m} \quad (2.1.7)$$

módon hat a gömbfüggvényeken.

Az \mathcal{S} egységgömbön értelmezett $L^2(\mathcal{S}, \mathbb{C})$ négyzetesen integrálható komplex értékű függvények terén

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathcal{S}} \bar{f}(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (2.1.8)$$

módon értelmezhetjük az L^2 belsőszorzatot, ahol az \mathcal{S} integrálási tartomány a teljes gömböt lefedi. A gömbi harmonikusok

$$\langle Y_{\ell_1}^{m_1} | Y_{\ell_2}^{m_2} \rangle = \delta_{\ell_1, \ell_2} \delta_{m_1, m_2} \quad (2.1.9)$$

értelemben ortonormáltak és teljes ortonormált bázisként szolgálnak az $L^2(\mathcal{S}, \mathbb{C})$ függvények terén [45]. Következésképpen bármely $f \in L^2(\mathcal{S}, \mathbb{C})$ függvény felírható gömbi harmonikusok lineárkombinációjaként

$$f = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_\ell^m \cdot Y_\ell^m \quad (2.1.10)$$

módon, ahol az f_ℓ^m kifejtési együtthatókat az

$$f_\ell^m = \langle Y_\ell^m | f \rangle. \quad (2.1.11)$$

összefüggés adja. Ekkor az $\|f\| = \langle f | f \rangle$ jelölést bevezetve

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{\ell=0}^N \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_\ell^m Y_\ell^m \right\| = 0 \quad (2.1.12)$$

értelemben a sorfejtés előállítja a függvényt. A pontos állításokért [42] függelékéhez utaljuk az olvasót.

Ezen a módon felírhatjuk gömbfüggvények szorzatát is, mint gömbfüggvények lineárkombinációját:

$$Y_{\ell_1}^{m_1} Y_{\ell_2}^{m_2} = \sum_{\ell_3=0}^{\infty} \sum_{m_3=-\ell_3}^{\ell_3} \alpha_{\ell_3}^{m_3} \cdot Y_{\ell_3}^{m_3}, \quad (2.1.13)$$

ahol

$$\alpha_{\ell_3}^{m_3} = \langle Y_{\ell_3}^{m_3} | Y_{\ell_1}^{m_1} Y_{\ell_2}^{m_2} \rangle. \quad (2.1.14)$$

A következő, gyakran előforduló, három gömbfüggvény szorzatának integráljával adott

$$G_{\ell_1}^{m_1} Y_{\ell_2}^{m_2} Y_{\ell_3}^{m_3} = \int_{\mathcal{S}} Y_{\ell_1}^{m_1} Y_{\ell_2}^{m_2} Y_{\ell_3}^{m_3} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (2.1.15)$$

számokat nevezzük Gaunt-együtthatóknak [42]. A szorzatra kapott kifejezés így

$$Y_{\ell_1}^{m_1} Y_{\ell_2}^{m_2} = \sum_{\ell_3=0}^{\infty} \sum_{m_3=-\ell_3}^{\ell_3} (-1)^{m_3} G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 -m_3} \cdot Y_{\ell_3}^{m_3} \quad (2.1.16)$$

módon írható. Két $f, g \in L^2(\mathcal{S}, \mathbb{C})$ függvény szorzata ekkor egyrészt

$$f \cdot g = \sum_{\ell_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-\ell_1}^{\ell_1} (f \cdot g)_{\ell_1}^{m_1} \cdot Y_{\ell_1}^{m_1}, \quad (2.1.17)$$

másrészt

$$f \cdot g = \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-\ell_2}^{\ell_2} \sum_{\ell_3=0}^{\infty} \sum_{m_3=-\ell_3}^{\ell_3} f_{\ell_2}^{m_2} g_{\ell_3}^{m_3} Y_{\ell_2}^{m_2} Y_{\ell_3}^{m_3}. \quad (2.1.18)$$

Felhasználva a Gaunt-együtthatók definícióját és egyenlővé téve a két kifejezést a kifejtési együtthatókra azt kapjuk, hogy

$$(f \cdot g)_{\ell_1}^{m_1} = (-1)^{m_1} \sum_{\ell_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-\ell_2}^{\ell_2} \sum_{\ell_3=0}^{\infty} \sum_{m_3=-\ell_3}^{\ell_3} f_{\ell_2}^{m_2} g_{\ell_3}^{m_3} G_{\ell_2 \ell_3 \ell_1}^{m_2 m_3 -m_1}. \quad (2.1.19)$$

Láthatjuk, hogy a Gaunt-együtthatók fontos szerepet fognak játszani a nemlineáris kifejezések kezelésében. Az értékeik meghatározásában segítségünkre lesz, hogy kifejezhetőek a Wigner-féle 3-j szimbólumokkal [42]:

$$G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} = \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell_3 + 1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (2.1.20)$$

A (2.1.17) típusú összegzéseknél sokat segít néhány speciális eset ismerete, amikor a 3-j szimbólumok biztosan eltűnnek. Így

$$\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.1.21)$$

amikor

- nem teljesül a $|\ell_1 - \ell_2| \leq \ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$ háromszög feltétel, vagy
- amikor $m_i < -\ell_i$, illetve $m_i > \ell_i$ akármelyik $i \in \{1, 2, 3\}$ értékre, vagy
- $m_1 + m_2 + m_3 \neq 0$, vagy
- $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ páratlan, továbbá az $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ feltételek is teljesülnek.

A felsorolás második pontjára tekinthetünk úgy, mint trivialis, hiszen ebben az esetben a gömbfüggvényeink is eltűnnek. A többi eset alkalmazását illusztráljuk egy példával. Tekintsük a $Y_1^0 \cdot Y_\ell^m$ szorzatot. A szorzat kifejtésében szereplő gömbfüggvények m' indexei a harmadik pont értelmében az $m' = m$ értéket veszik fel, különben az adott tag eltűnik. A háromszög feltétel alapján a kifejtésben csak $\ell' \in \{\ell-1; \ell; \ell+1\}$ poláris indexek játszanak szerepet, tehát az eredményt a

$$Y_1^0 \cdot Y_\ell^m = c_1 \cdot Y_{\ell-1}^m + c_2 \cdot Y_\ell^m + c_3 \cdot Y_{\ell+1}^m \quad (2.1.22)$$

alakban írhatjuk, ahol c_i a megfelelő Gaunt-együttható pontos értéke. Mivel a Gaunt-együttható értékét meghatározó 3-j szimbólumok egyikénél $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, ezért az utolsó észrevétel értelmében a középső tag is eltűnik, hiszen ekkor a $\sum_i \ell_i$ összeg páratlan.

Végezetül a 2.1. táblázatban közöljük néhány gömbfüggvény funkcionális alakját a munkánk során alkalmazott konvenciókkal, míg a 2.1. ábra ugyanezen gömbfüggvények valós részeit mutatja.

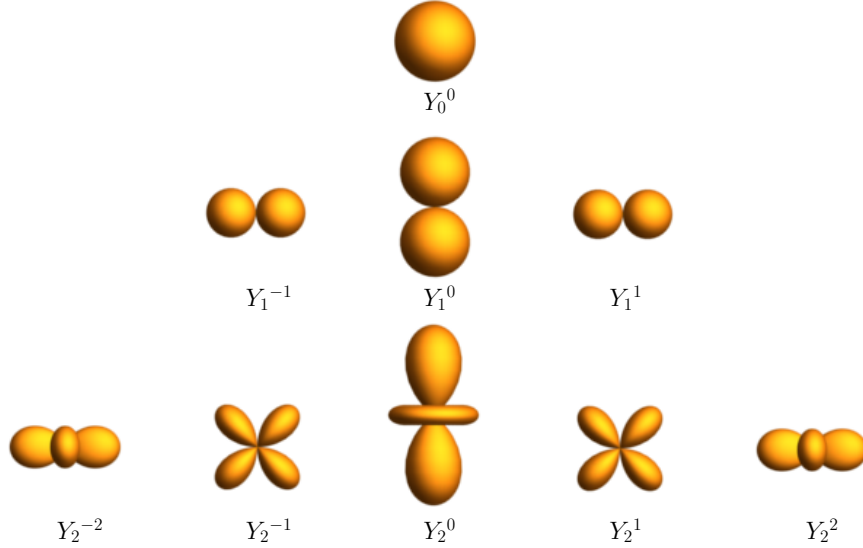
$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$Y_1^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\vartheta e^{-i\varphi}$ $Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\vartheta$ $Y_1^1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin\vartheta e^{i\varphi}$	$Y_2^{-2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\vartheta e^{-2i\varphi}$ $Y_2^{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta e^{-i\varphi}$ $Y_2^0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2\vartheta - 1)$ $Y_2^1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin\vartheta \cos\vartheta e^{i\varphi}$ $Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2\vartheta e^{2i\varphi}$

2.1. táblázat. Néhány $Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ gömbfüggvény funkcionális alakja gömbi koordináták felett.

Az $L^2(\mathcal{S}, \mathbb{C})$ függvények gömbi harmonikusokkal való kifejtéséről további eredmények találhatóak a GridRipper csomag elméleti háttérét is ismertető [42] cikk függelékeiben.

2.2. Spinléptető operátorok

A spinsúlyozott harmonikus gömbfüggvényeket a spinsúly-léptető operátorok alkalmazásán keresztül fogjuk bemutatni. Ebben a fejezetben a léptető operátorokat a geometria irányából közelítve



2.1. ábra. Néhány $Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ gömbfüggvény valós részének a függvénymenete. Az ábrán látható alakzatok (ϑ, φ) páros által meghatározott irányban vett kiterjedését az $|\Re[Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)]|$ érték határozza meg.

tárgyaljuk. A konstrukciót részletesen leírja könyvében Rindler és Penrose [46], érinti Stewart [47] és cikkében összefoglalja Rácz [48]. A dolgozatban az utóbbiban alkalmazott konvenciókhoz igazodunk.

Tekintsünk a gömbön egy komplex fényszerű vektormezőt, q^a -t, és a komplex konjugáltját, \bar{q}^a -t. Ezeket úgy határozzuk meg, hogy a $q^a \bar{q}_a = 2$ normálási feltétel teljesüljön. Ezen feltételekből következik, hogy az egységgömb q_{ab} metrikájára érvényesek a következő összefüggések [48]:

$$q_{ab} = q_{(a} \bar{q}_{b)}, \quad q^{ab} = q^{(a} \bar{q}^{b)}, \quad \frac{1}{2}[q^a \bar{q}_b + \bar{q}^a q_b] = \delta^a_b, \quad (2.2.1)$$

ahol a kerek zárójel a közrezárt indexekben vett szimmetrizálást jelöli. A $\{q^a, \bar{q}^a\}$ diádot fogjuk alkalmazni, hogy a tenzoriális mennyiségeket skalár mennyiségekre vezessük vissza. A diád azonban nem egyértelműen meghatározott. A fenti feltételek hagynak nekünk egy forgatásnyi szabadságot: a

$$q^a \rightarrow e^{i\delta} q^a, \quad \bar{q}^a \rightarrow e^{-i\delta} \bar{q}^a \quad (2.2.2)$$

forgatások, ahol δ valós, potenciálisan koordinátafüggő paraméter, érintetlenül hagyják a fenti összefüggéseket. Bármely $f_{a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l}$ valós, teljesen szimmetrikus spurmentes tenzormezőből

$$f = q^{a_1} q^{a_2} \dots q^{a_k} \bar{q}^{b_1} \dots \bar{q}^{b_l} f_{a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l} \quad (2.2.3)$$

módon képzett mennyiség a (2.2.2) forgatás alatt a következő módon transzformálódik:

$$f \rightarrow e^{i(k-l)\delta} f. \quad (2.2.4)$$

Az ilyen, homogén módon transzformálódó mennyiségeket $s = k - l$ súlyú spinsúlyozott mennyiségeknek nevezzük. Minden pozitív s spinsúlyú ${}_s g$ függvény felírható

$${}_s g = q^{a_1} q^{a_2} \dots q^{a_s} g_{a_1 a_2 \dots a_s} = q^{a_1} q^{a_2} \dots q^{a_s} g_{(a_1 a_2 \dots a_s)} \quad (2.2.5)$$

alakban, ahogy az $s < 0$ spinsúlyú függvények felírhatóak a

$${}_s h = \bar{q}^{a_1} \bar{q}^{a_2} \dots \bar{q}^{a_s} h_{a_1 a_2 \dots a_s} = \bar{q}^{a_1} \bar{q}^{a_2} \dots \bar{q}^{a_s} h_{(a_1 a_2 \dots a_s)} \quad (2.2.6)$$

kontrakcióval. Itt $g_{a_1 a_2 \dots a_s}$ és $h_{a_1 a_2 \dots a_s}$ a (2.2.3) összefüggésben szereplő $f_{a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l}$ tenzormezőhöz hasonlóan valós, teljesen szimmetrikus és spurmentes.

A q_{ab} metrikával kompatibilis \mathring{D}_a kovariáns deriváló operátor kivisz a súlyozott függvények teréből. A $\mathring{D}_a {}_s f$ tenzor mindkét komponense, $q^a \mathring{D}_a {}_s f$ és $\bar{q}^a \mathring{D}_a {}_s f$ is inhomogén módon transzformálódik a koordinátáktól függő (2.2.2) forgatás alatt:

$$\begin{aligned} q^a \mathring{D}_a {}_s f &= q^a q^{b_1} \dots q^{b_s} \mathring{D}_a f_{b_1 \dots b_s} + s f_{b_1 \dots b_s} q^{b_1} \dots q^{b_{s-1}} q^a \mathring{D}_a q^{b_s} \\ &= q^a q^{b_1} \dots q^{b_s} \mathring{D}_a f_{b_1 \dots b_s} + \frac{s}{2} f_{b_1 \dots b_s} q^{b_1} \dots q^{b_{s-1}} q^{b_s} \bar{q}^a q^a \mathring{D}_a q^e, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

ahol felhasználtuk, hogy $q^a q^b \mathring{D}_a q_b = 0$ a q^a vektor fényszerűsége miatt. Gómez és társai [49] nyomán vezessük be a

$$\Gamma = -\frac{1}{2} q^a \bar{q}^b \mathring{D}_a q_b \quad (2.2.8)$$

jelölést. Belátható, hogy

$$q^a q^b \mathring{D}_a \bar{q}_b = 2\Gamma, \quad \bar{q}^a q^b \mathring{D}_a \bar{q}_b = -2\bar{\Gamma}, \quad \bar{q}^a \bar{q}^b \mathring{D}_a q_b = 2\bar{\Gamma}. \quad (2.2.9)$$

A fenti derivált ekkor a következő alakot ölti:

$$q^a \mathring{D}_a {}_s f = q^a q^{b_1} \dots q^{b_s} \mathring{D}_a f_{b_1 \dots b_s} - s {}_s f \Gamma. \quad (2.2.10)$$

Könnyű belátni, hogy az első tag súlyozott mennyiség. A problémát Γ jelenti: egy forgatás alatt

$$\Gamma \rightarrow e^{i\delta} \Gamma - q^a \mathring{D}_a e^{i\delta} \quad (2.2.11)$$

módon transzformálódik.

A fentiek alapján bevezethetjük a súlyozott mennyiségből súlyozott mennyiséget képező, $\mathring{\delta}$ és $\bar{\mathring{\delta}}$ operátorokat [47]: pozitív spinsúly esetén

$$\mathring{\delta} {}_s g = q^b q^{a_1} \dots q^{a_s} \mathring{D}_b g_{a_1 \dots a_s} \quad \text{és} \quad \bar{\mathring{\delta}} {}_s g = \bar{q}^b q^{a_1} \dots q^{a_s} \mathring{D}_b g_{a_1 \dots a_s}, \quad (2.2.12)$$

míg negatív spinsúly esetén teljesen analóg módon

$$\mathring{\delta} {}_s h = q^b \bar{q}^{a_1} \dots \bar{q}^{a_s} \mathring{D}_b h_{a_1 \dots a_s} \quad \text{és} \quad \bar{\mathring{\delta}} {}_s h = \bar{q}^b \bar{q}^{a_1} \dots \bar{q}^{a_s} \mathring{D}_b h_{a_1 \dots a_s}. \quad (2.2.13)$$

A fenti kifejezéseket elegánsabb formában, s előjelétől függetlenül érvényes módon is felírhatjuk [49]:

$$\eth_s f = q^b \mathring{D}_b {}_s f + s \Gamma {}_s f, \quad (2.2.14)$$

$$\bar{\eth}_s f = \bar{q}^b \mathring{D}_b {}_s f - s \bar{\Gamma} {}_s f. \quad (2.2.15)$$

Belátható, hogy \eth eggyel növeli, míg $\bar{\eth}$ eggyel csökkenti a spinsúlyt.

Érdemes még meghatározni az $[\eth, \bar{\eth}]$ kommutátort. (2.2.14) és (2.2.15) felhasználásával

$$\begin{aligned} \bar{\eth}\eth_s f &= \bar{q}^b \mathring{D}_b [q^a \mathring{D}_a {}_s f] + s \bar{q}^b \mathring{D}_b [\Gamma {}_s f] - (s+1) \bar{\Gamma} q^a \mathring{D}_a {}_s f - s(s+1) \Gamma \bar{\Gamma} {}_s f \\ &= \bar{q}^a q^b \mathring{D}_a \mathring{D}_b {}_s f + s {}_s f \bar{q}^a \mathring{D}_a \Gamma + s \bar{\Gamma} \bar{q}^a \mathring{D}_a {}_s f - s \bar{\Gamma} q^a \mathring{D}_a {}_s f - s(s+1) \Gamma \bar{\Gamma} {}_s f. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} \eth\bar{\eth}_s f &= q^b \mathring{D}_b [\bar{q}^a \mathring{D}_a {}_s f] - s q^b \mathring{D}_b [\bar{\Gamma} {}_s f] + (s-1) \Gamma \bar{q}^a \mathring{D}_a {}_s f - s(s-1) \Gamma \bar{\Gamma} {}_s f \\ &= q^a \bar{q}^b \mathring{D}_a \mathring{D}_b {}_s f - s {}_s f q^a \mathring{D}_a \bar{\Gamma} - s \bar{\Gamma} q^a \mathring{D}_a {}_s f + s \Gamma \bar{q}^a \mathring{D}_a {}_s f - s(s-1) \Gamma \bar{\Gamma} {}_s f. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

\mathring{D}_a torziómentessége miatt

$$\bar{\eth}\eth_s f - \eth\bar{\eth}_s f = s[\bar{q}^a \mathring{D}_a \Gamma + q^a \mathring{D}_a \bar{\Gamma}] {}_s f - 2s \Gamma \bar{\Gamma} {}_s f. \quad (2.2.18)$$

A zárójelben szereplő összegbe Γ -ra és $\bar{\Gamma}$ -ra a megfelelő kifejezést helyettesítve

$$\bar{q}^a \mathring{D}_a \Gamma + q^a \mathring{D}_a \bar{\Gamma} = -\frac{1}{2}[\bar{q}^c \mathring{D}_c (q^a \bar{q}^b \mathring{D}_a q_b) - q^c \mathring{D}_c (\bar{q}^a \bar{q}^b \mathring{D}_a q_b)]. \quad (2.2.19)$$

A

$$(\bar{q}^c \mathring{D}_c q^a)(\bar{q}^b \mathring{D}_a q_b) = -2\Gamma \bar{\Gamma}, \quad (2.2.20)$$

$$(\bar{q}^c \mathring{D}_c \bar{q}^b)(q^a \mathring{D}_a q_b) = 2\Gamma \bar{\Gamma}, \quad (2.2.21)$$

$$(q^c \mathring{D}_c \bar{q}^a)(\bar{q}^b \mathring{D}_a q_b) = 2\Gamma \bar{\Gamma}, \quad (2.2.22)$$

$$(q^c \mathring{D}_c \bar{q}^b)(\bar{q}^a \mathring{D}_a q_b) = 2\Gamma \bar{\Gamma} \quad (2.2.23)$$

összefüggések alapján

$$\begin{aligned} \bar{\eth}\eth_s f - \eth\bar{\eth}_s f &= -\frac{s}{2} \bar{q}^a \bar{q}^b q^c [\mathring{D}_a \mathring{D}_c q_b - \mathring{D}_c \mathring{D}_a q_b] {}_s f \\ &= \frac{s}{2} \bar{q}^a q^c q^d \bar{q}^b \mathring{R}_{acdb} {}_s f, \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

ahol $\mathring{R}_{abc}{}^d$ a \mathring{D}_a -hoz tartozó Riemann-tenzor. Nem maradt más hátra, mint

$$2\mathring{R} = \bar{q}^a q^c q^d \bar{q}^b \mathring{R}_{acbd} \quad (2.2.25)$$

felhasználásával a végleges alakra hoznunk a formulát:

$$[\bar{\partial}\partial - \partial\bar{\partial}]_s f = 2s {}_s f, \quad (2.2.26)$$

mivel az egységgömbön a Ricci-skalár értéke $\overset{\circ}{R} = 2$.

Az ∂ és $\bar{\partial}$ operátorok segítségével felépíthetjük a Δ_s másodrendű differenciáloperátorok olyan egyparaméteres családját, amely $s = 0$ esetben visszaadja a hagyományos $\Delta = \Delta_0$ Laplace-operátort.

$$\Delta f = q^{ab} \overset{\circ}{D}_a \overset{\circ}{D}_b f, \quad (2.2.27)$$

ahol f spinsúlya 0. A (2.2.1) egyenletek alapján a metrikát kifejezve a diád elemeivel

$$\Delta f = \frac{1}{2}(\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)f \quad (2.2.28)$$

adódik. Mivel 0 spinsúlyú f esetén a két operátor kommutál, ezzel egyenértékű a $\Delta f = \bar{\partial}\partial f$ kifejezés. Most kiterjeszthetjük a gondolatmenetet $s \neq 0$ esetre is: $\Delta_s {}_s f = \bar{\partial}\partial {}_s f$. Tudjuk, hogy Δ_0 sajátfüggvényei a Y_ℓ^m gömbi harmonikusok. (2.2.26) felhasználásával egyszerűen belátható, hogy ha ${}_s Y_\ell^m$ a Δ_s operátor sajátfüggvényei, akkor $\partial {}_s Y_\ell^m$ és $\bar{\partial} {}_s Y_\ell^m$ a Δ_{s+1} és Δ_{s-1} operátorok sajátfüggvényei. Tehát nem csak azt mondhatjuk el, hogy ∂ és $\bar{\partial}$ a különböző s -hez tartozó alterek között léptet, hanem azt is, hogy $\bar{\partial}\partial$ különböző s -hez tartozó sajátfüggvényei között biztosítanak kapcsolatot, így a hagyományos gömbi harmonikusokból előállítják a spinsúlyozott gömbi harmonikusokat, amelyek az $\bar{\partial}\partial {}_s Y_\ell^m = \lambda {}_s Y_\ell^m$ sajátértékprobléma megoldásai.

Ennél többet is mondhatunk. Esetleges normálástól eltekintve a spinsúlyozott gömbharmonikusokat definiáljuk ${}_s Y_\ell^m = \partial^s Y_\ell^m$ módon pozitív spinsúly és ${}_s Y_\ell^m = \bar{\partial}^s Y_\ell^m$ módon negatív spinsúly estén. Ekkor a (2.2.26) kommutátor ismételt alkalmazásával megmutathatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\partial {}_s Y_\ell^m &= \left(\lambda_0 + 2 \sum_{s'=1}^s s' \right) {}_s Y_\ell^m \\ &= (-\ell(\ell+1) + s(s+1)) {}_s Y_\ell^m \\ &= -(\ell-s)(\ell+s+1) {}_s Y_\ell^m. \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Ez az eredmény érvényes marad egy koordinátáktól nem függő normálási faktor bevezetése esetén is.

2.3. A spinsúlyozott harmonikus gömbfüggvények

A hagyományos (ϑ, φ) gömbi koordináták felett az egységgömb íveleme a következő alakot ölti:

$$(ds)^2 = (d\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta (d\varphi)^2. \quad (2.3.1)$$

Ezen koordinátafolt felett a normálási feltételt kielégítő fényszerű vektormező komponensei [47]:

$$q^\alpha = e^{i\delta} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{i}{\sin\vartheta} \end{pmatrix}, \quad (2.3.2)$$

ahol δ valós paraméter jeleníti meg a rendelkezésünkre álló mértékszabadságot. Ezt a szabadsági fokot konvenció szerint úgy rögzítjük, hogy q^a valós része ∂_ϑ -val legyen párhuzamos, míg képzetes része ∂_φ -vel [50]. Az ilyen módon rögzített vektorra végül a következő formulát kapjuk:

$$q^a = - \left((\partial_\vartheta)^a + \frac{i}{\sin\vartheta} (\partial_\varphi)^a \right). \quad (2.3.3)$$

A (2.3.3) kifejezés szinguláris a pólusokon. Meggyőződhetünk róla, hogy ez a szingularitás csak a rossz koordináta választás következménye, ha megvizsgáljuk a konstrukciót komplex sztereografikus koordinátákban. Ekkor a komplex z koordináta koordinátavonalaihoz szokás igazítani q^a -t, amiből következik, hogy a két esetben alkalmazott diád közötti átmenetben a koordinátatranszformáción kívül egy forgatás is szerepet kap. Azt tapasztaljuk tehát, hogy a koordinátáink szingulárisak, de ez a konstrukció reguláris a pólusokon is. Ez a tulajdonság rendkívül hasznossá teszi a spinsúlyozott gömbfüggvényeken alapuló spektrális módszereket.

A (2.3.3) alakú diád esetén Γ valós:

$$\Gamma = \text{ctg } \vartheta. \quad (2.3.4)$$

Ezekkel a felfelé léptető $\bar{\partial}$ operátor hatása egy s spinsúlyú ${}_s f$ függvényen [50]:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_s f &= - \left(\partial_\vartheta + \frac{i}{\sin\vartheta} \partial_\varphi \right) {}_s f + s \text{ctg}\vartheta {}_s f \\ &= -\sin^s \vartheta \left(\partial_\vartheta + \frac{i}{\sin\vartheta} \partial_\varphi \right) (\sin^{-s} \vartheta {}_s f). \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Hasonlóan a lefelé léptető $\bar{\partial}$ operátor hatása:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_s f &= - \left(\partial_\vartheta - \frac{i}{\sin\vartheta} \partial_\varphi \right) {}_s f - s \text{ctg}\vartheta {}_s f \\ &= -\sin^{-s} \vartheta \left(\partial_\vartheta - \frac{i}{\sin\vartheta} \partial_\varphi \right) (\sin^s \vartheta {}_s f), \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

míg a Laplace-operátort általánosító $\bar{\partial}\bar{\partial}$ operátor

$$\bar{\partial}\bar{\partial} {}_s f = \partial_{\vartheta\vartheta} {}_s f + \text{ctg}\vartheta \partial_\vartheta {}_s f + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \partial_{\varphi\varphi} {}_s f + 2is \frac{\text{ctg}\vartheta}{\sin\vartheta} \partial_\varphi {}_s f + s(1 - s \text{ctg}^2 \vartheta) {}_s f. \quad (2.3.7)$$

A spinsúlyozott gömbi harmonikusokat úgy állítjuk elő, hogy a 0 súlyú gömbi harmonikusokra alkalmazzuk ismételten a (2.3.5) és (2.3.6) operátorokat. Azonos spinsúlyú függvények között megköveteljük a

$$\langle {}_s Y_\ell^m \mid {}_s Y_{\ell'}^{m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (2.3.8)$$

normálást. Ezzel együtt a formula a következő módon alakul [50]:

$${}_s Y_\ell^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{(\ell-s)!}{(\ell+s)!}} \bar{\partial}^s Y_\ell^m & \text{ha } s > 0, \\ (-1)^s \sqrt{\frac{(\ell-|s|)!}{(\ell+|s|)!}} \bar{\partial}^{|s|} Y_\ell^m & \text{ha } s < 0. \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Ezek az összefüggések 0-t adnak minden esetben amikor $|s| > \ell$. A gömbfüggvények a komplex konjugálás alatt

$$\overline{{}_s Y_\ell^m} = (-1)^{s+m} {}_{-s} Y_\ell^{-m} \quad (2.3.10)$$

módon viselkednek, míg a differenciáloperátorok hatásait a következő táblázat foglalja össze [50]:

$$\bar{\partial}_s Y_\ell^m = \sqrt{(\ell-s)(\ell+s+1)} {}_{s+1} Y_\ell^m \quad (2.3.11)$$

$$\bar{\partial}_s Y_\ell^m = -\sqrt{(\ell+s)(\ell-s+1)} {}_{s-1} Y_\ell^m \quad (2.3.12)$$

$$\bar{\partial}\bar{\partial}_s Y_\ell^m = -(\ell-s)(\ell+s+1) {}_s Y_\ell^m \quad (2.3.13)$$

$$\partial_\varphi {}_s Y_\ell^m = i m {}_s Y_\ell^m \quad (2.3.14)$$

Végezetül a 2.1. alfejezethez hasonló módon néhány spinsúlyozott gömbi harmonikusnak feltüntetjük a funkcionális alakját és ábrázoljuk ugyanezen gömbfüggvények valós részeit. A 2.2. táblázat $s = 1$ spinsúlyú gömbfüggvényeket, míg a 2.3. táblázat $s = 2$ spinsúlyú gömbfüggvényeket tartalmaz. A vonatkozó $s = -1$ és $s = -2$ spinsúlyú gömbfüggvények egyszerűen megkaphatóak a (2.3.10) összefüggés alkalmazásával. A feltüntetett gömbfüggvények valós részét a 2.2. ábra mutatja.

2.4. Nemlineáris kifejezések és a spinsúlyozott gömbi harmonikusok

A munkánk alapjául szolgáló GridRipper egy lényeges vonása, hogy a nemlineáris kifejezéseket tisztán spektrális módon kezeli. A [42]-ben és [51]-ben bemutatott módszerek alkalmazhatóak spinsúlyozott gömbfüggvények esetében is. Az erre vonatkozó formulákat tekintjük át ebben az alfejezetben.

Az $L^2(\mathcal{S}, \mathbb{C})$ belsőszorzat használatával és (2.3.8) segítségével tetszőleges ebben a függvényterben értelmezett s spinsúlyú ${}_s f$ függvényt kifejtethetünk s spinsúlyú gömbfüggvények segítségével

$${}_s f = \sum_{\ell=|s|}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_\ell^m {}_s Y_\ell^m \quad (2.4.1)$$

$s = 1$	
$\ell = 1$	$\ell = 2$
${}_1Y_1^{-1} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{-i\varphi}(1 + \cos\vartheta)$ ${}_1Y_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\vartheta$ ${}_1Y_1^1 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\pi}}e^{i\varphi}(1 - \cos\vartheta)$	${}_1Y_2^{-2} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-2i\varphi}(1 + \cos\vartheta)\sin\vartheta$ ${}_1Y_2^{-1} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-i\varphi}(\cos\vartheta + \cos 2\vartheta)$ ${}_1Y_2^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cos\vartheta\sin\vartheta$ ${}_1Y_2^1 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{i\varphi}(\cos\vartheta - \cos 2\vartheta)$ ${}_1Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{2i\varphi}(1 - \cos\vartheta)\sin\vartheta$

2.2. táblázat. Néhány ${}_1Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ spinsúlyozott gömbfüggvény funkcionális alakja gömbi koordináták felett.

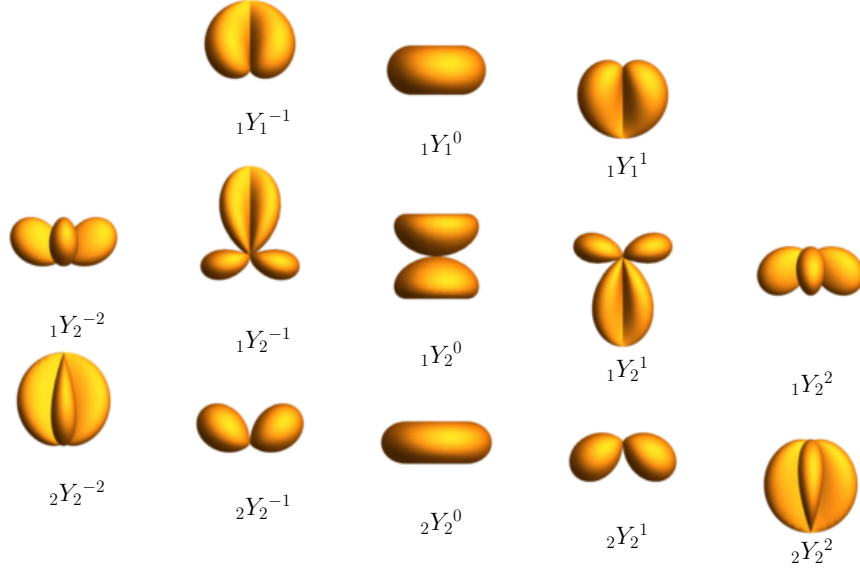
$s = 2, \ell = 2$
${}_2Y_2^{-2} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-2i\varphi}(1 + \cos\vartheta)^2$ ${}_2Y_2^{-1} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{-i\varphi}(1 + \cos\vartheta)\sin\vartheta$ ${}_2Y_2^0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\vartheta$ ${}_2Y_2^1 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{i\varphi}(1 - \cos\vartheta)\sin\vartheta$ ${}_2Y_2^2 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{\pi}}e^{2i\varphi}(1 - \cos\vartheta)^2$

2.3. táblázat. Néhány ${}_2Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ spinsúlyozott gömbfüggvény funkcionális alakja gömbi koordináták felett.

módon, ahol

$$f_\ell^m = \langle {}_sY_\ell^m | {}_s f \rangle. \quad (2.4.2)$$

Megjegyezzük, hogy (2.4.1)-ben az összegzés ℓ -ben $|s|$ -től megy, hiszen $\ell < |s|$ esetén ${}_sY_\ell^m$ azonosan



2.2. ábra. Néhány ${}_s Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ spinsúlyozott gömbfüggvény valós részének a függvénymenete. Az ábrán látható alakzatok (ϑ, φ) páros által meghatározott irányban vett kiterjedését az $|\Re[{}_s Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)]|$ érték határozza meg.

0.

Ilyen módon a hagyományos gömbfüggvényekhez hasonlóan spinsúlyozott gömbfüggvények szorzatát is kifejezhetjük. A kapott kifejezés

$${}_{s_1} Y_{\ell_1}^{m_1} {}_{s_2} Y_{\ell_2}^{m_2} = \sum_{\ell_3=0}^{\infty} \sum_{m_3=-\ell_3}^{\ell_3} (-1)^{s_3+m_3} \times {}_{s_1 s_2 -s_3} G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 -m_3} {}_{s_3} Y_{\ell_3}^{m_3}, \quad (2.4.3)$$

ahol ${}_{s_1 s_2 -s_3} G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 -m_3}$ az általánosított Gaunt-együttható és a spinsúly meghatározásából eredően $s_3 = s_1 + s_2$.

A módosított Gaunt-együtthatókat a

$${}_{s_1 s_2 s_3} G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} = \int {}_{s_1} Y_{\ell_1}^{m_1} {}_{s_2} Y_{\ell_2}^{m_2} {}_{s_3} Y_{\ell_3}^{m_3} \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi. \quad (2.4.4)$$

integrál határozza meg. Ahogy a hagyományos gömbfüggvények esetén, úgy most is kifejezhetjük az integrál értékét a Wigner-féle 3-j szimbólumokkal:

$${}_{s_1 s_2 s_3} G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 m_3} = \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell_3 + 1)}{4\pi}} \times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ -s_1 & -s_2 & -s_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (2.4.5)$$

A 3- j szimbólumok 2.1. fejezetben részletezett tulajdonságai alapján a (2.4.3) kifejezésben szereplő összegzés jelentősen egyszerűsödik. Az egyszerűsítési lehetőségeket figyelembe véve

$$\begin{aligned} {}_{s_1}Y_{\ell_1}^{m_1} {}_{s_2}Y_{\ell_2}^{m_2} &= \sum_{\ell_3=|\ell_1-\ell_2}^{\ell_1+\ell_2} (-1)^{s_1+s_2+m_1+m_2} \\ &\times {}_{s_1 s_2 -(s_1+s_2)}G_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^{m_1 m_2 -(m_1+m_2)} {}_{s_1+s_2}Y_{\ell_3}^{m_1+m_2} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

adódik, míg az s_2 spinsúlyú ${}_{s_2}f$ és az s_3 spinsúlyú ${}_{s_3}g$ függvények $s_1 = s_2 + s_3$ spinsúlyú szorzatának kifejtési együtthatóit

$$\begin{aligned} ({}_{s_2}f \cdot {}_{s_3}g)_{\ell_1}^{m_1} &= \sum_{\ell_2=|s_2|}^{\infty} \sum_{m_2=-\ell_2}^{\ell_2} \sum_{\ell_3=\max\{|s_3|, |\ell_1-\ell_2|\}}^{\ell_1+\ell_2} (-1)^{m_1+s_1} f_{\ell_2}^{m_2} g_{\ell_3}^{m_1-m_2} \\ &\times {}_{s_2 s_3 -s_1}G_{\ell_2 \ell_3 \ell_1}^{m_2 m_1-m_2 -m_1} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

módon kapjuk meg.

A gömbön sehol nem eltűnő, 0 spinsúlyú függvénnyel történő osztást a [42]-ben bemutatott módon visszavezethetjük függvények szorzatára. Legyen A egy operátor egy Banach-téren, I az egységoperátor. Könnyen belátható, hogy

$$A \sum_{k=0}^N (I - A)^k = I - (I - A)^{N+1} \quad (2.4.8)$$

teljesül nem negatív N -ekre. Ha $\|I - A\| < 1$, akkor $N \rightarrow \infty$ esetén $(I - A)^{N+1}$ normája 0-hoz tart és a Neumann-sorként ismert

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - A)^k \quad (2.4.9)$$

összefüggést kapjuk. Ha most F egy adott függvénnyel való szorzás operátora, akkor amíg $\|I - F\| < 1$, addig az F^{-1} által reprezentált osztást (2.4.9) módon szorzások sorozatára vezethetjük vissza. Az alkalmazásban csonkítjuk ezt a sort egy olyan k_{max} értéknél, ahol az osztás pontossága vetekszik az egyéb forrásból származó pontatlansággal. Például 10^{-20} -os pontossághoz is csupán $k_{max} = 12$ szükséges. Ezen eljárást alkalmazva tetszőleges spinsúlyú függvények egy sehol el nem tűnő 0 spinsúlyú függvénnyel történő osztása mindig az ismertetett szorzással válik helyettesíthetővé.

2.5. Integrálás a gömbön

A mérlegegyenleteink kiértékelése során a változóink szorzatát ki kell integrálnunk a gömbön. A (2.4.5). definíció értelmében ezek az integrálok visszavezethetőek a Gaunt-együtthatókra. A 3.

fejezetben találkozni fogunk $Y_2^0 f g$ alakú szorzat integráljával, ahol f egy s_1 spinsúlyú, míg g egy $-s$ spinsúlyú függvény a gömbön. A Gaunt-együtthatók definícióját használva

$$\int {}_0Y_2^0 {}_{s_1}Y_{\ell_1}^{m_1} {}_{s_2}Y_{\ell_2}^{m_2} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = {}_{0s_1s_2}G_2^0 {}_{\ell_1}^{m_1} {}_{\ell_2}^{m_2}, \quad (2.5.1)$$

és így

$$\int Y_2^0 f g \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \sum_{\ell_1=\max(|s|,|m|)}^{\infty} \sum_{m=-\ell_1}^{\ell_1} \sum_{\ell_2=|\ell_1-2|}^{\ell_1+2} f_{\ell_1}^m g_{\ell_2}^{-m} \cdot {}_{0s-s}G_2^0 {}_{\ell_1}^m {}_{\ell_2}^{-m} \quad (2.5.2)$$

teljesül. Egy másik gyakran előforduló kifejezés az $f g$ szorzat integrálja. A

$$\begin{pmatrix} \ell & \ell & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{\ell-m}}{\sqrt{2\ell+1}} \quad (2.5.3)$$

speciális eset figyelembe vételével

$$\begin{aligned} \int {}_{s_1}Y_{\ell_1}^{m_1} {}_{s_2}Y_{\ell_2}^{m_2} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi &= \frac{1}{{}_0Y_0^0} \int {}_0Y_0^0 {}_{s_1}Y_{\ell_1}^{m_1} {}_{s_2}Y_{\ell_2}^{m_2} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{1}{{}_0Y_0^0} {}_{0s_1-s_1}G_0^0 {}_{\ell_1}^{m_1} {}_{\ell_1}^{-m_1} \delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{s_1}^{-s_2} \delta_{m_1}^{-m_2} \\ &= \frac{\delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{s_1}^{-s_2} \delta_{m_1}^{-m_2} (-1)^{s_1-m_1}}{{}_0Y_0^0 2\sqrt{\pi}} \\ &= \delta_{\ell_1}^{\ell_2} \delta_{s_1}^{-s_2} \delta_{m_1}^{-m_2} (-1)^{s_1-m_1}. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Végül

$$\int f g \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \sum_{\ell=\max(|s|,|m|)}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell}^m g_{\ell}^{-m} (-1)^{s-m}. \quad (2.5.5)$$

Ezek felhasználásával a vizsgált problémáink megoldása során előforduló integrálokat mind ki tudjuk értékelni.

2.6. Összefoglalás

A fejezetben bemutatott matematikai alapok képezik a következő fejezetekben ismertett célok eléréséhez kifejlesztett numerikus eljárások alapját. Láttuk, hogy bár a gyakran előforduló $\vec{\partial}\vec{\partial}$ operátor gömbi koordinátákkal felírva szinguláris a pólusokon, a gömbfüggvényeken vett hatását egy egyszerű algebrai formula jeleníti meg. Emiatt a spinsúlyozott gömbfüggvényeken alapuló spektrális módszerek különösen hasznosak. Az egyenleteinkben a nemlinearitásért felelős tagok kiértékelésére is mutattam be eljárásokat. A kapott (2.4.7) és (2.4.9) összefüggések lehetővé teszik szögfüggő nemlineáris parciális differenciálegyenletek széles osztályának jobb oldalán álló kifejezések kiértékelését direkt módon, a kifejtési együtthatókat használva. Az egyenletek numerikus

integrálása után pedig a (2.5.2) és (2.5.5) integrálokra vonatkozó eredmények elősegítik a kapott megoldás helyességének ellenőrzését. Ezeknek az eredményeknek egy kivonatát a [52] Physical Review D-ben megjelent cikk függelékében tettük közzé.

3. fejezet

Kerr-téridő lineáris perturbációi

Az általános relativitáselmélet egyik legizgalmasabb jóslata a feketelyukak és szingularitások létezésére vonatkozik. Birkhoff tétele értelmében a gömbszimmetrikus megoldások a vákuum régiókban izometrikusak a Schwarzschild-téridő valamely résztartományával, vagyis a gömbszimmetrikus csillagok körül a vákuumot a Schwarzschild-megoldás írja le (lásd például a [12, 53, 54] tankönyveket). Ennek ismeretében megkonstruálhatjuk az Oppenheimer–Snyder-összeomlást [55], amikor is egy porgömb által modellezett csillag összeroskad a gravitációs vonzása alatt és a kialakuló szingularitás körül létrejön egy feketelyuk, ahonnan nem jöhet ki információ. Vishveshwara [56] és Zerilli [57, 58], valamint Kay és Wald [59] munkái rámutattak arra, hogy a Schwarzschild-megoldás stabil a kis perturbációkkal szemben, így az alkalmas fizikai folyamatok modellezésére.

A Schwarzschild-megoldás felfedezése után az asztrofizikai szempontból fontosabb forgó, Kerr-féle megoldásra 47 évet kellett várni [60]. Nincs a Birkhoff-tételnek analógiája forgásszimmetria esetére és nem is várjuk, hogy egy forgó csillag körüli vákuumot a Kerr-megoldás egy része írja le: a várakozás az, hogy a forgó csillagok komplex szerkezetéből adódó egyenetlenségeket az összeomlás során kialakult feketelyuk ledobja magáról és csak aszimptotikus értelemben tart a Kerr-megoldáshoz.

Nem csak analitikus modellünk nincs, ami egy Kerr-féle feketelyuk létrejöttét leírná, de a megoldás stabilitásának kérdése is egy máig nyitott probléma. Whiting [61] és mások munkájának köszönhetően tudjuk, hogy a perturbáló módusok külön-külön stabilak, de a Kerr-feketelyukak esetében korántsem biztos, hogy minden perturbáció felírható ezen stabil módusok szuperpozíciójaként. A teljes stabilitás megállapítása felé vezető út egy fontos állomása a lineáris stabilitás bizonyítása. Ebben az esetben konstruálnunk kell egy megmaradó áramot, aminek a korlátossága biztosított, ha a perturbációk kellően gyorsan csengenek le [62, 63].

A lineáris perturbációk vizsgálata a stabilitás kérdésén túl is érdekes felfedezésekhez vezethet. A perturbációkat ledobó feketelyuk rezgései, a kvázinormális módusok a feketelyuk egyfajta sajátrezgései. Azon túl, hogy észlelésük fontos a feketelyukak fizikai paramétereinek meghatározása

szempontjából, York [64] a kvázinormális módusok és a feketelyuk entrópiája közötti kapcsolatot fedezte fel, míg Horowitz és Hubeny [65] az AdS/CFT kettősség kereteiben talált alkalmazást.

Legalább ilyen jelentőséggel bír a forgó feketelyukon szóródó perturbációk szuperradiáns viselkedése is. Penrose gondolatkísérlete óta tudjuk, hogy a feketelyuk forgási energiáját megcsapolva, abból energia nyerhető ki [14]. Perturbációk szóródása akkor szuperradiáns, amikor a végtelenbe tartó hullámok a feketelyuk kárára több energiát visznek el, mint amennyit a bejövő hullámok hoztak. Ez a jelenség szerepet kap olyan nagyon energikus dinamikai folyamatok magyarázatában, mint az egyik lehetséges, a kvazárok hihetetlen fényességét megmagyarázni képes folyamat [15].

A korábban említett elméleti hiányosságok ellenére az asztrofizikai jelentősége miatt a Kerr-téridő vizsgálata jelenleg is fontos területe az általános relativitáselméletnek. A dolgozat ezen fejezetében a lineáris stabilitás kérdéséhez kapcsolható módon az elektromágneses és gravitációs perturbációk lecsengésének ütemét érintő numerikus eredményeinket, illetve a bozonikus, kompakt tartójú kezdőadatok szuperradiáns szórásával kapcsolatos vizsgálatainkat ismertetjük. A fejezet felépítése a következőképpen alakul: a 3.1. alfejezetben adunk egy lényegretörő összefoglalást a Kerr-téridő munkánk szempontjából legfontosabb tulajdonságairól. A 3.2. alfejezetet a rögzített Kerr-téridő fölötti lineáris perturbációk fejlődését leíró Teukolsky-féle mesteregyenlet bemutatásának szenteltük. A tanulmányainkban a homogén Teukolsky-egyenlet megoldásait vizsgáljuk, ezért a fejezet hátra lévő részében a forrástagoktól eltekintünk. A 3.3. alfejezetben bemutatjuk a koordinátákat, amik lehetővé teszik, hogy a megoldásokat közvetlenül a feketelyuk eseményhorizontján és a végtelenben egyszerre vizsgálhassuk. Numerikánk helyességének alátámasztására egy új megmaradó áramot használunk, amit a 3.4. alfejezetben ismertetünk. Miután az elméleti háttérrel bemutattuk, a 3.5. alfejezetben ismertetjük a választott probléma irodalmában fellelhető legfrissebb eredményeket, amikhez viszonyítanunk kell munkánkat. A 3.6. alfejezetben részletezzük, hogy milyen numerikus módszereket használunk a Teukolsky-egyenlet megoldása során. Ezt követően a megmaradó áramok vizsgálatával demonstráljuk a kódunk helyes működését (3.7. alfejezet) és ismertetjük az eredményeinket (3.8. alfejezet). A fejezet zárásaként a 3.9. alfejezetben a szuperradiancia jelenségére vonatkozó vizsgálatainkról adunk egy rövid áttekintést.

3.1. A Kerr-téridő

Kerr 1963-ban tette közzé stacionárius és forgásszimmetrikus vákuum feketelyuk megoldását [60]. A Kerr-metrikának (t, r, ϑ, ϕ) Boyer-Lindquist-koordináták fölött csupán egy nem diagonális eleme

van, ezért célszerű ezeket a koordinátákat használni az ívelem megadására:

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) (dt)^2 + \frac{4arM}{\Sigma} \sin^2\vartheta dt d\phi - \frac{\Sigma}{\Delta} (dr)^2 - \Sigma (d\vartheta)^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2\vartheta}{\Sigma} \sin^2\vartheta (d\phi)^2, \quad (3.1.1)$$

ahol $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\vartheta$ és $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, M és a a Kerr feketelyuk tömege és egységnyi tömegre jutó impulzusmomentuma [66].

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $a \rightarrow 0$ átmenetben a gömbszimmetrikus Schwarzschild megoldást kapjuk, míg az $M \rightarrow 0$ átmenet esetén már korántsem ilyen nyilvánvaló, de visszakapjuk a Minkowski megoldást. Ennek oka, hogy (r, ϑ, ϕ) nem gömbi koordinátáknak felelnek meg, hanem a

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin\vartheta \cos\phi, \quad (3.1.2)$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin\vartheta \sin\phi, \quad (3.1.3)$$

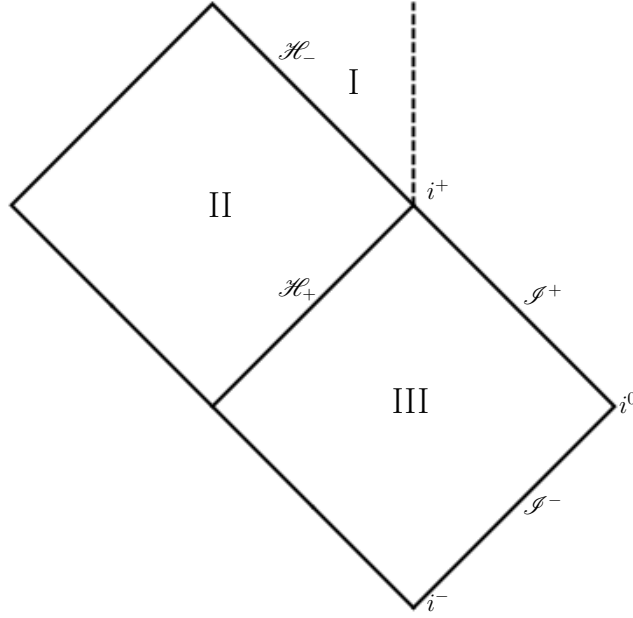
$$z = r \cos\vartheta \quad (3.1.4)$$

lapult elliptikus koordinátáknak.

A Kerr-megoldás egy stacionárius és forgásszimmetrikus megoldás. Ez egyenértékű azzal a megállapítással, hogy létezik egy $t^a = (\partial_t)^a$ időszerű Killing-vektormező és egy $\phi^a = (\partial_\phi)^a$ térszerű Killing-vektormező zárt pályákkal. Ezen Killing-vektormezők létezésének következtében a (3.1.1) metrika komponensei függetlenek a t és ϕ koordinátáktól.

A (3.1.1) metrika több helyen is szinguláris. A $\Delta = 0$ helyen csupán koordináta szingularitások lépnek fel, míg a $\Sigma = 0$ valódi skalár görbületi szingularitás, ahol az $R_{abcd}R^{abcd}$ Kretschmann-skalár végtelenhez tart. Mivel $\Sigma = 0$ az $r = 0$, $\vartheta = \pi/2$ feltételek mellett teljesül, a (3.1.2-3.1.4) összefüggések értelmében ezt a szingularitást az egyenlítő síkjában, mint egy a sugarú gyűrűt jeleníthetjük meg.

A $\Delta = 0$ egyenletnek két megoldása van: $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$. Ezeken az $r = r_{\pm}$ hiperfelületeken a $n^{(r)}_a = (dr)_a$ normálisok $n^{(r)}_a n^{(r)}_b g^{ab} = g^{rr} = \Delta/\Sigma$ értelmében fényszerűvé válnak, tehát a $r = r_{\pm}$ felületek fényszerű hiperfelületek. A két r_{\pm} megoldás $a = 0$ esetben egybeesik és közös értékük a Schwarzschild-téridő eseményhorizontjának a sugarát adja. Részletesebb vizsgálatok igazolják, hogy általános esetében r_+ valóban a Kerr-feketelyuk eseményhorizontját határozza meg, hiszen az $r \leq r_+$ pontokból indított fényjelek sosem hagyhatják el az $r \leq r_+$ tartományt. Az $r = r_-$ fényszerű hiperfelület egy Cauchy-horizont. Ez azt jelenti, hogy a téridő teljes $r > r_-$ része előállítható, mint egy ezen tartományban található Σ térszerű hiperfelületen adott kezdőadatrendszer időfejlődése. Ilyen értelemben az $r < r_-$ tartományban előforduló patológiák nem befolyásolják a $r > r_-$ térrész fejlődését [53].



3.1. ábra. A Kerr-téridő Carter–Penrose-diagramja az egyenlítő síkjában.

A 3.1. ábra mutatja a Kerr-téridő Carter–Penrose-diagramját az egyenlítő síkjában. Az $r = r_-$ -hoz tartozó \mathcal{H}_- horizont és az $r = r_+$ -hoz tartozó \mathcal{H}_+ horizont a téridőt három régióra bontja. Itt is látható, hogy az $r < r_-$ módon jellemzett I. régió pontjainak kauzális múltjában szerepel a szaggatott vonallal jelzett szingularitás. A külső, III. régió aszimptotikus szerkezete tükrözi a Kerr-téridő aszimptotikus síkságát: a $t = \text{const}$ felületek $r \rightarrow \infty$ mellett az i^0 -al jelölt térszerű végtelenben találkoznak, míg az $r = \text{const}$ felületek $t \rightarrow \pm\infty$ mellett az i^\pm jövő és múlt időszerű végtelenben. A legegyszerűbb befelé haladó radiális fényszerű geodetikusok a \mathcal{S}^- múlt fényszerű végtelenből érkeznek és a kimenő fényszerű geodetikusok a \mathcal{S}^+ jövő fényszerű végtelenbe tartanak. A stabilitásvizsgálatok a III. régióra vonatkoznak, éppen ezért vizsgálataink során a III. régiót és határait, \mathcal{H}_+ -t és \mathcal{S}^+ -t, vizsgáljuk. A numerikus pontosság növelése érdekében a rácsunkat úgy választottuk meg, hogy az lefedi a II. régió egy kis részét is. Végül megjegyezzük, hogy az egyenlítő síkjából kimozdulva az $r = 0$ hely megszűnik szingulárisnak lenni és a Kerr-téridő elvileg kiterjeszthető negatív r értékekre is [53].

A Kerr-téridőben van még egy felület, amit meg kell említenünk. Általában kényelmes a $t^a = (\partial_t)^a$ stacionárius megfigyelő által értelmezett mennyiségeket használnunk, de forgó téridőkben óvatosságnak kell lennünk: a $t^a t^b g_{ab}$ norma előjelet vált amikor

$$1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} = 0, \quad (3.1.5)$$

vagyis a

$$r_e^\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \vartheta} \quad (3.1.6)$$

felületeken. Az r_e^+ és r_e^- között t^a nem időszerű, azaz nem lehet egy megfigyelő világvonalának érintője. A III-as régióban elhelyezkedő $r_+ < r \leq r_e^+$ régiót ergoszféranak nevezzük.

A Penrose-folyamat éppen az ergoszféra létezésén alapul. Az, hogy a végtelen távoli stacionárius megfigyelő világvonalát érintő t^a Killing-vektormező kauzális jellege megváltozik az eseményhorizonton kívül, lehetővé teszi, hogy egy ügyesen felépített (gondolat)kísérlet során energiát nyerjünk ki a feketelyuk forgásából. Ehhez tekintsünk egy $A \rightarrow B + C$ bomlást, ahol az A részecske a végtelenből szabadon esve megközelíti a feketelyukat, majd az ergoszférában elbomlik B és C részecskékre. Ezek közül B behullik a feketelyukba, míg C távozik a végtelenbe. A bomlás \mathcal{B} pillanatában az impulzusmegmaradás értelmében

$$p_{(A)}^a(\mathcal{B}) = p_{(B)}^a(\mathcal{B}) + p_{(C)}^a(\mathcal{B}). \quad (3.1.7)$$

Mivel t^a Killing-vektormező, a $p_a t^a$ kontrakció a geodetikus mozgásállandója, vagyis a végtelenből indított A részecske esetén $p_{(A)a} t^a(\infty) = p_{(A)a} t^a(\mathcal{B}) = E_A > 0$ és a végtelenbe távozó C részecske esetén $p_{(C)a} t^a(\infty) = p_{(C)a} t^a(\mathcal{B}) = E_C > 0$, hiszen p^a és t^a azonos időirányhoz tartozó időszerű vektorok a végtelenben. Az érdekes eset az, amikor a B részecske nem jut ki az ergoszférából. $p_{(B)a} t^a(\mathcal{B}) = E_B$ energia ekkor a $p_{(B)}^a$ vektor egy térszerű irányba vett komponense, tehát semmi nem zárja ki, hogy negatív legyen és így a lendületmegmaradás (3.1.7) egyenletének

$$E_A = E_B + E_C \quad (3.1.8)$$

komponense alapján a kijövő és végtelenbe távozó C részecske energiája nagyobb legyen a bemenő A részecske energiájánál. Ily módon, a feketelyuk forgási energiáját megcsapolva, energia nyerhető ki a feketelyukból.

3.2. Lineáris perturbációk és Teukolsky egyenlete

Amint azt korábban is említettük a Kerr-téridő perturbációinak vizsgálata több okból is kiemelten fontos aktív kutatási terület. Mindezek fényében meglepő, hogy a különböző sugárzásokat leíró lineáris perturbációk dinamikáját Teukolsky [67, 68] már a múlt század 70-es éveiben le tudta írni egyetlen mesteregyenlettel. Ahhoz, hogy ezt az egyenletet megkapja, először felírta a perturbációk egyenleteit a Newman–Penrose formalizmusban [69]. Ezekben a változóiban felírva az extrémális spinsúlyú perturbációkra vonatkozó egyenletek szétcsatolódnak. A megfelelő változókra ezután egy átskálázást alkalmazva meglepődve tapasztalhatjuk, hogy a kapott egyenletek homogén részei csupán az s spin-paraméterben különböznek. Mivel a vonatkozó érvelésben kulcsfontosságú szerep jut a spinegyütthetős formalizmusnak, ezért a 3.2.1. fejezetben adunk egy rövid áttekintést a Newman–Penrose-formalizmus (NP-formalizmus) alapjairól. Miután ilyen módon megismertük

az alapvető változóinkat, a [3.2.2.](#) fejezetben bemutatjuk magát a mesteregyenletet (TME). Emlekeztetjük az olvasót, hogy ebben a fejezetben a NP-formalizmushoz kapcsolódó irodalomban megszokott (+, −, −, −) szignatúrát használjuk.

3.2.1. A spinegyütthetős formalizmus alapjai

Ebben az alfejezetben felidézük a Newman–Penrose-formalizmus néhány összefüggését azért, hogy a rákövetkező alfejezetben felírassuk a szétcsatlódó perturbációs egyenleteket. A témában hasznos összefoglaló található Chandrasekhar könyvében [\[70\]](#), illetve egy nagyon általános leírás található Rindler és Penrose könyvében [\[46\]](#).

Mivel a NP-formalizmus a tetrádokra épülő módszerek egy speciális esete, az első lépésünk egy $(\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$ tetrád felvétele, ahol ℓ^a és n^a jövő irányú fényszerű vektormezők, míg m^a és komplex konjugáltja komplex fényszerű vektormezők. A tetrád elemek kontrakciói csupán a két alábbi esetben lesznek nullától különbözőek

$$\ell^a n_a = 1, \quad m^a \bar{m}_a = -1. \quad (3.2.1)$$

Az $(\ell^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$ fényszerű tetrádot felhasználva a tenzoriális mennyiségeket kifejezhetjük a tetrád vett komponenseik segítségével, a deriváltjaikat pedig a tetrádelemek mentén vett

$$\ell^a \nabla_a f = Df, \quad n^a \nabla_a f = \Delta f, \quad m^a \nabla_a f = \delta f, \quad \bar{m}^a \nabla_a f = \bar{\delta} f \quad (3.2.2)$$

irány menti deriváltakkal¹. A tetrádelemek ilyen NP-deriváltjai adják a

$$\kappa = \ell^a m^b \nabla_a \ell_b, \quad \epsilon = \frac{1}{2} \ell^a (n^b \nabla_a \ell_b - \bar{m}^b \nabla_a m_b), \quad \varpi = -\ell^a \bar{m}^b \nabla_a n_b, \quad (3.2.3)$$

$$\tau = n^a m^b \nabla_a \ell_b, \quad \gamma = \frac{1}{2} n^a (n^b \nabla_a \ell_b - \bar{m}^b \nabla_a m_b), \quad \nu = -n^a \bar{m}^b \nabla_a n_b, \quad (3.2.4)$$

$$\sigma = m^a m^b \nabla_a \ell_b, \quad \beta = \frac{1}{2} m^a (n^b \nabla_a \ell_b - \bar{m}^b \nabla_a m_b), \quad \mu = -m^a \bar{m}^b \nabla_a n_b, \quad (3.2.5)$$

$$\varrho = \bar{m}^a m^b \nabla_a \ell_b, \quad \alpha = \frac{1}{2} \bar{m}^a (n^b \nabla_a \ell_b - \bar{m}^b \nabla_a m_b), \quad \lambda = -\bar{m}^a \bar{m}^b \nabla_a n_b \quad (3.2.6)$$

spinegyütthetőket.

A [2.2.](#) fejezetben tapasztaltakhoz hasonlóan a kirótt [\(3.2.1\)](#) feltételek még mindig hagynak nekünk némi szabadságot a tetrád rögzítésében. A [\(3.2.1\)](#) feltételeket változatlanul hagyó transzformációkat az alábbi három csoportba szokás sorolni [\[70\]](#):

- I. típusú forgatások, amik érintetlenül hagyják ℓ^a -t,

¹Megjegyezzük, hogy a Δ szimbólum két különböző differenciáloperátort is jelöl attól függően, hogy az egység-gömb geometriájáról vagy a Newman–Penrose-formalizmus egyenleteiről beszélünk. A dolgozatomban ahányszor a NP-formalizmusban értelmezett mennyiségre hat, mindig az itt definiált differenciáloperátort értjük alatta.

- II. típusú forgatások, amik érintetlenül hagyják n^a -t,
- III. típusú forgatások, amik érintetlenül hagyják ℓ^a és n^a irányát, de lehetővé tesznek egy Lorentz-transzformációt és egy forgatást.

A Kerr-megoldás algebrailag speciális, D-típusú téridő. Ez azt jelenti, hogy a Weyl-tenzor meghatároz két kitüntetett, kétszeresen degenerált fényszerű sajátirányt. Beállítva ℓ^a és n^a vektormezőket ezekbe az irányokba az így kapott főirányú tetrad csak a III. típusú forgatásokat engedi meg. Ezen transzformáció hatásán keresztül értelmezhetjük a mennyiségeink spin- és boostsúlyát.

A III. típusú transzformációkat paraméterezhetjük egy komplex változóval, λ -val. Ekkor a III. típusú forgatások hatása a tetrad elemein:

$$\ell^a \rightarrow \lambda \bar{\lambda} \ell^a, \quad n^a \rightarrow \lambda^{-1} \bar{\lambda}^{-1} n^a, \quad (3.2.7)$$

$$m^a \rightarrow \lambda \bar{\lambda}^{-1} m^a, \quad \bar{m}^a \rightarrow \bar{\lambda} \lambda^{-1} \bar{m}^a. \quad (3.2.8)$$

Egy $T_{a_1 a_2 \dots a_k}$ tenzormező és a tetrad elemeinek valamilyen kontrakciójával előállított η skalár

$$\eta \rightarrow \lambda^p \bar{\lambda}^q \eta \quad (3.2.9)$$

homogén módon változik meg a III. típusú forgatások hatása alatt. Az ilyen, homogén módon transzformálódó skalárok esetében az $s = (p - q)/2$ mennyiséget η spinsúlyának, $r = (p + q)/2$ -t η boostsúlyának hívjuk. Könnyen belátható, hogy minden ℓ^a -val kontrahált index eggyel növeli, míg minden n^a -val kontrahált index eggyel csökkenti a boostsúlyt. Hasonlóan minden m^a -val kontrahált index eggyel növeli, míg minden \bar{m}^a -val kontrahált index eggyel csökkenti η spinsúlyát.

Felmerülhet, hogy az előbb definiált spinsúly-fogalom hogyan viszonyul a 2.2. fejezetben meghatározott spinsúly-fogalomhoz. Az alkalmazott konvencióktól eltekintve a 2. fejezet tartalma értelmezhető úgy, hogy a spinegyütthetős formalizmust megszorítjuk a gömbre. Ekkor m^a megszorítása fog megfelelni q^a -nak. Penrose és Rindler [46]-ban ezt a miénkhez képest fordított irányú tárgyalást alkalmazzák. Ezt figyelembe véve a spinsúlyozott gömbfüggvények alkalmazása a NP-formalizmusban és különösen a TME vizsgálatában természetes módon adódik.

Az eddig bemutatott mennyiségek közül csupán κ , τ , σ , ϱ , ϖ , ν , μ és λ súlyozott mennyiségek. Az ϵ , γ , β , α spinegyütthetők és általában a Df , Δf , δf , $\bar{\delta} f$ deriváltak inhomogén módon transzformálódnak a III. típusú forgatások alatt. Ugyan a dolgozat további részében tartózkodni fogunk a használatuktól, de a teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy ezt orvosolandó a 2.2. fejezetben bemutatottakhoz hasonlóan itt is bevezethetjük súlyozott mennyiségek teréből a súlyozott mennyiségek terébe képező Geroch–Held–Penrose-deriváltakat [71]. Ehhez bevezetjük a ∇_a kovariáns deriváló operátor

$$\Theta_a f = [\nabla_a - p(\gamma \ell_a + \epsilon n_a - \alpha m_a - \beta \bar{m}_a) - q(\bar{\gamma} \ell_a + \bar{\epsilon} n_a - \bar{\alpha} \bar{m}_a - \bar{\beta} m_a)] f \quad (3.2.10)$$

módon általánosított változatát. A tetrad elemeivel nem kontrahált tenzorok esetében visszaadja a ∇_a kovariáns deriváló operátort ($p = q = 0$), egyébként kompenzálja a bázisvektorok deriváltjaiból származó inhomogenitásokat a III. típusú forgatások során. A Θ_a deriváló operátor hatása alatt nem változik sem a spinsúly, sem a boostsúly. Megjegyezzük, hogy (3.2.10)-hez egy eltűnő spin- és boostsúlyú 1-formamezőt adva egy olyan operátort kapunk, ami szintén kielégíti ezeket a tulajdonságokat. A GHP-deriváltak a (3.2.2) NP-deriváltakhoz hasonlóan képezhetők Θ_a -val:

$$\mathfrak{p} = \ell^a \Theta_a = D - p\epsilon - q\bar{\epsilon}, \quad (3.2.11)$$

$$\mathfrak{p}' = n^a \Theta_a = \Delta - p\gamma - q\bar{\gamma}, \quad (3.2.12)$$

$$\mathfrak{d}_G = m^a \Theta_a = \delta - p\beta - q\bar{\alpha}, \quad (3.2.13)$$

$$\bar{\mathfrak{d}}_G = \bar{m}^a \Theta_a = \bar{\delta} - p\alpha - q\bar{\beta}, \quad (3.2.14)$$

ahol ebben a szöveggörnyezetben \mathfrak{d}_G és $\bar{\mathfrak{d}}_G$ kapnak egy-egy megkülönböztető indexet, jelezve hogy a 2. fejezetben alkalmazott \mathfrak{d} és $\bar{\mathfrak{d}}$ ezek megszorításaival állnak kapcsolatban. A fenti GHP-deriváltakat alkalmazva az egyenleteinkben nem jelennek meg az inhomogén módon transzformálódó ϵ , γ , β és α spinegyütthetők.

Visszatérve a Newman–Penrose-formalizmus kereteihez érdemes megjegyezni, hogy a célunk az elektromágneses és gravitációs perturbációk vizsgálata. Így a munkánk szempontjából kitüntetett fontosságú fizikai mennyiségek az F_{ab} Faraday-tenzor és a C_{abcd} Weyl-tenzor. Az elektromágneses mező hat független változóját a NP-formalizmusban a

$$\phi_0 = F_{ab} l^a m^b, \quad (3.2.15)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left(F_{ab} l^a n^b + F_{ab} \bar{m}^a m^b \right), \quad (3.2.16)$$

$$\phi_2 = F_{ab} \bar{m}^a n^b \quad (3.2.17)$$

komplex skalárok jelenítik meg. Ezek közül ϕ_0 és ϕ_2 a kimenő és bejövő sugárzást tartalmazza, míg ϕ_1 a Coulomb-járulékot írja le. Spinsúlyuk és boostsúlyuk rendre $(1, 1)$, $(0, 0)$ és $(-1, -1)$. Hasonlóan a Weyl-tenzor tíz független változóját a következő öt komplex mennyiség jeleníti meg:

$$\Psi_0 = - C_{abcd} \ell^a m^b \ell^c m^d, \quad (3.2.18)$$

$$\Psi_1 = - C_{abcd} \ell^a n^b \ell^c m^d, \quad (3.2.19)$$

$$\Psi_2 = - C_{abcd} \ell^a m^b \bar{m}^c n^d, \quad (3.2.20)$$

$$\Psi_3 = - C_{abcd} \ell^a n^b \bar{m}^c n^d, \quad (3.2.21)$$

$$\Psi_4 = - C_{abcd} n^a \bar{m}^b n^c \bar{m}^d. \quad (3.2.22)$$

A Weyl-tenzor komponenseinek értelmezéséhez érzékletes segítséget nyújt Szekeres gravitációs iránytűje [72]. A gondolatkísérlet eredménye szerint Ψ_0 és Ψ_1 tárolja a vákuumban kifelé haladó transzverzálisan és longitudinálisan polarizált gravitációs hullámokat, Ψ_2 a sugárzást nem

tartalmazó járulékokat, Ψ_3 és Ψ_4 pedig a befelé haladó longitudinálisan és transzverzálisan polarizált gravitációs hullámokat. A spinsúlyuk és boostsúlyuk rendre $(2, 2)$, $(1, 1)$, $(0, 0)$, $(-1, -1)$ és $(-2, -2)$. Mivel a vizsgált mennyiségeink esetén a spinsúly és a boostsúly megegyezik, a spinsúly egyértelműen jellemzi őket. Ennek értelmében a továbbiakban a boostsúlyra nem hivatkozunk.

3.2.2. Teukolsky mesteregyenlete

Teukolsky a NP-formalizmus változóival felírt Maxwell-egyenletekből és a Bianchi-azonosság egyenleteiből indult ki, majd minden változót felírt $f = {}^{\circ}f + {}^{\Delta}f$ alakban, ahol ${}^{\circ}f$ az f mennyiség értéke a Kerr-téridőben, ${}^{\Delta}f$ egy perturbáció. A Kerr-megoldás vákuum megoldás, tehát ${}^{\circ}\phi_0 = {}^{\circ}\phi_1 = {}^{\circ}\phi_2 = 0$. Ezen felül a Kerr Petrov-D-típusú téridő, ami azt eredményezi, hogy a főirányú tetrádot alkalmazva a Weyl-tenzorra ${}^{\circ}\Psi_0 = {}^{\circ}\Psi_1 = {}^{\circ}\Psi_3 = {}^{\circ}\Psi_4 = 0$ teljesül. A Goldberg–Sachs-tétel értelmében a Weyl-skalárok eltűnéséből következik, hogy ${}^{\circ}\kappa = {}^{\circ}\sigma = {}^{\circ}\nu = {}^{\circ}\lambda = 0$ (lásd például [70]). További egyszerűsítést tesz lehetővé, ha a tetrád megválasztásában rejlő maradék szabadságunkat kiaknázva Kinnersley [73] választásával élünk. Ekkor ${}^{\circ}\epsilon = 0$. A perturbációkban magasabb rendű tagokat eldobva megkapjuk a lineáris perturbációk evolúcióját leíró egyenleteket. Megjegyezzük, hogy ugyan a perturbált téridőben is teljesül a (3.2.1) normálási feltétel, a perturbációk következtében a tetrád megváltozhat a forgatások korábban felsorolt három típusának vagy tetrádot érintetlenül hagyó infinitezimális koordináta-transzformációknak megfelelően. Ezek hatásának figyelembe vételével megállapítható, hogy a háttéren való eltűnésük következtében az általunk vizsgált ϕ_0 , ϕ_2 , Ψ_0 és Ψ_4 skalárok esetében ezek a változások másodrendben jelennek meg. Így tehát a lineáris perturbációszámítás keretein belül ϕ_0 , ϕ_2 , Ψ_0 és Ψ_4 mértékinvariáns mennyiségek [68]. A jelölések egyszerűsítése végett innentől elhagyjuk a háttérre, illetve a perturbációra utaló jelöléseket. Ψ_2 mindig a háttérhez tartozó Weyl-skalár, míg ϕ_0 , ϕ_2 , Ψ_0 és Ψ_4 a perturbált mennyiségeket jelölik. A spinegyütthetők szintén a Kerr-háttér spinegyütthetőit jelölik.

Ilyen módon, ha az F_{ab} perturbáció kielégíti a Maxwell-egyenletet, akkor találhatóak olyan egyenletek, amelyek külön a ϕ_0 és külön a ϕ_2 perturbációk fejlődését írják le. Ezek az egyenletek [68]

$$\begin{aligned} & [(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\Delta + \mu - 2\gamma) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\omega})(\bar{\delta} + \varpi - 2\alpha)]\phi_0 \\ & = 2\pi[(\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\omega})J_0 - (D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})J_2] \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

valamint

$$\begin{aligned} & [(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})(D - \rho + 2\epsilon) - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\varpi - \bar{\tau})(\delta - \tau + 2\beta)]\phi_2 \\ & = 2\pi[(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})J_3 - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\varpi - \bar{\tau})J_1], \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

ahol $J_0 = \ell_a j^a$, $J_1 = n_a j^a$, $J_2 = m_a j^a$ és $J_3 = \bar{m}_a j^a$ a Maxwell-egyenlet forrásának megfelelő komponensei. Hasonló módon, ha a Ψ_0 és Ψ_4 perturbációk kielégítik a Bianchi-azonosságot, akkor fejlődési egyenleteikben nem szerepel a Weyl-tenzor más komponense. A gravitációs perturbációk fejlődését leíró szétcsatolt egyenletek

$$\begin{aligned} & [(D - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})(\Delta - 4\gamma + \mu) \\ & \quad - (\delta + \bar{\omega} - \bar{\alpha} - 3\beta - 4\tau)(\bar{\delta} - 4\alpha + \varpi) - 3\Psi_2]\Psi_0 = 4\pi T_0 \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

és

$$\begin{aligned} & [(\Delta + 3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu})(D + 4\epsilon - \rho) - \\ & \quad (\bar{\delta} - \bar{\tau} + \bar{\beta} + 3\alpha + 4\varpi)(\delta - \tau + 4\beta) - 3\Psi_2]\Psi_4 = 4\pi T_4, \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

ahol a jobb oldalon

$$\begin{aligned} T_0 = & (D - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\rho - \bar{\rho})[(\delta + 2\bar{\omega} - 2\beta)T_{13}{}^B - (D - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon} - \bar{\rho})T_{33}{}^B] \\ & - (\delta + \bar{\omega} - \bar{\alpha} - 3\beta - 4\tau)[(\delta + \bar{\omega} - 2\bar{\alpha} - 2\beta)T_{11}{}^B - (D - 2\epsilon - 2\bar{\rho})T_{13}{}^B] \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

és

$$\begin{aligned} T_4 = & (\Delta + 3\gamma - \bar{\gamma} + 4\mu + \bar{\mu})[(\bar{\delta} - 2\bar{\tau} + 2\alpha)T_{24} - (\Delta + 2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu})T_{44}] \\ & + (\bar{\delta} - \bar{\tau} + \bar{\beta} + 3\alpha + 4\varpi)[(\Delta + 2\gamma + 2\bar{\mu})T_{24} - (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\bar{\beta} + 2\alpha)T_{23}] \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

áll. Itt T_{ab} a linearizált Einstein-egyenlet jobb oldalán található energia-impulzus tenzor. T_{ab} általában kvadratikus a mezőkben, illetve a deriváltjaikban, így amennyiben a mezőkre, mint perturbációkra gondolunk, a visszahatásuk a háttér metrikára csak másodrendben jelenik meg.

A mesteregyenlet a $\psi^{(-2)} = (\Psi_2)^{-4/3}\Psi_4$, $\psi^{(-1)} = (\Psi_2)^{-2/3}\phi_2$, $\psi^{(+1)} = \phi_0$ és $\psi^{(+2)} = \Psi_0$ változókra vonatkozik. Ezek meghatározásához szükségünk lesz a következő Bianchi-egyenletekre, amelyek a D-típusú vákuum téridőkre vonatkozó egyszerűsítések figyelembevételével az alábbi alakot öltik

$$D\Psi_2 = 3\rho\Psi_2, \quad (3.2.29)$$

$$\Delta\Psi_2 = -3\mu\Psi_2, \quad (3.2.30)$$

$$\delta\Psi_2 = 3\tau\Psi_2, \quad (3.2.31)$$

$$\bar{\delta}\Psi_2 = -3\varpi\Psi_2. \quad (3.2.32)$$

Ezek figyelembevételével kapjuk a

$$D\phi_2 = (\Psi_2)^{2/3}[D + 2\rho]\psi^{(-1)}, \quad (3.2.33)$$

$$\Delta\phi_2 = (\Psi_2)^{2/3}[\Delta - 2\mu]\psi^{(-1)}, \quad (3.2.34)$$

$$\delta\phi_2 = (\Psi_2)^{2/3}[\delta + 2\tau]\psi^{(-1)}, \quad (3.2.35)$$

$$\bar{\delta}\phi_2 = (\Psi_2)^{2/3}[\bar{\delta} - 2\varpi]\psi^{(-1)}, \quad (3.2.36)$$

valamint

$$D\Psi_4 = (\Psi_2)^{4/3}[D + 4\varrho]\psi^{(-2)}, \quad (3.2.37)$$

$$\Delta\Psi_4 = (\Psi_2)^{4/3}[\Delta - 4\mu]\psi^{(-2)}, \quad (3.2.38)$$

$$\delta\Psi_4 = (\Psi_2)^{4/3}[\delta + 4\tau]\psi^{(-2)}, \quad (3.2.39)$$

$$\bar{\delta}\Psi_4 = (\Psi_2)^{4/3}[\bar{\delta} - 4\varpi]\psi^{(-2)} \quad (3.2.40)$$

összefüggéseket. Ezeket felhasználva a (3.2.23-3.2.26) egyenletek az alábbi alakot öltik

$$\begin{aligned} & [(D - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\varrho - \bar{\varrho})(\Delta - 4\gamma + \mu) \\ & - (\delta + \bar{\varpi} - \bar{\alpha} - 3\beta - 4\tau)(\bar{\delta} - 4\alpha + \varpi) - 3\Psi_2]\psi^{(2)} = 4\pi T_0, \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

$$[(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\varrho - \bar{\varrho})(\Delta + \mu - 2\gamma) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\varpi})(\bar{\delta} + \varpi - 2\alpha)]\psi^{(1)} = 2\pi S_0, \quad (3.2.42)$$

$$[(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + \bar{\mu})(D + \varrho + 2\epsilon) - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})(\delta + \tau + 2\beta)]\psi^{(-1)} = 2\pi(\Psi_2)^{-2/3}S_2, \quad (3.2.43)$$

$$\begin{aligned} & [(\Delta + 3\gamma - \bar{\gamma} + \bar{\mu})(D + 4\epsilon + 3\varrho) - (\bar{\delta} - \bar{\tau} + \bar{\beta} + 3\alpha)(\delta + 4\beta + 3\tau) - 3\Psi_2]\psi^{(-2)} \\ & = 4\pi(\Psi_2)^{-4/3}T_4, \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

ahol S_0 és S_2 a 2π faktortól eltekintve a (3.2.23) és (3.2.24) egyenletek jobb oldalán található kifejezéseket jelölik.

A (3.2.41-3.2.44) egyenletek a kompakt kovariáns

$$[{}_s\mathcal{D}^a {}_s\mathcal{D}_a - 4s^2\Psi_2]\psi^{(s)} = \mathcal{S} \quad (3.2.45)$$

alakban is felírhatóak [74], ahol

$${}_s\mathcal{D}_a = \nabla_a + s\Gamma_a = \nabla_a + 2s[-\gamma\ell_a - (\varrho + \epsilon)n_a + \alpha m_a + (\tau + \beta)\bar{m}_a] \quad (3.2.46)$$

a (3.2.10) GHP konnexiónak egy speciális esete [75], \mathcal{S} pedig a (3.2.41-3.2.44) egyenletek jobb oldalán található források rövidített jelölésére szolgál.

Most írjuk fel a (3.2.45) egyenletet a (t, r, ϑ, ϕ) Boyer–Lindquist-koordinátákban. A Kerr-háttér metrikáját a (3.1.1) ívelem adja meg, a Kinnersley-tetrád elemeinek komponensei és a háttér nem eltűnő spinegyütthatói pedig a következőképpen alakulnak [68]:

$$\ell^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{r^2+a^2}{\Delta} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad n^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{r^2+a^2}{2\Sigma} \\ -\frac{\Delta}{2\Sigma} \\ 0 \\ \frac{a}{2\Sigma} \end{pmatrix}, \quad m^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{ia \sin\vartheta}{\sqrt{2}(r+ia \cos\vartheta)} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}(r+ia \cos\vartheta)} \\ \frac{i}{\sqrt{2}(r+ia \cos\vartheta) \sin\vartheta} \end{pmatrix} \quad (3.2.47)$$

és

$$\begin{aligned}
\varrho &= -\frac{1}{r - ia \cos\vartheta}, & \beta &= -\bar{\varrho} \frac{\text{ctg}\vartheta}{2\sqrt{2}}, \\
\varpi &= ia\varrho^2 \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}}, & \tau &= -ia\varrho\bar{\varrho} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2}}, \\
\mu &= \varrho^2 \bar{\varrho} \frac{\Delta}{2}, & \gamma &= \mu + \varrho\bar{\varrho} \frac{r-M}{2}, \\
\alpha &= \varpi - \bar{\beta}, & \Psi_2 &= M\varrho^3.
\end{aligned} \tag{3.2.48}$$

Ezeket felhasználva a (3.2.41-3.2.44) egyenletek homogén részei a

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a^2 \sin^2\vartheta \right] \frac{\partial^2 \psi^{(s)}}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \psi^{(s)}}{\partial t \partial \phi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta} \right] \frac{\partial^2 \psi^{(s)}}{\partial \phi^2} \\
&\quad - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial \vartheta} \right) \\
&\quad - 2s \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} \right] \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial \phi} - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos\vartheta \right] \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial t} \\
&\quad + (s^2 \text{ctg}^2\vartheta - s) \psi^{(s)} = 0 \tag{3.2.49}
\end{aligned}$$

alakot öltik, a Bini-féle Γ^α konnexió koordináta komponensei pedig [74]

$$\Gamma^\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Sigma} \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - (r + ia \cos\vartheta) \right] \\ -\frac{1}{\Sigma} (r - M) \\ 0 \\ -\frac{1}{\Sigma} \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + i \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} \right] \end{pmatrix}. \tag{3.2.50}$$

A következőkben vizsgálatainkat a homogén egyenlet megoldásaira korlátozzuk. Láthatjuk, hogy a horizonton és a $r \rightarrow \infty$ térszerű végtelenben az egyenlet több együtthatója is szingulárisan viselkedik. A következő fejezetben tárgyaljuk a szingularitások kezelésének módját.

3.3. Regularizáció

A (3.2.49) egyenleten világosan látszik, hogy szingulárisan viselkedik mind a $\Delta \rightarrow 0$, mind az $r \rightarrow \infty$ esetben. Mivel a célunk az, hogy a sugárzások viselkedését megfigyeljük a külső horizonton és a jövő fényszerű végtelenben, új koordinátákat kell keresnünk, amelyekben regulárisan viselkedik a téregyenlet. Ebben a fejezetben bemutatjuk a [51]-ben Rácz és Tóth által alkalmazott R-T, horizonton áthatoló és hiperboloidális koordinátákat, valamint Harms és társai [76] által a mezőkre alkalmazott átskálázásokat, amikkel elérjük, hogy a TME megoldható legyen a kérdéses helyeken.

3.3.1. Bemenő Kerr-koordináták

Első lépésben a (t, r, ϑ, ϕ) Boyer–Lindquist-koordinátákat lecseréljük $(\tau, r, \vartheta, \varphi)$ bemenő Kerr-koordinátákra, ahol az új τ idő és φ azimutális koordináták a következő összefüggések által vannak meghatározva:

$$\tau = t - r + r_*, \quad (3.3.1)$$

$$\varphi = \phi + \int dr \frac{a}{\Delta}, \quad (3.3.2)$$

ahol az r_* teknőc koordinátát az

$$r_* = \int dr \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad (3.3.3)$$

integrál határozza meg. A ∂_τ megfigyelők továbbra is Killing-megfigyelők, a $\tau = \text{const}$ térszerű hiperfelületek pedig áthatolnak a horizonton és az i^0 térszerű végtelenbe tartanak ahogy $r \rightarrow \infty$. A horizontok továbbra is az $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ helyen találhatóak és az ergoszféra határa is a $r_e = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \vartheta}$ helyen maradt.

A metrika nem eltűnő

$$g_{\tau\tau} = -\frac{2Mr - \Sigma}{\Sigma}, \quad g_{\tau r} = -\frac{2Mr}{\Sigma}, \quad (3.3.4)$$

$$g_{\tau\varphi} = \frac{2arM \sin^2 \vartheta}{\Sigma}, \quad g_{rr} = -\frac{2Mr + \Sigma}{\Sigma}, \quad (3.3.5)$$

$$g_{r\varphi} = \frac{(2Mr + \Sigma)a \sin^2 \vartheta}{\Sigma}, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -\Sigma, \quad (3.3.6)$$

$$g_{\varphi\varphi} = -\frac{\sin^2 \vartheta (2Ma^2 r \sin^2 \vartheta + (a^2 + r^2)\Sigma)}{\Sigma} \quad (3.3.7)$$

koordinátakomponensei arról tanúskodnak, hogy ezek a koordináták már alkalmasak a horizont vizsgálatára. Ezzel szemben a tetrad

$$\ell^\alpha = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4Mr}{\Delta} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{2a}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad n^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2\Sigma} \\ -\frac{\Delta}{2\Sigma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{ia \sin \vartheta}{\sqrt{2}(r+ia \cos \vartheta)} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}(r+ia \cos \vartheta)} \\ \frac{i}{\sqrt{2}(r+ia \cos \vartheta) \sin \vartheta} \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

komponensei továbbra is szingulárisak, ennél fogva a vizsgált mezőink is azok lesznek. Ezt egy $\ell^a \rightarrow \Delta \ell^a$ és $n^a \rightarrow \Delta^{-1} n^a$ forgatással lehet kezelni. Ez a $\psi^{(s)}$ mezőkben ($r = s$ felhasználásával) egy $\widehat{\psi^{(s)}} = \Delta^s \psi^{(s)}$ átskálázásként jelenik meg. Valóban, bemenő Kerr koordinátákban felírva az egyenletet az átskálázott $\widehat{\psi^{(s)}}$ mezőre egy a \mathcal{H}_+ horizonton reguláris kifejezést kapunk.

Megjegyezzük, hogy ebben a tetrádban ϵ már nem tűnik el, így a kapott egyenletek NP-formalizmusban már nem feleltethetők meg direkt módon a (3.2.41-3.2.44) kifejezéseknek.

3.3.2. Hiperboloidális kompaktifikáció

Mielőtt rátérünk a koordináták ismertetésére, felidézünk néhány konform transzformációkra vonatkozó összefüggést Wald könyvének [53] D függelékéből. Legyen Ω egy sima, pozitív függvény. Ekkor $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ metrikát a g_{ab} metrika konform transzformáltjának tekintjük. A $\tilde{g}^{ab}\tilde{g}_{bc} = g^{ab}g_{bc} = \delta^a_b$ összefüggés alapján $\tilde{g}^{ab} = \Omega^{-2}g^{ab}$. Egy egyenlet konformisan invariáns, ha létezik valós w , hogy Ψ akkor és csak akkor megoldása a g_{ab} -vel felírt egyenletnek, ha $\tilde{\Psi} = \Omega^w\Psi$ megoldása a \tilde{g}_{ab} -vel felírt egyenletnek. w -t ekkor a Ψ mező konform súlyának nevezzük. Tekintsük most a tömegtelen skalármezőre vonatkozó hullámeqyenletet, mely a TME speciális esete $s = 0$ mellett. A vonatkozó hullámeqyenlet bal oldalán álló kifejezés a következő módon transzformálódik:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\tilde{\psi}^{(0)} &= \Omega^{w-2}g^{ab}\nabla_a\nabla_b\psi^{(0)} + 2(w+1)\Omega^{w-3}g^{ab}\nabla_a\Omega\nabla_b\psi^{(0)} \\ &+ w\Omega^{w-3}\psi^{(0)}g^{ab}\nabla_a\nabla_b\Omega \\ &+ w(w+1)\Omega^{w-4}\psi^{(0)}g^{ab}\nabla_a\Omega\nabla_b\Omega. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Láthatjuk, hogy nincs olyan w , ami mellett az egyenlet konformisan invariáns lenne. Kihasználva azonban, hogy a Kerr-téridő Ricci-skalárja eltűnik, módosíthatjuk az egyenletet a következő módon:

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\psi^{(0)} - \frac{1}{6}R\psi^{(0)} = 0. \quad (3.3.10)$$

Ez az egyenlet Kerr-háttéren visszaadja a tömegtelen Klein–Gordon-mező egyenletét, amely konformis transzformáció alatt a

$$\left(\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b - \frac{1}{6}\tilde{R}\right) [\Omega^{-1}\psi^{(0)}] = \Omega^{-3} \left[g^{ab}\nabla_a\nabla_b - \frac{1}{6}R\right] \psi^{(0)} \quad (3.3.11)$$

módon viselkedik, vagyis $w = -1$ konform súly mellett a skalármezőre vonatkozó Teukolsky-egyenlet konformisan invariáns [53]. Araneda [77] átfogóan vizsgálta a TME konformis transzformációk alatti viselkedését. Ha a $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ transzformáció mellett a tetradot $\tilde{\ell}^a = \ell^a$, $\tilde{n}^a = \Omega^{-2}n^a$, $\tilde{m}^a = \Omega^{-1}m^a$, $\tilde{\bar{m}}^a = \Omega^{-1}\bar{m}^a$ módon változtatjuk, akkor a (3.2.1) feltételek teljesülnek a transzformált vektormezőkre is. Ekkor a $\psi^{(-2)}$, $\psi^{(-1)}$, $\psi^{(1)}$ és $\psi^{(2)}$ változók mind $w = -1$ konform súly mellett biztosítják a rájuk vonatkozó egyenletek konformis invarianciáját. Látjuk tehát, hogy akármilyen koordinátákat is alkalmazunk, a konformis kompaktifikáció miatt egy $\Omega^{-1}\widehat{\psi^{(s)}}$ átskálázott változóra kell felírunk majd az egyenletet.

Zenginoğlu cikkében [78] egyszerű példákön szemlélteti, hogyan lehet olyan koordinátákat bevezetni, amik a \mathcal{S}^+ fényszerű jövő végtelent egy rögzített véges radiális koordináta értékre képezi.

Mivel eddig ∂_τ Killing-megfigyelő, szeretnénk megtartani ezt az előnyös tulajdonságot. A hiperboloidális szeléseket meghatározó T koordinátát a

$$T = \tau - h(r) \quad (3.3.12)$$

alakban keressük. A végtelent véges koordinátába leképező transzformáció $r = \Omega^{-1}R$ alakú, ahol $\Omega|_{\mathcal{I}^+} = 0$, de $\Omega'|_{\mathcal{I}^+} \neq 0$. Ω -t [51] és [76] nyomán

$$\Omega = \frac{1 - R^2}{2} \quad (3.3.13)$$

módon választjuk, így \mathcal{I}^+ az $R = 1$ hiperfelületnek fog megfelelni. A $h(r)$ magasságfüggvény megválasztása során ügyelnünk kell arra, hogy a $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ metrika \tilde{g}_{RR} komponense reguláris legyen. Ennek az elvárásnak a fenti Ω választással

$$h = \frac{1 + R^2}{1 - R^2} - 4M \log |1 - R^2| \quad (3.3.14)$$

megfelel. Az új (T, R) koordináták tehát az [51, 76]-ban is használt

$$\tau = T + \frac{1 + R^2}{1 - R^2} - 4M \log(|1 - R^2|), \quad (3.3.15)$$

$$r = \Omega^{-1}R = \frac{2R}{1 - R^2}. \quad (3.3.16)$$

implicit összefüggésekkel írhatóak fel. Ezekkel a koordinátákkal a \tilde{g}_{ab} metrika reguláris az $R \rightarrow 1$ helyen. A $T = \text{const}$ hiperfelületek továbbra is áthatolnak a \mathcal{H}_+ horizonton és aszimptotikusan fényszerűvé válik ahogy közelíti és metszi \mathcal{I}^+ -t. A \mathcal{H}_+ horizont az $R = R_+$ koordinátánál található míg a \mathcal{I}^+ $R = 1$ -nél.

3.3.3. A reguláris TME

Az előző fejezetekben láthattuk, hogy ha a (3.2.45) egyenletet szeretnénk megoldani a \mathcal{H}_+ horizonton és a \mathcal{I}^+ fényszerű végtelenben, akkor $\psi^{(s)}$ mezők helyett a

$$\Phi^{(s)}(T, R, \vartheta, \varphi) = [r(R) \cdot \Delta^s(R)] \cdot \psi^{(s)}(T, R, \vartheta, \varphi) \quad (3.3.17)$$

változókra kell megoldanunk az egyenleteket². Elvégezve a transzformációkat és leválasztva az átskázások által faktorizált szinguláris tényezőket a (3.2.45) homogén Teukolsky-egyenlet a

$$\begin{aligned} \partial_{TT}\Phi^{(s)} = \frac{1}{\mathcal{A} + \mathcal{B} \cdot Y_2^0} & \left[c_{RR} \cdot \partial_{RR}\Phi^{(s)} + c_{TR} \cdot \partial_{TR}\Phi^{(s)} + c_{T\varphi} \cdot \partial_{T\varphi}\Phi^{(s)} \right. \\ & + c_{R\varphi} \cdot \partial_{R\varphi}\Phi^{(s)} + c_{\vartheta\vartheta} \cdot \bar{\partial}\bar{\partial}\Phi^{(s)} + c_T \cdot \partial_T\Phi^{(s)} + i c_{T\bar{y}} Y_1^0 \cdot \partial_T\Phi^{(s)} \\ & \left. + c_R \cdot \partial_R\Phi^{(s)} + c_\varphi \cdot \partial_\varphi\Phi^{(s)} + c_0 \cdot \Phi^{(s)} \right] \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

alakot ölti, ahol Y_1^0 és Y_2^0 a 0 spinsúlyú gömbi harmonikusok $\ell = 1, 2$ és $m = 0$ indexekkel. A csupán R -től függő együtthatók explicit alakját az A függelékben találja az érdeklődő olvasó. Ezek az

²Az irodalommal való összehasonlíthatóság kedvéért Ω^{-1} helyett $r = R\Omega^{-1}$ faktort használunk.

együtthathók regulárisan viselkednek mind a horizonton, mind pedig a fényszerű végtelenben. Ezek a tulajdonságok lehetővé teszik, hogy ne kelljen peremfeltételeket használni az (3.3.18) egyenlet megoldása során.

Megjegyezzük, hogy a 2. fejezetben bemutatott $\bar{\delta}\bar{\delta}$ operátort felhasználva az összes ϑ és φ irányú deriváltat kifejezhetjük olyan operátorokkal, amiknek a ${}_sY_\ell^m$ gömbfüggvények sajátfüggvényei. Ez jelentős egyszerűsítés és egyúttal nagy mértékben javítja a numerikus vizsgálataink pontosságát, hiszen a szögek szerinti deriváltakat (3.3.18)-ban analitikusan értékelhetjük ki.

3.4. Megmaradó áramok

Numerikus vizsgálatoknál különösen hasznos a vizsgált jelenséghez tartozó megmaradó áram létezése. A hagyományos konvergencia vizsgálatok biztosítják, hogy a diszkretizáció helyes és a megoldások tartanak valamely egyenlet analitikus megoldásához. Arról azonban semmit nem mondanak, hogy a használni kívánt egyenlet implementációjában nincs-e hiba, illetve hogy mekkora a diszkretizációból adódó pontatlanság. Egy megmaradó mennyiség meg nem maradásának mértéke, legfőképp ennek konvergenciája rengeteg hasznos információt szolgáltat magáról az implementációról is. A következő fejezetekben bemutatunk a TME-hez tartozó két komplex megmaradó áramot, amelyeket később arra használunk, hogy igazoljuk a programunk helyes működését.

3.4.1. Kanonikus megmaradó áramok

Ismert, hogy egy s spinsúlyú $\psi^{(s)}$ mezőből és első rendű deriváltjaiból nem építhető fel olyan valós Lagrange-függvény, ami a (3.2.45) egyenletet adná, mint $\psi^{(s)}$ -re vonatkozó mozgásegyenlet [79]. Tóth [80] azonban megmutatta, hogy (3.2.45)-öt beillesztve egy egyenletrendszerbe felírhatjuk a

$$\mathcal{L} = -{}_s\mathcal{D}^a\psi^{(-s)}{}_s\mathcal{D}_a\psi^{(s)} - 4s^2\Psi_2\psi^{(s)}\psi^{(-s)} \quad (3.4.1)$$

Lagrange-függvényt, ahol ${}_s\mathcal{D}_a = \nabla_a + s\Gamma_a$. Érdemes kiemelni, hogy (3.4.1)-nek a $\psi^{(-s)}$ és $\psi^{(s)}$ szerinti variációira vonatkozó Euler-Lagrange egyenletei éppen a $\psi^{(s)}$ -re és $\psi^{(-s)}$ -re vonatkozó homogén TME-k. A két mező, $\psi^{(s)}$ és $\psi^{(-s)}$, általában egymástól teljesen független megoldások lehetnek.

Az, hogy a Γ^α komponensek és Ψ_2 sem függenek t -től és ϕ -től arra utalnak, hogy a $(\partial_t)^a$ és $(\partial_\phi)^a$ Killing-vektormezőik által generált transzformációk szimmetriái a Boyer–Lindquist koordinátákban felírt (3.4.1) egyenletnek. Hasonló módon a 3.3. fejezetben bemutatott koordináta-transzformációk elvégzése után kapjuk a $T^a = (\partial_T)^a$ és $\varphi^a = (\partial_\varphi)^a$ Killing-vektormezőket. Ezek a vektormezőik generálják a $\psi^{(\pm s)} \rightarrow \psi^{(\pm s)} - \varsigma h^a \partial_a \psi^{(\pm s)}$ alakú infinitezimális transzformációkat, ahol h^a a vektormezőik valamelyikét jelöli, ς a csoportparaméter. Mivel $T^a = (\partial_T)^a$ és $\varphi^a = (\partial_\varphi)^a$ Killing-

vektormezők, (3.3.18) invariáns ezen transzformációkkal szemben. Noether tételének értelmében ekkor megkonstruálhatjuk a

$$T^{ab} = -{}_s\mathcal{D}^a\psi^{(-s)}\nabla^b\psi^{(s)} + {}_s\mathcal{D}^a\psi^{(s)}\nabla^b\psi^{(-s)} + g^{ab}\mathcal{L} \quad (3.4.2)$$

kanonikus energia-impulzus-tenzort, aminek a

$$E^a = T^{ab}T_b = -{}_s\mathcal{D}^a\psi^{(-s)}T^b\partial_b\psi^{(s)} + {}_s\mathcal{D}^a\psi^{(s)}T^b\partial_b\psi^{(-s)} + T^a\mathcal{L}, \quad (3.4.3)$$

$$J^a = T^{ab}\varphi_b = -{}_s\mathcal{D}^a\psi^{(-s)}\varphi^b\partial_b\psi^{(s)} + {}_s\mathcal{D}^a\psi^{(s)}\varphi^b\partial_b\psi^{(-s)} + \varphi^a\mathcal{L} \quad (3.4.4)$$

kontrakcióival kapott áramok megmaradnak, vagyis $\nabla_a E^a = 0 = \nabla_a J^a$. Emlékeztetjük az olvasót, hogy a $\psi^{(s)}$ és $\psi^{(-s)}$ mezők egymástól teljesen függetlenek lehetnek. Az egyetlen feltétel, aminek teljesülnie kell az áram megmaradásához az, hogy mindkettőnek eleget kell tennie a megfelelő spinsúlyhoz tartozó Teukolsky-egyenletnek. Vegyük észre, hogy $s = 0$ esetben visszakapjuk a tömegtelen skalármezőre ismert formulákat amennyiben $\psi^{(-s)}|_{s=0} = \overline{\psi^{(s)}}|_{s=0}$ teljesül.

Mivel az áramok kovariáns divergenciája eltűnik, a téridő tetszőleges \mathcal{U} tartományán vett integráljuk is eltűnik. A Gauss-tételt felhasználva ezeket az összefüggéseket a $\partial\mathcal{U}$ határokon értelmezett mérlegegyenletekké alakíthatjuk

$$\int_{\mathcal{U}} \nabla_a E^a = \int_{\partial\mathcal{U}} n_a E^a = 0, \quad (3.4.5)$$

$$\int_{\mathcal{U}} \nabla_a J^a = \int_{\partial\mathcal{U}} n_a J^a = 0. \quad (3.4.6)$$

Az \mathcal{U} tartományt minden alkalmazásban úgy választjuk, hogy (T, R) -ben egy téglalapot jelöljön. A határait egy kezdeti $T = T_i$ és egy végső $T = T_f$ időszeletek, valamint egy belső és külső, $R = R_{in}$ és $R = R_{out}$, hiperfelületek alkotják. Jelölje $n_a^{(T)} = (dT)_a/\sqrt{g^{TT}}$ és $n_a^{(R)} = (dR)_a/\sqrt{-g^{RR}}$ a $T = const$ és $R = const$ hiperfelületek egységnormálisait, valamint h_T és h_R az ezen felületeken indukált metrikák determinánsait. Ezekkel a jelölésekkel az energiára vonatkozó mérlegegyenletek a következő alakban írhatóak:

$$0 = \int_{T=T_i} n_a^{(T)} E^a \sqrt{|h_T|} dR d\vartheta d\varphi + \int_{R=R_{in}} n_a^{(R)} E^a \sqrt{|h_R|} dT d\vartheta d\varphi - \int_{T=T_f} n_a^{(T)} E^a \sqrt{|h_T|} dR d\vartheta d\varphi - \int_{R=R_{out}} n_a^{(R)} E^a \sqrt{|h_R|} dT d\vartheta d\varphi. \quad (3.4.7)$$

Analóg módon, (3.4.7)-ben E^a és J^a kicserélésével kapjuk az impulzusmomentumra vonatkozó mérlegegyenletet. Az $n_a^{(T)} E^a \sqrt{|h_T|}$, $n_a^{(R)} E^a \sqrt{|h_R|}$, $n_a^{(T)} J^a \sqrt{|h_T|}$ és $n_a^{(R)} J^a \sqrt{|h_R|}$ integrandusok explicit alakját a B függelék tartalmazza.

3.4.2. Adjungált megoldások

A (3.4.3) és (3.4.4) áramok felírásához egy $\psi^{(s)}$ és egy $\psi^{(-s)}$ megoldásra egyaránt szükségünk van. Ez azt jelenti, hogy az így kapott mennyiség vizsgálatakor egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy egy adott jelenséget az alap, vagy az adjungált megoldás idézi elő. Szerencsére Cohen és Kegeles [81], valamint Chrzanowski [82] találtak módot arra, hogy a TME egy adott spinsúlyhoz tartozó megoldásából az ellentett spinsúlyhoz tartozó megoldást állítsanak elő. Ezeket alkalmazva egyetlen $\psi^{(s)}$ megoldás birtokában is értelmezhetjük a (3.4.3) és (3.4.4) áramokat. Ebben az alfejezetben bemutatjuk Wald [83] egyszerű és elegáns interpretációját Cohen–Kegeles és Chrzanowski eredményeit illetően. Az érvelés alkalmazása és a konkrét formulák a C. függelékben találhatóak.

Az általános érvelés

Vegyünk egy f fizikai mezőt, ami az

$$\mathcal{E}(f) = 0 \tag{3.4.8}$$

lineáris parciális differenciálegyenletnek tesz eleget, ahol \mathcal{E} egy tenzorértékű lineáris parciális deriváló operátor és az f függő változó egy tenzormező.

Wald [83]-ban azt feltételezte, hogy léteznek—a TME származtatása során implicit módon alkalmazott— ${}^{(s)}\mathcal{O}$, ${}^{(s)}\mathcal{T}$ és ${}^{(s)}\mathcal{S}$ lineáris parciális deriváló operátorok, amelyekre a következő összefüggések teljesülnek³:

- az f tenzorváltozót ${}^{(s)}\mathcal{O}$ egy s spinsúlyú $\psi^{(s)}$ változóba képezi, vagyis

$$\psi^{(s)} = {}^{(s)}\mathcal{O}(f). \tag{3.4.9}$$

- ${}^{(s)}\mathcal{T}$ Teukolsky lineáris operátora, ami egy ${}^{(s)}\mathcal{O}$ által előállított s spinsúlyú változón hat

$${}^{(s)}\mathcal{T} {}^{(s)}\mathcal{O}(f) = {}^{(s)}\mathcal{T} \psi^{(s)} \tag{3.4.10}$$

módon.

- végül a ${}^{(s)}\mathcal{S}$ lineáris operátor jelenít meg minden manipulációt, amit el kell végeznünk \mathcal{E} -n, hogy megkapjuk a ${}^{(s)}\mathcal{T}$ Teukolsky operátort, vagyis

$${}^{(s)}\mathcal{S} \mathcal{E}(f) = {}^{(s)}\mathcal{T} {}^{(s)}\mathcal{O}(f) = {}^{(s)}\mathcal{T} \psi^{(s)}. \tag{3.4.11}$$

Ennek két következménye, hogy

³Megjegyezzük, hogy [83]-hoz képest alkalmaztunk némi változtatást a jelölésekben. Egészen pontosan ${}^{(s)}\mathcal{O}$ és ${}^{(s)}\mathcal{T}$ szerepét felcseréltük, mivel alkalmasabbnak tűnik ${}^{(s)}\mathcal{T}$ -vel a (3.4.10) egyenlet által meghatározott Teukolsky operátort jelölni.

– a \mathcal{E} , ${}^{(s)}\mathcal{O}$, ${}^{(s)}\mathcal{T}$ és ${}^{(s)}\mathcal{S}$ lineáris parciális deriváló operátorok esetén az

$${}^{(s)}\mathcal{S}\mathcal{E} = {}^{(s)}\mathcal{T}{}^{(s)}\mathcal{O} \quad (3.4.12)$$

összefüggés teljesül és

– ha f megoldása az $\mathcal{E}(f) = 0$ egyenletnek, akkor $\psi^{(s)} = {}^{(s)}\mathcal{O}(f)$ megoldása a ${}^{(s)}\mathcal{T}\psi^{(s)} = 0$ egyenletnek.

Adjungált operátorok

Tekintsünk egy \mathcal{P} lineáris operátort, ami n indexű tenzormezőket m indexű tenzormezőkbe képez. A \mathcal{P}^\dagger lineáris operátor \mathcal{P} adjungáltja, ha m indexű tenzormezőket képez n indexű tenzormezőkbe és a $\nabla_a \sigma^a$ teljes divergencia erejéig meghatározza a

$$\psi^{a_1 \dots a_m} (\mathcal{P} f)_{a_1 \dots a_m} - (\mathcal{P}^\dagger f)^{b_1 \dots b_n} \phi_{b_1 \dots b_n} = \nabla_a \sigma^a \quad (3.4.13)$$

összefüggés. A \mathcal{P} és \mathcal{Q} lineáris operátorok kompozíciójára teljesül az ismerős $(\mathcal{P}\mathcal{Q})^\dagger = \mathcal{Q}^\dagger \mathcal{P}^\dagger$ összefüggés. Egy \mathcal{P} lineáris operátor önadjungált, ha $\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$ teljesül. Ekkor $m = n$.

A NP deriváló operátorok adjungáltjaira érvényes

$$D^\dagger = -(D + \epsilon + \bar{\epsilon} - \varrho - \bar{\varrho}), \quad (3.4.14)$$

$$\Delta^\dagger = -(\Delta - \gamma - \bar{\gamma} + \mu + \bar{\mu}), \quad (3.4.15)$$

$$\delta^\dagger = -(\delta + \beta - \bar{\alpha} - \tau + \bar{\omega}) \quad (3.4.16)$$

összefüggések és (3.2.41-3.2.44) felhasználásával könnyű belátni hogy $[{}^{(s)}\mathcal{T}]^\dagger = {}^{(-s)}\mathcal{T}$.

Wald első tétele

[83] első fontos eredménye az, hogy ha $\psi^{(-s)}$ megoldása az adjungált Teukolsky-egyenletnek, akkor $f = {}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger \psi^{(-s)}$ megoldása az eredeti (3.4.8) lineáris egyenletnek. A pontos állítás a következő:

Tegyük fel, hogy $\psi^{(-s)}$ megoldása az adjungált Teukolsky-egyenletnek:

$${}^{(s)}\mathcal{T}^\dagger \psi^{(-s)} = 0, \quad (3.4.17)$$

valamint az \mathcal{E} operátor önadjungált, vagyis $\mathcal{E}^\dagger = \mathcal{E}$. Ekkor (3.4.12) értelmében az $f = {}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger \psi^{(-s)}$ tenzormező megoldása (3.4.8)-nak, mivel az alábbi összefüggés teljesül:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}({}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger \psi^{(-s)}) &= \mathcal{E}^\dagger ({}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger \psi^{(-s)}) = ({}^{(s)}\mathcal{S}\mathcal{E})^\dagger \psi^{(-s)} = ({}^{(s)}\mathcal{T}{}^{(s)}\mathcal{O})^\dagger \psi^{(-s)} \\ &= {}^{(s)}\mathcal{O}^\dagger ({}^{(-s)}\mathcal{T} \psi^{(-s)}) = 0. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Wald második tétele

[83] második fontos eredménye az, hogy amikor $\psi^{(-s)}$ megoldása az adjungált Teukolsky-egyenletnek, akkor $\psi^{(s)} = {}^{(s)}\mathcal{O}({}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger\psi^{(-s)})$ megoldása a Teukolsky-egyenletnek, vagyis ${}^{(s)}\mathcal{T}\psi^{(s)} = 0$.

Tegyük fel, hogy $\psi^{(-s)}$ megoldása az adjungált Teukolsky-egyenletnek:

$${}^{(s)}\mathcal{T}^\dagger\psi^{(-s)} = 0. \quad (3.4.19)$$

Ekkor (3.4.18) értelmében $\mathcal{E}({}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger\psi^{(-s)}) = 0$, ami (3.4.12)-vel és \mathcal{E} önadjungáltsággal együtt adja, hogy $\psi^{(s)} = {}^{(s)}\mathcal{O}({}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger\psi^{(-s)})$ valóban megoldása a Teukolsky-egyenletnek, mivel a

$$\begin{aligned} {}^{(s)}\mathcal{T}({}^{(s)}\mathcal{O}({}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger\psi^{(-s)})) &= {}^{(s)}\mathcal{T}({}^{(s)}\mathcal{O})({}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger\psi^{(-s)}) = {}^{(s)}\mathcal{S}\mathcal{E}^\dagger({}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger\psi^{(-s)}) \\ &= {}^{(s)}\mathcal{S}(\mathcal{E}({}^{(s)}\mathcal{S}^\dagger\psi^{(-s)})) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

összefüggés teljesül.

3.5. A perturbációk hosszútávú időfejlődése

Vizsgálataink során a $\Phi^{(s)}$ mezőket

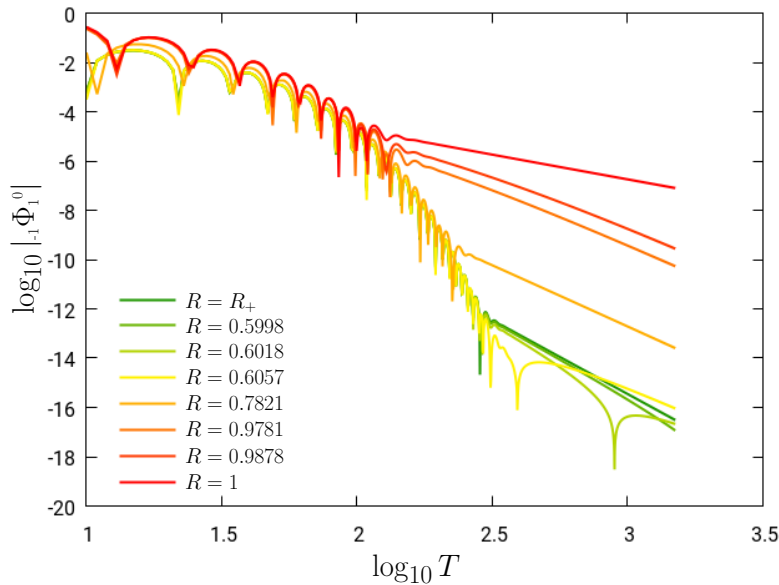
$$\Phi^{(s)}(T, R, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=|s|}^{\ell_{max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \phi_\ell^m(T, R) \cdot {}_s Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) \quad (3.5.1)$$

alakban kezeljük, így a kinyert információk is a $\phi_\ell^m(T, R)$ együtthatókban jelennek meg. Annak érdekében, hogy a különböző s, ℓ, m indexekkel jellemzett (3.5.1) módusok közötti csatolásokat kibogozhassuk, az alkalmazott kezdőadatok minden esetben csak egy gerjesztett módot fognak tartalmazni. A (3.3.18) TME linearitása és az s, ℓ, m indexekkel jellemzett egy módusos gerjesztések miatt (3.5.1) összes módusa osztozni fog ugyanazon s és m értékeken. A továbbiakban a kezdőadathoz tartozó ℓ paramétert vesszővel fogjuk megkülönböztetni—vagyis ℓ' módon jelöljük—míg a vesszőtlen ℓ jelöléssel a gerjesztett módusokra fogunk hivatkozni.

A skalármezőknél tapasztaltakhoz hasonlóan a gerjesztett $\phi_\ell^m(T, R)$ módusokat egy rögzített helyen vizsgálva az időfejlődést egy kezdeti dinamikus szakasz után egy kvázinormális lecsengési időszak követi, majd egy hatványfüggvény lecsengést tapasztalunk. Ez azt jelenti, hogy megfelelően nagy T értékek és rögzített $R = R_0$ mellett a különböző módusok kifejtési együtthatói

$$\phi_\ell^m(T, R_0) \sim T^{-n} \quad (3.5.2)$$

módon csökkennek, ahol n egy pozitív egész, aminek az értéke függhet minden szóba jöhető paramétertől. Ez a kitevő általában a következő funkcionális formával bír: $n = n(s, \ell, m, \ell')$. Ezt a



3.2. ábra. A $s = -1, \ell' = 1, m = 0$ paraméterekhez tartozó kezdeti gerjesztés mellett az $\ell = 1$ módus időbeli változása a $R = R_+$ horizonton, $R = 1$ -nél, a jövő fényszerű végtelenben, és néhány köztes $R = \text{const}$ helyen. A kezdeti kvázinormális oszcillációkat minden rögzített helyen valamilyen n egésznek megfelelő rátával való hatványfüggvényszerű lecsengés követi.

viselkedést illusztrálja a 3.2-es ábra, amelyen az $s = -1, \ell = 1, m = 0$ módusban jelen lévő gerjesztések időbeli változása látható rögzített R mellett log-log skálán. A nagy T -nél tapasztalható lineáris viselkedés mutatja a hatványfüggvény lecsengést.

A következő alfejezetben röviden áttekintjük az n kitevőkkel kapcsolatos aktuális eredményeket, majd bemutatjuk a μ lokálisan meghatározható mennyiséget, amivel a gyakorlatban közelítjük az n kitevő értékét.

3.5.1. Korábbi analitikus és numerikus eredmények a lecsengésről

Az aszimptotikus viselkedés vizsgálata során érdeklődésünk középpontjában az $n = n(s, \ell, m, \ell')$ kitevő áll. Vizsgálataink során két független korábbi munkára támaszkodunk. Ezek Hod [84] analitikus vizsgálatai és a Harms és társai [76] által elvégzett részletes numerikus vizsgálat. Ezek a munkák fontos támpontot szolgáltatnak a lecsengés gyorsaságát illetően.

Mindkét munka limitált a célkitűzéseiben. A Hod [84]-ben ismertetett Green-függvényes módszereken alapuló vizsgálata kizárólag olyan kezdőadatokra vonatkozik, amelyekben csak a mező időderiváltja nem eltűnő. Meg kell említenünk, hogy [76] B függelékében bemutatott hasonló analitikus vizsgálatok alapján bizonyos esetekben Hod jóslatai pontatlannak bizonyultak, ezek korrekciói megtalálhatóak ebben a függelékben. Harms és társai [76] által elvégzett numerikus

vizsgálatok szintén korlátozottak abban az értelemben, hogy néhány kivételes esettől eltekintve csak tengelyszimmetrikus konfigurációkat vizsgáltak.

Mindezek mellett ez a két munka kiegészíti egymást és együtt fontos útmutatást adnak számunkra a vizsgálataink során, valamint az eredmények összevetése kapcsán. Alább összegezzük [76, 84] legfontosabb eredményeit. A tisztán dinamikus kezdőadatokat esetében (amikor a kezdőadatban csak a mező időderiváltja nem tűnik el) a Green-függvényes érvelés és a numerikus vizsgálatok által nyert ismereteket a következő módon foglalhatjuk össze:

(1) A \mathcal{H}_+ horizonton, $R = R_+$ mellett

$$n|_{R_+} = \begin{cases} \ell' + \ell + 3 + \alpha, & \text{ha } \ell' = \ell_0, \\ \ell' + \ell + 3 + \alpha - \delta, & \text{ha } \ell' = \ell_0 + 1, \\ \ell' + \ell + 1 + \alpha, & \text{ha } \ell' > \ell_0 + 1, \end{cases} \quad (3.5.3)$$

ahol $\ell_0 = \max\{|m|, |s|\}$ az adott s és m mellett elérhető legkisebb ℓ , és $\alpha = 0$ minden esetben kivéve ha $s > 0$ és $m = 0$ mikor is $\alpha = 1$. Azt találjuk, hogy $\delta = 1$ Hod [84] analitikus érveléseiben, de [76] numerikus eredményei arra utalnak, hogy legalább az $m = 0$ esetben a helyes érték $\delta = 0$.

(2) Egy köztes helyen, ahol $R_+ < R < 1$, n értéke leolvasható (3.5.3)-ból az $\alpha = 0$ helyettesítéssel, vagyis

$$n|_R = \begin{cases} \ell' + \ell + 3, & \text{ha } \ell' = \ell_0, \\ \ell' + \ell + 3 - \delta, & \text{ha } \ell' = \ell_0 + 1, \\ \ell' + \ell + 1, & \text{ha } \ell' > \ell_0 + 1. \end{cases} \quad (3.5.4)$$

(3.5.3)-hoz hasonlóan $\delta = 1$ [84]-ben; ekkor azonban Harms és társai [76] B függelékében rámutatnak egy alesetre, ami Hod számításaiból hiányzik. Ennek eredményeként $\delta = 0$ ha $m = 0$. Ez a korrekció konzisztens [76] numerikus eredményeivel.

(3) $R = 1$ -nél, ami a jövő fényszerű végtelent, \mathcal{S}^+ -t jeleníti meg:

$$n|_{R=1} = \begin{cases} \ell - s + 2 + \gamma, & \text{ha } \ell' \leq \ell + 1, \\ \ell' - s, & \text{ha } \ell' > \ell + 1, \end{cases} \quad (3.5.5)$$

ahol $\gamma = 0$ minden esetben, kivéve ha $m = 0$, $\ell' = \ell_0 + 1$, és $\ell = \ell_0$, ekkor $\gamma = 1$. Eltűnő γ -val (3.5.5) visszaadja Hod [84] eredményeit; azonban [76] B függelékében a szerzők rámutattak egy elmulasztott alesetre Hod érvelésében, amit γ bevezetésével orvosolhatunk. Ezt a javítást szintén igazolták [76] eredményei.

Habár a [76]-ban bemutatott numerikus eredmények többnyire tengelyszimmetrikus konfigurációkat írnak le, van két adatsoruk, amelyek nem-tengelyszimmetrikus tisztán dinamikus kezdőadatból indulnak ki $s = 0$, $m = 1$ és $s = -2$, $m = 2$ gerjesztett módusokkal. Az ezekből kinyert kitevők összhangban vannak Hod jóslataival [84, 85].

Sztatikus kezdőadatok esetében (amikor a kezdőadatban a mező időderiváltja eltűnik) csak Harms és társai [76] empirikus eredményeire hivatkozhatunk, ahol ezek az eredmények tengelyszimmetrikus, $m = 0$ konfigurációkra vonatkoznak. [76] ide vonatkozó megállapításait így foglalhatjuk össze:

(1') A \mathcal{H}_+ horizonton, $R = R_+$ -nál,

$$n|_{R_+} = \begin{cases} \ell' + \ell + 3 + \alpha, & \text{ha } \ell' = |s|, \\ \ell' + \ell + 2 + \alpha, & \text{ha } \ell' > |s|, \end{cases} \quad (3.5.6)$$

ahol $\alpha = 0$ $s = 0$ esetén és $\alpha = 1$ egyébként.

(2') Akármelyik közbülső, $R_+ < R < 1$, helyen n értékeit (3.5.6) adja meg azzal a különbséggel, hogy $\alpha = 0$ minden esetben, vagyis

$$n|_R = \begin{cases} \ell' + \ell + 3, & \text{ha } \ell' = |s| \\ \ell' + \ell + 2, & \text{ha } \ell' > |s|. \end{cases} \quad (3.5.7)$$

(3') $R = 1$ -nél,

$$n|_{R=1} = \begin{cases} \ell - s + 2, & \text{ha } \ell' \leq \ell, \\ \ell' - s + 1, & \text{ha } \ell' > \ell. \end{cases} \quad (3.5.8)$$

Mivel az előző alfejezetekben felvázolt analitikus és numerikus eljárások lehetővé teszik nem-tengelyszimmetrikus konfigurációk vizsgálatát, az egyik fő motivációnk, (3.5.6)–(3.5.8) megerősítésén túl, ezen összefüggések általánosítása nem-tengelyszimmetrikus konfigurációkra.

3.5.2. A lokális lecsengési együttható

Ahogy azt korábban említettük a gerjesztett módusok egy hosszan tartó kvázinormális lecsengés után átváltak egy hatványfüggvényyszerű $\phi_\ell^m \sim T^{-n}$ lecsengésre [51, 76, 84]. A probléma az n kitevő értékének a meghatározása. A gyakorlatban az n lecsengési együtthatók értékét aszimptotikusan, nagy T mellett közelítő μ lokális lecsengési együttható (LPI) értékét vizsgáljuk. μ -t a

$$\mu = \frac{\partial \ln |\phi|}{\partial \ln T} = T \cdot \frac{\Re(\phi) \cdot \Re(\phi_T) + \Im(\phi) \cdot \Im(\phi_T)}{(\Re(\phi))^2 + (\Im(\phi))^2}, \quad (3.5.9)$$

logaritmikusan derivált definiálja, ahol az egyszerűség kedvéért ϕ_ℓ^m ℓ és m multipól indexeit elhagytuk. Megjegyezzük, hogy n -hez hasonlóan a μ lokális lecsengési együttható is függ a helytől és a részt vevő módusok s , ℓ , m , és ℓ' indexeitől is [51, 76].

3.6. Alkalmazott numerikus módszerek

Ebben az alfejezetben röviden ismertetjük a (3.3.18) egyenlet numerikus integrálása során alkalmazott eljárást. A 3.6.1 alfejezetben a harmonikus gömbfüggvényeken való kifejtés hatásait tárgyaljuk, a 3.6.2 alfejezetben pedig az ebben a kontextusban alkalmazandó kezdőadatok típusait mutatjuk be. A 3.6.3 alfejezetben kitérünk a kapott parciális differenciálegyenlet-rendszer diszkrétizációjának módjára, végül a 3.6.4 alfejezetben megadjuk az alkalmazott paraméterek konkrét értékeit.

3.6.1. Multipólus kifejtés

(3.3.18) megoldása során a $\Phi^{(s)}$ változónkat (3.5.1) módon kifejtjük ${}_s Y_\ell^m$ s spinsúlyú gömbi harmonikusokon. Ennek eredményeként (3.3.18) $(1 + 1)$ -dimenziós lineáris hullámegyenletek csatolt rendszere lesz $\phi_\ell^m(T, R)$ kifejtési együtthatókra, ahol a szögek szerinti deriváltakat analitikusan értékeljük ki a ∂ , $\bar{\partial}$ operátorok alkalmazásával (részletekért visszautalunk a 2. fejezetre). Az összegzés $\ell = |s|$ -től egy adott $\ell = \ell_{max}$ értékig megy, amit elég nagyoknak választunk, hogy a levágási hiba az elvárásainknak megfelelő (gyakorlatilag a numerikus pontossággal megegyező) alacsony szinten maradjon.

Megjegyezzük, hogy a Fourier-analízis során a TME szögfüggő részének sajátfüggvényei nem a spinsúlyozott gömbfüggvények, hanem a spinsúlyozott sferoidális harmonikusok. Casals és társai [86]-ban megmutatták, hogy ha spinsúlyozott sferoidális harmonikusok helyett spinsúlyozott gömbi harmonikusokat használunk a kifejtés alapjául, az a komplex Green-függvényben vágások megjelenését okozza. Az integrálás során azonban ezen vágások járulékaik kiejtik egymást és a Green-függvény alakja ugyanaz lesz mintha sferoidális harmonikusokkal számoltunk volna. Ez alátámasztja, hogy spinsúlyozott gömbi harmonikusokat használhatunk spinsúlyozott sferoidális harmonikusok helyett. Mivel ez utóbbiak maguk is kifejthetők gömbi harmonikusokkal, a lecsengési együtthatók tekintetében elmondhatjuk, hogy a leglassabban lecsengő módusok lecsengési rátája érzéketlen a kifejtés alapjának megválasztására.

3.6.2. Az alkalmazott kezdőadatok

A $\Phi^{(s)}$ mező (3.3.18) időfejlődésének meghatározása során szükséges kezdőadatot megadnunk. Ez olyan módon történik, hogy valamely $T = T_0 (\in \mathbb{R})$ kezdőfelületen megadunk egy $(\phi^{(s)}, \phi_T^{(s)})$ függ-

vénypárost. Akkor mondjuk, hogy a $\Phi^{(s)}$ a (3.3.18) egyenlet a $(\phi^{(s)}, \phi_T^{(s)})$ függvénpárhozhoz, mint kezdőadathoz tartozó megoldása, ha $\phi^{(s)} = \Phi^{(s)}|_{T=T_0}$ és $\phi_T^{(s)} = (\partial_T \Phi^{(s)})|_{T=T_0}$ feltételek teljesülnek. Amint a 3.5. alfejezetben már jeleztük, az alkalmazott kezdőadatok minden esetben csak egy gerjesztett módust fognak tartalmazni. Ezen felül a kezdőadatok vagy „sztatikusak” vagy „tisztán dinamikusak” lesznek.

Ennek megfelelően valamely rögzített s, ℓ, m indexek mellett egy egy módusos gerjesztésű $(\phi^{(s)}, \phi_T^{(s)})$ kezdőadatot *sztatikusnak* (ST) hívunk ha

$$(ST) : \begin{cases} \phi^{(s)}(R, \vartheta, \varphi) = \phi_\ell^m(T_0, R) \cdot {}_s Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) \\ \phi_T^{(s)}(R, \vartheta, \varphi) \equiv 0, \end{cases} \quad (3.6.1)$$

míg *tisztán dinamikusnak* (PD) hívunk ha

$$(PD) : \begin{cases} \phi^{(s)}(R, \vartheta, \varphi) \equiv 0, \\ \phi_T^{(s)}(R, \vartheta, \varphi) = (\phi_T)_\ell^m(T_0, R) \cdot {}_s Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) \end{cases} \quad (3.6.2)$$

teljesül a $T = T_0$ kezdőfelületen, és sem (3.6.1), sem (3.6.2) esetében nincs összegzés az indexekre. Emlékeztetjük az olvasót, hogy (3.5.1) összes módusa osztozni fog ugyanazon s és m értékeken és a kezdőadathoz tartozó ℓ indexet vesszővel különböztetjük meg (ℓ') a gerjesztett módusok indexeitől.

A kezdőadatok el nem tűnő részének—sztatikus esetben $\phi_{\ell'}^m(T_0, R)$ míg tisztán dinamikus esetben $(\partial_T \phi)_{\ell'}^m(T_0, R)$ — R -függését egy c és w paraméterekkel ellátott bump függvénnyel adjuk meg:

$$\mathcal{B}(R) = \begin{cases} \frac{2R}{1-R^2} \exp\left(-\frac{1}{R-c+w/2} + \frac{1}{R-c-w/2} + \frac{4}{w}\right), & \text{ha } c - w/2 < R < c + w/2, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (3.6.3)$$

Megjegyezzük, hogy $\mathcal{B}(R)$ egy kompakt tartójú sima függvény, aminek a paramétereit vizsgálataink során $c = 0.7$ és $w = 0.1$ módon rögzítettük.

3.6.3. Diszkretizációs eljárás

$(\phi_T)_\ell^m = \partial_T \phi_\ell^m$ és $(\phi_R)_\ell^m = \partial_R \phi_\ell^m$, mint további függő változók bevezetésével elsőrendű egyenletek erősen hiperbolikus rendszerét kapjuk, ami a kifejtési együtthatókból alkotott vektorra hat. Az így kapott egyenleteket a numerikus kódunk a vonalak módszerével oldja meg [87]. Ekkor első lépésben csupán az R változóban diszkretizálunk, majd az így kapott közönséges differenciálegyenlet-rendszert a negyedrendű Runge–Kutta módszerrel integráljuk.

A térbeli diszkretizáció során egy $R \in [R_0, 1]$ intervallumot, ahol $R_0 < R_+$, úgy osztunk egyenlő részekre, hogy az $[R_+, 1]$ intervallumon adott számú rácspontunk legyen ΔR lépésközzel. A $\partial_R f$

deriváltakat a szimmetrikus, negyedrendben pontos

$$\partial_R f(T, R) \propto \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta R} \quad (3.6.4)$$

operátor közelíti a rács közepén, míg a széleken a vonatkozó aszimmetrikus stencilt alkalmazzuk.

A Kreiss–Oliger–Gustafsson könyv [87] szerint ezek a diszkretizációk általában instabilak, ezért a negyedrendű R -beli diszkretizáció esetén szükséges az egyenletekhez adni egy ötödrendű mesterséges disszipációt, ami stabilizálja a rendszert:

$$\sigma \cdot \frac{f_{i-3} - 6f_{i-2} + 15f_{i-1} - 20f_i + 15f_{i+1} - 6f_{i+2} + f_{i+3}}{\Delta R}, \quad (3.6.5)$$

ahol a σ változó határozza meg a disszipáció erősségét. A mi esetünkben σ -t olyan módon írtuk fel, hogy a rács szélein eltűnjön és onnan befelé 15 rácsponton keresztül simán érjen el egy σ_0 értéket.

Az ilyen módon kapott közönséges differenciálegyenlet-rendszert a jól ismert negyedrendű Runge–Kutta integrátorral oldjuk meg. Az integrálás során figyelniünk kell a Courant–Friedrich–Levy-feltételre [87]. Ez azt jelenti, hogy a numerikus fénykúpnak teljes mértékben tartalmaznia kell a fizikai fénykúpot. A gyakorlatban a megengedettnél jóval óvatosabbak voltunk ebben a tekintetben.

A konvergencia vizsgálata során (3.4.7) értelmében integrálunk egy adott téridőtartomány határain. Ezen T és R szerinti integrálokat a negyedrendben pontos

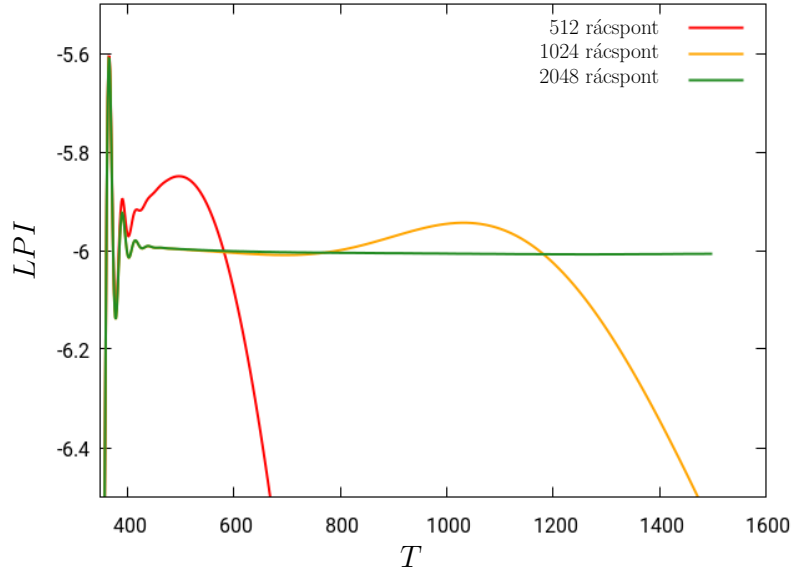
$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &\approx \frac{h}{3} \left[f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f_{2i} + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1} + f_n \right] = \\ &= \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 4f_{n-1} + f_n]. \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

kompozit Simpson-módszerrel közelítettük.

3.6.4. A bemeneti paraméterek

A legtöbb numerikus szimulációnk során a Kerr-háttér paraméterei $M = 1$ és $a = 0.5$ módon kerültek rögzítésre. A (3.5.1) multipól kifejtés levágására $\ell_{max} = 8$ kielégítőnek bizonyult a megfelelő pontosság eléréséhez. Néhány kísérlet ℓ_{max} megduplázásával azt mutatta, hogy az eredményeink pontosságát nem a levágás értéke korlátozza. Ez arra utal, hogy a sugár irányú diszkretizáció és az aritmetika pontossága sokkal nagyobb hatással van az előforduló hibákra, mint ℓ_{max} értékének esetleges rossz megválasztása.

Voltak olyan szimulációk, amikor 1024 radiális rácspont használata az $[R_+, 1]$ intervallumon (lásd 3.3. ábra) tökéletesen kielégítőnek bizonyult, azonban legtöbb esetben 2048, illetve néhány kivételes esetben 4098 rácspont használatára volt szükség. Az alkalmazott numerikus pontosságot



3.3. ábra. LPI T függése az $\ell = 1$ gerjesztett módus esetén különböző felbontások mellett. Az alkalmazott sztatikus gerjesztés multipól indexei $s = 1$, $\ell' = 1$, $m = 1$ voltak. Láthatjuk, hogy 512 rácspontos felbontás mellett még sejtésünk sem lehet az LPI helyes értékéről. Az is nyilvánvaló, hogy az alkalmazott rácspontok számának növelésével μ értékét egyre pontosabban olvashatjuk le.

illetően a legtöbb szimulációinkban elegendőnek bizonyult a long double aritmetika. Mindamellett az s spin paraméter negatív értékei mellett a (3.5.9) egyenlet által meghatározott LPI értékeket minden esetben nehezebbnek találtuk megállapítani és a számítási szempontból sokkal drágább quadruple pontosságú aritmetikát kellett használnunk. Sajnálatos módon negatív s értékek mellett még a quadruple pontosság sem minden esetben tudta garantálni elég sokáig a kellő pontosságot, ami szükséges feltétele, hogy határozott következtetéseket vonjunk le a kései lecsengésről. Sok esetben a vonatkozó LPI értéket annak ellenére sem tudtuk meghatározni, hogy pozitív spin paraméter mellett az LPI értéket elég pontosan megkaptuk long double pontosság és általában alacsonyabb térbeli felbontás mellett is.

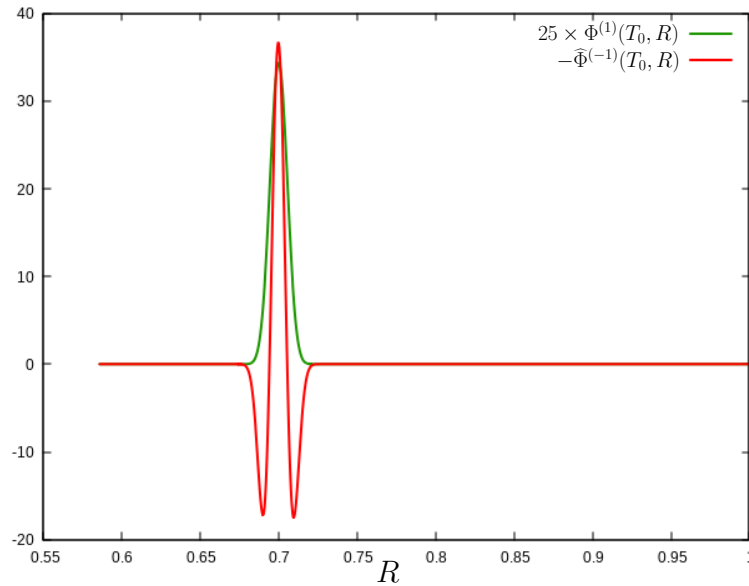
3.7. Energia és impulzusmomentum megmaradás

Az alfejezet első felében a mérlegegyenleteket fogjuk felhasználni arra, hogy demonstráljuk a kódunk helyességét. Ehhez három különböző módon számítjuk a (3.4.3) energiákat és (3.4.4) impulzusmomentumokat, majd megmutatjuk, hogy a felbontás növelésével mindhárom esetben az elvárt módon javul az eredmény. Ezek után párhuzamba állítjuk a (3.4.3)-mal és (3.4.4)-gyel meghatározott energia és impulzusmomentum viselkedését a tömegtelen skalármező energiájának [51]-ben

tárgyalt viselkedésével.

3.7.1. Az adjungált megoldások

Mielőtt rátérünk a konvergencia vizsgálatára, felidézzük az energiára és impulzusmomentumra használt kifejezéseink néhány tulajdonságát. Először is felidézzük, hogy a (3.4.3) és (3.4.4) kifejezésekben szereplő $\psi^{(s)}$ és $\psi^{(-s)}$ mezők általában egymástól teljesen függetlenek. Ebből következően a (3.4.3) és (3.4.4) kifejezések lineárisak a mezőkben, vagyis ha akár $\psi^{(s)}$, akár $\psi^{(-s)}$ esetén alkalmazunk egy konstans \mathcal{C} átskálázást, E^a és J^a értékei is \mathcal{C} -szeresére változnak. Ez akkor válik igazán jelentőssé, ha észrevesszük, hogy a 3.4.2. fejezetben ismertetett eljárás esetén megtehetjük, hogy egy konstans szorzót tetszés szerint belefoglaljunk az operátorok definíciójába. Ezek következtében az adjungált megoldás csak egy konstans szorzó erejéig van definiálva és így az energia és impulzusmomentum is csak egy konstans szorzó erejéig meghatározott. Mint látni fogjuk, a konvergencia fokának megállapítása szempontjából ez a szabadság nem hátráltató tényező, de megfelelkezve erről a jelenségről, látva a numerikus hiba nagyságát, az olvasó azt gondolhatná, hogy az eredményeink nincsenek annyira pontosak, mint ahogy állítjuk.



3.4. ábra. Az $s = 1$, $\ell' = 1$, $m = 1$ indexekkel meghatározott sztatikus gerjesztés és a hozzá tartozó adjungált megoldás $T = T_0$ -ban. Az ábrán látható, hogy az adjungált megoldás akár egy nagyságrenddel is nagyobb amplitúdóval rendelkezhet, mint az alapjául szolgáló megoldás.

Ezt a megállapítást támasztja alá a 3.4. ábra tartalma. A képen látható elektromágneses gerjesztés adjungáltjának amplitúdója több, mint 25-szöröse az eredeti gerjesztésnek. Ez az eset korántsem kirívó: gravitációs perturbációk esetében több nagyságrend is lehet az eltérés. Ez a

jelenség felnagyítja a mérlegben jelentkező hibát, ezért fontos tudatosítunk, hogy az energia és impulzusmomentum abszolút értékének nincs jelentősége.

3.7.2. Konvergencia

Ahogy [80]-ban láthattuk, a Teukolsky-egyenlet minden s és $-s$ spinsúlyú megoldáspárjához létezik energia és impulzusmomentum típusú kanonikusan megmaradó áram. Mivel a hozzájuk tartozó E^a és J^a vektormezők divergenciamentesek, vagyis $\nabla_a E^a = 0$ és $\nabla_a J^a = 0$, és természetüknél fogva komplexek, ezek biztosítanak számunkra két komplex mérlegegyenletet, ahogyan azt (3.4.7) és az E^a vektormező J^a -val való felváltása után kapott analóg összefüggés mutatja. Mindent egybevetve a két komplex mérlegegyenlet valós és képzetes részeit véve összesen négy valós mérlegünk van. Ez a négy összefüggés—a hagyományos numerikus konvergencia-próbákkal együtt—fontos igazolását nyújtja a numerikus eredményeink helyességének és robusztusságának.

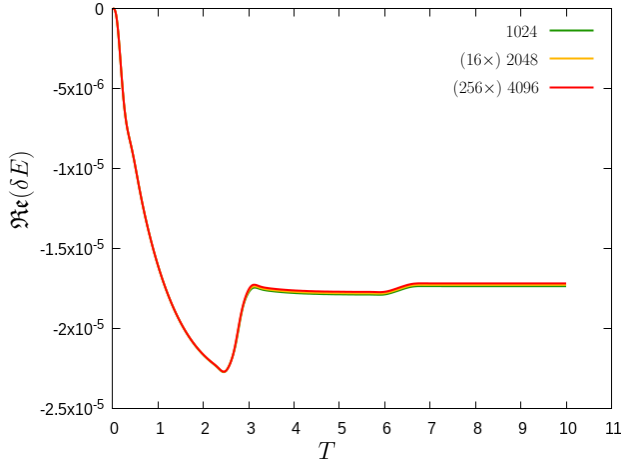
Ebben az alfejezetben az energiára és az impulzusmomentumra vonatkozó mérlegeket alkalmazzuk három különböző módon. Az első esetben a $\psi^{(s)}$ és $\psi^{(-s)}$ adatsorok közti különbség kimerül abban, hogy a kezdőadatokban az $s \rightarrow -s$, $m \rightarrow -m$ cserét végrehajtjuk. Ez a minimális módosítás annak érdekében, hogy a mérleg ne legyen azonosan nulla a Gaunt-együtthetők tulajdonságai miatt. A második esetben az előbbieken túl megváltoztatjuk a második ($s = -1$ -hez tartozó) kezdőadat centrumát $c = 0.7$ -ről $c = 0.9$ -re. Ez még mindig egy apró változtatás annak fényében, hogy a két megoldás egymástól teljesen független is lehet. A harmadik esetben előállítjuk az $s = 1$ -es megoldáshoz tartozó adjungált megoldást. Ekkor egy konstans szorzófaktor erejéig határozzuk meg a megmaradó áramokat, mivel az adjungált megoldás számszorosa is megoldása a TME-nek.

A 3.5-3.8. ábrák paneljein a

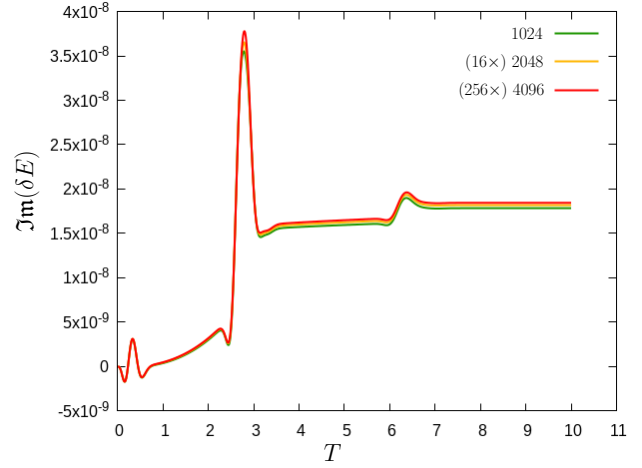
$$\delta E = \int_{\partial \mathcal{U}} n_a E^a, \quad \delta J = \int_{\partial \mathcal{U}} n_a J^a \quad (3.7.1)$$

numerikus hibák valós és képzetes részeinek időfüggését láthatjuk. A téglalap alakú \mathcal{U} integrálási tartomány határait a következő négy felület adja: a kezdő időszak, $T = T_i$, egy futó T időszak és két fényszerű henger, a horizonton $R = R_+$ és a $R = 1$ jövő fényszerű végtelenben. Megjegyezzük, hogy analitikus alapokon a (3.7.1) mérlegegyenletekben szereplő δE és δJ integráloknak azonosan el kell tűnniük. Ennek megfelelően, ha az implementáció helyes, kicsiknek kell lenniük (és annak is kell maradniuk).

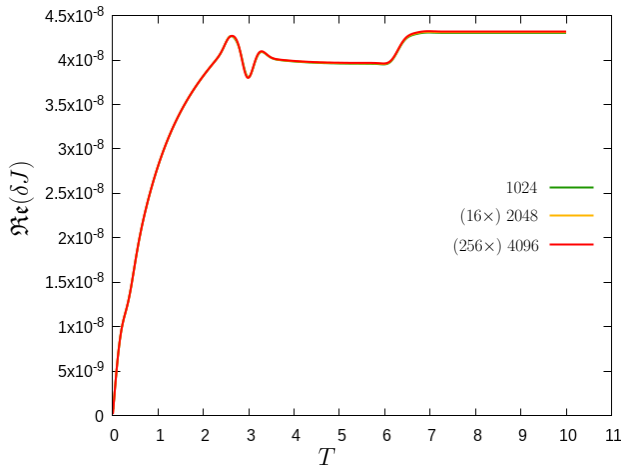
Fontos hangsúlyoznunk, hogy a 3.5-3.7. ábrák minden paneljén az előbb említett időfüggő mennyiségeket három különböző radiális felbontás, 1024, 2048, 4096 rácspont használata mellett ábrázoltuk. Ebben a tekintetben a 3.5-3.7. ábrák nem csak azt mutatják meg, hogy a (3.4.5) és (3.4.6) mérlegek valós és képzetes részei megfelelő pontossággal teljesülnek, hanem azt is, hogy a numerikus implementációnk—a $T - R$ szekcióban alkalmazott negyedrendű Runge–Kutta-integrátortól



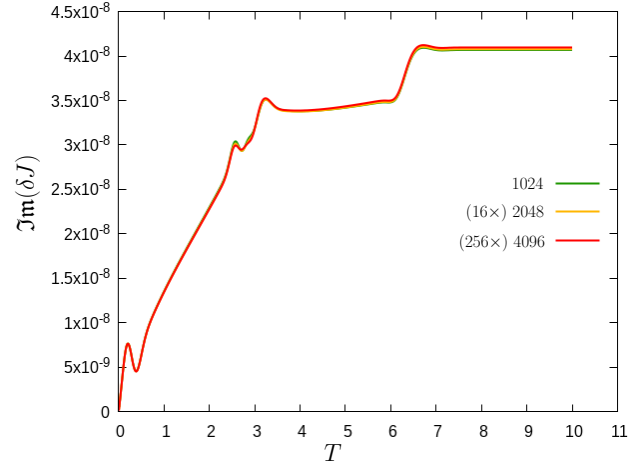
(a) A δE energiamérleg $\Re(\delta E)$ valós részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A hiba negyedrendű.



(b) A δE energiamérleg $\Im(\delta E)$ képzetes részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A hiba jó közelítéssel negyedrendű.



(c) A δJ impulzusmomentum-mérleg $\Re(\delta J)$ valós részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A hiba negyedrendű.

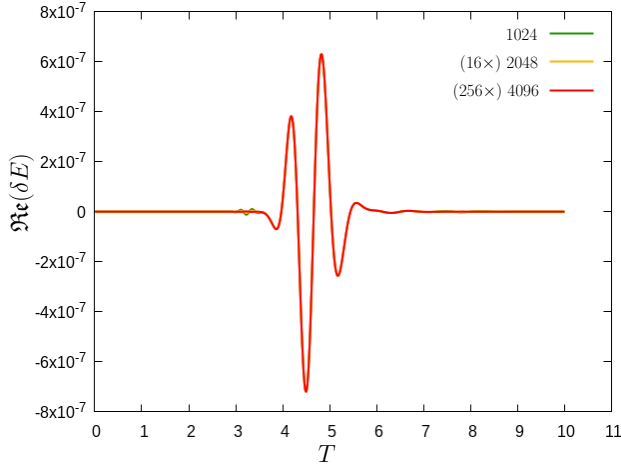


(d) A δJ impulzusmomentum-mérleg $\Im(\delta J)$ képzetes részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A hiba jó közelítéssel negyedrendű.

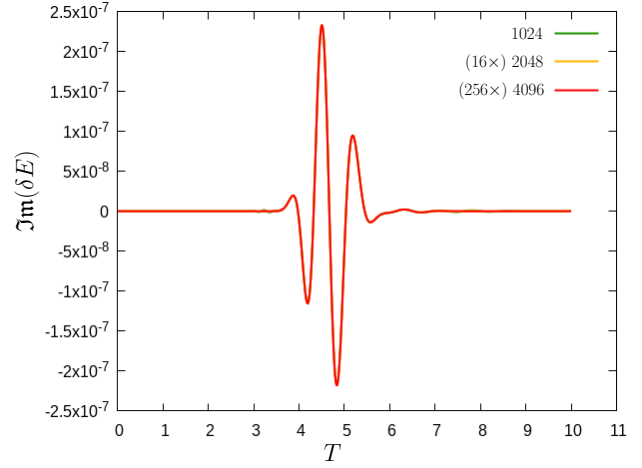
3.5. ábra. A δE és δJ energia- és impulzusmomentum-mérleg valós és képzetes részeinek időfüggése különböző radiális felbontás mellett abban az esetben, amikor az $s = -1$ -es megoldás az $s = 1$ -es minimális változtatásával állt elő.

elvárható módon—valóban negyedrendben konvergál mindhárom esetben. Azért, hogy ez jobban látható legyen, a 2048 és 4096 rácspont használata mellett kapott δE és δJ numerikus értékeit felszoroztuk 16-tal, illetve 256-tal.

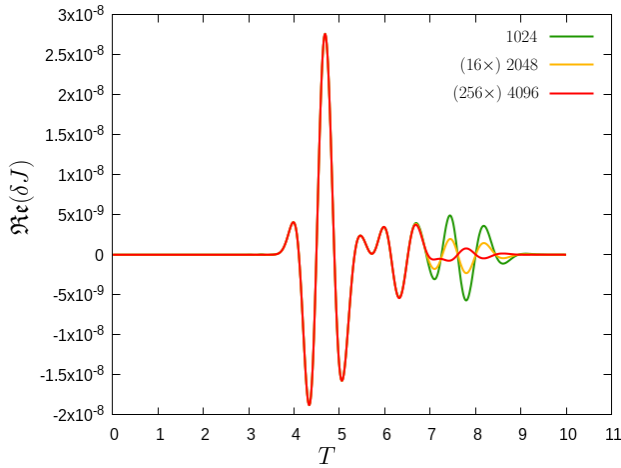
Hasonlóan a 3.8. ábrán a δE mérleg valós részében található hiba becsült értékeit ábrázoltuk különböző ℓ_{max} levágások mellett a minimálisan módosított kezdőadattal kapott $-s$ -es megoldás használatával. Egy pontosabb $\delta E_{\ell_{max}+\delta\ell}$ és egy pontatlanabb $\delta E_{\ell_{max}}$ adatsor esetén $\delta E_{\ell_{max}}$ hibáját



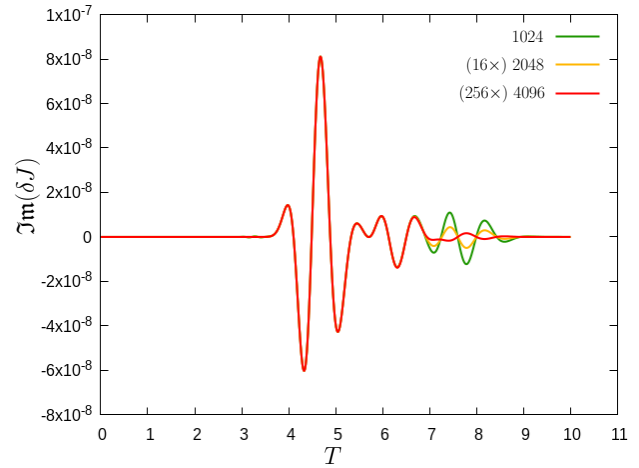
(a) A δE energiamérleg $\Re(\delta E)$ valós részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A konvergencia üteme 4.



(b) A δE energiamérleg $\Im(\delta E)$ képzetes részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A konvergencia üteme jó közelítéssel 4.



(c) A δJ impulzusmomentum-mérleg $\Re(\delta J)$ valós részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A konvergencia üteme néhány helyen jobb, mint 4.



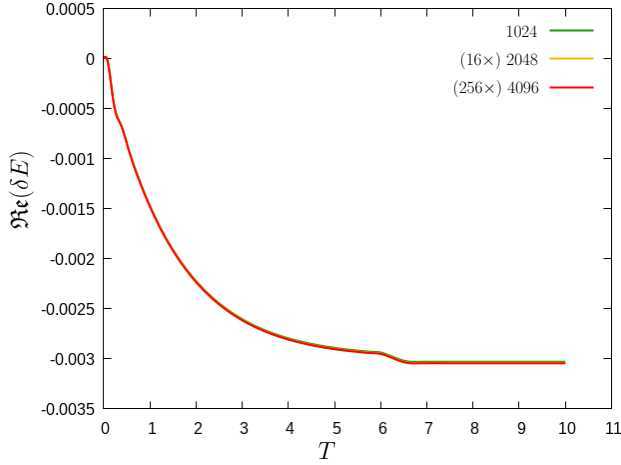
(d) A δJ impulzusmomentum-mérleg $\Im(\delta J)$ képzetes részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A konvergencia üteme néhány helyen jobb, mint 4.

3.6. ábra. A δE és δJ energia- és impulzusmomentum-mérleg valós és képzetes részeinek időfüggése különböző radiális felbontás mellett abban az esetben, amikor az $s = -1$ -es megoldás az $s = 1$ -es nagyobb mértékű változtatásával állt elő.

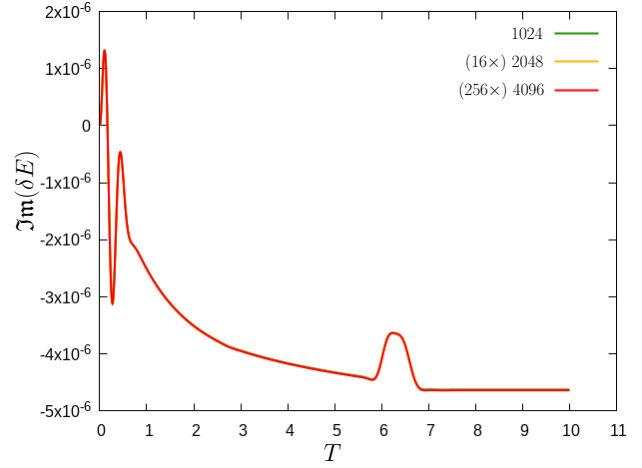
a

$$\mathcal{Q}_{\ell_{max}, \delta \ell} = \frac{\delta E_{\ell_{max}} - \delta E_{\ell_{max} + \delta \ell}}{\delta E_{\ell_{max} + \delta \ell}} \quad (3.7.2)$$

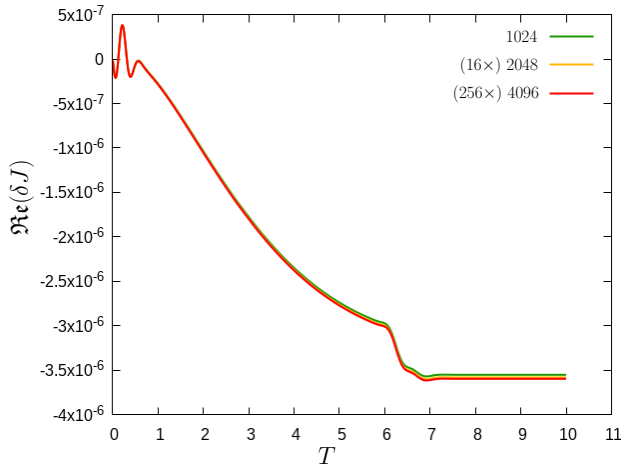
kifejezéssel közelítjük. A 3.8. ábrán $\ell_{max} = 4, 5, 6, 7$ esetén kapott becsléseket láthatunk, amik exponenciális csökkenése összhangban van az alkalmazott spektrális módszerek alapján várt konvergenciával.



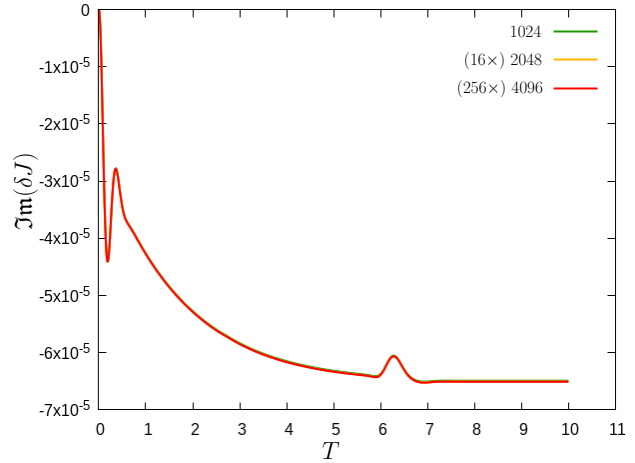
(a) A δE energiamérleg $\Re(\delta E)$ valós részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A konvergencia üteme 4.



(b) A δE energiamérleg $\Im(\delta E)$ képzetes részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A konvergencia üteme jó közelítéssel 4.



(c) A δJ impulzusmomentum-mérleg $\Re(\delta J)$ valós részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A konvergencia üteme közel 4.

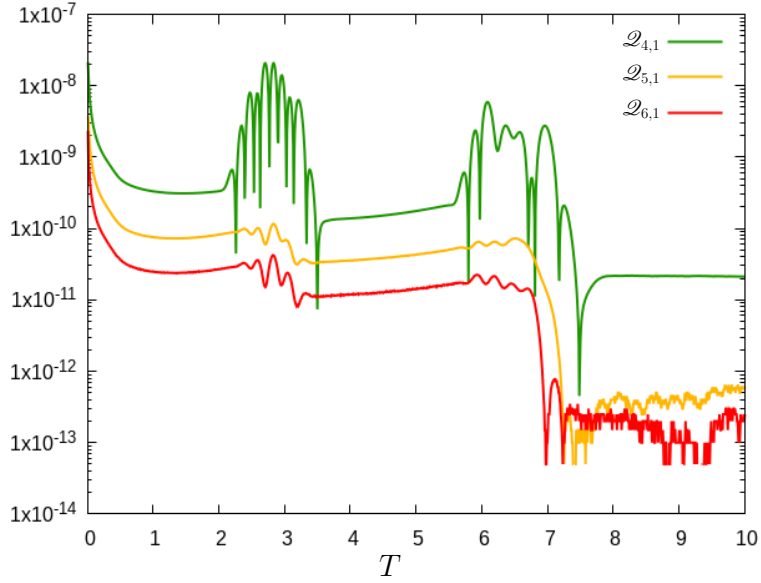


(d) A δJ impulzusmomentum-mérleg $\Im(\delta J)$ képzetes részének időfüggése három különböző felbontás mellett. A konvergencia üteme 4.

3.7. ábra. A δE és δJ energia- és impulzusmomentum-mérleg valós és képzetes részeinek időfüggése különböző radiális felbontás mellett abban az esetben, amikor az $s = -1$ -es megoldás az $s = 1$ -eshez tartozó adjungált megoldás.

3.7.3. Energia és impulzusmomentum áramlások

$s \neq 0$ esetén E^a és J^a fizikai értelmezése nem magától értetődő, ezért érdekes lehet ezen energia és impulzusmomentum típusú mennyiségek áramlását vizsgálnunk. Mielőtt erre rátérnénk, ismét hangsúlyozzuk, hogy az $s = 0$ spinsúlyú esettől eltekintve ezek az áramok nem egyes mezőkre, hanem a Teukolsky-egyenlet s és $-s$ spinsúlyú megoldásainak kombinációjára vannak értelmezve. Ebben a fejezetben az $s = 0$ esethez való hasonlósága miatt azt az esetet fogjuk vizsgálni, amikor



3.8. ábra. A $\Re(\delta E)$ energia-mérleg becsült $\mathcal{Q}_{\ell_{max}, \delta \ell}$ hibájának időfüggése különböző ℓ_{max} mellett abban az esetben, amikor az $s = -1$ -es megoldás az $s = 1$ -es minimális változtatásával állt elő.

a $-s$ spinsúlyú megoldást a kezdőadatban alkalmazott $s \rightarrow -s$ és $m \rightarrow -m$ cserékkel állítjuk elő.

A 3.9. ábra paneljein az

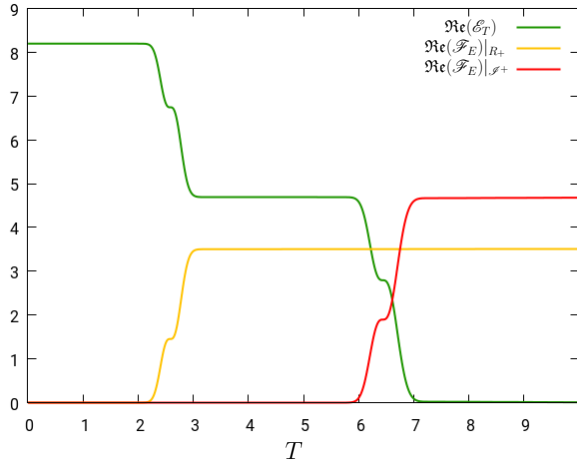
$$\mathcal{E}_T = \int_{\Sigma_T} n_a^{(T)} E^a \sqrt{|h_T|} dR d\vartheta d\varphi, \quad \mathcal{J}_T = \int_{\Sigma_T} n_a^{(T)} J^a \sqrt{|h_T|} dR d\vartheta d\varphi \quad (3.7.3)$$

teljes energia és impulzusmomentum valós és képzetes részeit (ahol Σ_T a $T = const$ szeleteket jelöli) és a hozzájuk tartozó

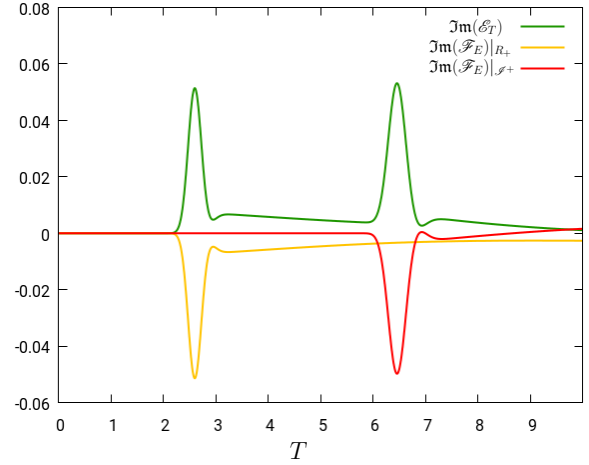
$$\mathcal{F}_E = \int_{Cyl_{R,T}} n_a^{(R)} E^a \sqrt{|h_R|} dT d\vartheta d\varphi \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_J = \int_{Cyl_{R,T}} n_a^{(R)} J^a \sqrt{|h_R|} dT d\vartheta d\varphi, \quad (3.7.4)$$

áramok valós és képzetes részeit ábrázoljuk, amelyeket a $R_+ \times [T_i, T]$ horizontot jelképező hengeren és a $R_{\mathcal{J}^+} \times [T_i, T]$ jövő fényszerű végtelent jelképező hengeren kell kiértékelni. Az ábrák az időfejlődésnek csupán korai szakaszát mutatják, de a folyamatok 99%-a ezen időintervallumon belül játszódik le, ennél fogva ezek az ábrák informatívak karakterisztikus jellemzők tekintetében.

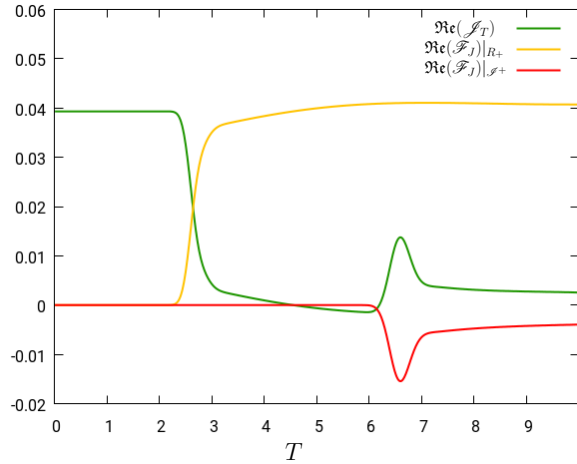
Habár a Teukolsky-egyenlet s és $-s$ spinsúlyokhoz tartozó megoldásai elvileg lehetnének teljesen függetlenek, a szimulációink során ugyanazon R függő (3.6.3) radiális profilt használtunk és ugyanazon, 3.6.2. fejezetben leírt paramétereket adtuk meg. Talán ennek tudható be a meglepő hasonlóság az energia és impulzusmomentum típusú áramlási folyamatok valós részeit ábrázoló 3.9(a) és 3.9(c) ábráink és [51] ennek megfelelő (5) és (7), valódi, $s = 0$ skalármezőre vonatkozó energia és impulzusmomentum áramlását megjelenítő ábráihoz.



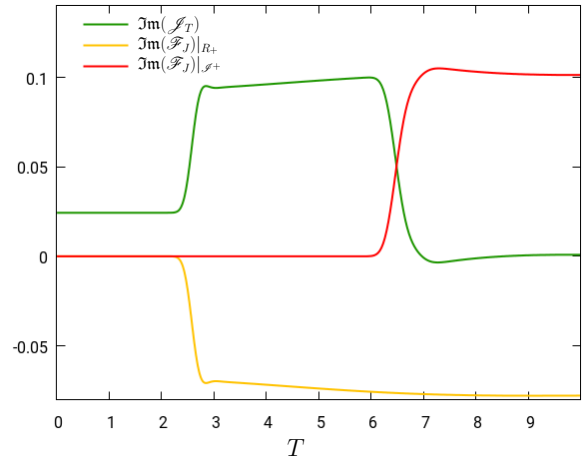
(a) A \mathcal{E}_T teljes energia $\Re(\mathcal{E}_T)$ valós része és a \mathcal{F}_E integrált energiaáram R_+ és \mathcal{I}^+ helyeken mért $\Re(\mathcal{F}_E)$ valós részei. Látható, hogy először a kezdőadat energiatartalmának nagyjából fele távozik a külső kommunikációs tartományból a feketelyuk eseményhorizontján át. A másik fele kicsit később a \mathcal{I}^+ jövő fényszerű végtelenen át távozik.



(b) A \mathcal{E}_T teljes energia $\Im(\mathcal{E}_T)$ képzetes része és a \mathcal{F}_E integrált energiaáram R_+ és \mathcal{I}^+ helyeken mért $\Im(\mathcal{F}_E)$ képzetes részei. Két kiugrást látunk pontosan akkor, amikor a hullámcsomagok távoznak az eseményhorizonton és a jövő fényszerű végtelenen át. Ezektől eltérően az áramlási folyamatok kis skálákon maradnak.



(c) A \mathcal{J}_T teljes impulzusmomentum $\Re(\mathcal{J}_T)$ valós része és a \mathcal{F}_J integrált impulzusmomentum-áram R_+ és \mathcal{I}^+ helyeken mért $\Re(\mathcal{F}_J)$ valós részei. Az impulzusmomentum jelentősen csökken a feketelyuk eseményhorizontján át majd némi negatív áramot látunk a fényszerű végtelenből. Ennek köszönhetően $T = 10$ körül több a rendszer impulzusmomentuma, mint a végtelenben megjelenő áram előtt közvetlenül, például $T = 5$ körül.



(d) A \mathcal{J}_T teljes impulzusmomentum $\Im(\mathcal{J}_T)$ képzetes része és a \mathcal{F}_J integrált impulzusmomentum-áram R_+ és \mathcal{I}^+ helyeken mért $\Im(\mathcal{F}_J)$ képzetes részei. A veszteségek itt a valós résznél tapasztaltakkal ellentétes előjelűek, vagyis a horizonton át negatív impulzusmomentum távozik, míg a végtelenben pozitív. Ezek a veszteségek majdnem kiüritik az impulzusmomentum képzetes részét.

3.9. ábra. Az \mathcal{E}_T teljes energia, a \mathcal{J}_T teljes impulzusmomentum valós és képzetes részei, valamint a hozzájuk tartozó \mathcal{F}_E és \mathcal{F}_J áramok képzetes és valós részei. Az ábrákon az időfejlődésnek csak a kezdeti szakaszát láthatjuk, de azt tapasztaljuk, hogy a számottevő dinamikai folyamatok akár 99%-a ekkor játszódik le.

Az alfejezet zárásaként megjegyezzük, hogy érdekes lehet tudni, mi történik, ha a háttér Kerr-téridő rotációs paraméterének előjelét $a \mapsto -a$ módon megváltoztatjuk. Érdekes módon ez a transzformáció csak a következő két tükrözésre vezet. Egy tükrözést tapasztalunk a \mathcal{E}_T teljes energia $\mathfrak{Im}(\mathcal{E}_T)$ képzetes részében és a R_+ és \mathcal{I}^+ helyeken kiértékelt \mathcal{F}_E integrált energiaáram $\mathfrak{Im}(\mathcal{F}_E)$ képzetes részében. Ezzel analóg módon tükrözést tapasztalunk a \mathcal{I}_T teljes impulzusmomentum $\mathfrak{Re}(\mathcal{I}_T)$ valós részében és a R_+ és \mathcal{I}^+ helyeken kiértékelt \mathcal{F}_J integrált impulzusmomentum-áram $\mathfrak{Re}(\mathcal{F}_J)$ valós részében. Az impulzusmomentum valós részénél tapasztalt előjelváltás összhangban van az intuícióval, hiszen a forgási paraméter $a \mapsto -a$ megváltoztatása után a feketelyuk a Teukolsky-egyenlet s és $-s$ spinsúlyú megoldásaihoz képest ellentétesen fog forogni.

3.8. Lecsengési együtthatók

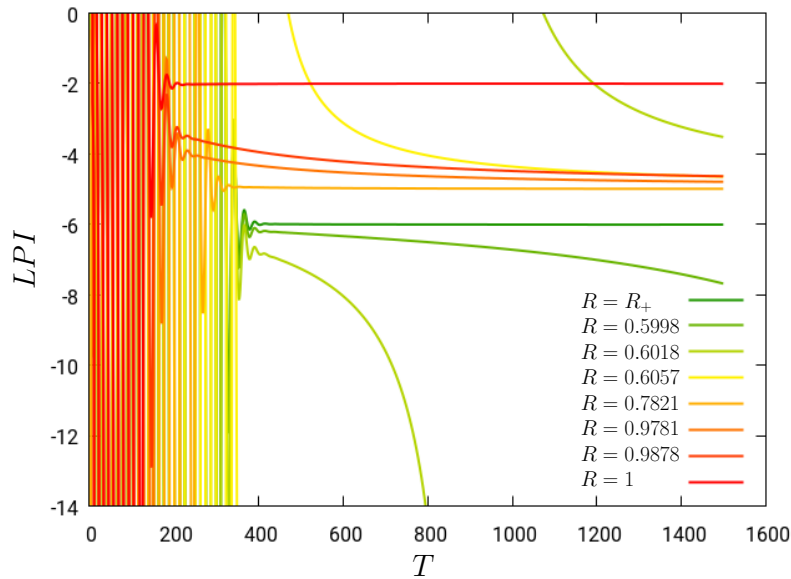
A következő alfejezetekben az LPI együtthatók meghatározására vonatkozó numerikus eredményeinket fogjuk bemutatni. Először az így kapott LPI-ket táblázatokba rendezzük, utána röviden összefoglaljuk a megfigyeléseinket és következményeiket.

3.8.1. Az LPI-k elrendezése

Az LPI-ket tartalmazó táblázatokat a szóba jöhető paraméterek különféle értékei mellett adjuk meg. $s = \pm 1, \pm 2$ spinsúly mellett a gerjesztő ℓ' és gerjesztett ℓ módusok mindegyike felveszi az $1 \leq \ell', \ell \leq 5$ intervallumból a megengedett értékeket. Vizsgálatainkban m -et megszorítjuk az $|m| \leq 2$ intervallumra, habár alkalmas $\ell' > 2$ választás mellett a módszerünk lehetővé tenné bármely a $|m| \leq \ell'$ feltételnek eleget tevő m értékek esetén is elvégezni a vonatkozó vizsgálatokat.

Mielőtt rátérnénk a táblázatok tartalmára, meg kell jegyeznünk, hogy az LPI-k s spin paramétertől való függését illetően el kell különítenünk a következő két, jelentősen különböző esetet. Ahogyan a 3.5.1 alfejezetben is láthattuk, amikor $s < 0$, elegendő meghatároznunk μ értékét az $R = R_+$ eseményhorizonton és az $R = 1$ jövő fényszerű végtelenben, mivel az LPI az $R_+ < R < 1$ köztes értékeknél ugyanazt az értéket veszi fel, mint az eseményhorizonton. Ezzel szemben amikor $s > 0$ az LPI-k nagyobb változatosságot mutatnak: köztes $R_+ < R < 1$ helyeken μ értéke különbözik a horizonton felvett értéktől, de aszimptotikusan az összes köztes $R_+ < R < 1$ helyen ugyanazon μ értékhez tartanak az LPI-k. Ezt illusztrálja a 3.10. ábra: $s > 0$ esetén μ értékeit nem elegendő csupán az eseményhorizonton ($R = R_+$) és a jövő fényszerű végtelenben ($R = 1$), hanem néhány köztes $R = \text{const}$ helyen is figyelnünk kell. Minél közelebb van a közbenső R pont $R = R_+$ -hoz vagy $R = 1$ -hez, annál több időt vesz igénybe, hogy a vonatkozó LPI beálljon az aszimptotikus értékéhez.

A fentebbi észrevételeknek megfelelően a következő módon építjük fel a táblázatainkat: Negatív



3.10. ábra. Az $s = 1, \ell = 1, m = 0$ módushoz tartozó LPI értékének R függése (a kezdőadat sztatikus $\ell' = 1$ módusú gerjesztés). μ értéke az $R = R_+$ eseményhorizonton -6 , míg a jövő fényszerű végtelent szimbolizáló $R = 1$ vonalnál -2 . Láthatjuk, hogy minél közelebb van a köztes $R_+ < R < 1$ hely a $R = R_+$ horizonthoz vagy a $R = 1$ jövő fényszerű végtelenhez, annál tovább tart, hogy az LPI elérje a közös $\mu = -5$ értéket.

s -ek esetén ($s = -1$ vagy $s = -2$) az LPI értéke a horizonton és véges köztes helyeken megegyezik, ezért minden ℓ' -vel és ℓ -l-lel címkézett cellában csak a horizonton felvett „ μ_{R_+} ” értéket és a fényszerű végtelenben felvett „ $\mu_{\mathcal{S}^+}$ ” értékeket tüntetjük fel egy függőleges vonallal elválasztva: „ $\mu_{R_+} | \mu_{\mathcal{S}^+}$.” A pozitív s -eket illetően ($s = 1$ vagy $s = 2$) az LPI köztes $R_+ < R < 1$ helyen felvett értéke különbözik μ_{R_+} -tól és $\mu_{\mathcal{S}^+}$ -tól és ezt a három különböző értéket a következő módon rendezzük egymás mellé: „ $\mu_{R_+} | \mu_R | \mu_{\mathcal{S}^+}$.” A gyakorlatban a középső helyen szereplő LPI-t mindig a $R = 0.88$ vonal mentén állapítjuk meg, ami kellően távol van $R = R_+$ -tól és $R = 1$ -től, hogy μ_R viszonylag hamar megközelítse az aszimptotikus értékét.

A legtöbb esetben az LPI pontos értéke egyértelműen meghatározhatónak bizonyult (3.5.9) segítségével (lásd 3.2–3.10. ábrákat). Be kell azonban ismernünk, hogy néhány esetben—főleg s negatív értékei mellett—nem tudunk egyértelmű konklúzióra jutni. Ezeket a bizonytalan eseteket a megfelelő ℓ' és ℓ értékekkel jelölt cellák megfelelő helyén elhelyezett „?” kérdőjellel jelezzük.

3.8.2. Tengelyszimmetrikus konfigurációk

Először megjegyezzük, hogy [76]-ban a tengelyszimmetrikus konfigurációkat részletesen vizsgálták. Ez lehetőséget biztosít számunkra, hogy összehasonlítsuk a megfigyelt LPI értékeket és ezáltal is

ellenőrizzük a kódunk megbízhatóságát.

A $|s| = 1, 2$ és $m = 0$ indexekkel jellemzett esetekre vonatkozó LPI-eket a 3.1. táblázatban gyűjtöttük össze $|s| = 1$ esetre, míg a 3.2. táblázatban a $|s| = 2$ esetre.

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	5 4	6 5	7 6	8 7	9 8
2	5 4	6 5	7 6	8 ?	9 ?
3	6 5	7 5	8 ?	9 ?	10 ?
4	7 6	8 6	9 6	10 ?	11 ?
5	8 7	9 7	10 7	? ?	? ?

(a) $s = -1$, sztatikus kezdőadat.

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	5 4	6 5	7 6	8 7	9 ?
2	6 5	7 5	8 6	9 7	10 ?
3	5 4	6 5	7 6	8 7	9 ?
4	6 5	7 5	8 ?	9 ?	10 ?
5	7 6	8 6	9 6	? ?	? ?

(c) $s = -1$, dinamikus kezdőadat.

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	6 5 2	7 6 3	8 7 4	9 8 5	10 9 6
2	6 5 2	7 6 3	8 7 4	9 8 5	10 9 6
3	7 6 3	8 7 3	9 8 4	10 9 5	11 10 ?
4	8 7 4	9 8 4	10 9 4	11 10 ?	12 11 ?
5	9 8 5	10 9 5	11 10 5	12 11 5	13 ? ?

(b) $s = 1$, sztatikus kezdőadat.

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	6 5 2	7 6 3	8 7 4	9 8 5	10 9 6
2	7 6 3	8 7 3	9 8 4	10 9 5	11 10 6
3	6 5 2	7 6 3	8 7 4	9 8 5	10 ? 6
4	7 6 3	8 7 3	9 8 4	10 9 5	11 10 6
5	8 7 4	9 8 4	10 9 4	11 10 ?	12 ? 6

(d) $s = 1$, dinamikus kezdőadat.

3.1. táblázat. $|s| = 1$, $m = 0$

A leginkább említésre méltó jellemzők a következők:

1. Az LPI-k értéke R_+ -nál és köztes $R_+ < R < 1$ helyeken mindig nő eggyel, ha a gerjesztett módus ℓ paraméterét növeljük eggyel.
2. Az LPI-k értéke \mathcal{S}^+ -nál nem feltétlenül nő az előbbihez hasonló szigorúan monoton módon, de sosem csökken, ha a gerjesztett módus ℓ paraméterét növeljük.
3. Az előző két pontból következik, hogy a leglassabban lecsengő módusok mindig a legkisebb megengedett ℓ indexhez tartozó módusok, habár \mathcal{S}^+ -nál előfordulhatnak más módusok is, amik ugyanabban az ütemben csökkennek.
4. $s > 0$ -nál μ_{R_+} értéke mindig nagyobb eggyel, mint a köztes $R_+ < R < 1$ helyen mért LPI.
5. Az előző pontok megfigyelései teljes mértékben egyeznek [84] és [76] hivatkozásokban ismertett analitikus és numerikus eredményekkel.
6. $|s| = 2$ esetén feltűnő különbség, hogy az első sorok és oszlopok ℓ' , ℓ cellái üresek. Ez annak a következménye, hogy a spinsúlyozott gömbharmonikusok $\ell < \max\{|s|, |m|\}$ módusai esetén ∂ hatása eltünteti a függvényeket, így ezek a módusok azonosan 0-t adnak.

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
3	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
4	X	8 7	? ?	? ?	? ?
5	X	9 8	? ?	? ?	? ?

(a) $s = -2$, sztatikus kezdőadat.

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 6	8 7	9 8	10 9
3	X	8 7	? ?	? ?	? ?
4	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
5	X	8 7	? ?	? ?	? ?

(c) $s = -2$, dinamikus kezdőadat.

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	8 7 2	9 8 3	10 9 4	11 10 5
3	X	8 7 2	9 8 3	10 9 4	11 10 5
4	X	9 8 3	10 9 3	11 10 4	12 11 5
5	X	10 9 4	11 10 4	12 11 4	13 12 5

(b) $s = 2$, sztatikus kezdőadat.

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	8 7 2	9 8 3	10 9 4	11 10 5
3	X	9 8 3	10 9 3	11 10 4	12 11 5
4	X	8 7 2	9 8 ?	10 9 4	11 10 5
5	X	9 8 3	10 9 3	11 10 4	12 11 5

(d) $s = 2$, dinamikus kezdőadat.3.2. táblázat. $|s| = 2$, $m = 0$

3.8.3. Nem-tengelyszimmetrikus konfigurációk

Megjegyezzük, hogy a nem-tengelyszimmetrikus esetekben, annak köszönhetően, hogy a \mathfrak{D} léptetőoperátor hatása alatt a spinsúlyozott gömbharmonikusok $\ell < \max\{|s|, |m|\}$ módusai eltűnnek, a táblázatok első sorai és oszlopai eltűnnek minden esetben, mikor $|m| = 2$ vagy $|s| = 2$. Ennek ellenére a tengelyszimmetrikus és nem-tengelyszimmetrikus esetek könnyebb összehasonlíthatósága miatt ezekben az esetekben is a $1 \leq \ell', \ell \leq 5$ intervallumot tüntetjük fel a táblázatokban.

$|m| = 1, 2$ sztatikus kezdőadattal

Ebben az alfejezetben sztatikus $|m| = 1, 2$ módusok által előállított gerjesztésekről lesz szó. A releváns LPI-ket a 3.3-3.6 táblázatokban gyűjtöttük össze. A főbb észrevételeinket a következőkben foglaljuk össze:

1. Most s pozitív értékei (vagyis $s = 1$ és $s = 2$) esetén is megegyeznek a horizonton és köztes helyeken leolvasott LPI értékek.
2. Adott s spinsúly mellett a megfelelő LPI-k függetlenek m előjelétől: az (a) és (c), valamint (b) és (d) jelű táblázatokban feltüntetett értékek páronként megegyeznek.
3. A horizonton mért μ_{R+} lecsengési együtthatók függetlenek s előjelétől. Ezzel szemben a jövő fényszerű végtelenben mért $\mu_{\mathcal{I}^+}$ lecsengési együtthatók függenek s előjelétől olyan módon, hogy negatív s esetén $\mu_{\mathcal{I}^+}$ mindig $2|s|$ -el nagyobb, mint a megfelelő pozitív s esetén mért $\mu_{\mathcal{I}^+}$ érték.

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	5 4	6 5	7 6	8 7	9 ?
2	5 4	6 5	7 6	8 ?	9 ?
3	6 5	7 5	8 6	9 ?	10 ?
4	7 6	8 6	9 6	10 ?	11 ?
5	8 7	9 7	10 7	? ?	? ?

(a) $s = -1, m = 1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	5 4	6 5	7 6	8 7	9 ?
2	5 4	6 5	7 6	8 ?	9 ?
3	6 5	7 5	8 6	9 ?	10 ?
4	7 6	8 6	9 6	10 ?	11 ?
5	8 7	9 7	10 7	? ?	? ?

(c) $s = -1, m = -1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	5 5 2	6 6 3	7 7 4	8 8 5	9 9 6
2	5 5 2	6 6 3	7 7 4	8 8 5	9 9 6
3	6 6 3	7 7 3	8 8 4	9 9 5	10 10 6
4	7 7 4	8 8 4	9 9 4	10 10 5	11 11 ?
5	8 8 5	9 9 5	10 10 5	11 11 5	12 ? ?

(b) $s = 1, m = 1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	5 5 2	6 6 3	7 7 4	8 8 5	9 9 6
2	5 5 2	6 6 3	7 7 4	8 8 5	9 9 6
3	6 6 3	7 7 3	8 8 4	9 9 5	10 10 6
4	7 7 4	8 8 4	9 9 4	10 10 5	11 11 ?
5	8 8 5	9 9 5	10 10 5	11 11 5	12 ? ?

(d) $s = 1, m = -1$ 3.3. táblázat. $|s| = 1, |m| = 1$ sztatikus kezdőadatokkal

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 5	8 6	9 7	10 ?
3	X	7 5	8 6	9 ?	10 ?
4	X	8 6	9 6	10 ?	10 ?
5	X	9 7	10 7	? ?	? ?

(a) $s = -1, m = 2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 5	8 6	9 7	10 ?
3	X	7 5	8 6	9 ?	10 ?
4	X	8 6	9 6	10 ?	11 ?
5	X	9 7	10 7	? ?	? ?

(c) $s = -1, m = -2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 3	8 8 4	9 9 5	10 10 6
3	X	7 7 3	8 8 4	9 9 5	10 10 6
4	X	8 8 4	9 9 4	10 10 5	11 11 6
5	X	9 9 5	10 10 5	11 11 5	12 ? 6

(b) $s = 1, m = 2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 3	8 8 4	9 9 5	10 10 6
3	X	7 7 3	8 8 4	9 9 5	10 10 6
4	X	8 8 4	9 9 4	10 10 5	11 11 6
5	X	9 9 5	10 10 5	11 11 5	12 ? 6

(d) $s = 1, m = -2$ 3.4. táblázat. $|s| = 1, |m| = 2$ sztatikus kezdőadatokkal

4. A nem-tengelyszimmetrikus esetben kapott μ_{R_+} és $\mu_{\mathcal{J}^+}$ lecsengési együtthatók páronként megfeleltethetőek a tengelyszimmetrikus konfigurációk esetén köztes $R_+ < R < 1$ helyen és jövő fényszerű végtelenben mért (előző fejezetben tárgyalt) lecsengési együtthatóknak.

 $|m| = 1, 2$ tisztán dinamikus kezdőadattal

A dinamikus kezdőadatokkal előállított gerjesztések láthatóan érdekesebbek. Ez nyilvánvalóvá válik például $\ell' = \ell_0 + 1$ esetben. Ekkor Hod [84] Green-függvényes érvelését [76]-ban korrigálják, de csak az $m = 0$ esetben. Mindazonáltal az eredményeink arra utalnak, hogy ilyen korrekcióra szükség van $m \neq 0$ mellett is. A vonatkozó lecsengési együtthatókat vastagon szedett zöld számokkal jelezzük a 3.7–3.10 táblázatokban.

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 6	8 7	9 8	10 ?
3	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
4	X	8 7	? ?	? ?	? ?
5	X	9 8	? ?	? ?	? ?

(a) $s = -2, m = 1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 6	8 7	9 8	10 ?
3	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
4	X	8 7	? ?	? ?	? ?
5	X	9 8	? ?	? ?	? ?

(c) $s = -2, m = -1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
3	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
4	X	8 8 3	9 9 3	10 10 4	11 11 5
5	X	9 9 4	10 10 4	11 11 4	12 12 5

(b) $s = 2, m = 1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
3	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
4	X	8 8 3	9 9 3	10 10 4	11 11 5
5	X	9 9 4	10 10 4	11 11 4	12 12 5

(d) $s = 2, m = -1$ 3.5. táblázat. $|s| = 2, |m| = 1$, sztatikus kezdőadat

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 6	8 7	9 8	10 9
3	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
4	X	8 7	? ?	? ?	? ?
5	X	9 8	? ?	? ?	? ?

(a) $s = -2, m = 2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 6	8 7	9 8	10 9
3	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
4	X	8 7	? ?	? ?	? ?
5	X	9 8	? ?	? ?	? ?

(c) $s = -2, m = -2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
3	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
4	X	8 8 3	9 9 3	10 10 4	11 11 5
5	X	9 9 4	10 10 4	11 11 4	12 12 5

(b) $s = 2, m = 2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
3	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
4	X	8 8 3	9 9 3	10 10 4	11 11 5
5	X	9 9 4	10 10 4	11 11 4	12 12 5

(d) $s = 2, m = -2$ 3.6. táblázat. $|s| = 2, |m| = 2$, sztatikus kezdőadat

1. Mint más esetekben, a horizonton mért lecsengési együtthatók értéke ezúttal is eggyel nő minden alkalommal, amikor ℓ értéke eggyel növekszik.
2. A \mathcal{S}^+ jövő fényszerű végtelenben mért lecsengési együtthatók nem feltétlenül nőnek, de sosem csökkennek, amikor ℓ értékét növeljük.
3. Rögzített s értékek mellett az LPI-k nem függenek m előjelétől.
4. A horizonton mért μ_{R_+} lecsengési együtthatók néhány kivételtől eltekintve függetlenek az s spin paraméter előjelétől. A kivételes eseteket $\ell' = \ell_0 + 1, \ell \geq \ell', |s| = 1, m = 2$ indexek jellemzik. Sajnos a rendelkezésünkre álló adat nem elegendő annak ellenőrzésére,

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	5 4	6 5	7 6	8 7	9 ?
2	5 4	6 5	7 6	8 7	? ?
3	5 4	6 5	7 6	8 ?	9 ?
4	6 5	7 5	8 6	9 ?	10 ?
5	7 6	8 6	9 6	? ?	? ?

(a) $s = -1, m = 1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	5 4	6 5	7 6	8 7	9 ?
2	5 4	6 5	7 6	8 7	9 ?
3	5 4	6 5	7 6	8 ?	9 ?
4	6 5	7 5	8 6	9 ?	10 ?
5	7 6	8 6	9 6	10 ?	? ?

(c) $s = -1, m = -1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	5 5 2	6 6 3	7 7 4	8 8 5	9 9 6
2	5 5 2	6 7 3	7 8 4	8 9 5	9 10 6
3	5 5 2	6 6 3	7 ? 4	8 ? 5	9 ? 6
4	6 6 3	7 7 3	8 8 4	9 9 5	10 10 6
5	7 7 4	8 8 4	9 9 4	10 10 ?	11 11 ?

(b) $s = 1, m = 1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	5 5 2	6 6 3	7 7 4	8 8 5	9 9 6
2	5 5 2	6 7 3	7 8 4	8 9 5	9 10 6
3	5 5 2	6 6 3	7 ? 4	8 ? 5	9 ? 6
4	6 6 3	7 7 3	8 8 4	9 9 5	10 10 6
5	7 7 4	8 8 4	9 9 4	10 10 5	11 11 6

(d) $s = 1, m = -1$ 3.7. táblázat. $|s| = 1, |m| = 1$ tisztán dinamikus kezdőadatokkal

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 5	8 6	9 7	10 ?
3	X	7 5	9 6	10 7	11 ?
4	X	7 5	8 6	9 ?	10 ?
5	X	8 6	9 6	10 ?	11 ?

(a) $s = -1, m = 2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 5	8 6	9 7	10 ?
3	X	7 5	? 6	? 7	? ?
4	X	7 5	8 6	9 ?	10 ?
5	X	8 6	9 6	10 ?	11 ?

(c) $s = -1, m = -2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 3	8 8 4	9 9 5	10 10 6
3	X	7 7 3	8 9 4	9 10 5	10 11 6
4	X	7 7 3	8 8 4	9 ? 5	10 ? 6
5	X	8 8 4	9 9 4	10 10 5	11 ? 6

(b) $s = 1, m = 2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 3	8 8 4	9 9 5	10 10 6
3	X	7 7 3	8 9 4	9 10 5	10 11 6
4	X	7 7 3	8 8 4	9 ? 5	10 ? 6
5	X	8 8 4	9 9 4	10 10 5	11 ? 6

(d) $s = 1, m = -2$ 3.8. táblázat. $|s| = 1, |m| = 2$ tisztán dinamikus kezdőadat

hogy hasonló jelenséget tapasztalunk-e $|s| = 2$ esetén is, azonban [76] 5. táblázata alapján megállapíthatjuk, hogy $|s| = 2, m = 2$ mellett nem tapasztalunk ilyet.

5. Az előző fejezetben tárgyaltakhoz hasonlóan a jövő fényszerű végtelenben mért $\mu_{\mathcal{S}^+}$ lecsengési együtthatók függenek s előjelétől olyan módon, hogy negatív s esetén $\mu_{\mathcal{S}^+}$ mindig $2|s|$ -el nagyobb, mint a megfelelő pozitív s esetén mért $\mu_{\mathcal{S}^+}$ érték.

A két Green-függvényes érveléssel kapcsolatosan a numerikus eredményeink alapján a következő következtetéseket vonhatjuk le:

6. A horizonton mért μ_{R^+} lecsengési együtthatók igazolják, hogy a [76] függelékében javasolt módosítások csak $m = 0$ esetben érvényesek. A kivétel a 3.8-a. táblázatban szereplő $\ell' = 3$ -

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 6	8 7	9 8	10 9
3	X	? ?	? ?	? ?	? ?
4	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
5	X	8 7	? ?	? ?	? ?

(a) $s = -2, m = 1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 6	8 7	9 8	10 9
3	X	? ?	? ?	? ?	? ?
4	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
5	X	8 7	? ?	? ?	? ?

(c) $s = -2, m = -1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
3	X	7 7 2	8 9 3	9 10 4	10 11 5
4	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
5	X	8 8 3	9 9 3	10 10 4	11 11 5

(b) $s = 2, m = 1$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
3	X	7 7 2	8 9 3	9 10 4	10 11 5
4	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
5	X	8 8 3	9 9 3	10 10 4	11 11 5

(d) $s = 2, m = -1$ 3.9. táblázat. $|s| = 2, |m| = 1$, tisztán dinamikus kezdőadat

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 6	8 7	9 8	10 9
3	X	7 6	? ?	? ?	? ?
4	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
5	X	8 7	? ?	? ?	? ?

(a) $s = -2, m = 2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 6	8 7	9 8	10 9
3	X	7 6	? ?	? ?	? ?
4	X	7 6	8 ?	9 ?	10 ?
5	X	8 7	? ?	? ?	? ?

(c) $s = -2, m = -2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
3	X	7 7 2	8 9 3	9 10 4	10 11 5
4	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
5	X	8 8 3	9 9 3	10 10 4	11 11 5

(b) $s = 2, m = 2$

ℓ'	$\ell=1$	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
3	X	7 7 2	8 9 3	9 10 4	10 11 5
4	X	7 7 2	8 8 3	9 9 4	10 10 5
5	X	8 8 3	9 9 3	10 10 4	11 11 5

(d) $s = 2, m = -2$ 3.10. táblázat. $|s| = 2, |m| = 2$, tisztán dinamikus kezdőadat

hoz tartozó sor. Itt az adatok azt sugalmazzák, hogy $\ell > 2$ esetén szükség van egy $m = 0$ esetben alkalmazotthoz hasonló módosításra.

- $s > 0$ mellett az $\ell' = \ell_0 + 1$ esettől eltekintve μ_{R_+} és a köztes $R_+ < R < 1$ helyeken mért lecsengési együtthatók megegyeznek. Amikor $\ell' = \ell_0 + 1$, akkor a köztes helyeken mért μ_R értékek ($\ell = \ell_0$ kivételével) rendszeresen nagyobbak eggyel, mint azt a [76] hivatkozásban a szerzők állították és az előzőekben (3.5.4)-ben foglaltunk össze. Ez arra utal, hogy itt is szükség van egy [76]-ban javasolthoz hasonló korrekcióra $s > 0$, $\ell' = \ell_0 + 1$, és $\ell > \ell_0$ esetekben.
- A jövő fényszerű végtelenben meghatározott $\mu_{\mathcal{G}^+}$ értékek összhangban vannak [76, 84] ered-

ményeikkel.

Mindent egybevetve úgy tűnik, hogy $\ell' = \ell_0 + 1$ esetben bizonyos körülmények között sem [84], sem [76] jóslatait nem támogatják az eredményeink. A vonatkozó esetek bizonyosan további gondos vizsgálatot igényelnek.

3.9. Szuperradiancia

A Kerr-téridő asztrofizikai jelentősége és bonyolultsága miatt a Teukolsky-egyenlet megoldásainak vizsgálata több jelenség megértése szempontjából érdekes. Az előző fejezetben összefoglalt, a perturbációk aszimptotikus tulajdonságainak tanulmányozása után a perturbációk szuperradiáns viselkedése került figyelmünk középpontjába.

Ahogy a 3.1. alfejezetben említettük, a $(\partial_t)^a$ Killing-vektormező kauzális jellege megváltozik az ergoszféra határán. Az ergoszférában még a végtelenben stacionárius $(\partial_t)^a$ Killing-vektormező pályái is térszerűvé válnak. Az ergoszféra létezésének köszönhetően tudunk a Penrose-folyamat révén energiát kinyerni a feketelyuk forgásából. Ezt az energiát azonban nem csak pontszerű tesztek képesek megcsapolni [88]. A különféle mezők esetén fellépő hasonló folyamatot szuperradiáns szórásnak vagy egyszerűen szuperradianciának nevezzük. A 3.9.1. alfejezetben rövid áttekintést adunk a folyamat elvi hátteréről, majd a 3.9.2. alfejezetben kitérünk arra, hogy ez milyen módon befolyásolja a kezdőadatok megadását. A numerikus vizsgálataink során alkalmazott kezdőadatok alapján megfigyeléseinket három csoportban soroljuk. A 3.9.3. alfejezetben az ergoszférától látványosan elválasztott kezdőadatokra vonatkozó észrevételeinket mutatjuk be. A 3.9.4. alfejezetben ezzel szemben az ergoszférában koncentrált kezdőadatok időfejlődésének eredményeit tárgyaljuk. Zárásként a 3.9.5. alfejezetben a kettő között átmenetet képező, az ergoszférából egyre inkább kilógó kezdőadatokat vizsgálunk. Megjegyezzük, hogy az effektus látványosabbá tétele érdekében a Kerr-háttér paramétereit ebben az alfejezetben ismertetett vizsgálataink során $M = 1$ és $a = 0.99$ módon rögzítettük.

3.9.1. A szuperradiáns szórások elméleti háttere

Teukolsky [68] cikkében megmutatta, hogy a (3.2.45) egyenlet megoldásainak

$$\mathcal{F}\psi^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^{(s)} e^{-i\omega\tau} dt, \quad (3.9.1)$$

időbeli Fourier-transzformáltját érdemes az

$$\mathcal{F}\psi^{(s)}(\omega, r, \vartheta, \phi) = \sum_{\ell=|s|}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} {}_sR_{\ell,\omega}^m(r) \cdot {}_sS_{\ell,a\omega}^m(\vartheta, \phi), \quad (3.9.2)$$

alakban keresni, ahol (t, r, ϑ, ϕ) a Boyer–Lindquist-koordináták és ω az időbeli eltolások irányában mért frekvencia.

A TME értelmében a (3.9.2)-ben szereplő ${}_s R_{\ell, \omega}^m$ radiális függvény—bármely ℓ, m indexek és ω esetén—eleget tesz a

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \left(\frac{d}{dr} {}_s R_{\ell, \omega}^m \right) \right) + \left[\frac{K^2 - 2i s (r - M) K}{\Delta} + 4i s \omega r - {}_s \lambda_{\ell, \omega}^m \right] {}_s R_{\ell, \omega}^m = 0 \quad (3.9.3)$$

Schrödinger-típusú egyenletnek. Az ${}_s S_{\ell, a\omega}^m$ anguláris függvények pedig a

$$\bar{\delta} \delta {}_s S_{\ell, a\omega}^m + [2s(a\omega \cos \vartheta - 1) + a^2 \omega^2 \cos^2 \vartheta - {}_s E_{\ell, a\omega}^m] {}_s S_{\ell, a\omega}^m = 0, \quad (3.9.4)$$

sajátérték-egyenletet kielégítő (lásd [88] (2.7)-es egyenletét vagy [89] (3.74)-es egyenletét) spinsúlyozott lapult szferoidális harmonikusok $a\omega$ lapultsági paraméterrel. (3.9.4) sajátértékei ekkor ${}_s \lambda_{\ell, \omega}^m = {}_s E_{\ell, a\omega}^m + a^2 \omega^2 - 2am\omega - s(s+1)$ és a (3.9.3) egyenletben $K = (r^2 + a^2)\omega - am$. A (3.9.4)-ben szereplő δ és $\bar{\delta}$ operátorokat illetően visszautalunk a 2. fejezet tartalmára.

A Sztarobinszkij–Teukolsky-azonosságok [70] és a $dr/dr_* = \Delta/(r^2 + a^2)$ által meghatározott r_* radiális teknőc-koordináta alkalmazásával belátható (részletekért lásd [89] 4.7.2 fejezetét), hogy (3.9.3) fizikai megoldásainak aszimptotikus viselkedését

$${}_s R_{\ell, \omega}^m \sim \begin{cases} \mathcal{I} e^{-i\omega r_*} + \mathcal{R} e^{+i\omega r_*} & \text{ahogy } r \rightarrow \infty \\ \mathcal{T} e^{-i(\omega - m\Omega_+) r_*} & \text{ahogy } r \rightarrow r_+, \end{cases} \quad (3.9.5)$$

írja le, ahol $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ és $\Omega_+ = a/(2Mr_+)$ külön-külön a Kerr-feketelyuk eseményhorizontjának helyét jelző koordináta-értéket, illetve a horizontnak az aszimptotikusan stacionárius megfigyelő által mért forgási sebességét jelöli. Az \mathcal{I} , \mathcal{R} és \mathcal{T} tényezők a beesési, visszaverődési és áthatolási együtthatók a végtelenben és a horizonton. Meg kell jegyeznünk, hogy az ilyen típusú peremfeltétel a horizonton expliciten feltételezi egy mélyen az ergoszférába hatoló hullám létezését.

Ezek után (3.9.3) és (3.9.4) egyenletek, valamint a (3.9.5) aszimptotikus viselkedés felhasználásával meg lehet állapítani a mező által az ergoszférából a végtelenbe eljuttatott energia fluxusát. A vonatkozó vizsgálatok legmeglepőbb következtetése (lásd [88] IV. fejezetét és [89] 3.6.2 fejezetét), hogy a bozonikus mezők s egész spinsúlyától függetlenül $s = 0, \pm 1 \pm 2$ esetén a horizonton az egységnyi szögben behulló energia arányos az $\omega(\omega - m\Omega_+) |\mathcal{T}|^2$ szorzattal, vagyis

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{E}}{dt d\Omega} \right|_{r_+} \sim \omega(\omega - m\Omega_+) |\mathcal{T}|^2. \quad (3.9.6)$$

A megfelelő pozitív arányossági tényezők—ezeknek nincs szerepük ebben a gondolatmenetben—explicit alakja megtalálható a [88] referencia (4.26), (4.32) és (4.44) egyenleteiben. Összegzésképpen elmondhatjuk, hogy amikor $|\mathcal{T}|$ nem tűnik el és az

$$0 < \omega < m\Omega_+ \quad (3.9.7)$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor a Kerr-feketelyukból skalár, elektromágneses vagy gravitációs perturbációk szórási folyamatai révén energiát nyerhetünk ki a rendszerből.

3.9.2. Szuperradianciára optimalizált kezdőadat

Ahhoz, hogy megfelelően hangolt hullámcsomagot kapjunk, alkalmazzuk a [42, 90]-ben kifejtett eljárásokat. Ennek megfelelően feltételezzük, hogy az aszimptotikus régióban—vagy legalább a kezdőadatok kis környezetében—a megoldást

$$\psi^{(s)}(t, r_*, \vartheta, \phi) \approx A \cdot \exp[-i\omega_0(r_* - r_{*0} + t)] f(r_* - r_{*0} + t) {}_sY_\ell^m(\vartheta, \phi) \quad (3.9.8)$$

módon közelíthetjük, ahol f egy kompakt tartójú sima függvény, A , ω_0 és r_{*0} valós paraméterek (r_{*0} csupán egy eltolás a teknőc-koordinátában kifejezve).

Megjegyezzük, hogy ugyan (3.9.8) csupán egyetlen ${}_sY_\ell^m$ módust foglal magában (3.2.45) belső csatolásainak megfelelően azonnal más ℓ módusok is bekapcsolódnak. A (3.9.8) közelítő megoldás $\mathcal{F}\psi^{(s)}$ Fourier-transzformáltja

$$\mathcal{F}\psi^{(s)}(\omega, r_*, \vartheta, \phi) \approx A \cdot \exp[-i\omega(r_* - r_{*0})] \mathcal{F}f(\omega - \omega_0) {}_sY_\ell^m(\vartheta, \phi), \quad (3.9.9)$$

ahol ω az időbeli frekvencia és $\mathcal{F}f$ az f függvény Fourier-transzformáltját jelöli. Ennek megfelelően $\mathcal{F}f$ a frekvenciaprofil, ami garantálja, hogy ha $\mathcal{F}f$ kellően szűk, akkor (3.9.8) jól közelít egy befelé futó monokromatikus hullámcsomagot, amely szuperradiáns feltéve, hogy $0 < \omega_0 < m\Omega_+$.

A kezdőadatok pontos alakjának meghatározása előtt idézzük fel a 3.3. fejezetben bevezetett koordináta-transzformációkat, melyeket alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$t + r_* - r_{*0} = \tau + r - r_{*0} = T + \frac{1 + R^2}{1 - R^2} - 4M \log(|1 - R^2|) + \frac{2R}{1 - R^2} - R_0, \quad (3.9.10)$$

ahol az r_{*0} eltolást az utolsó lépésben a megfelelő R_0 eltolással helyettesítettük. Ekkor (3.9.10) jobb oldalát $H(T, R; R_0)$ -lal jelölve egy, a (3.9.8) közelítésnek megfelelő, befelé tartó hullámcsomag

$$\begin{aligned} \Phi^{(s)}(T, R, \vartheta, \varphi) &= \mathcal{A}(R) \cdot \psi^{(s)}(T, R, \vartheta, \varphi) \\ &\approx \mathcal{A}(R) \cdot \exp[-i\omega_0 H(T, R; R_0)] f(H(T, R; R_0)) {}_sY_\ell^m(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.9.11)$$

alakban írható fel, ahol \mathcal{A} a (3.9.8) és (3.3.17) összefüggésekből származó nagyítási tényező $A \cdot [r(R) \cdot \Delta^s(R)]$ szorzatát jelöli. Mindezeknek megfelelően a keresett $(\phi^{(s)}, \phi_T^{(s)})$ kezdőadat

$$\phi^{(s)}(R, \vartheta, \varphi) = \mathcal{A}(R) \cdot \exp[-i\omega_0 H_0] f(H_0) {}_sY_\ell^m(\vartheta, \varphi) \quad (3.9.12)$$

$$\phi_T^{(s)}(R, \vartheta, \varphi) = \mathcal{A}(R) \cdot \exp[-i\omega_0 H_0] f'(H_0) {}_sY_\ell^m(\vartheta, \phi) - i\omega_0 \phi^{(s)}(R, \vartheta, \varphi), \quad (3.9.13)$$

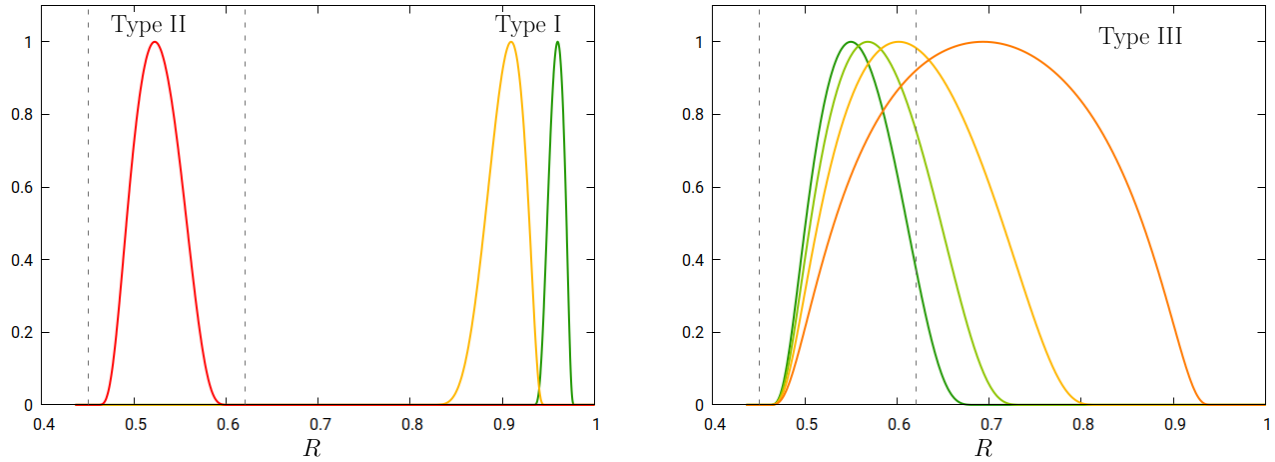
módon írható fel, ahol f' az f függvény elsőrendű deriváltját jelöli, továbbá $H_0 = H_0(R)$ -rel a $H(T_0, R; R_0)$ kifejezést rövidítettük.

Az f radiális profil a szimulációinkban minden esetben a (3.6.3) profil egy enyhén módosított

$$f(x) = \begin{cases} \exp \left[4 - \left| \frac{w_1}{x + \frac{w_1}{2}} \right| - \left| \frac{w_2}{x - \frac{w_2}{2}} \right| \right], & \text{ha } x \in \left[-\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2} \right] \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \quad (3.9.14)$$

alakban írható változata, ami az x valós változónak sima valós függvénye a kompakt $[-w_1/2, w_2/2]$ tartóval.

Ahogy a bevezetésben említettük, az alkalmazott kezdőadatoknak három csoportját különböztetjük meg. A radiális profil mindhárom esetben kompakt tartójú. Az I. típusú kezdőadat tartója élesen elválik az ergoszférától, míg a II. típus esetén az ergoszférra koncentrálódik. A III. típusú kezdőadat tartója egyre inkább kinyúlik az ergoszférából egészen addig, míg át nem fed az I. és II. típusú kezdőadat tartójával is. Ennek megfelelően az eseményhorizont közvetlen közeléből indulva az ergoszférán keresztül a külső kommunikációs tartomány egyre nagyobb és nagyobb részeit fedi le. Néhány tipikus $f(H_0(R))$ radiális profil látható a 3.11. ábra paneljein. Az I. típusú kezdőadatok



(a) I. és II. típusú radiális profilok.

(b) III. típusú radiális profilok.

3.11. ábra. A bal oldalon az I. és II. típusú kezdőadatoknak megfelelő profilok láthatóak. A jobb oldali panel a III. típusú kezdőadatoknak megfelelő profilokat mutat. A két függőleges szaggatott vonal az eseményhorizont helyét és az ergoszféra egyenlítői síkban vett kiterjedését jelöli.

tartója láthatóan elkülönül az ergoszférától, a II. típusú kezdőadat azonban oda koncentrálódik. A bal oldali panel két I. típusú profilt mutat, amiket a $R_1 = 0.8$, $R_0 = 0.9$, $R_2 = 0.95$ és $R_1 = 0.93$, $R_0 = 0.95$, $R_2 = 0.98$ értékek jellemezzik, míg a II. típusú profilt a $R_1 = 0.454$, $R_0 = 0.5$, $R_2 = 0.61$ paraméterek jellemzik. Itt R_1 és R_2 a tartó bal és jobb széléit jelölik, míg R_0 a profil asszimmetriáját jellemzi. Viszonyítási alapul közöljük, hogy az $M = 1$ és $a = 0.99$ értékek mellett az eseményhorizont koordinátája $R_+ = 0.4533$, az ergoszféra egyenlítő síkjában vett határát pedig $R_E = 0.618$ adja. Szimmetrikus profilok esetén R_0 egyben a maximum helyét is mutatja, amely

ekkor R_1 és R_2 középértékénél található, vagyis $R_0 = (R_1 + R_2)/2$. A III. típusú profilok bal szélének közös R koordinátája $R_1 = 0.4536$, míg a jobb széleket sorra $R_2 = 0.7, 0.76, 0.84, 0.95$ határozza meg.

Fontos hangsúlyoznunk, hogy ezek a profilok teszik lehetővé a frekvencia megfelelő beállítását, ezáltal azt, hogy a megoldások legalább a kezdőfelület környezetében a szuperradiáns frekvencia-tartományban legyenek. Ennek az elvárásnak a teljesülését a

$$\mathcal{PS}(\omega, R) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}\Phi^{(s)}|^2(\omega, R, \vartheta, \varphi) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (3.9.15)$$

teljesítményspektrumok meghatározásával fogjuk ellenőrizni.

A szórások szuperradiáns nagyítását a beérkező hullámcsomag

$$E_0 = \int_{T=T_i} n_a^{(T)} E^a \sqrt{|h_T|} \, dR \, d\vartheta \, d\varphi, \quad J_0 = \int_{T=T_i} n_a^{(T)} J^a \sqrt{|h_T|} \, dR \, d\vartheta \, d\varphi \quad (3.9.16)$$

energiájának és impulzusmomentumának, valamint a végtelenbe kisugárzott

$$E_{out} = \int_{R=1} n_a^{(R)} E^a \sqrt{|h_R|} \, dT \, d\vartheta \, d\varphi, \quad J_{out} = \int_{R=1} n_a^{(R)} J^a \sqrt{|h_R|} \, dT \, d\vartheta \, d\varphi, \quad (3.9.17)$$

energiának és impulzusmomentumnak az összehasonlításával jellemezhetjük, ahol $n_a^{(T)}$, $n_a^{(R)}$, h_T és h_R a $T = const$ és $R = const$ hiperfelületek 3.4. alfejezetben is alkalmazott normálisai és a rajtuk indukált metrikák determinánsai. Az energiában vagy impulzusmomentumban akkor tapasztalunk növekedést, ha $E_{out} > E_0$ vagy $J_{out} > J_0$. Ennek megfelelően ezeket a folyamatokat a

$$\delta E = \frac{E_0 - E_{out}}{E_0}, \quad \delta J = \frac{J_0 - J_{out}}{J_0} \quad (3.9.18)$$

skalárfüggetlen hányadosokkal jellemezzük. A gyakorlatban az $s = 0$ skalármező esetét leszámítva E_0 , E_{out} , J_0 és J_{out} komplex mennyiségek, ezért (3.9.18) kiértékelése során minden esetben E_0 , E_{out} , J_0 és J_{out} abszolút értékeit használjuk. A szuperradiancia érdekességét az adja, hogy egy hagyományosan pozitív definit mennyiség, az energia, negatívvá válik, ezáltal $\delta E < 0$ is megvalósulhat. A munkánk során alkalmazott energiáról nem tudjuk, hogy $s \neq 0$ esetben pozitív definit-e, illetve az impulzusmomentum általában véve sem az, de az egyszerűség kedvéért valahányszor $\delta E < 0$ vagy $\delta J < 0$, erre a jelenségre szuperradianciaként fogunk hivatkozni. Minden ilyen esetben gondolnunk kell rá, hogy „szuperradianciáról” csak ezen fenntartások mellett beszélünk.

Az energia és impulzusmomentum áramlása fontos adalékokat szolgáltat a vizsgált konfigurációk történetéről. Korábbi tanulmányok (lásd [91] 12-14. ábráit) demonstrálták, hogy a „térfogatnormalizált” energia- és impulzusmomentum-sűrűségek informatívabbak, mint ha csupán az energia- és impulzusmomentum-sűrűségeket ábrázolnánk. Jelen esetben az ezektől kissé eltérő $\mathcal{E} = \mathcal{E}(T, R)$

és $\mathcal{J} = \mathcal{J}(T, R)$ „térfogatnormalizált” áramsűrűségek alkalmasabbnak bizonyultak a dinamikai folyamatok jellemzésére. Ezeket a térfogatnormalizált mennyiségeket az

$$\mathcal{E} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} n_a^{(R)} E^a \sqrt{|h_R|} d\vartheta d\varphi, \quad \mathcal{J} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} n_a^{(R)} J^a \sqrt{|h_R|} d\vartheta d\varphi \quad (3.9.19)$$

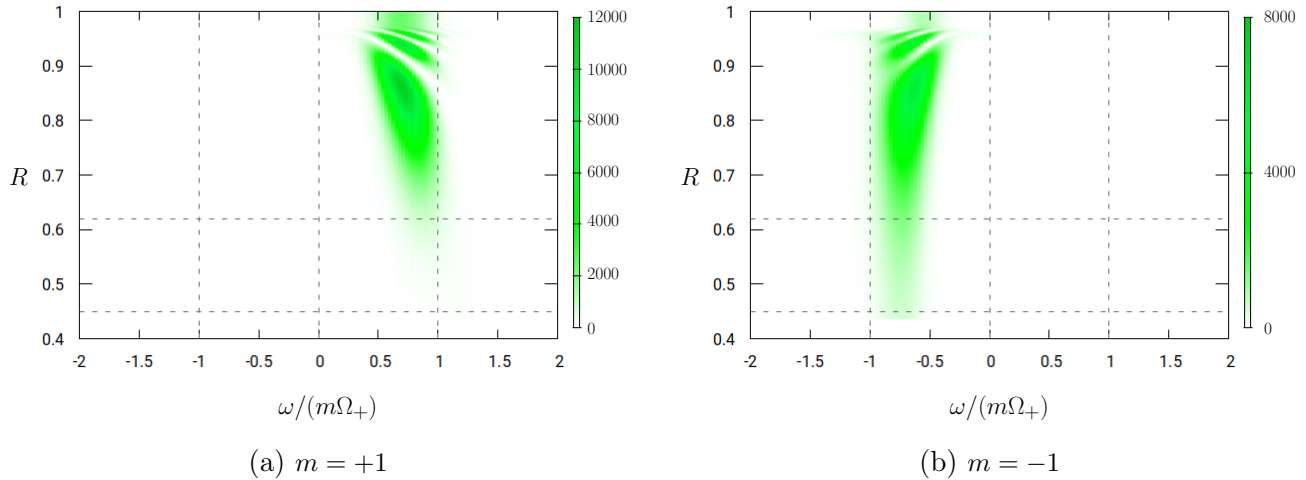
integrálokon keresztül határozzuk meg. Ezek T szerinti integráljai, $\int_R \mathcal{E}(T, R) dT$ és $\int_R \mathcal{J}(T, R) dT$, megadják az adott $R = \text{const}$ hiperfelületen átáramlott energia és impulzusmomentum fluxusát. Fontos kiemelnünk, hogy a vonatkozó vizsgálatok során minden esetben az adjungált megoldásokat alkalmazva értékeljük ki a (3.4.3) és (3.4.4) áramokat, így az egyes spinsúlyhoz tartozó megoldásokat az ellentett spinsúlyú megoldásoktól függetlenül vizsgálhatjuk. Zárásként felidézzük, hogy a (3.4.3) és (3.4.4) áramokhoz hasonlóan a térfogatnormalizált energia- és impulzusmomentum-áramsűrűségek is komplex mennyiségek az $s = 0$ eset kivételével. Ennek ellenére a későbbiekben csupán ezek valós részeit fogjuk ábrázolni, amit igazol, hogy ezek minden esetben több nagyságrenddel nagyobbak a képzetes részeknél.

3.9.3. Az ergoszférától távolról indított hullámcsomag

Ahogy az a 3.11. ábra bal oldali paneljén látható, az I. típusú kezdőadat tartója mindig határozottan elkülönül az ergoszférától. A kezdőadat tartóját három paraméter, R_1 , R_2 és R_0 jellemzi, ahol R_1 és R_2 határozza meg a tartó bal és jobb szélét, R_0 pedig megadja a maximum hozzávetőleges helyét. I. típusú kezdőadatok esetén ezeket majdnem mindig az $R_1 = 0.93$, $R_0 = 0.95$, $R_2 = 0.98$ értékekhez állítottuk be. Ahol külön nem jeleztük, az ADM tömeg és a Kerr-feketelyuk forgási paramétere $M = 1$ és $a = 0.99$ értékekkel rendelkeznek. Megjegyezzük továbbá, hogy a $T - R$ vagy $\omega - R$ grafikonokon szürke, szaggatott vonallal jelzett $R = \text{const}$ értékek az ergoszféra egyenlítői síkban vett R_E külső határát és az eseményhorizont R_+ helyét mutatják. $M = 1$ és $a = 0.99$ mellett a numerikus értékek $R_E = 0.618$ és $R_+ = 0.4533$. Az alkalmazott (3.9.12) és (3.9.13) kezdőadatok frekvencia profiljának $\tilde{\omega}$ középértéke elvárásaink szerint a $m\Omega_+$ felső határ alatt, de annak közelében található. Minden esetben megadjuk, hogy milyen ω_0 érték mellett kaptuk a bemutatott spektrumot.

Skalármező

A radiális profilt megadó R_1 , R_2 és R_0 mellett a két, részletesen vizsgált megoldást az $s = 0$, $\omega_0 = 0.3$, $\ell = 1$ és $m = \pm 1$ fizikai paraméterek jellemzik. Megjegyezzük, hogy az m „azimutális paraméter” egyszerű fizikai interpretációval rendelkezik. Az $m > 0$ konfigurációk a háttérként szolgáló Kerr-feketelyukkal megegyező, az $m < 0$ konfigurációk azzal ellentétes irányban forognak. A vonatkozó energia és impulzusmomentum transzportok szemügyre vétele előtt érdemes a megoldásokhoz tartozó, 3.12. ábrán látható, $\mathcal{PS} = \mathcal{PS}(\omega, R)$ spektrumokra vetni egy pillantást. Vegyük

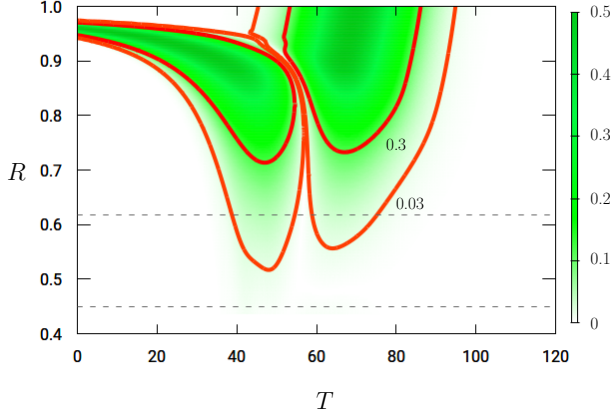


3.12. ábra. A bal, illetve a jobb oldali paneleken az $m = +1$ és $m = -1$ értékekkel jellemzett megoldások $\mathcal{PS}(\omega, R)$ teljesítmény spektruma látható. A további paraméterek az $s = 0$, $\ell = 1$, $\omega_0 = 0.3$ értékeket veszik fel.

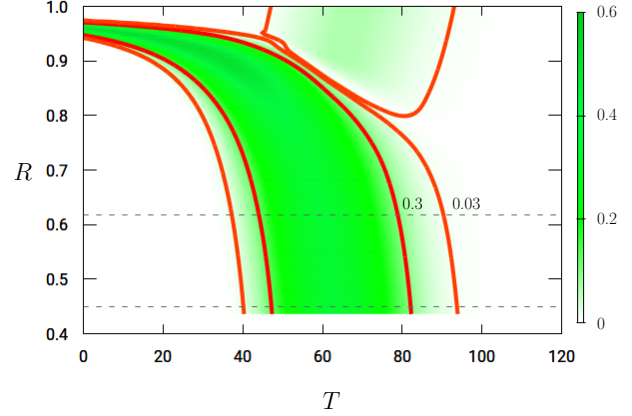
észre, hogy a bal oldali panelen, ami az $m = +1$ -es kezdőadathoz tartozó spektrumot ábrázolja, láthatjuk, hogy a hullám—minden R értékre, nem csak a finomhangolt kezdőadat környezetében—az elvárt, szuperradiáns, $0 < \omega < m\Omega_+$ intervallumban található. Említésre méltó még, hogy a spektrum fokozatosan elhalványodik, ahogy az ergoszférához közelít és a horizontot nem is érinti. Ezt az interpretációt támasztja alá az energia és impulzusmomentum áramlását bemutató 3.13. ábra bal oldali panelje.

A háttér feketelyukhoz képest ellentétesen forgó $m = -1$ megoldás, ami ettől eltekintve szintén az $s = 0$, $\ell = 1$ és $\omega_0 = 0.3$ paraméterekkel rendelkezik, végig az $m\Omega_+ < \omega < 0$ intervallumban található, ami az optimális tartomány $\omega = 0$ tengelyre vett tükörképe. A 3.13. ábra jobb oldali panelje is megerősíti, hogy ebben az esetben az energia és impulzusmomentum jeletős hányada közvetlenül behullik a feketelyukba. A 3.13. ábra a térfogatnormalizált $\mathcal{E} = \mathcal{E}(T, R)$ és $\mathcal{J} = \mathcal{J}(T, R)$ energia- és impulzusmomentum-áramsűrűségeket mutatja. Mivel az impulzusmomentum-áramsűrűség nagyon hasonlóan viselkedik, mint az energia-áramsűrűség, ezért az ábrákon azt csupán néhány szintvonal és a hozzájuk tartozó számérték feltüntetésével jelenítjük meg. A 3.13. ábra bal oldali panelje, amely az együttforgó $m = +1$ -es megoldáshoz tartozik, azt mutatja, hogy tulajdonképpen az egész beérkező hullámcsomag teljes mértékben visszaverődik mielőtt érdemben kölcsönhatna az ergoszférával. A jobb oldali panelen ezzel szemben azt látjuk, hogy az ellentétesen forgó $m = -1$ -es megoldás esetén a beérkező hullámcsomag majdnem teljes energia és impulzusmomentum tartalma egyenesen behullik a feketelyukba.

Az összes eddigi megfigyelésünkkel összhangban van 3.14. ábrán látható $\delta E = (E_0 - E_{out})/E_0$ és $\delta J = (J_0 - J_{out})/J_0$ energia- és impulzusmomentum-nyereség időbeli változása. A 3.14. ábrán

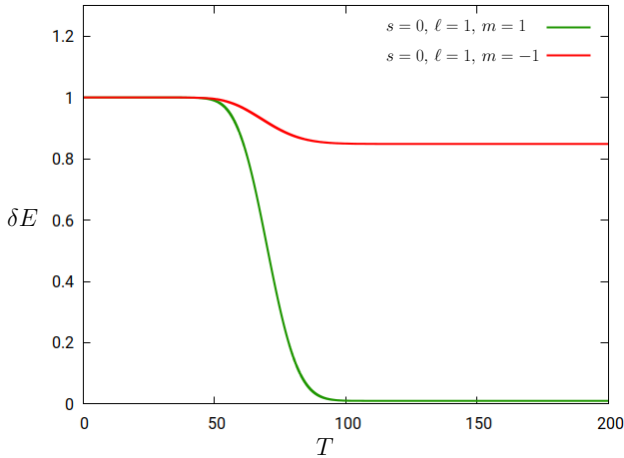


(a) Az $s = 0, \ell = 1, m = +1$ paraméterekkel jellemzett megoldás.

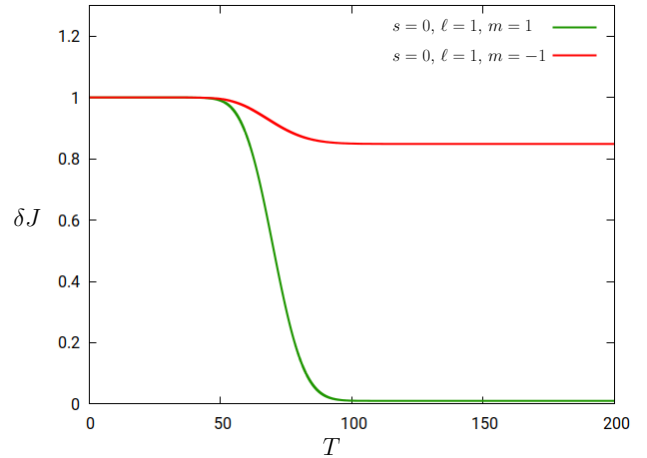


(b) Az $s = 0, \ell = 1, m = -1$ paraméterekkel jellemzett megoldás.

3.13. ábra. Az $\mathcal{E} = \mathcal{E}(T, R)$ térfogatnormalizált energia-áramsűrűségek az $s = 0, \omega_0 = 0.3, \ell = 1, m = \pm 1$ paraméterekkel jellemzett kezdőadatokhoz tartozó megoldásokból számolva. A vonatkozó $\mathcal{J} = \mathcal{J}(T, R)$ impulzusmomentum-áramsűrűség néhány kiválasztott szintvonalát a színes kontúrok mutatják.



(a) Az energianyereség.



(b) Az impulzusmomentum-nyereség.

3.14. ábra. Az energia- és impulzusmomentum-nyereség $\delta E = (E_0 - E_{out})/E_0$ és $\delta J = (J_0 - J_{out})/J_0$ időfüggése a vizsgált $m = +1$ és $m = -1$ megoldások esetén.

látható, hogy az $m = +1$ -es megoldás esetén—a 3.13. ábra bal oldali paneljének megfelelően—a beérkező hullámcsomag [42, 90] észrevételeivel összhangban egy majdnem tökéletes visszaverődésen megy keresztül. Ennek következtében a feketelyukba hulló energia és impulzusmomentum hányada elhanyagolható, a kezdőadat energiája és impulzusmomentuma a fényszerű végtelenen keresztül távozik. Ezzel szöges ellentétben az ellentétesen forgó $m = -1$ megoldás esetén a kezdeti hullámcsomag energiájának körülbelül 16%-a, impulzusmomentumának körülbelül 17%-a a \mathcal{J}^+

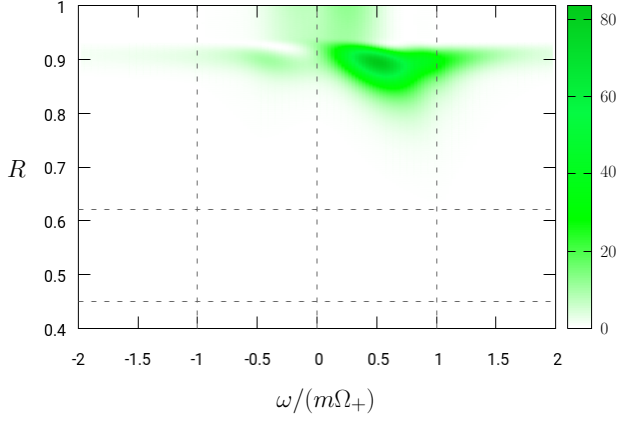
fényszerű végtelenen keresztül távozik, míg a maradék a 3.13. ábra jobb oldali paneljén látható módon behullik a feketelyukba.

Érdekes lehet annak vizsgálata, mi történik, ha az I. típusú, ellentétesen forgó megoldás kezdőadatában az ω_0 paramétert $-\omega_0$ -al helyettesítjük. Gyaníthatjuk, hogy ez a szuperradiáns tartományba fogja tolni a spektrumot. Beláthatjuk, hogy valóban ez történik, ha felidézzük a (3.9.12) és (3.9.13) egyenletekkel adott $(\phi^{(s)}, \phi_T^{(s)})$ kezdőadat funkcionális alakját és alkalmazzuk az ${}_s\overline{Y}_\ell^m = (-1)^{s+m} \cdot {}_{-s}Y_\ell^{-m}$ összefüggést. Megmutatható, hogy a $-\omega_0$ -val felírt ellentétesen forgó skalármezőre vonatkozó kezdőadat ekkor $(-1)^m$ -szerese az együttforgó, ω_0 -val felírt kezdőadat komplex konjugáltjának. Ebből az okból kifolyólag az $m \rightarrow -m$, $\omega_0 \rightarrow -\omega_0$ cserék egyszerre történő végrehajtásával kapott kezdőadatok vizsgálata kevésbé tanulságos. Megjegyezzük, hogy az I. típusú, ellentétes forgású, pozitív ω_0 -val kapott megoldások spektruma minden esetben a szuperradiáns tartományon kívül található. Ebből az okból kifolyólag a 3.9.3. alfejezet háralévő részében mellőzzük az ilyen típusú megoldásokat. Később látni fogjuk, hogy az ellentétesen forgó megoldások II. típusú konfigurációk esetén sem játszanak jelentős szerepet, de ennek ellenére a 3.9.4. alfejezetben még egyszer szemügyre vesszük őket.

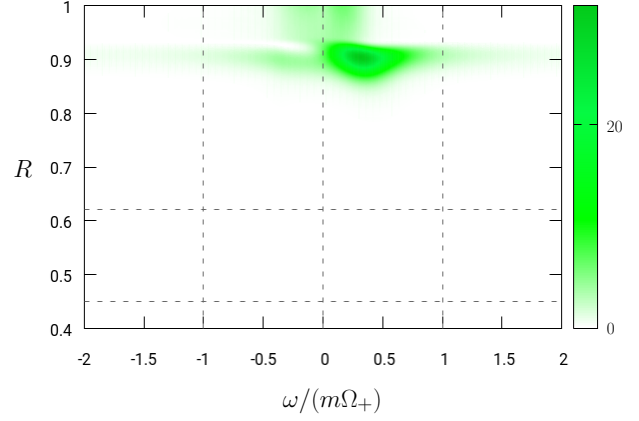
Kimenő elektromágneses és gravitációs perturbációk

Az $s = +1$ spinnel rendelkező elektromágneses és $s = +2$ spinnel rendelkező gravitációs perturbációkra, mint kimenő sugárzásokra szokás hivatkozni. Ebben az alfejezetben mindkét esetben az $R_1 = 0.8$, $R_0 = 0.9$ és $R_2 = 0.95$ értékek jellemzik a radiális profilt, ahol R_1 és R_2 jelöli a kompakt tartó bal és jobb szélét (lásd 3.11. ábra). Mivel pozitív spin mellett nincs jelentős eltérés az elektromágneses és gravitációs perturbációk viselkedése között, ezért ebben az alfejezetben együtt tárgyaljuk őket. Ahogy a 3.15. ábra paneljein is látható, a kezdőadat frekvenciáját finomhangoltuk, hogy a beérkező hullámcsomagok szuperradiánsan viselkedjenek.

A vonatkozó energia- és impulzusmomentum-áramsűrűségek a (lásd a 3.16. ábra paneljeit) szintén azt mutatják, hogy az $s = +1$ elektromágneses és $s = +2$ gravitációs perturbációk analóg módon viselkednek. Az elnevezésüknek megfelelően ezek az I. típusú hullámcsomagok azonnal a fényszerű végtelen irányába indulnak és gyorsan elhagyják a külső kommunikációs tartományt. Ez a viselkedés nem teszi lehetővé, hogy akármelyik esetben is az energiában vagy az impulzusmomentumban növekményt találjunk. Érdeemes hangsúlyozni, hogy ezek a megfigyelések érzéketlenek a pozitív spin számszerű értékére, csupán az elektromágneses és gravitációs perturbációk kimenő jellege számít. Ezek az észrevételek fennállnak m előjelétől, azaz hogy együttforgó vagy ellentétesen forgó kezdőadatról van szó, és ω_0 értékétől függetlenül.

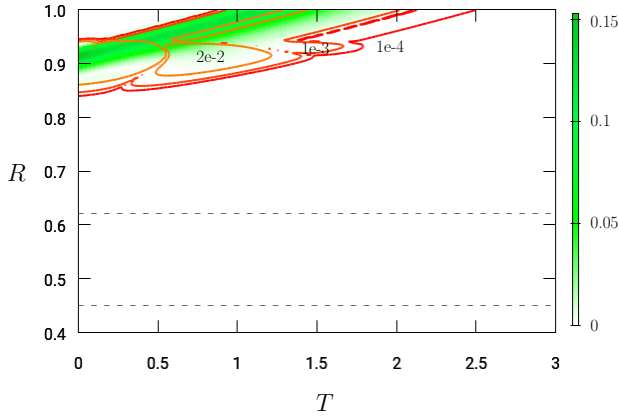


(a) A $s = +1, m = +1$ megoldás \mathcal{PS} spektruma.

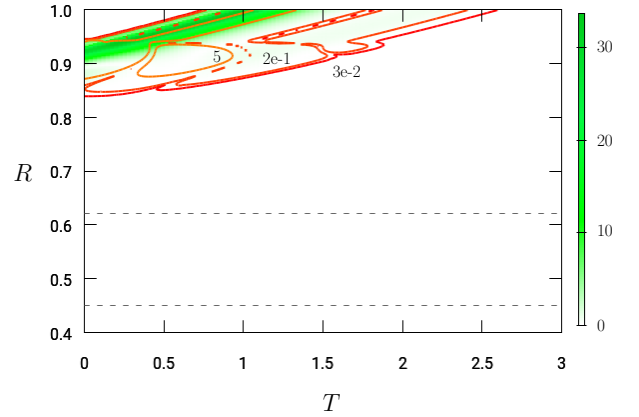


(b) A $s = +2, m = +2$ megoldás \mathcal{PS} spektruma.

3.15. ábra. A $s = +1, \omega_0 = 0.21339, \ell = 1, m = +1$ and $s = +2, \omega_0 = 0.21339, \ell = 2, m = +2$ paraméterekkel jellemzett megoldások teljesítményspektruma.



(a) \mathcal{E} és \mathcal{J} az $s = +1$ és $m = +1$ értékekkel jellemezhető megoldás esetén.

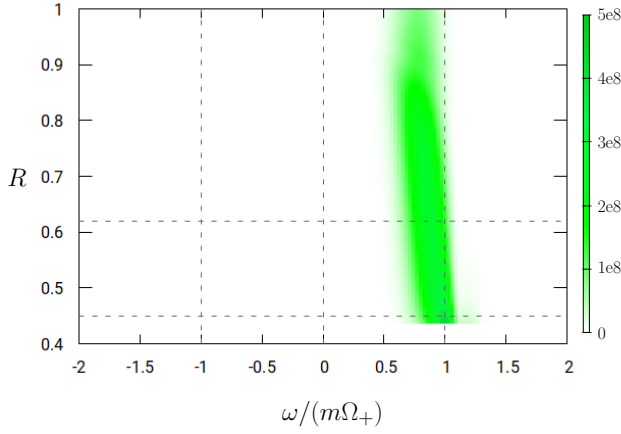


(b) \mathcal{E} és \mathcal{J} az $s = +2$ és $m = +2$ értékekkel jellemezhető megoldás esetén.

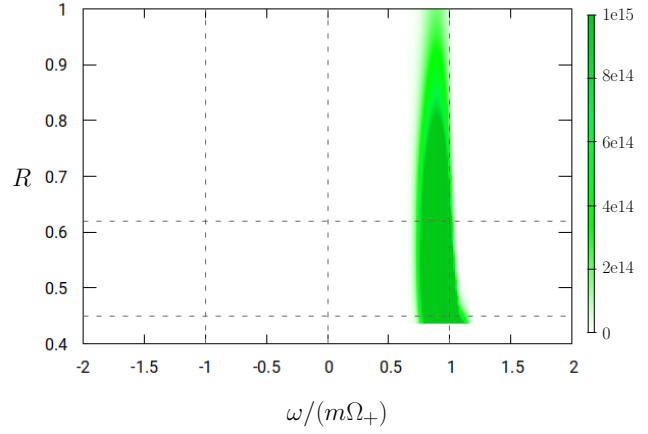
3.16. ábra. A térfogatnormalizált $\mathcal{E}(T, R)$ energia- és $\mathcal{J}(T, R)$ impulzusmomentum-áramsűrűségek az $s = +1, \ell = 1, m = +1, \omega_0 = 0.21339$ elektromágneses és az $s = +2, \ell = 2, m = +2, \omega_0 = 0.21339$ gravitációs perturbációk esetén.

Bemenő elektromágneses és gravitációs perturbációk

Az alfejezetben vizsgált kezdőadatok radiális profilját ismét az $R_1 = 0.93, R_0 = 0.95, R_2 = 0.98$ értékek jellemzik (lásd 3.11. ábra). Az egyéb fizikai paraméterek értékei $s = -1, \omega_0 = 0.28, \ell = 1, m = +1$ és $s = -2, \omega_0 = 0.65, \ell = 2, m = +2$. A tapasztalataink nagyon hasonlítanak a bemenő együttforgó skalármező esetére. A bemenő elektromágneses és gravitációs perturbációk $\mathcal{PS} = \mathcal{PS}(\omega, R)$ spektrumát mutatja a 3.17. ábra két panelje. Az együttforgó elektromágneses és



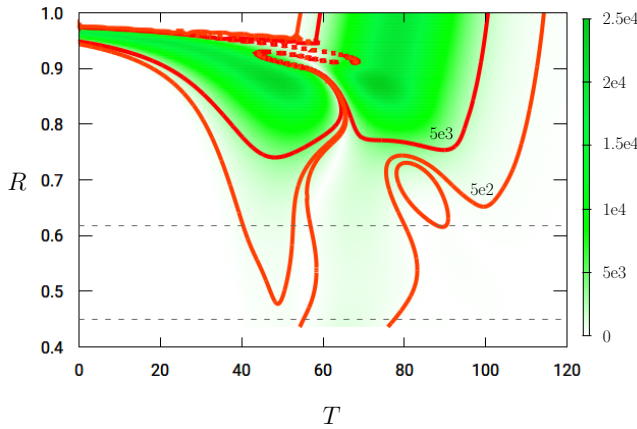
(a) Az $s = -1, m = +1$ megoldás \mathcal{PS} spektruma.



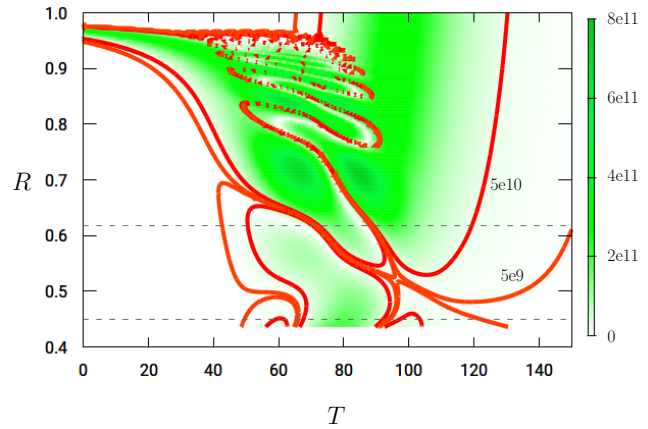
(b) Az $s = -2, m = +2$ megoldás \mathcal{PS} spektruma.

3.17. ábra. A $s = -1, \omega_0 = 0.28, \ell = 1, m = +1$ és $s = -2, \omega_0 = 0.65, \ell = 2, m = +2$ paraméterekkel jellemzett befelé haladó együttforgó elektromágneses és gravitációs perturbációk spektruma. Megjegyezzük, hogy mindkét beérkező hullámcsomag jelentős hányada a szuperradiáns tartományban található és az egész evolúció során ott is marad.

gravitációs perturbációk teljesítményspektruma nem csak a kezdőfelület környezetében tartózkodik a szuperradiáns $0 < \omega < m\Omega_+$ intervallumban. Ennek megfelelően a beérkező hullámcsomag



(a) \mathcal{E} és \mathcal{J} az $s = -1$ és $m = +1$ megoldásra.



(b) \mathcal{E} és \mathcal{J} az $s = -2$ és $m = +2$ megoldásra.

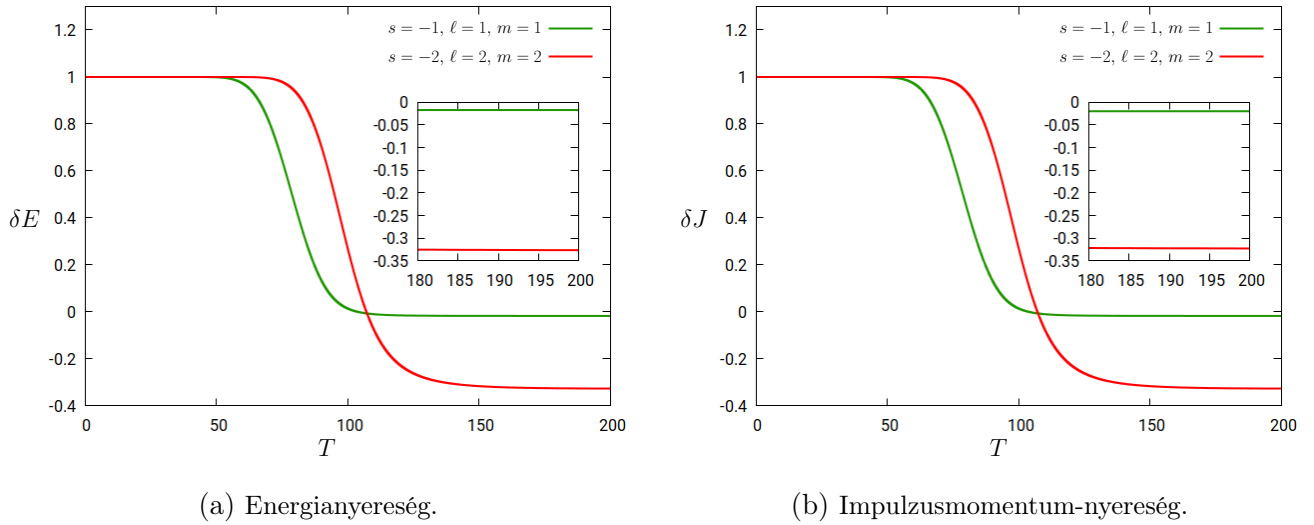
3.18. ábra. A térfogatnormalizált $\mathcal{E}(T, R)$ energia- és $\mathcal{J}(T, R)$ impulzusmomentum-áramsűrűség bemenő és együttforgó elektromágneses és gravitációs perturbációk esetén. A fizikai paraméterek megegyeznek a 3.17. ábrán feltüntetett értékekkel.

energiájának és impulzusmomentumának csak kis hányada hullik a feketelyukba. A spektrum egy kis részéhez $m\Omega_+$ -nál valamivel nagyobb érték tartozik. A spektrumot külön kiértékelve

az evolúció késői szakaszára azt tapasztaljuk, hogy ezek a túlnyúló foltok az elektromágneses és gravitációs perturbációk kvázinormális módusaihoz tartoznak, nem pedig a számunkra fontos korai dinamikához.

Az energia és impulzusmomentum áramlásából hasonló következtetéseket vonhatunk le, mint a spektrumokból. A 3.18. ábra paneljein a befelé menő elektromágneses és gravitációs perturbációk térfogatnormalizált $\mathcal{E} = \mathcal{E}(T, R)$ energia- és $\mathcal{J} = \mathcal{J}(T, R)$ impulzusmomentum-áramsűrűségét láthatjuk.

Csakúgy, mint korábban, az impulzusmomentum-áramsűrűséget néhány kiválasztott értékhez tartozó színes kontúrral jelenítettük meg. Mindkét panel azt mutatja, hogy a kezdőadat ener-



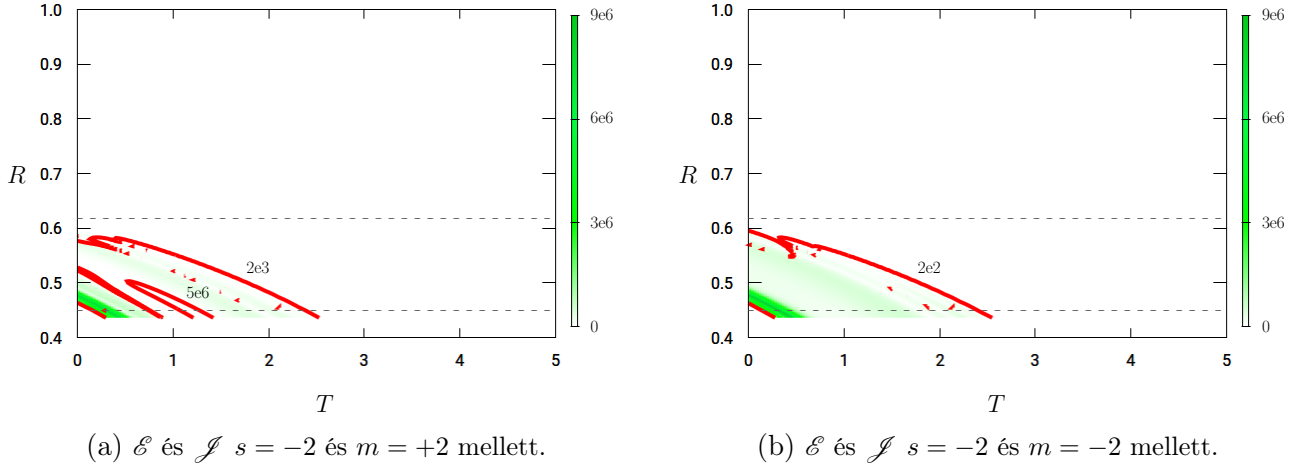
3.19. ábra. Az $\delta E = (E_0 - E_{out})/E_0$ energianyereség és $\delta J = (J_0 - J_{out})/J_0$ impulzusmomentum-nyereség a vizsgált bemenő és együttforgó elektromágneses és gravitációs perturbációk esetén. Ahogy az ábrák mutatják, a nyereség szerény 2% az elektromágneses és 32.5% a gravitációs perturbációnál.

giájának és impulzusmomentumának nagy része visszaverődik mielőtt kölcsönhatásba lépne az ergoszférával és távozik az $R = 1$ hiperfelülettel megjelenített \mathcal{J}^+ jövő fényszerű végtelenen át. Az is látható, hogy nem elhanyagolhatóak az ergoszférában zajló dinamikai folyamatok sem, ami arra utal, hogy ezek a megoldások feltehetően szuperradiáns viselkedést mutatnak.

Idézzük fel, hogy a szuperradiancia során keletkezett energia- és impulzusmomentum-nyereséget a $\delta E = (E_0 - E_{out})/E_0$ és $\delta J = (J_0 - J_{out})/J_0$ mennyiségekkel számszerűsítjük. A 3.19. ábra két panelje mutatja ezeket a mennyiségeket a bemenő és együttforgó elektromágneses és gravitációs perturbáció esetén. Ahogy korábban mondtuk, ha δE vagy δJ negatívvá válik, akkor valóban szuperradianciát tapasztalunk. Az effektus δE és δJ mértéke a várakozásokat messze alulmúló, mindössze $\sim 2\%$ az elektromágneses perturbációra és körülbelül 32.5% a gravitációs perturbációra.

3.9.4. II. típusú kezdőadatokra vonatkozó eredmények

Ebben az alfejezetben II. típusú konfigurációkat fogunk tárgyalni. Ez azt jelenti, hogy a kezdőadat kompakt tartója jelentősen átfed az ergoszférával. A gyakorlatban az összes vizsgált esetben úgy választjuk meg a tartó jobb szélét, hogy az valamivel az ergoszféra egyenlítői sugaránál beljebb legyen. A radiális profil megfelelő paramétereit ekkor $R_1 = 0.4536$, $R_2 = 0.615$ és $R_0 = 0.5$, ahol R_1 és R_2 jelöli a kompakt tartó bal és jobb szélét (lásd 3.11. ábra). Megjegyezzük, hogy az előző

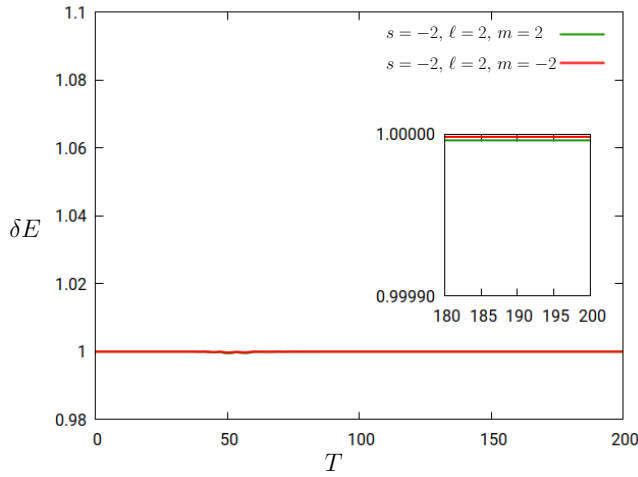


3.20. ábra. A térfogatnormalizált $\mathcal{E}(T, R)$ energia- és $\mathcal{J}(T, R)$ impulzusmomentum-áramsűrűség együtt- és elentétesen forgó bemenő gravitációs perturbáció esetén. A fizikai paraméterek $s = -2$, $\omega_0 = 0.725$, $\ell = 2$, $m = \pm 2$.

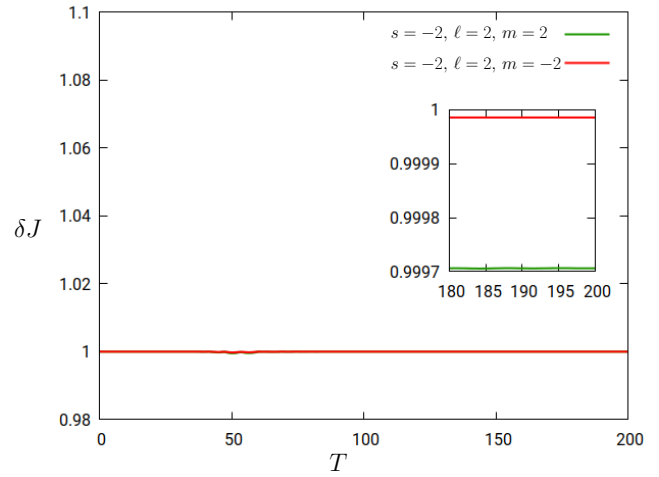
alfejezetehez hasonlóan a háttérként szolgáló Kerr-téridő fizikai paramétereit $M = 1$ and $a = 0.99$. Ezekkel a paraméterekkel az eseményhorizont helyére $R_+ = 0.4533$, az ergoszféra egyenlítői síkban vett külső határára $R_E = 0.618$ adódik.

Bemenő skalár, elektromágneses és gravitációs perturbációk

A legjelentősebb eltérés az I. és II. típusú konfigurációk között, hogy míg I. típusú bemenő elektromágneses és gravitációs perturbációk mutattak szuperradianciát, hasonló II. típusú konfigurációknál egyáltalán nincs effektus. A beérkező hullámcsomagok egyenesen belezuhannak a feketelyukba és a horizonton át elhagyják a külső kommunikációs tartományt. Ennek megfelelően egyik $s = 0$, $s = -1$ vagy $s = -2$ spinnel rendelkező II. típusú megoldáshoz tartozó spektrum sem informatív, mert az evolúció rövid dinamikus szakaszát minden esetben elnyomják a későbbi folyamatok. Ezt az értelmezést alátámasztják a 3.20. ábra paneljei, ahol az $s = -2$, $\omega_0 = 0.725$, $\ell = 2$, $m = \pm 2$ paraméterekkel jellemzett gravitációs perturbációhoz tartozó energia és impulzusmomentum áramlása látható. Ezek az ábrák tipikusak abban az értelemben, hogy hasonló folyamatokat látunk II. típusú $s = 0$ és $s = -1$ spinnel rendelkező konfigurációk esetén is. Ugyanezeket a következteté-

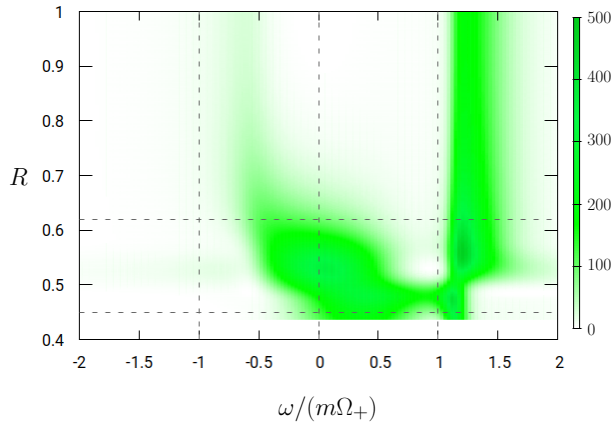


(a) Energianyereség: $s = -2, m = \pm 2$.

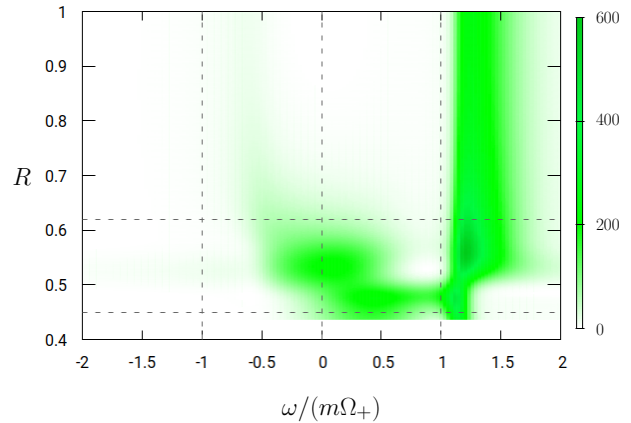


(b) Impulzusmomentum-nyereség: $s = -2, m = \pm 2$.

3.21. ábra. A $\delta E = (E_0 - E_{out})/E_0$ energia- és $\delta J = (J_0 - J_{out})/J_0$ impulzusmomentum-nyereség időfüggése a vizsgált bemenő elektromágneses és gravitációs perturbációk esetén. A grafikonok alátámasztják, hogy nincs szuperradiancia.



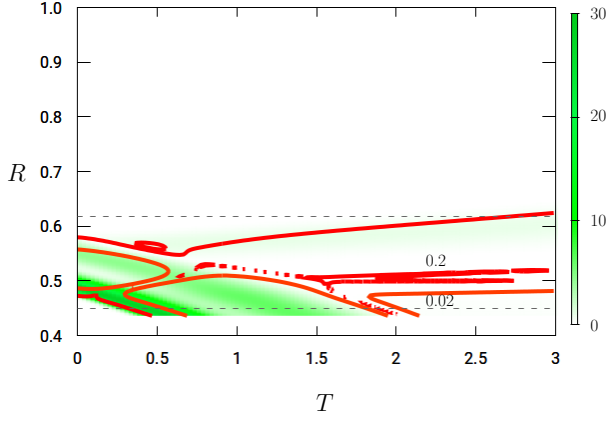
(a) \mathcal{PS} a $s = 0, m = +1$ megoldás esetén.



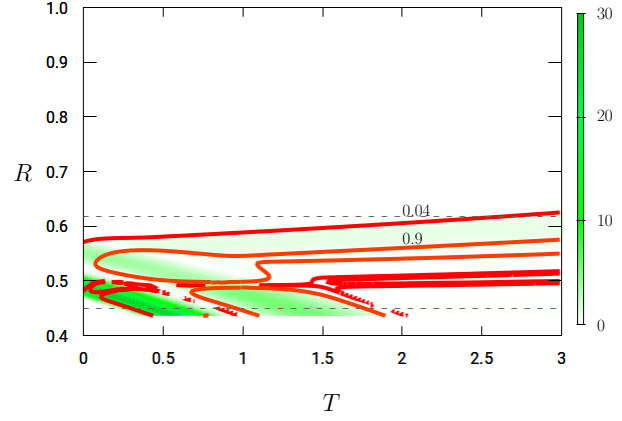
(b) \mathcal{PS} a $s = 0, m = -1$ megoldás esetén.

3.22. ábra. A bemenő skálár perturbációk spektruma fordított időderiválttal és az $s = 0, \omega_0 = 0.3, \ell = 1, m = \pm 1$ fizikai paraméterekkel.

seket vonhatjuk le a 3.21. ábrán látható $\delta E = (E_0 - E_{out})/E_0$ energia és $\delta J = (J_0 - J_{out})/J_0$ impulzusmomentum-nyereség megtekintéséből. Tisztán látható, hogy a kezdőadat energia és impulzusmomentum tartalma nagyon rövid időn belül távozik a külső kommunikációs tartományból az eseményhorizonton keresztül. Mivel semmi érdekes nem történt a bemenő II. típusú konfigurációkban, megkérdezhetjük, hogy mi történik, ha a $(\phi^{(s)}, \phi_T^{(s)})$ kezdőadatban megfordítjuk az időderivált előjelét, azaz a $(\phi^{(s)}, -\phi_T^{(s)})$ kezdőadatot tekintjük. Naivan azt gondolhatnánk, hogy ezzel az adott konfigurációkban megfordul az energia és impulzusmomentum áramlásának iránya is. Ugyan a 3.22. ábrán látható spektrumok alapján érdekesebb dinamikát feltételezhetnénk, a

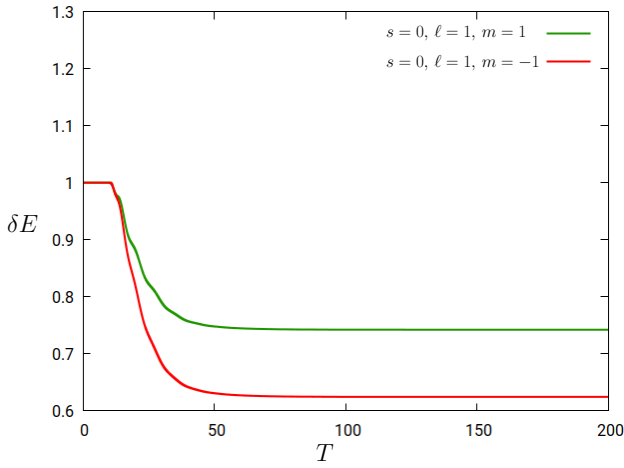


(a) \mathcal{E} és \mathcal{J} $s = 0$, és $m = +1$ mellett.

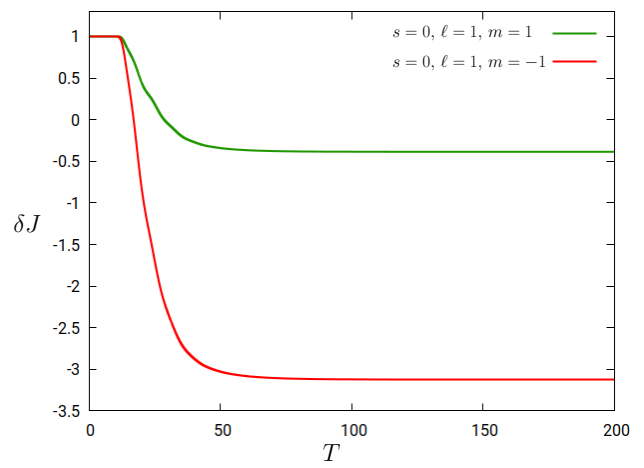


(b) \mathcal{E} és \mathcal{J} $s = 0$, és $m = -1$ mellett.

3.23. ábra. A térfogatnormalizált $\mathcal{E}(T, R)$ energia- és $\mathcal{J}(T, R)$ impulzusmomentum-áramsűrűség fordított időderiválttal indított skalármező esetén. A fizikai paraméterek $s = 0$, $\omega_0 = 0.3$, $\ell = 1$, $m = \pm 1$.



(a) Energianyereség: $s = 0$, $m = \pm 1$.



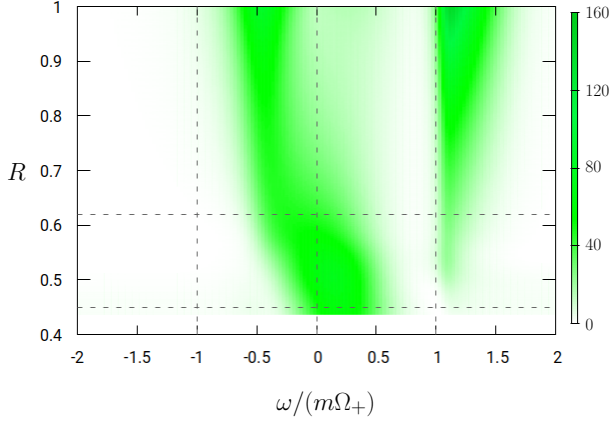
(b) Impulzusmomentum-nyereség: $s = 0$, $m = \pm 1$.

3.24. ábra. A $\delta E = (E_0 - E_{out})/E_0$ energianyereség és $\delta J = (J_0 - J_{out})/J_0$ impulzusmomentum-nyereség fordított időderiválttal indított skalár perturbáció esetén. A fizikai paraméterek megegyeznek a 3.22. és 3.23. ábrákhoz használt paraméterekkel.

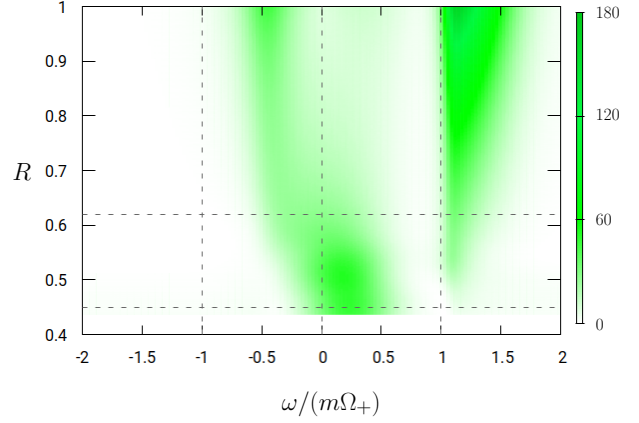
3.23. ábrán látható, hogy a beérkező hullámcsomagnak csupán egy kis része indul el kifelé. Az is szembe megy az intuíciónkkal, hogy energianyereséget nem látunk, míg az impulzusmomentum-nyereségek jelentősek mind az együttforgó, mind az ellentétesen forgó esetben. Az is meglepő, hogy a vizsgált bemenő, fordított időderiváltas konfigurációk esetében az impulzusmomentum-nyereség a skalár perturbációkra a legnagyobb, szerényebb az elektromágneses perturbációkra és még ez sincs jelen a lineáris $s = -2$ metrikus perturbációk esetén. A skalármezőnél mért impulzusmomentum-nyereség a 3.24. ábrán látható módon—az $s = 0$, $\omega_0 = 0.3$, $\ell = 1$, $m = \pm 1$ fizikai paraméterek és a $\phi_T^{(s)} \rightarrow -\phi_T^{(s)}$ cserével kapott kezdőadat mellett—körülbelül 40% az együttforgó és nagyjából

315% az ellentétesen forgó konfigurációban.

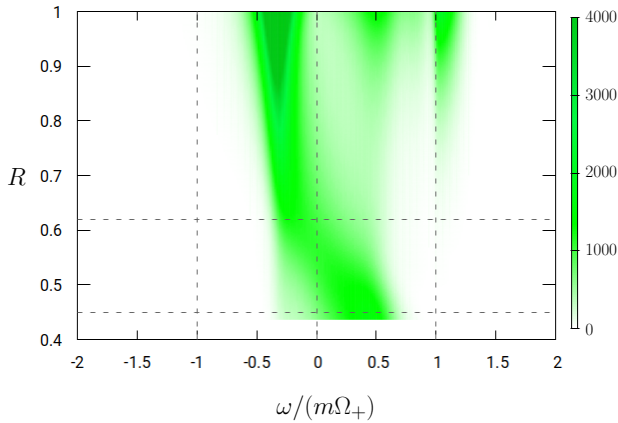
Kimenő elektromágneses és gravitációs perturbációk



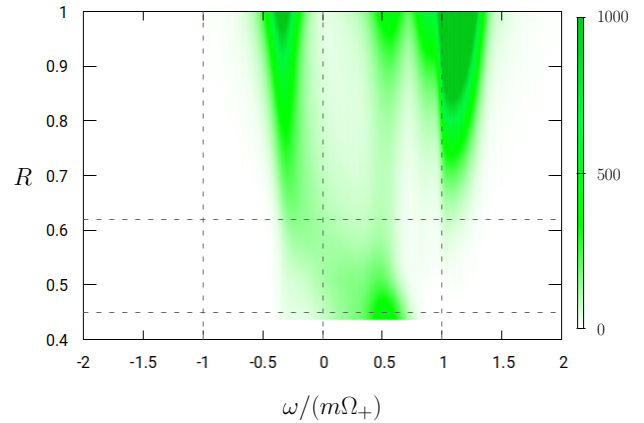
(a) \mathcal{PS} az $s = +1, m = +1$ megoldáshoz.



(b) \mathcal{PS} az $s = +1, m = -1$ megoldáshoz.



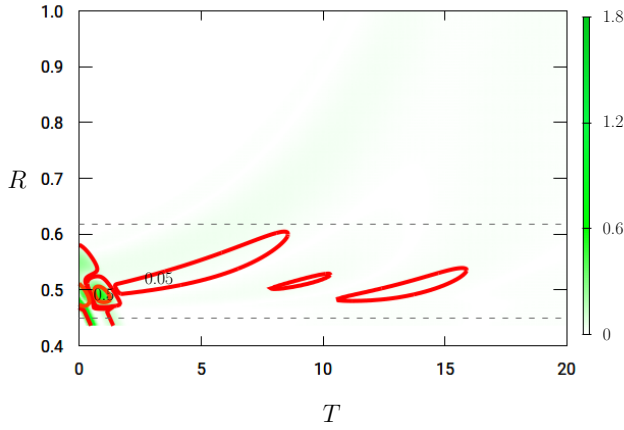
(c) \mathcal{PS} az $s = +2, m = +2$ megoldáshoz.



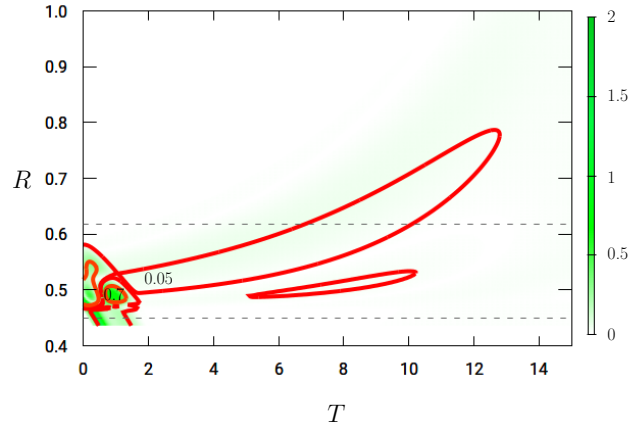
(d) \mathcal{PS} az $s = +2, m = -2$ megoldáshoz.

3.25. ábra. A kimenő elektromágneses és gravitációs perturbációk teljesítményspektruma. A fizikai paraméterek $s = -1, \omega_0 = 0.25, \ell = 1, m = \pm 1$ and $s = -2, \omega_0 = 0.65, \ell = 2, m = \pm 2$.

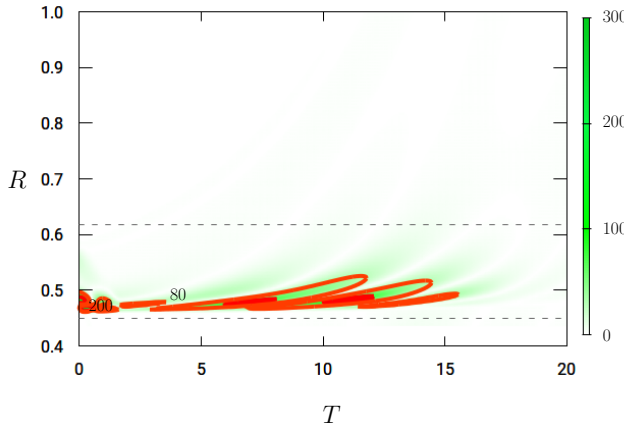
A II. típusú kimenő skalár perturbációkat már tárgyaltuk az előző alfejezetben, ahol a fordított időderiválttal felírt kezdőadatokat vizsgáltuk. Ennél fogva itt csak elektromágneses és gravitációs perturbációkat tárgyalunk. Ahogy korábban is mondtuk, a legfőbb különbség az I. és II. típusú konfigurációk között, hogy a kimenő és bemenő perturbációk szerepe felcserélődik. Ez alatt azt értjük, hogy az I. típusú elektromágneses és gravitációs perturbációk esetében a kimenő konfigurációk nem mutattak szuperradianciát, II. típusú kezdőadatok esetén ők kerülnek a figyelmünk középpontjába. Nem meglepő módon a szuperradiancia erőssége kimenő II. típusú konfigurációk esetében függ a spintől. $s = 1$ spinsúlyú elektromágneses mezők esetében csak egy szerény effektust



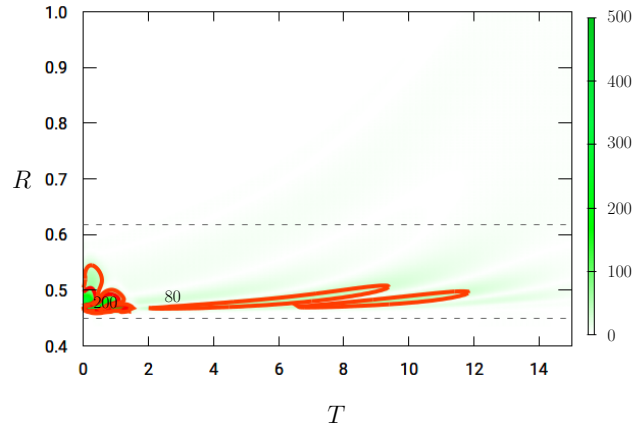
(a) \mathcal{E} és \mathcal{J} $s = +1$ és $m = +1$ mellett.



(b) \mathcal{E} és \mathcal{J} $s = +1$ és $m = -1$ mellett.



(c) \mathcal{E} és \mathcal{J} $s = +2$ és $m = +2$ mellett.



(d) \mathcal{E} és \mathcal{J} $s = +2$ és $m = -2$ mellett.

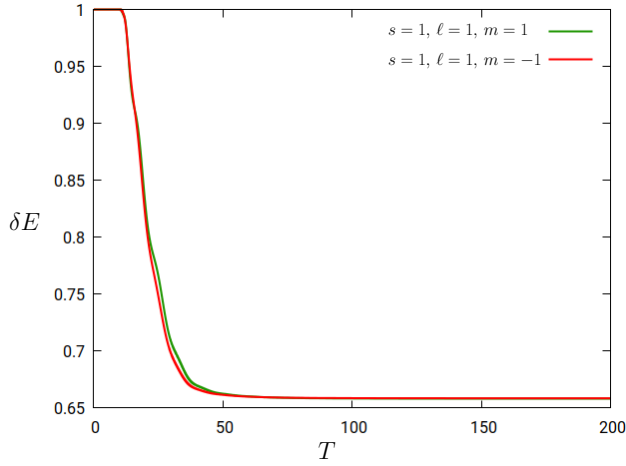
3.26. ábra. A térfogatnormalizált $\mathcal{E}(T, R)$ energia- és $\mathcal{J}(T, R)$ impulzusmomentum-áramsűrűség II. típusú kimenő elektromágneses és gravitációs perturbációkra. A fizikai paraméterek megegyeznek a 3.25. ábrán feltüntetettekkel.

mérünk, míg $s = 2$ spinsúlyú gravitációs perturbációk esetén jelentős szuperradianciát találunk.

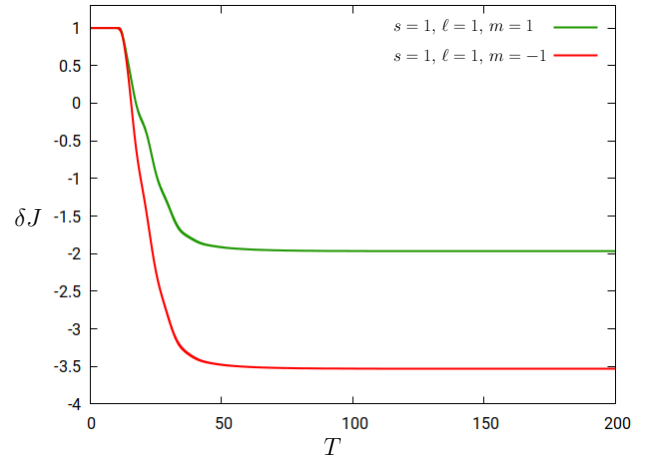
A kimenő— $s = 1$, $\omega_0 = 0.28$, $\ell = 1$, $m = \pm 1$ és $s = 2$, $\omega_0 = 0.725$, $\ell = 2$, $m = \pm 2$ paraméterekkel rendelkező—elektromágneses és gravitációs perturbációk spektruma nem túl informatív. A 3.25. ábra paneljein látható néhány nem túl intenzív folt a kritikus $0 < \omega < m\Omega_+$ tartományban, miközben az ezen intervallumon kívüli erősebb foltokat a kvázinormális rezgésekhez köthetjük.

A 3.26. ábrán látható energia és impulzusmomentum áramlások mutatnak egy elhúzó, lélegző struktúrát, amely az ergoszférában jelenik meg és valószínűsíthetően a szuperradianciát okozó folyamatok következménye.

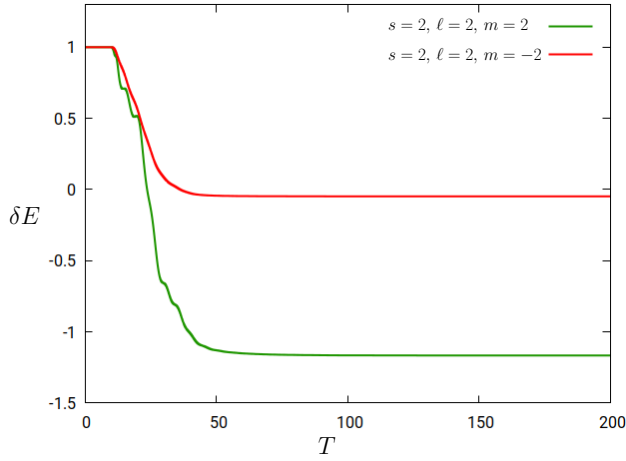
Idézzük fel, hogy a $\delta E = (E_0 - E_{out})/E_0$ és $\delta J = (J_0 - J_{out})/J_0$ hányadosok úgy lettek megalkotva, hogy jellemezzék a szuperradianciát. Ha a szóródás folyamán szuperradiancia lép fel akár az energiában, akár az impulzusmomentumban, akkor a \mathcal{J}^+ fényszerű végtelenen át kiáramló E_{out}



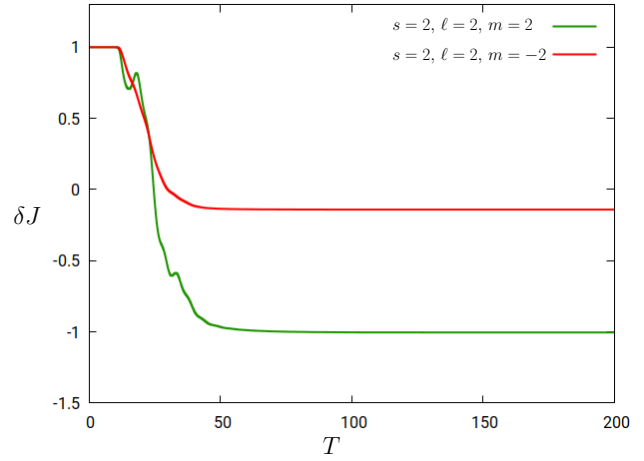
(a) Energianyereség: $s = +1, m = \pm 1$.



(b) Impulzusmomentum-nyereség: $s = +1, m = \pm 1$.



(c) Energianyereség: $s = +2, m = \pm 2$.



(d) Impulzusmomentum-nyereség: $s = +2, m = \pm 2$.

3.27. ábra. A $\delta E = (E_0 - E_{out})/E_0$ energianyereség és $\delta J = (J_0 - J_{out})/J_0$ impulzusmomentum-nyereség a vizsgált kimenő elektromágneses és gravitációs perturbációkra. Ahogyan a paneleken láthatjuk, elektromágneses perturbációknál csak impulzusmomentum-nyereséget látunk, de gravitációs perturbációknál impulzusmomentum és energianyereség is van.

energia vagy J_{out} impulzusmomentum nagyobb a kezdeti hullámcsomag E_0 energiájánál vagy J_0 impulzusmomentumánál. Ekkor δE vagy δJ negatívvá válik. A 3.27. ábra elektromágneses perturbációkat megjelenítő felső paneljein (a 3.24. ábra vonatkozó paneljeihez hasonlóan) csak δJ válik negatívvá. Az impulzusmomentum-nyereség mértéke $\sim 200\%$ az együttforgó és $\sim 350\%$ az ellentétesen forgó perturbációk esetén. Gravitációs perturbációkra mind energiában, mind impulzusmomentumban találunk szuperradianciát. Az energianyereség $\sim 116.7\%$ az együttforgó, $\sim 6\%$ az ellentétesen forgó konfigurációkra. A vonatkozó impulzusmomentum-nyereségek rendre $\sim 100\%$ és $\sim 5\%$. Érdekes, hogy az impulzusmomentum-nyereség (a II. típusú, fordított időderiválttal

indított skalár perturbációkhoz hasonlóan) nagyobb az ellentétesen forgó konfigurációkra, míg gravitációs perturbációknál pont ennek a fordítottját látjuk, az együttforgó konfigurációban nagyobb a nyereség.

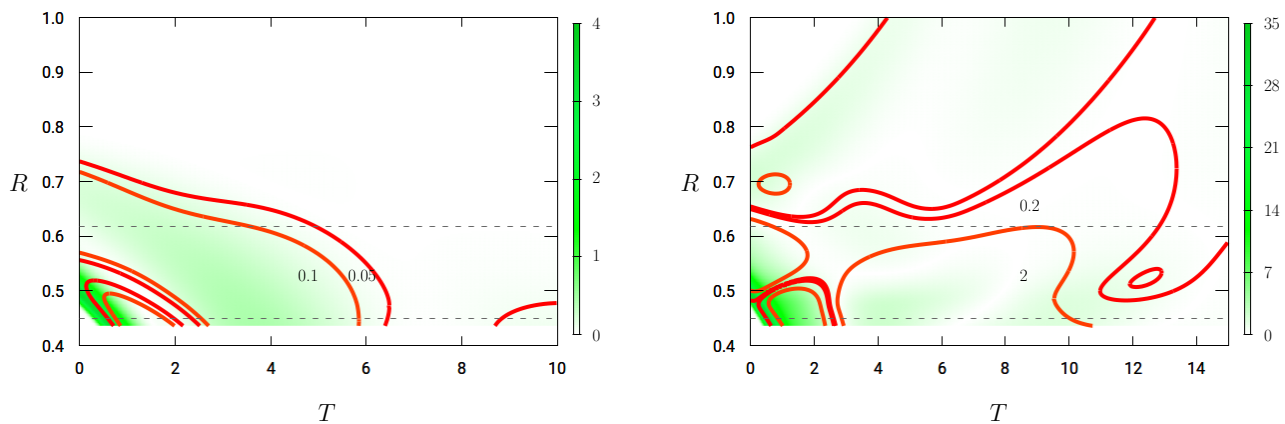
3.9.5. III. típusú kezdőadatokra vonatkozó eredmények

Az I. és II. típusú kezdőadatoknál csak az ω_0 paraméter finomhangolásával igyekeztünk növelni a szuperradiancia hatását. A jelen alfejezetben alkalmazott III. típusú kezdőadatok esetén a szuperradiancia mértékének változását a radiális profil kiterjedtségének függvényében vizsgáljuk. Ezt a II. típusú radiális profil variációjával érjük el oly módon, hogy a bal oldali, $R_1 = 0.4536$ -nál található szélét változatlanul hagyjuk miközben a jobb szélét meghatározó R_2 az $R_2 = 0.7, 0.76, 0.84, 0.95$ értékeket veszi fel. A profil maximuma hozzávetőlegesen R_1 és R_2 középértékénél, $R_0 = (R_1 + R_2)/2$ -nél található, ahogy a 3.11. ábra jobb oldali panelje mutatja.

Bemenő és kimenő skalár hullámcsomagok

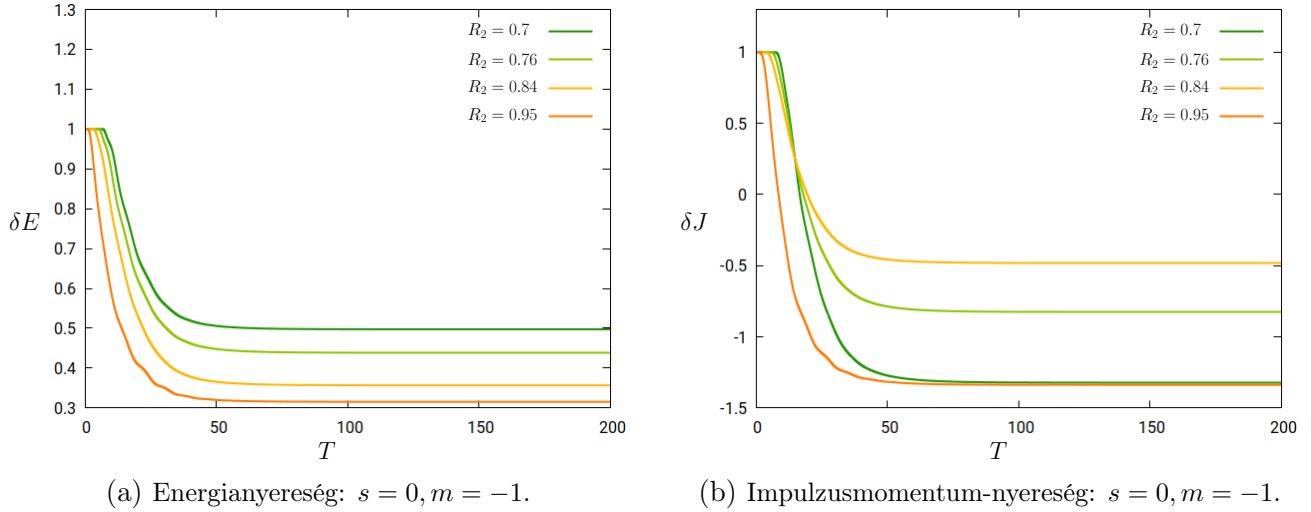
Meglepően kevés változást tapasztalunk, amikor II. típusú skalár perturbációkat III. típusú adatokra cseréljük. Egészen pontosan a (3.9.12) és (3.9.13) egyenletekkel adott bemenő skalár perturbációk esetén a négy alkalmazott profil egyike sem eredményezett szuperradianciát sem együttforgó, sem ellentétesen forgó konfigurációk esetén.

A II. típusú perturbációknál azt tapasztaltuk, hogy érdekesebb dinamikát találunk, ha a kezdőadatokban az időderiváltat ellentétes előjellel vesszük. Ezekre a fordított időderiválttal indított



3.28. ábra. A térfogatnormalizált $\mathcal{E}(T, R)$ energia- és $\mathcal{J}(T, R)$ impulzusmomentum-áramsűrűség bemenő és kimenő III. típusú skalár perturbációkra.

skalármezőkre gondolhatunk úgy, mint kifelé menő perturbációkra. A kimenő és bemenő jelzők használatának igazolásáért érdemes az $R_2 = 0.84$ -ig húzódó és $\omega_0 = 0.3$ paraméterrel adott skalár



3.29. ábra. Habár energiában nem tapasztalunk szuperradianciát ellentétesen forgó III. típusú kimenő skalár perturbációkra, jelentős impulzusmomentum-nyereséget látunk.

perturbációk energia áramlását megvizsgálni. Ezt mutatja a 3.28. ábra két panelje. Míg a bal oldali panelen a (3.9.12) és (3.9.13) egyenletekkel adott kezdőadathoz tartozó megoldás energia és impulzusmomentum áramlása láthatóan befelé irányul, addig a jobb oldali panelen látható fordított időderiválttal indított megoldás energia és impulzusmomentum áramlása legalább részben kifelé tart.

Az ellentétesen forgó, II. típusú skalár perturbációknál tapasztalt jelenséget a III. típusú hullámcsomagoknál is megfigyelhetjük. A $s = 0, \omega_0 = 0.3, \ell = 1, m = -1$ paraméterekkel megadott, fordított időderiválttal indított skalármező esetén nem tapasztalunk szuperradianciát az energiában, de az impulzusmomentumban 49%-tól 135%-ig terjedő nyereséget látunk a 3.29. ábra jobb oldali paneljén.

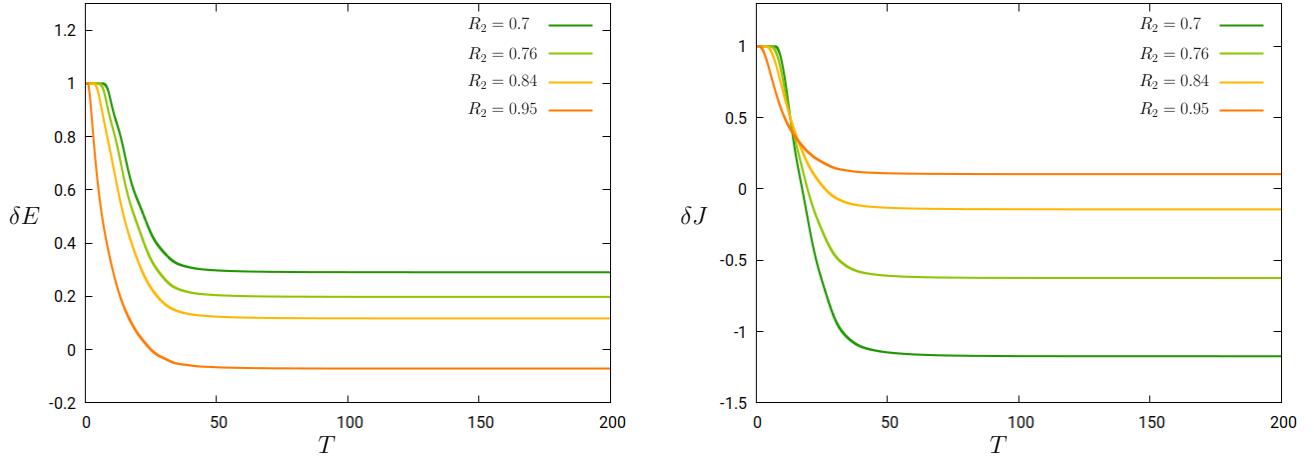
Befelé menő elektromágneses és gravitációs perturbációk

A II. típusú bemenő, $s = -1$ és $s = -2$ elektromágneses és gravitációs perturbációk közös jellemzője volt, hogy egyik sem mutatott szuperradianciát. Helyette a kezdeti hullámcsomag jelentős része szinte azonnal elhagyta a külső kommunikációs tartományt a horizonton keresztül. Teljesen hasonló folyamatról számolhatunk be III. típusú konfigurációk esetén is. Az egyetlen említésre méltó különbség, hogy ez a kezdeti dinamikai szakasz valamivel hosszabban tart. Sem energiában, sem impulzusmomentumban nem tapasztaltunk szuperradianciát függetlenül attól, hogy együtt vagy ellentétesen forgó, bemenő $s = -1$ -es elektromágneses vagy $s = -2$ -es gravitációs perturbációt vizsgáltunk.

Kimenő elektromágneses és gravitációs perturbációk

Az együttforgó, kimenő elektromágneses és gravitációs perturbációk sem hoznak sok izgalmat. Nincs sem energia, sem impulzusmomentum-nyereség $s = +1$, $\ell = 1$, $m = +1$ elektromágneses perturbációkra. A négy radiális profilhoz tartozó időfejlődés csak abban különbözik, hogy milyen arányban távozik az energia, illetve az impulzusmomentum a horizonton, illetve a fényszerű végtelenen át.

Ezzel szemben az ellentétesen forgó III. típusú $s = +1$ kimenő elektromágneses perturbációk evolúciója érdekesebben alakul. A 3.30. ábra az $s = +1$, $\omega_0 = 0.28$, $\ell = 1$, $m = -1$ paraméte-



(a) Energianyereség: $s = +1$, $m = -1$.

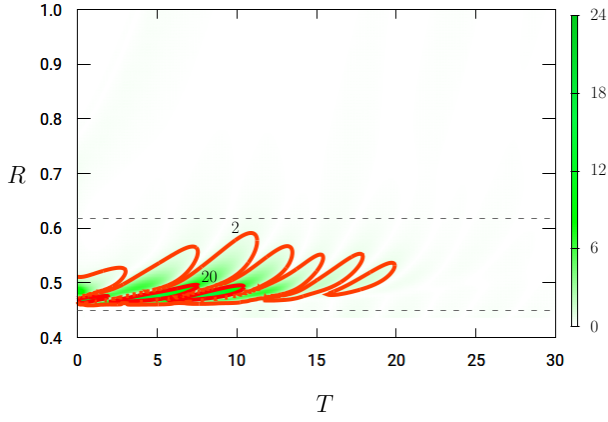
(b) Impulzusmomentum-nyereség: $s = +1$, $m = -1$.

3.30. ábra. A δE energianyereség és δJ impulzusmomentum-nyereség ellentétesen forgó III. típusú kimenő elektromágneses perturbációkra.

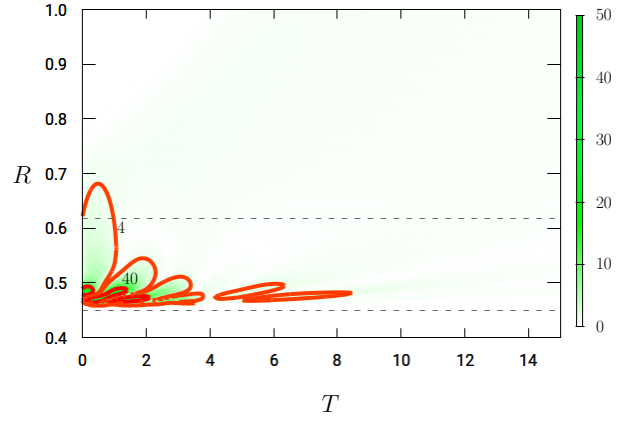
rekkel jellemzett ellentétesen forgó III. típusú elektromágneses perturbációk esetén mért energia és impulzusmomentum-nyereséget mutatja. Az $R_2 = 0.95$ -tel jellemzett legszélesebb radiális profilnál egy gyenge $\sim 8\%$ -os szuperradianciát látunk az energiában. Ezzel szemben nem látunk impulzusmomentum-nyereséget erre a profilra, de ahogy a másik három esetben egyre keskenyebb lesz a profil, úgy kapunk egyre erősebb és erősebb, $\sim 10\%$, $\sim 60\%$, $\sim 120\%$ -os impulzusmomentum-nyereséget.

A III. típusú kimenő gravitációs perturbációk viselkedése ettől jelentősen különbözik. Az $s = +2$, $\omega_0 = 0.65$, $\ell = 2$, $m = +2$, $R_2 = 0.84$ fizikai paraméterekkel jellemzett együttforgó és ellentétesen forgó III. típusú kimenő gravitációs perturbációk 3.31. ábrán látható energia és impulzusmomentum áramlása nagyon hasonlóan viselkedik a megfelelő II. típusú konfigurációknál látottakhoz.

Ahogy a 3.32. ábra paneljein láthatjuk a kimenő, együttforgó III. típusú— $s = +2$, $\omega_0 = 0.65$, $\ell = 2$, $m = +2$ paraméterekkel jellemzett—gravitációs perturbációk mutatták eddig a legnagyobb szuperradianciát az energiában $\sim 100\%$, $\sim 320\%$ és $\sim 390\%$ -os energianyereséggel. Ugyanezek a



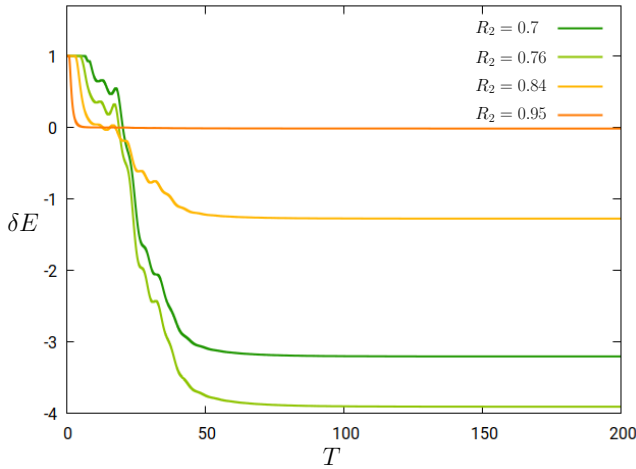
(a) \mathcal{E} és \mathcal{J} $s = +2$ és $m = +2$ esetén.



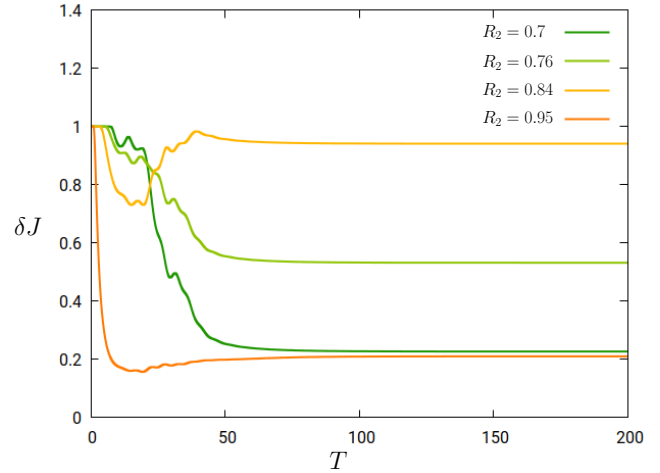
(b) \mathcal{E} és \mathcal{J} $s = +2$ és $m = -2$ esetén.

3.31. ábra. A térfogatnormalizált $\mathcal{E}(T, R)$ energia- és $\mathcal{J}(T, R)$ impulzusmomentum-áramsűrűség bemenő együtt és ellentétesen forgó gravitációs perturbációkra. A fizikai paraméterek $s = +2$, $\omega_0 = 0.65$, $\ell = 2$, $m = +2$, $R_2 = 0.84$.

konfigurációk azonban egyáltalán nem mutatnak nyereséget impulzusmomentumban.



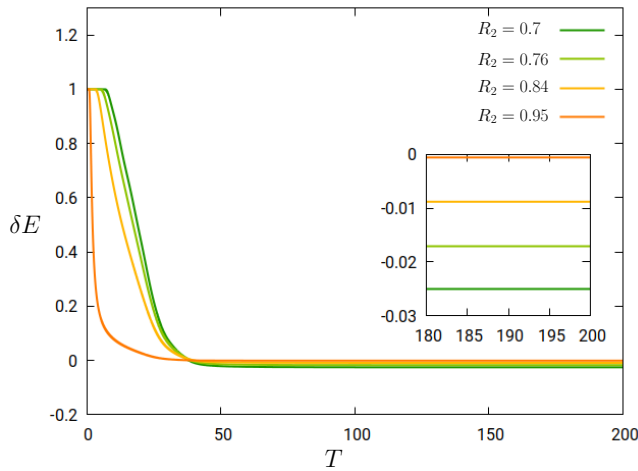
(a) Energianyereség: $s = +2$, $m = +2$.



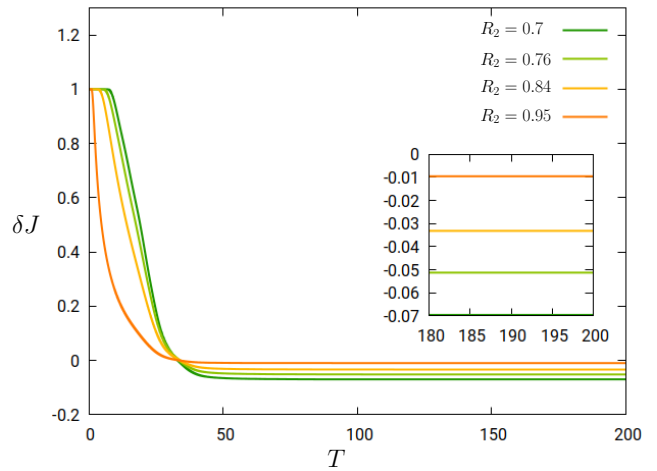
(b) Impulzusmomentum-nyereség: $s = +2$, $m = +2$.

3.32. ábra. A δE energianyereség és δJ impulzusmomentum-nyereség alakulása kimenő, együttforgó III. típusú gravitációs perturbációkra. A bal oldali ábrán látható a legnagyobb, $\sim 390\%$ -os energianyereség, amit el tudunk érni.

Érdekes módon, ahogyan a 3.33. ábrán látható, még az ellentétesen forgó kimenő— $s = +2$, $\omega_0 = 0.65$, $\ell = 2$, $m = -2$ fizikai paraméterekkel adott—gravitációs perturbációk is mutattak némi energia és impulzusmomentum-nyereséget. Az $R_2 = 0.7, 0.76, 0.84, 0.95$ -tel jellemzett profilokkal adott ellentétesen forgó, III. típusú gravitációs pertrubációk időfejlődése során az energianyereség rendre $\sim 0.01\%$, $\sim 0.9\%$, $\sim 1.8\%$, $\sim 2.5\%$, az impulzusmomentum-nyereség $\sim 1.0\%$, $\sim 3.3\%$,



(a) Energianyereség: $s = +2, m = -2$.



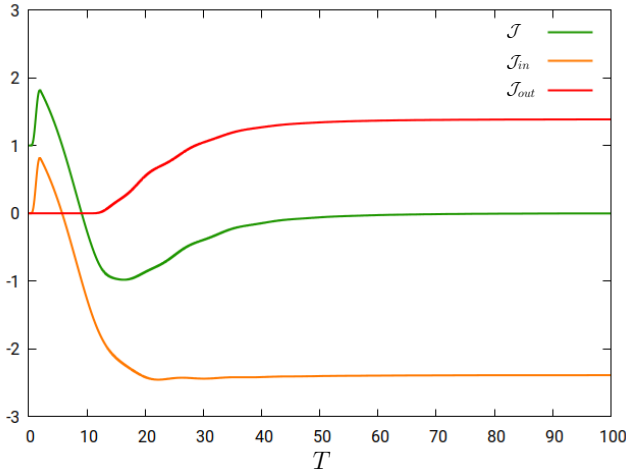
(b) Impulzusmomentum-nyereség: $s = +2, m = -2$.

3.33. ábra. A δE energianyereség és δJ impulzusmomentum-nyereség alakulása kimenő, ellentétesen forgó, III. típusú gravitációs perturbációkra.

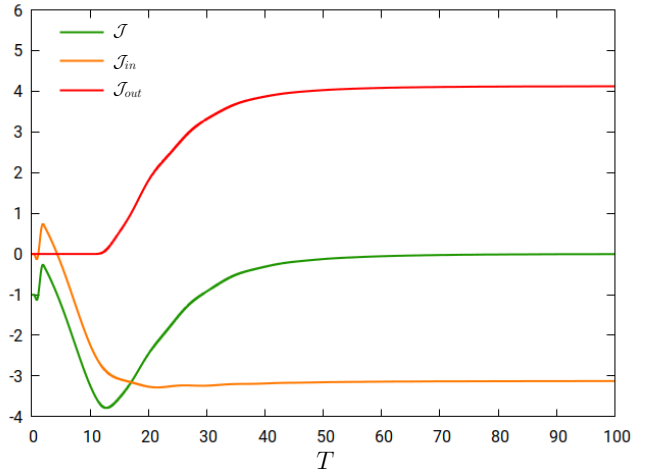
$\sim 5.1\%$, $\sim 7\%$.

3.9.6. Forgás és impulzusmomentum-nyereség

Ebben a részben az érvelésünket a skalármezők esetére fogalmazzuk meg, amikor a (3.4.3) és (3.4.4) által meghatározott megmaradó energia- és impulzusmomentum-áramokhoz egyértelmű fizikai interpretáció tartozik. Azokban az esetekben, amikor az energiában nem, de az impulzusmomentumban jelentős nyereséget találtunk azt gyaníthatjuk, hogy a „frame dragging”, vagyis a vonatkoztatási rendszereknek a feketelyuk forgása által indukált sodródása állhat a tapasztalt viselkedés mögött. Ezt a várakozásunkat támasztja alá, hogy az eseményhorizonton mért J_{in} fluxus és a fényszerű végtelenben mért J_{out} fluxus ellentétes előjelűek olyan módon, hogy egy rövid kezdeti időtartamtól eltekintve J_{in} mindig negatív. Ahogy a 3.24, 3.27, 3.29. és 3.30. ábrák (b) paneljein látható, hasonló jelenségek játszódnak le nem csupán a II. típusú, de a III. típusú kimenő (vagyis fordított időderiválttal indított) skalár konfigurációkra, valamint a II. és III. típusú ellentétesen forgó elektromágneses konfigurációkra is. A 3.34. ábra paneljein a „normalizált” és „előjelhelyes” $\mathcal{J}_{in} = J_{in}/|J_0|$ és $\mathcal{J}_{out} = J_{out}/|J_0|$ impulzusmomentum fluxust együtt ábrázoljuk a horizonton és a fényszerű végtelenben a $T = const$ szeletek „normalizált” és „előjelhelyes” $\mathcal{J}(T) = J(T)/|J_0|$ impulzusmomentum tartalmával a 3.24. ábrán is megjelenített II. típusú kimenő skalár konfigurációkra. Mindkét esetben a kezdőadat J_0 impulzusmomentumának $|J_0| = |J(T = 0)|$ abszolút értékével normalizáltunk. Az előjelhelyesség azt jelenti, hogy J_0 pozitív a háttér feketelyukkal együtt forgó $m = +1$ -es és negatív az ellentétesen forgó $m = -1$ -es konfigurációkra. Ennek megfelelően $\mathcal{J}_{out} = J_{out}/|J_0|$ és a $\delta J = (|J_0| - |J_{out}|)/|J_0|$ impulzusmomentum-nyereség az m azimutális



(a) $s = 0, m = +1$.



(b) $s = 0, m = -1$.

3.34. ábra. A $\mathcal{J}_{in} = J_{in}/|J_0|$ és $\mathcal{J}_{out} = J_{out}/|J_0|$ horizonton és \mathcal{S}^+ -on átmenő normalizált és előjelhelyes fluxusok, valamint a $T = const$ időszeletek $\mathcal{J} = J(T)/|J_0|$ normalizált és előjelhelyes impulzusmomentum tartalmának időfüggése együtt és ellentétesen forgó (fordított időderiválttal indított) skalár perturbációk esetén.

paraméter előjelétől függetlenül $\delta J = 1 - |\mathcal{J}_{out}|$ módon kapcsolódnak egymáshoz. A 3.34. ábra paneljein tisztán látható, hogy J_0 előjelétől függetlenül, egy rövid kezdeti dinamikai időtartamot leszámítva, a horizonton átáramló fluxus negatív, ami a J_0 -hoz viszonyítva jelentős mértékű, míg a \mathcal{S}^+ -on átáramló fluxus szintén jelentős és pozitív. Ezen felül, ahogy vártuk, a 3.34. ábra paneljeinek összehasonlításával látható, hogy a frame dragging hatása erősebb ellentétesen forgó konfiguráció esetén. Végül megjegyezzük, hogy ez az impulzusmomentum szuperradiancia, amit a frame dragging okoz, teljesen egybevág azzal a képpel, ami a Penrose-folyamatról él bennünk. Ennek belátásához gondoljunk arra, hogy egy erős negatív impulzusmomentum fluxus a horizonton biztosítja a J_0 értékét jelentősen meghaladó pozitív fluxus eljutását a fényszerű végtelenbe.

3.10. Összegzés: lineáris perturbációk Kerr-háttéren

A 2. fejezetben bemutatott formulákat először a Kerr-féle feketelyuk téridők fölött értelmezett lineáris perturbációk vizsgálata során alkalmaztam. A lineáris radiatív szabadsági fokokat megjelenítő változók időfejlődését egyetlen mesteregyenlettel, Teukolsky egyenletével le lehet írni, ahol az adott változó spinsúlya jeleníti meg a fizikai jellegét. Ezen változók kifejtési együtthatóira felírt $(1 + 1)$ -dimenziós, másodrendű hiperbolikus parciális differenciálegyenlet-rendszert standard eljárással elsőrendű parciális differenciálegyenletek rendszerére vezettem vissza. Az így kapott egyenletrendszert a vonalak módszerével és egy negyedrendű Runge–Kutta-integrátorral oldottam meg.

A kapott megoldások helyességét és a numerikus eljárás konvergenciájának fokát Tóth [80] munkájában ismertetett kanonikusan megmaradó energia- és impulzusmomentum-jellegű áramok alapján ellenőriztem. Mivel ezek az áramok csak két, potenciálisan független, ellentétes spinsúlyú megoldás kombinációjával állítható elő, önmagában nem elegendő egyetlen, adott s spinsúlyú megoldás jellemzésére. Ezt a hiányosságot kiküszöbölendő, Wald [83] munkája alapján megkonstruáltam azokat a \mathbb{C} függelékben található másod- és negyedrendű differenciáloperátorokat, amelyek adott s spinsúlyú megoldásokat $-s$ spinsúlyú megoldásokba képeznek. Az így kapott megoldáspárokat alkalmazva a Tóth-féle áramokban olyan megmaradó áramokat kapunk, ami konstans szorzótól eltekintve kielégítően jellemzi az adott megoldást.

A Teukolsky-egyenlet által leírt perturbációk aszimptotikus viselkedése—egész pontosan a lecsengési rátája—kiemelt jelentőséggel bír a Kerr-megoldás lineáris perturbációkkal szembeni teljes stabilitásának szempontjából. Ugyan ismertek analitikus közelítések, melyek megjósolják az aszimptotikus, $\sim T^{-n}$ alakú viselkedésre jellemző kitevőket különböző paraméterek esetén, de szükséges ezen jóslatok numerikus ellenőrzése. A Rácz és Tóth által [51]-ben megkezdett munka folytatásaként $R-T$ koordináták alkalmazásával vizsgáltuk a TME elektromágneses és gravitációs perturbációkat leíró, $(\phi^{(s)}, 0)$ alakú kezdőadatból előállított sztatikus és $(0, \phi_T^{(s)})$ alakú kezdőadatból előállított tisztán dinamikus megoldásainak lecsengését az $R = R_+$ eseményhorizonton, a \mathcal{I}^+ jövő fényszerű végtelenben és az i^+ jövő időszerű végtelent közelítő köztes $R = \text{const.}$ vonalak mentén. Célkitűzéseinknek megfelelően az irodalomban tudomásunk szerint elsőnek vizsgáltuk módszereken a nem tengelyszimmetrikus megoldásokat. Meglepetésünkre eredményeink módosítások nélkül kiterjesztik a sztatikus kezdőadatokhoz tartozó megoldásokra vonatkozó, [76]-ban tengelyszimmetrikus esetekre empirikusan megállapított formulákat. Ennél is meglepőbb, hogy tisztán dinamikus kezdőadatokhoz tartozó megoldásokra vonatkozó [84]-ben és [76]-ban található analitikus érvelések hiányosnak bizonyultak néhány $m \neq 0$ esetben meghatározott lecsengési együttható pontos megállapításához. Ezeket az észrevételeinket az [52], Physical Review D-ben megjelent publikációnkban tettük közzé.

A Kerr-téridő egy rendkívül érdekes tulajdonsága az ergoszféra jelenléte. Az, hogy az eseményhorizonton kívül megváltozik az aszimptotikusan időszerű Killing-vektormező kauzális jellege, lehetővé teszi, hogy energiát nyerjünk ki a feketelyukból annak forgási energiáját megcsapolva. Lineáris közelítésben ez abban jelenik meg, hogy a \mathcal{I}^+ jövő fényszerű végtelen irányába több energia távozik, mint amennyit a kezdőadat tartalmazott. Ugyan az impulzusmomentumot nem jellemzi az a fajta pozitív definitésre vonatkozó elvárás, amely az energia esetében teljesen természetes módon felmerül, hasonló vizsgálatokat itt is érdekesnek tartunk elvégezni, mivel az impulzusmomentum változásában direkt módon jelenik meg a „frame dragging” hatása, ami azt jelenti, hogy a vonatkoztatási rendszereket bizonyos értelemben magával sodorja a forgó feketelyuk. Skalármezők esetén a [42]-ben és [90]-ben is ismertetett tökéletes visszaverődést tapasztaltuk vagy a hullám-

csomag egyenes behullását a feketelyukba. Nem találtunk olyan paraméterekeket a kezdőadatok általunk vizsgált osztályában, amelyek szuperradianciát eredményeztek volna az energiában. Mivel $s = 0$ esetben jól ismert az általunk is alkalmazott megmaradó áramok fizikai interpretációja, ezért külön is tárgyaltuk a skalármezők esetén tapasztalt nagy impulzusmomentum-nyereséget. Ezekben az esetekben az impulzusmomentum áramlása alátámasztja, hogy a megjelenő többlet impulzusmomentum a frame dragging következménye. A várakozásainknak megfelelően, több érdekességet tartogatott az elektromágneses és gravitációs perturbációk vizsgálata. Megfigyeléseink alapján kintről indított hullámcsomagok esetén a befelé menő perturbációkat leíró $s < 0$ megoldások mutathatnak szuperradianciát, míg a bentről indított hullámcsomagok esetén a kifelé menő sugárzást leíró $s > 0$ megoldások. Mind az ergoszférától távolról indított I. típusú, mind a horizont környezetében koncentrált kezdőadathoz tartozó megoldások esetén tapasztalt szuperradiancia nagyságrendileg megfelelt Teukolsky [88]-ban megadott elektromágneses hullámokra vonatkozó 4.4%-os és gravitációs perturbációkra vonatkozó 138%-os értékeivel—habár a direkt összehasonlítás nem lehetséges, mivel más jellegű energia kifejezést alkalmaztunk. Kifelé haladó ($s = 2$) gravitációs perturbációk esetén ennél jóval látványosabb effektust produkált néhány III. típusú megoldás. A legnagyobb mért effektus 390% körüli energianyereséget mutat. Egyrészt ez a hatalmas érték utalhat arra, hogy az általunk használt energia típusú megmaradó áram jelentősen eltér a Teukolsky által használt kifejezéstől, másrészt látványosan mutatja, hogy az effektus nagysága erősen függ a kezdőadat tartójának megválasztásától. Ha igazán nagy teljesítményű feketelyuk erőművet szeretnénk építeni, akkor úgy tűnik gondoskodnunk kell arról, hogy a mezőknek nem elhanyagolható része tartózkodjon a feketelyuk közelében már a folyamat kezdetén is. A szuperradianciához kapcsolódó eredményeinket ismertető cikket közlésre elfogadta a Physical Review D [92].

A Teukolsky-egyenlettel kapcsolatos vizsgálatainkat segítő alkalmazások nem kis részben épülnek a [51]-ben, [42]-ben és [90]-ben elvégzett vizsgálatok során kifejlesztett kódbázis egyes elemeire. Az általam végzett fejlesztéseket is tartalmazó kódbázis bejelentkezés után elérhető a KFKI által üzemeltetett GitLab szerveren [93].

4. fejezet

Schwarzschild kezdőadat nemlineáris perturbációi

Ugyan a gravitációs kéttest problémának bizonyos szakaszai kezelhetők közelítésekkel, de a folyamat teljességében csak numerikus módszerekkel vizsgálható. Ezek az eljárások nem hanyagolnak el semmilyen fizikai effektust, így a megfelelő kezdőadat birtokában csupán a számítási kapacitás határoolja az elérhető pontosságot. Ennél fogva a kezdőadat pontossága kulcsfontosságú minden numerikus vizsgálat esetén. A napjainkban alkalmazott kettős feketelyuk adatok azonban a modellezni kívánt fizikán felül mind tartalmaznak nem-fizikainak tekintett sugárzásokat [34, 35, 94].

Az általános relativitáselméletben az evolúciós probléma azért különösen nehéz és egyben érdekes is, mert itt nem egy fix háttérgeometrián vizsgáljuk valamely fizikai mező fejlődését. Az általános relativitáselméletben a geometria is egyike a dinamikai szereplőknek. Az evolúciós probléma megfogalmazása azzal a feltételezéssel indul, hogy a négydimenziós \mathcal{M} alapsokaság foliázható valamely (sehol el nem tűnő gradiensű) sima $t : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ időfüggvény, Σ_t -vel jelölt, szintfelületeivel. Érdemes megjegyezni, hogy ha létezik, akkor végtelen sok ilyen függvény létezik. A Σ_t szintfelületek közötti kapcsolatok biztosítása érdekében választunk egy olyan sima t^a időfejlődési vektormezőt, amelynek integrálgörbéi minden Σ_t szintfelületet pontosan egyszer metszenek és amely úgy van normálva, hogy $t^a \partial_a t = 1$ mindenütt teljesüljön. Egy adott időfüggvényhez is végtelen sok időfejlődési vektormező található. Ekkor ahhoz hasonlóan, ahogy az F_{ab} Faraday-tenzort fel szokás bontani a Σ_t felületeken értelmezett E^a és H^a térerősségekre, a g_{ab} metrika is felbontható a felületre vetített h_{ab} indukált metrikára és az erre merőleges N és N^a komponenseire. Az evolúciós probléma kezdőadatában h_{ab} időderiváltjaként a $K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}$ külső görbület jelenik meg, ahol n^a mindenütt a Σ_t felületekre merőleges egységnormálist, míg \mathcal{L}_n az n^a vektor szerinti Lie-deriváltat jelöli. Ekkor az

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi T_{ab} \quad (4.0.1)$$

Einstein-egyenletet is felbontjuk a felületre merőleges és érintőleges komponenseire. A Maxwell-egyenlethez hasonlóan az evolúciós egyenleteken túl dinamikát nem tartalmazó kényszeregyenleteket is kapunk, melyeket az anyagmentes vákuum esetben a

$${}^{(3)}R + (K^a{}_a)^2 - K_{ab}K^{ab} = 0, \quad (4.0.2)$$

$$D_b K^b{}_a - D_a K^b{}_b = 0 \quad (4.0.3)$$

alakban írhatunk fel. Itt D_a a h_{ab} -vel kompatibilis kovariáns deriváló operátor, ${}^{(3)}R$ pedig az ehhez tartozó görbületi tenzorból képzett skalárgörbület. Ezek a kényszeregyenletek megszorítják a lehetséges (h_{ab}, K_{ab}) kezdőadat párokat.

A kényszeregyenletek megoldására alkalmazott módszerek szinte mindegyike a Lichnerowicz–York-féle konformis felbontáson alapulnak [95, 96, 97]. Ezek középpontjában a

$$h_{ab} = \phi^4 \bar{h}_{ab}$$

összefüggés áll, ahol \bar{h}_{ab} egy tetszőleges háttér metrika, ϕ alakját pedig meghatározzák a kényszerek. A K_{ab} külső görbület hasonló felbontására York tett javaslatokat [98, 99]. Ezek mindegyike elliptikus egyenletrendszer eredményez a ϕ skálafaktorra és a külső görbületre alkalmazott felbontástól függően K_{ab} három komponensére.

Egészen a közelmúltig ezeket az egyenleteket csupán egy sor Bowen és York [100] által bevezetett egyszerűsítő feltétel mellett oldották meg. Ezek a feltételek a következők:

- $K = \text{tr}K_{ab} = 0$, azaz az időszelet maximális,
- \bar{h}_{ab} sík metrika, vagyis h_{ab} konformisan sík,
- $\phi|_\infty = 1$, azaz h_{ab} aszimptotikusan sík.

Ezen feltételek mellett a kényszeregyenletek gyakran analitikusan is megoldhatóak, így kiváló ellenőrzési lehetőséget nyújtanak a numerikus vizsgálatok számára, de ezek a túlzó egyszerűsítések vezetnek a kezdőadatban megjelenő nem-fizikai sugárzáshoz. Hogy lássuk mennyire problémásak ezek (első sorban a konformis síkság) elég felidéznünk, hogy a Kerr-megoldásnak nincs konformisan sík szelése [101], tehát egyik konformisan sík kezdőadat sem képes már a forgó Kerr-feketelyuk kezdőadatot pontosan leírni. Emiatt egy ilyen kezdőadat mást ír le, ami jelentősen rontja a közelítés értékét [94].

A fentiekből kifolyólag napjaink igen fontos kutatási iránya a Bowen–York-féle feltételeken túl mutató eljárások kidolgozása akár különböző nem sík háttér metrika alkalmazásával [102, 103, 104], akár a poszt-newtoni sorfejtés által motivált kezdőadatok előállításával [35, 38]. Ezek a próbálkozások alapvetően a Lichnerowicz–York-féle kereteken belül maradnak.

Mindezekről alapjaiban tér el a Rác István által javasolt új módszer [105]. A Lichnerowicz-féle konformis felbontás helyett a Σ_t felületet Σ_ρ felületekkel fedi le és a h_{ab} metrikát a $(3 + 1)$ felbontáshoz hasonlóan a felületen indukált $\hat{\gamma}_{ab}$ metrikára és a felületre merőleges \hat{N} és \hat{N}^a komponensekre bontjuk. Hasonlóan a K_{ab} külső görbületet \mathbf{K}_{ab} , \mathbf{k}_a és $\boldsymbol{\kappa}$ összetevőkre bontjuk. Az így kapott egyenleteket megoldhatjuk a $(\hat{N}, \mathbf{k}_a, \mathbf{K})$ hármásra vagy a $(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}_a, \mathbf{K})$ hármásra. Mindkét esetben evolúciós egyenleteket kapunk a Lichnerowicz–York-féle elliptikus egyenletek helyett.

A kényszeregyenleteknek ez az új megfogalmazása bizonyította, hogy alkalmas kettős feketelyuk kezdőadatok előállítására [106, 107, 108], de ahogy Beyer és társai [109] rámutattak, korántsem egyértelmű, hogy mikor és hogyan kaphatunk fizikailag értelmezhető, aszimptotikusan sík megoldásokat. A fejezetben ez utóbbi kérdés megválaszolására tett erőfeszítéseinket ismertetjük. A fejezet felépítése a következő: a 4.1.1. alfejezetben áttekintjük a téridő $(3 + 1)$ -es felbontását és bevezetjük a kényszeregyenleteket. Ezt követően hasonló felbontást alkalmazunk a kezdőfelületen belül (4.1.2. alfejezet) és az így kapott egyenleteket felírjuk spinsúlyozott változókkal (4.1.3. alfejezet). A 4.2. alfejezetben tárgyaljuk az aszimptotikus síkság fizikai jelentőségét és a spinsúlyozott változókra vonatkozó feltételeket. A változók értékeit Schwarzschild kezdőadat esetén és a közel-Schwarzschild kezdőadatok meghatározását a 4.3. alfejezetben adjuk meg. Ezt követően tárgyaljuk a nemlineáris perturbatív alakját az egyenleteknek (4.4. alfejezet), majd az alkalmazott numerikus módszereket részletezzük (4.5. alfejezet). A 4.6. alfejezet néhány analitikus megoldást tartalmaz gömbszimmetrikus esetben, majd a 4.7. és 4.8. alfejezetek a szigorúan közel-Schwarzschild és gyengén közel-Schwarzschild megoldásokra vonatkozó eredményeinket mutatja be.

4.1. A kényszeregyenletek evolúciós alakja

4.1.1. A téridő $(3 + 1)$ -es felbontása

Ha egy akronális Σ felület jövő és múlt időfejlődése előállítja a teljes \mathcal{M} sokaságot, akkor Σ -t Cauchy-felületnek nevezzük. Azok az (\mathcal{M}, g_{ab}) téridők, amik rendelkeznek Cauchy-felülettel, a globálisan hiperbolikus téridők. A globális hiperbolikusságból következik a téridő erős kauzalitása is, vagyis a sokaság nem tartalmaz zárt vagy közel zárt¹ időszerű görbéket [53, 54]. Ennél erősebb állítást is tehetünk. Az (\mathcal{M}, g_{ab}) globálisan hiperbolikus téridők egyben stabilan kauzálisak is, amelyből következően választhatunk egy t globális idő függvényt úgy, hogy minden konstans t -hez tartozó hiperfelület Cauchy-felület. \mathcal{M} fóliázható Cauchy-felületekkel és \mathcal{M} topológiája $\mathbb{R} \times \Sigma$ módon írható, ahol Σ valamilyen Cauchy-felület [110, 111].

Tekintsünk egy ilyen Σ_t szeletet! Ennek a Σ_t szeletnek az egységnormálisát jelöljük n_a -val!

¹Közel zárt görbék esetén fennáll a veszélye, hogy kis perturbációk zárt időszerű görbéket eredményeznének.

Ekkor a Σ_t felületen indukált metrikát

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \quad (4.1.1)$$

módon kapjuk². Megjegyezzük, hogy a h^a_b tenzor projekcióként viselkedik ($h^a_e h^e_b = h^a_b$) és a Σ_t hiperfelületekre vetít ($h^e_a n_e = 0$). A továbbiakban Σ minden esetben egyetlen meghatározott Σ_t felületre fog utalni.

Ahogy a fejezet bevezetőjében szerepelt, választunk egy t^a evolúcióvektort olyan módon, hogy integrálgörbéi minden Σ_t felületet pontosan egyszer messenek és a

$$t^a \nabla_a t = 1 \quad (4.1.2)$$

normálási feltétel teljesüljön. Az evolúcióvektor Σ -ra merőleges

$$N = -t^a n_a \quad (4.1.3)$$

komponense a lapse, míg az érintő irányú

$$N^a = h^a_e t^e \quad (4.1.4)$$

vetülete a shift. A kezdőérték problémában a metrika időderiváltjának a szerepében a

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} = (2N)^{-1} [\partial_t h_{ab} - (D_a N_b + D_b N_a)] \quad (4.1.5)$$

külső görbület jelenik meg. K_{ab} a Σ felületen értelmezett tenzor ($h^e_a h^f_b K_{ef} = K_{ab}$), a h_{ab} indukált metrikával kompatibilis D_a kovariáns deriváló operátor és g_{ab} metrikával kompatibilis ∇_a kovariáns deriváló operátor között pedig a

$$D_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = h^{a_1}_{d_1} \dots h^{e_l}_{b_l} h^f_c \nabla_f T^{d_1 \dots d_k}_{e_1 \dots e_l} \quad (4.1.6)$$

összefüggés biztosít kapcsolatot. Ezt felhasználva felírhatjuk a ∇_a -hoz és a D_a -hoz tartozó görbületi tenzorok közötti kapcsolatot kifejező Gauss–Codazzi összefüggéseket:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = h_a^f h_b^g h_c^k h_j^d R_{fgk}{}^j - K_{ac} K_b^d + K_{bc} K_a^d, \quad (4.1.7)$$

$$R_{cd} n^d h^c_b = D_a K^a_b - D_b K^a_a, \quad (4.1.8)$$

ahol ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$ a D_a konnexióhoz tartozó görbület. Ezek alapján belátható, hogy a $G_{ab} n^b = 0$ vákuum egyenletek nem tartalmazznak másodrendű idő deriváltat (itt G_{ab} a (4.0.1) egyenletben definiált Einstein-tenzor). A téridő dinamikáját a $G_{ab} h^a_c h^b_d = 0$ egyenletek írják le, míg

$$0 = G_{ab} n^a n^b = \frac{1}{2} [{}^{(3)}R + (K^a_a)^2 - K_{ab} K^{ab}] \quad (4.1.9)$$

$$0 = h^b_a G_{bc} n^c = D_b K^b_a - D_a K^b_b, \quad (4.1.10)$$

²Emlékeztetjük az olvasót, hogy a 4. fejezetben végig $(-, +, +, +)$ szignatúrát használunk.

egyenletek a Hamilton- és impulzus-kényszerek. A Bianchi-azonosság következményeként, ha a kényszeregyenletek teljesülnek a kezdőfelületen és az Einstein-egyenletek térbeli komponensei mindenütt érvényesek, akkor a kényszerek is teljesülnek mindenhol [53]. Megjegyezzük, hogy a fenti kényszerek négy összefüggést biztosítanak a két szimmetrikus tenzormező tizenkét komponense között, vagyis az egyenletrendszer alulhatározott.

A dolgozatomban ezen fejezetben kezdőadatok előállításával fogunk foglalkozni, úgyhogy vizsgálódásaink középpontjában a (4.1.9) és (4.1.10) egyenletek lesznek.

4.1.2. A kezdőfelület $(2 + 1)$ -es felbontása

Kevésbé ismert, hogy a fenti felbontás nem csak Lorentz-szignatúrájú, hanem Riemann-szignatúrájú metrikával ellátott sokaságokkal is működik, feltéve, hogy Σ fóliázható egymással homológ kétdimenziós felületek valamely egyparaméteres seregével. A doktori képzésem során kifejlesztett numerikus módszer csak akkor alkalmazható, ha Σ topológiája $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2$. Megjegyezzük, hogy a kényszerek ennél általánosabb keretben is felírhatóak evolúciós problémaként [105], de az egyszerűség kedvéért most ettől eltekintünk.

A vizsgált esetben tehát Σ -n választhatunk egy sima, el nem tűnő gradiensű $\varrho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, aminek a \mathcal{S}_ϱ szintfelületei topológiai gömbök. Ekkor szintén választhatunk egy ϱ^a „evolúcióvektort” úgy, hogy az integrálgörbéi minden \mathcal{S}_ϱ felületet pontosan egyszer messenek és a $\varrho^a D_a \varrho = 1$ normálási feltétel teljesüljön.

Az \mathcal{S}_ϱ felületek \hat{n}_a egységnormálisával az \mathcal{S}_ϱ -n indukált $\hat{\gamma}_{ab}$ metrikát

$$\hat{\gamma}_{ab} = h_{ab} - \hat{n}_a \hat{n}_b \quad (4.1.11)$$

összefüggés adja. A korábbiakhoz hasonlóan $\hat{\gamma}^a_b$ az \mathcal{S}_ϱ felületekre vetítő projekció. Ezen felbontásra tekintettel definiáljuk az \mathcal{S}_ϱ felülethez tartozó

$$\hat{K}_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\hat{n}} \hat{\gamma}_{ab} \quad (4.1.12)$$

külső görbületet is. A ϱ^a evolúcióvektor \mathcal{S}_ϱ -ra merőleges és érintő irányú komponensei a

$$\hat{N} = \varrho^e \hat{n}_e \quad (4.1.13)$$

másodlagos lapse és

$$\hat{N}^a = \hat{\gamma}^a_e \varrho^e \quad (4.1.14)$$

másodlagos³ shift. Ezekkel az evolúcióvektor

$$\varrho^a = \hat{N} \hat{n}^a + \hat{N}^a \quad (4.1.15)$$

³Itt és a továbbiakban a másodlagos jelzővel arra utalunk, hogy a $(2 + 1)$ -es felbontásban megjelenő mennyiségekről beszélünk, nem a $(3 + 1)$ -es felbontásban megjelenőkről.

módon írható.

Most, hogy felírhatjuk a h_{ab} metrikát az \widehat{N} másodlagos lapse, az \widehat{N}^a másodlagos shift és a $\widehat{\gamma}_{ab}$ indukált metrika segítségével, állítsuk elő a K_{ab} külső görbület vetületeit is. A külső görbület

$$K_{ab} = \kappa \widehat{n}_a \widehat{n}_b + [\widehat{n}_a \mathbf{k}_b + \widehat{n}_b \mathbf{k}_a] + \mathbf{K}_{ab} \quad (4.1.16)$$

módon írható, ahol

$$\kappa = \widehat{n}^a \widehat{n}^b K_{ab}, \quad (4.1.17)$$

$$\mathbf{k}_a = \widehat{\gamma}^b{}_a \widehat{n}^c K_{bc}, \quad (4.1.18)$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \widehat{\gamma}^c{}_a \widehat{\gamma}^d{}_b K_{cd}. \quad (4.1.19)$$

Célszerűnek bizonyul továbbá az \mathcal{S}_ρ felületeken értelmezett szimmetrikus \mathbf{K}_{ab} és \widehat{K}_{ab} tenzormezők $\mathbf{K} = \widehat{\gamma}^{ab} \mathbf{K}_{ab}$ és $\widehat{K} = \widehat{\gamma}^{ab} \widehat{K}_{ab}$ nyomát, a $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} = \mathbf{K}_{ab} - \frac{1}{2} \widehat{\gamma}_{ab} \mathbf{K}$ nyomtalan tenzort és a $\overset{\star}{K}_{ab}$ szimmetrikus tenzort is definiálnunk a

$$\widehat{K}_{ab} = \widehat{N}^{-1} \overset{\star}{K}_{ab} = \widehat{N}^{-1} \left[\frac{1}{2} \mathcal{L}_\rho \widehat{\gamma}_{ab} - \widehat{D}_{(a} \widehat{N}_{b)} \right] \quad (4.1.20)$$

összefüggésen keresztül. Ilyen módon a $(h_{ab}; K_{ab})$ változókat kifejezhetjük az $(\widehat{N}, \widehat{N}^a, \widehat{\gamma}_{ab}; \kappa, \mathbf{k}_a, \mathbf{K}, \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab})$ új változókkal, és fordítva.

A (4.1.9) és (4.1.10) egyenletek új változókkal történő felírásához szükségünk lesz a következő összefüggésekre [112]:

$${}^{(3)}R = \widehat{R} - \left\{ 2\mathcal{L}_{\widehat{n}} \widehat{K} + \widehat{K}^2 + \widehat{K}_{ab} \widehat{K}^{ab} + 2\widehat{N}^{-1} \widehat{D}^a \widehat{D}_a \widehat{N} \right\}, \quad (4.1.21)$$

$$\widehat{n}^a D_b K^b{}_a = \kappa \widehat{K} + \widehat{D}^a \mathbf{k}_a - \mathbf{K}_{ab} \widehat{K}^{ab} + \mathcal{L}_{\widehat{n}} \kappa - 2\widehat{n}^a \mathbf{k}_a, \quad (4.1.22)$$

$$\widehat{n}^a D_a K^b{}_b = \mathcal{L}_{\widehat{n}} \kappa + \mathcal{L}_{\widehat{n}} \mathbf{K}, \quad (4.1.23)$$

$$\widehat{\gamma}^b{}_a D_c K^c{}_b = \widehat{K} \mathbf{k}_a + \widehat{D}_b \mathbf{K}^b{}_a + \widehat{n}_a \kappa + \mathcal{L}_{\widehat{n}} \mathbf{k}_a - \widehat{n}^b \mathbf{K}_{ba}, \quad (4.1.24)$$

$$\widehat{\gamma}^b{}_a D_b K^c{}_c = \widehat{D}_a \kappa + \widehat{D}_a \mathbf{K}, \quad (4.1.25)$$

ahol \widehat{D}_a a $\widehat{\gamma}_{ab}$ -vel kompatibilis kovariáns deriváló operátor és \widehat{R} az ehhez tartozó görbületi tenzorból képzett skalárgörbület, $\widehat{n}_a = \widehat{n}^b D_b \widehat{n}_a = -\widehat{D}_a (\ln \widehat{N})$.

Ezeket felhasználva a kényszerek a

$$\begin{aligned} -\widehat{R} + \left\{ 2\mathcal{L}_{\widehat{n}} \widehat{K} + \widehat{K}^2 + \widehat{K}_{ab} \widehat{K}^{ab} + 2\widehat{N}^{-1} \widehat{D}^a \widehat{D}_a \widehat{N} \right\} \\ + 2\kappa \mathbf{K} + \frac{1}{2} \mathbf{K}^2 - 2\mathbf{k}^a \mathbf{k}_a - \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} \overset{\circ}{\mathbf{K}}^{ab} = 0, \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

$$\mathcal{L}_{\widehat{n}} \mathbf{k}_a - \frac{1}{2} \widehat{D}_a \mathbf{K} - \widehat{D}_a \kappa + \widehat{D}^b \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ba} + \widehat{K} \mathbf{k}_a + \kappa \widehat{n}_a - \widehat{n}^b \mathbf{K}_{ba} = 0, \quad (4.1.27)$$

$$\mathcal{L}_{\widehat{n}} \mathbf{K} - \widehat{D}^b \mathbf{k}_b - \kappa \widehat{K} + \mathbf{K}_{ab} \widehat{K}^{ab} + 2\widehat{n}^b \mathbf{k}_b = 0 \quad (4.1.28)$$

alakot öltik. A (4.1.27) és (4.1.28) impulzus-kényszerek szimmetrizálható hiperbolikus rendszert alkotnak \mathbf{K} -ra és \mathbf{k}_a -ra, míg a (4.1.26) Hamilton-kényszer a $\widehat{K} = \widehat{N}^{-1}\widehat{K}^*$ összefüggésen keresztül parabolikus parciális differenciálegyenlet \widehat{N} -ra, vagy algebrai egyenlet $\boldsymbol{\kappa}$ -ra attól függően, hogy a $(\mathbf{K}, \mathbf{k}_a, \widehat{N})$ hármasra vagy a $(\mathbf{K}, \mathbf{k}_a, \boldsymbol{\kappa})$ hármasra oldjuk meg a kényszereket [105].

Az aszimptotikus síkság feltételeinek későbbi meghatározása céljából érdemes felírnunk h_{ab} és K_{ab} komponenseit az \mathcal{S}_ϱ felületekhez igazított $(\varrho, \tilde{x}_\alpha)$ koordinátákra. Ekkor

$$h_{ab} = h_{\varrho\varrho}(\mathbf{d}\varrho)_a(\mathbf{d}\varrho)_b + 2h_{\varrho\alpha}(\mathbf{d}\varrho)_a(\mathbf{d}\tilde{x}^\alpha)_b + h_{\alpha\beta}(\mathbf{d}\tilde{x}^\alpha)_a(\mathbf{d}\tilde{x}^\beta)_b, \quad (4.1.29)$$

valamint

$$K_{ab} = K_{\varrho\varrho}(\mathbf{d}\varrho)_a(\mathbf{d}\varrho)_b + 2K_{\varrho\alpha}(\mathbf{d}\varrho)_a(\mathbf{d}\tilde{x}^\alpha)_b + K_{\alpha\beta}(\mathbf{d}\tilde{x}^\alpha)_a(\mathbf{d}\tilde{x}^\beta)_b. \quad (4.1.30)$$

(4.1.15) felhasználásával összevetjük a (4.1.11) és (4.1.29), valamint a (4.1.16) és (4.1.30) egyenleteket. A koordináta komponensekre a következő összefüggéseket kapjuk:

$$h_{\varrho\varrho} = \widehat{N}^2 + \widehat{\gamma}_{\alpha\beta}\widehat{N}^\alpha\widehat{N}^\beta, \quad (4.1.31)$$

$$h_{\varrho\alpha} = \widehat{\gamma}_{\alpha\beta}\widehat{N}^\beta, \quad (4.1.32)$$

$$h_{\alpha\beta} = \widehat{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad (4.1.33)$$

$$K_{\varrho\varrho} = \widehat{N}^2\boldsymbol{\kappa} + 2\widehat{N}\mathbf{k}_\alpha\widehat{N}^\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta}\widehat{N}^\alpha\widehat{N}^\beta, \quad (4.1.34)$$

$$K_{\varrho\alpha} = \widehat{N}\mathbf{k}_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta}\widehat{N}^\beta, \quad (4.1.35)$$

$$K_{\alpha\beta} = \mathbf{K}_{\alpha\beta}. \quad (4.1.36)$$

4.1.3. Spinsúlyozott változók

A Σ felületet \mathcal{S}_ϱ topológiai gömbökkel fóliázzuk. Egy kiválasztott \mathcal{S}_{ϱ_0} felületen alkalmazhatjuk a (ϑ, φ) gömbi koordinátákat és erről a felületről az evolúciós vektormező menti Lie-transzporttal elterjeszthetjük a koordinátákat Σ -ra. Hasonlóan \mathcal{S}_{ϱ_0} -n definiálhatjuk a 2.2. fejezetben használt (q^a, \bar{q}^a) diádot és a q_{ab} referencia metrikát, majd innen kiindulva az evolúciós vektormező segítségével elterjeszthetjük őket az egész Σ felületre. Az előző fejezetben bemutatott új változókat kontrahálva a diád elemeivel az összes változónk skalár lesz.

\widehat{N} , $\boldsymbol{\kappa}$ és \mathbf{K} skalárok, ezekkel most nincs dolgunk. \mathbf{k}_a -t kontraháljuk q^a -val és bevezetjük a

$$\mathbf{k} = q^a\mathbf{k}_a \quad (4.1.37)$$

változót, amivel

$$\mathbf{k}_a = \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{k}}q_a + \mathbf{k}\bar{q}_a]. \quad (4.1.38)$$

A $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}$ mennyiségre

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} = \frac{1}{4} \left[\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{qq}q_aq_b + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{q\bar{q}}\bar{q}_a\bar{q}_b + \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{q\bar{q}}(q_a\bar{q}_b + q_b\bar{q}_a) \right], \quad (4.1.39)$$

ahol

$$\mathring{\mathbf{K}}_{qq} = \mathring{\mathbf{K}}_{ab}q^a q^b, \quad (4.1.40)$$

$$\mathring{\mathbf{K}}_{q\bar{q}} = \mathring{\mathbf{K}}_{ab}q^a \bar{q}^b. \quad (4.1.41)$$

Hasonló módon a shiftre

$$\mathbf{N} = q^a \widehat{N}_a \quad (4.1.42)$$

és a metrikára

$$\widehat{\gamma}_{ab} = \mathbf{a}q_{ab} + \frac{1}{2} [\mathbf{b}\bar{q}_a \bar{q}_b + \bar{\mathbf{b}}q_a q_b], \quad (4.1.43)$$

ahol

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \widehat{\gamma}_{ab} q^a \bar{q}^b, \quad (4.1.44)$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} \widehat{\gamma}_{ab} q^a q^b. \quad (4.1.45)$$

Megjegyezzük, hogy q^a és q_a között q^a_b létesít kapcsolatot, ezért

$$q_a \widehat{N}^a = \widetilde{\mathbf{N}} \neq \mathbf{N} \quad (4.1.46)$$

és

$$\widehat{\gamma}^{ab} = \mathbf{d}^{-1} \left\{ \mathbf{a}q^{ab} - \frac{1}{2} [\mathbf{b}\bar{q}^a \bar{q}^b + \bar{\mathbf{b}}q^a q^b] \right\}, \quad (4.1.47)$$

ahol $\mathbf{d} = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}\bar{\mathbf{b}}$.

A $\widehat{\gamma}_{ab}$ -vel kompatibilis \widehat{D}_a kovariáns deriváló operátor és a q_{ab} -vel kompatibilis \mathring{D}_a deriváló operátor közötti összefüggést a

$$C^e_{ab} = \frac{1}{2} \widehat{\gamma}^{ef} \left\{ \mathring{D}_a \widehat{\gamma}_{fb} + \mathring{D}_b \widehat{\gamma}_{fa} - \mathring{D}_f \widehat{\gamma}_{ab} \right\} \quad (4.1.48)$$

tenzor fejezi ki. C^e_{ab} komponensei:

$$\mathbf{A} = q^a q^b C^e_{ab} \bar{q}_e, \quad (4.1.49)$$

$$\mathbf{B} = \bar{q}^a \bar{q}^b C^e_{ab} q_e, \quad (4.1.50)$$

$$\mathbf{C} = q^a q^b C^e_{ab} q_e. \quad (4.1.51)$$

Most, hogy ismerjük \widehat{D}_a és \mathring{D}_a közti kapcsolatot, felírhatjuk a $\widehat{\gamma}_{ab}$ -hez tartozó skalárgörbületet az egységömb $\mathring{\mathbf{R}} = 2$ skalárgörbületével:

$$\widehat{R} = \frac{1}{2\mathbf{a}} \left(2\mathring{\mathbf{R}} - \left\{ \mathring{\delta}\bar{\mathbf{B}} - \bar{\delta}\mathbf{A} - \frac{1}{2}[\mathbf{C}\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{B}}] \right\} \right). \quad (4.1.52)$$

A parabolikus-hiperbolikus rendszer ezekkel a spinsúlyozott változókkal felírva

$$\begin{aligned} \dot{K} \left[\partial_r \hat{N} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{N}} \bar{\partial} \hat{N} - \frac{1}{2} \overline{\tilde{\mathbf{N}}} \partial \hat{N} \right] \\ - \frac{1}{2} \mathbf{d}^{-1} \hat{N}^2 \left[\mathbf{a} \left\{ \bar{\partial} \hat{N} - \mathbf{B} \bar{\partial} \hat{N} \right\} - \mathbf{b} \left\{ \bar{\partial}^2 \hat{N} - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{A}} \bar{\partial} \hat{N} - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{C}} \partial \hat{N} \right\} + cc. \right] \\ - \mathcal{A} \hat{N} - \mathcal{B} \hat{N}^3 = 0, \end{aligned} \quad (4.1.53)$$

$$\partial_r \mathbf{k} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{N}} \bar{\partial} \mathbf{k} - \frac{1}{2} \overline{\tilde{\mathbf{N}}} \partial \mathbf{k} - \frac{1}{2} \hat{N} \bar{\partial} \mathbf{K} + \mathbf{f} = 0, \quad (4.1.54)$$

$$\partial_r \mathbf{K} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{N}} \bar{\partial} \mathbf{K} - \frac{1}{2} \overline{\tilde{\mathbf{N}}} \partial \mathbf{K} - \frac{1}{2} \hat{N} \mathbf{d}^{-1} \left\{ \mathbf{a} (\bar{\partial} \bar{\mathbf{k}} + \bar{\partial} \mathbf{k}) - \mathbf{b} \bar{\partial} \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{b}} \bar{\partial} \mathbf{k} \right\} + \mathbf{F} = 0 \quad (4.1.55)$$

alakot ölti, ahol

$$\mathcal{A} = \partial_r \dot{K} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{N}} \bar{\partial} \dot{K} - \frac{1}{2} \overline{\tilde{\mathbf{N}}} \partial \dot{K} + \frac{1}{2} \left[\dot{K}^2 + \dot{K}_{ab} \dot{K}^{ab} \right], \quad (4.1.56)$$

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{2} \left[\hat{R} + 2 \boldsymbol{\kappa} \mathbf{K} + \frac{1}{2} \mathbf{K}^2 - \mathbf{d}^{-1} [2 \mathbf{a} \mathbf{k} \bar{\mathbf{k}} - \mathbf{b} \bar{\mathbf{k}}^2 - \bar{\mathbf{b}} \mathbf{k}^2] - \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} \overset{\circ}{\mathbf{K}}^{ab} \right], \quad (4.1.57)$$

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} \left[\mathbf{k} \bar{\partial} \overline{\tilde{\mathbf{N}}} + \bar{\mathbf{k}} \partial \tilde{\mathbf{N}} \right] - \left[\boldsymbol{\kappa} - \frac{1}{2} \mathbf{K} \right] \bar{\partial} \hat{N} + \dot{K} \mathbf{k} - \hat{N} \left[\bar{\partial} \boldsymbol{\kappa} + q^a \hat{n}^b \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} - q^a \hat{D}^b \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} \right], \quad (4.1.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \frac{1}{4} \hat{N} \mathbf{d}^{-1} \left\{ 2 \mathbf{a} \mathbf{B} \bar{\mathbf{k}} - \mathbf{b} (\overline{\mathbf{C}} \mathbf{k} + \overline{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{k}}) + cc. \right\} - \mathbf{d}^{-1} \left[(\mathbf{a} \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{b}} \mathbf{k}) \bar{\partial} \hat{N} + cc. \right] \\ + \left[\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} \dot{K}^{ab} - \left(\boldsymbol{\kappa} - \frac{1}{2} \mathbf{K} \right) \dot{K} \right]. \end{aligned} \quad (4.1.59)$$

A ‘cc.’ jelölés minden esetben a vele egy zárójelben található tagok komplex konjugáltjára utal, $\hat{n}^a = \hat{D}^a \ln \hat{N}$, és a $q^a \hat{n}^b \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}$, $q^a \hat{D}^b \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}$, $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} \dot{K}^{ab}$, $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} \overset{\circ}{\mathbf{K}}^{ab}$, $\dot{K}_{ab} \dot{K}^{ab}$ tagok explicit alakja spinsúlyozott változókkal kifejezve megtalálható [48]-ban.

Hasonlóan az algebrai-hiperbolikus egyenletrendszer a

$$\partial_r \mathbf{K} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{N}} \bar{\partial} \mathbf{K} - \frac{1}{2} \overline{\tilde{\mathbf{N}}} \partial \mathbf{K} - \frac{1}{2} \hat{N} \mathbf{d}^{-1} \left\{ \mathbf{a} (\bar{\partial} \bar{\mathbf{k}} + \bar{\partial} \mathbf{k}) - \mathbf{b} \bar{\partial} \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{b}} \bar{\partial} \mathbf{k} \right\} + \mathbf{F} = 0, \quad (4.1.60)$$

$$\partial_r \mathbf{k} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{N}} \bar{\partial} \mathbf{k} - \frac{1}{2} \overline{\tilde{\mathbf{N}}} \partial \mathbf{k} + \hat{N} \mathbf{K}^{-1} \left\{ \boldsymbol{\kappa} \bar{\partial} \mathbf{K} - \mathbf{d}^{-1} [(\mathbf{a} \mathbf{k} - \mathbf{b} \bar{\mathbf{k}}) \bar{\partial} \bar{\mathbf{k}} + (\mathbf{a} \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{b}} \mathbf{k}) \bar{\partial} \mathbf{k}] \right\} + \mathbf{f} = 0, \quad (4.1.61)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{2} \mathbf{K}^{-1} \left[\mathbf{d}^{-1} (2 \mathbf{a} \mathbf{k} \bar{\mathbf{k}} - \mathbf{b} \bar{\mathbf{k}}^2 - \bar{\mathbf{b}} \mathbf{k}^2) - \frac{1}{2} \mathbf{K}^2 - \boldsymbol{\kappa}_0 \right] \quad (4.1.62)$$

alakot ölti, ahol

$$\kappa_0 = {}^{\circledast}R - \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}\overset{\circ}{\mathbf{K}}^{ab}, \quad (4.1.63)$$

továbbá

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4} \widehat{N} \mathbf{d}^{-1} \left\{ 2 \mathbf{a} \mathbf{B} \bar{\mathbf{k}} - \mathbf{b} (\bar{\mathbf{C}} \mathbf{k} + \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{k}}) + cc. \right\} - \mathbf{d}^{-1} \left[(\mathbf{a} \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{b}} \mathbf{k}) \delta \widehat{N} + cc. \right] \\ + \left[\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} \overset{\star}{K}^{ab} - \left(\kappa - \frac{1}{2} \mathbf{K} \right) \overset{\star}{K} \right], \quad (4.1.64)$$

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2} \left[\mathbf{k} \delta \widetilde{\mathbf{N}} + \bar{\mathbf{k}} \delta \widetilde{\mathbf{N}} \right] \\ + \frac{1}{2} \widehat{N} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{K})^{-1} \left[(\mathbf{a} \mathbf{k} - \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{k}}) (\bar{\mathbf{B}} \mathbf{k} + \mathbf{B} \bar{\mathbf{k}}) + (\mathbf{a} \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{b}} \mathbf{k}) (\bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{k}} + \mathbf{A} \mathbf{k}) \right] \\ - \left[\kappa - \frac{1}{2} \mathbf{K} \right] \delta \widehat{N} + \widehat{N} \left[\frac{1}{2} \mathbf{K}^{-1} \delta \kappa_0 + \widehat{K} \mathbf{k} - q^a \dot{\bar{n}}^b \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} + q^a \widehat{D}^b \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} \right]. \quad (4.1.65)$$

4.2. Aszimptotikus síkság

Izolált rendszerek esetén a fizikai intuíciónk azt sugallja, hogy a forrástól végtelen távol a téridő sík, azaz valamilyen értelemben hasonlít a Minkowski-téridőhöz. Éppen ebben a vonatkozásban játszanak kitüntetett szerepet az aszimptotikusan sík megoldások. Ezekben, az ott aszimptotikus értelemben létező idő- és térbeli eltolási, valamint a forgási invarianciához kapcsolódóan, legalább globális értelemben értelmezhetjük a megoldások teljes energiáját, lendületét, perdületét vagy a tömegközéppontját. Az aszimptotikus síkság pontos definíciójáért Wald könyvéhez [53] utaljuk az olvasót, itt csupán a követelmények természetét szeretnénk érzékeltetni. Egy (M, g_{ab}) vákuum téridő a térszerű és fénszerű végtelenben aszimptotikusan sík, ha létezik egy $(\widetilde{M}, \widetilde{g}_{ab})$ nem fizikai téridő, ahol \widetilde{g}_{ab} sima egy i^0 pont kivételével, ahol ennél enyhébb feltételeket kell megengednünk, és létezik egy $\Psi : M \rightarrow \Psi[M] \subset \widetilde{M}$ konformis izometria Ω konform faktoral (ekkor $\Psi[M]$ felett $\widetilde{g}_{ab} = \Omega^2 \Psi^* g_{ab}$), továbbá

- az i^0 pont M minden pontjától térszerűen elválasztott
- a $\mathcal{I}^+ \cup i^0 \cup \mathcal{I}^-$ végtelen környezete mentes kauzális patológiáktól
- Ω kiterjeszthető \widetilde{M} -re olyan módon, hogy i^0 pontban C^2 , mindenhol máshol C^∞
- Ω eltűnik \mathcal{I}^+ , i^0 és \mathcal{I}^- helyeken (ez a végtelen nyújtás biztosítja, hogy ezek a helyek ténylegesen a végtelent jelenítik meg) és Ω deriváltjai úgy viselkednek, hogy g_{ab} egy sík metrikához tartson a végtelenhez közelítve
- \mathcal{I}^+ -nak és \mathcal{I}^- -nek a megfelelő topológiával kell rendelkeznie.

Aszimptotikusan sík téridők esetén vizsgálhatóak $\partial M = \mathcal{I}^+ \cup i^0 \cup \mathcal{I}^- \subset \tilde{M}$ szimmetriái. Ezek az aszimptotikus szimmetriák alkotják a Bondi–Metzner–Sachs-csoportot (BMS-csoport), ami a Poincaré-csoportnál bővebb, de az elemei között beazonosíthatóak a Poincaré-csoport elemei. Ilyen módon lehetőségünk nyílik azonosítani a Poincaré-csoport elemeinek megfelelő aszimptotikus izometriákat és ezek segítségével definiálni az ezen szimmetriákhoz tartozó ADM töltéseket.

A fenti geometriai képhez illeszkedő koordinátákat alkalmazva azt mondhatjuk, hogy a (Σ, h_{ab}, K_{ab}) kezdőadat erősen aszimptotikusan sík [113, 114], ha egy kompakt Σ -beli halmaz komplementerét diffeomorf módon leképezhetjük valamely \mathbb{R}^3 -beli origó középpontú \mathcal{B} gömb komplementerére úgy, hogy az \mathbb{R}^3 -on értelmezett x_α Descartes-koordinátákkal meghatározott $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ függvény $r \rightarrow \infty$ határátmenete esetén a

$$h_{\alpha\beta} = \left(1 + \frac{C}{r}\right) \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (4.2.1)$$

$$K_{\alpha\beta} = \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (4.2.2)$$

relációk teljesülnek, ahol C egy alkalmas pozitív konstans.

Az aszimptotikus síkság egy kevésbé szigorú meghatározásához jutunk, ha azt csupán az ADM töltések létezéséhez kötjük [115]. A vonatkozó gyenge aszimptotikus síkság feltétele, ami mellett még léteznek az ADM tömegek, de nem kell a fenti felsorolás minden pontjának teljesülnie, a

$$h_{\alpha\beta} = \left(1 + \frac{C}{r}\right) \delta_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(r^{-3/2-\epsilon}), \quad (4.2.3)$$

$$K_{\alpha\beta} = \mathcal{O}(r^{-3/2-\epsilon}) \quad (4.2.4)$$

lecsengés, ahol ϵ egy tetszőlegesen kicsiny pozitív konstans. Ebben az esetben belátható [115], hogy az ADM tömeg és impulzus még jól definiált mennyiségek. Alább megmutatjuk, hogy ezek a feltételek milyen megszorításokat eredményeznek a spinsúlyozott változókra. A gondolatmenetet csak az erősen aszimptotikusan sík kezdőadatra mutatjuk be, majd a végeredményt közöljük mindkét esetre.

Először a (4.2.1)-(4.2.4) feltételeket fogalmazzuk át (r, \tilde{x}_α) gömbi koordinátákra, ahol $\tilde{x}_1 = \vartheta$ és $\tilde{x}_2 = \varphi$. A két koordinátarendszer közötti kapcsolatot a következőképpen írhatjuk:

$$x_1 = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad (4.2.5)$$

$$x_2 = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad (4.2.6)$$

$$x_3 = r \cos\vartheta. \quad (4.2.7)$$

A Descartes-koordinátákban

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{C}{r}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & \left(1 + \frac{C}{r}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) & \left(1 + \frac{C}{r}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}) \end{pmatrix} \quad (4.2.8)$$

komponensekkel leírható h_{ab} tenzor komponensei gömbi koordinátákban

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{C}{r}) + \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{O}(r^{-1}) \\ \mathcal{O}(r^{-1}) & (1 + \frac{C}{r})r^2 + \mathcal{O}(r^0) & \mathcal{O}(r^0) \\ \mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{O}(r^0) & (1 + \frac{C}{r})r^2 \sin^2\vartheta + \mathcal{O}(r^0) \end{pmatrix}. \quad (4.2.9)$$

Hasonló módon a Descartes-koordinátákban

$$K_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-2}) \end{pmatrix} \quad (4.2.10)$$

komponensekkel leírható K_{ab} tenzor komponensei gömbi koordinátákban

$$K_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{O}(r^{-1}) \\ \mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{O}(r^0) & \mathcal{O}(r^0) \\ \mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{O}(r^0) & \mathcal{O}(r^0) \end{pmatrix}. \quad (4.2.11)$$

Mivel a vizsgálataink közel Schwarzschild kezdőadatokra szorítkoznak, feltételezhetjük, hogy Σ fölízható metrikus gömbökkel. Ebben az esetben választhatjuk $\varrho = r$ -et és a korábban meghatározott $h_{\varrho\varrho}$, $h_{\varrho\alpha}$, $h_{\alpha\beta}$, $K_{\varrho\varrho}$, $K_{\varrho\alpha}$ és $K_{\alpha\beta}$ komponenseket közvetlenül összevethetjük a fenti feltételekkel. Az összevetés eredménye:

$$h_{rr} = \widehat{N}^2 + \widehat{\gamma}_{\alpha\beta} \widehat{N}^\alpha \widehat{N}^\beta = \left(1 + \frac{C}{r}\right) + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (4.2.12)$$

$$h_{r\alpha} = \widehat{\gamma}_{\alpha\beta} \widehat{N}^\beta = \mathcal{O}(r^{-1}), \quad (4.2.13)$$

$$h_{\alpha\beta} = \widehat{\gamma}_{\alpha\beta} = r^2 q_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{C}{r}\right) + \mathcal{O}(r^0), \quad (4.2.14)$$

$$K_{rr} = \widehat{N}^2 \boldsymbol{\kappa} + 2\widehat{N} \mathbf{k}_\alpha \widehat{N}^\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta} \widehat{N}^\alpha \widehat{N}^\beta = \mathcal{O}(r^{-2}), \quad (4.2.15)$$

$$K_{r\alpha} = \widehat{N} \mathbf{k}_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta} \widehat{N}^\beta = \mathcal{O}(r^{-1}), \quad (4.2.16)$$

$$K_{\alpha\beta} = \mathbf{K}_{\alpha\beta} = \mathcal{O}(r^0), \quad (4.2.17)$$

ahol $q_{\alpha\beta}$ az egységgömb metrikájának komponenseit jelöli. (4.2.14) alapján $\widehat{\gamma}_{\alpha\beta} \propto \mathcal{O}(r^2)$ és $\widehat{\gamma}^{\alpha\beta} \propto \mathcal{O}(r^{-2})$. Ezt felhasználva (4.2.13) alapján $\widehat{N}^\alpha \propto \mathcal{O}(r^{-3})$. Mindezt összevetve (4.2.12)-vel $\widehat{N}^2 - 1 \propto \mathcal{O}(r^{-1})$ adódik. Mivel \widehat{N} nem vált előjelet, ebből következik, hogy $\widehat{N} - 1 \propto \mathcal{O}(r^{-1})$. Hasonlóan (4.2.17) kimondja, hogy $\mathbf{K}_{\alpha\beta} \propto \mathcal{O}(r^0)$, (4.2.16)-ból következik, hogy $\mathbf{k}_\alpha \propto \mathcal{O}(r^{-1})$ és (4.2.15)-ből $\boldsymbol{\kappa} \propto \mathcal{O}(r^{-2})$. Felhasználva, hogy $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} = \mathbf{K}_{ab} - \frac{1}{2} \widehat{\gamma}_{ab} \mathbf{K}$ azt kapjuk, hogy $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\alpha\beta} \propto \mathcal{O}(r^0)$ és $\mathbf{K} \propto \mathcal{O}(r^{-2})$. Mivel q^a komponensei függetlenek r -től, a spinsúlyozott változókra vonatkozó feltételek közvetlen módon következnek az előbbiekből. A potenciális függő változókra a 4.1 táblázatban gyűjtjük össze ezeket.

változó	erős aszimptotikus síkság	gyenge aszimptotikus síkság
K	$\mathcal{O}(r^{-2})$	$\mathcal{O}(r^{-3/2-\epsilon})$
κ	$\mathcal{O}(r^{-2})$	$\mathcal{O}(r^{-3/2-\epsilon})$
k	$\mathcal{O}(r^{-1})$	$\mathcal{O}(r^{-1/2-\epsilon})$
$\widehat{N} - 1$	$\mathcal{O}(r^{-1})$	$\mathcal{O}(r^{-1})$

4.1. táblázat. A függő változók erős és gyenge aszimptotikus síkságnak megfelelő lecsengési rátái. A 4.7 fejezetekben ezekhez fogjuk viszonyítani a megoldások lecsengését.

4.3. Schwarzschild téridő spinsúlyozott változókkal

Valamely metrika Kerr–Schild formájú, ha felírható a

$$g_{ab} = \eta_{ab} + 2H\ell_a\ell_b \quad (4.3.1)$$

alakban, ahol H , az esetleges szingularitásoktól eltekintve, egy sima függvény, η_{ab} a Minkowski-metrika, valamint ℓ_a fényszerű mind g_{ab} -re, mind pedig η_{ab} -re vonatkozóan. Az inverz metrika ekkor a

$$g^{ab} = \eta^{ab} - 2H\ell^a\ell^b \quad (4.3.2)$$

alakot ölti, ahol $\ell^a = \eta^{ab}\ell_b$. Definiálva az $\ell_t = \ell^a n_a$ és $\tilde{\ell}_a = h_a{}^e \ell_e$ vetületeket (a fényszerűség miatt $\ell_t^2 = \tilde{\ell}^e \tilde{\ell}_e$) az indukált metrika

$$h_{ab} = d_{ab} + 2H\tilde{\ell}_a\tilde{\ell}_b \quad (4.3.3)$$

alakot ölti, míg h_{ab} inverze

$$h^{ab} = d^{ab} - \frac{2H\tilde{\ell}^a\tilde{\ell}^b}{1 + 2H\ell_t^2}, \quad (4.3.4)$$

ahol $d_{ab} = h_a{}^e h_b{}^f \eta_{ef}$. A lapse és a shift

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + 2H\ell_t^2}}, \quad (4.3.5)$$

$$N_a = 2H\ell_t\tilde{\ell}_a, \quad (4.3.6)$$

$$N^a = 2HN^2\ell_t\tilde{\ell}^a. \quad (4.3.7)$$

A külső görbület

$$K_{ab} = (2N)^{-1}[\partial_t h_{ab} - (D_a N_b + D_b N_a)]. \quad (4.3.8)$$

Schwarzschild téridőben gömbi koordináták felett $H = M/r$ és $\ell_\alpha = (1, 1, 0, 0)$. ℓ_a vetületeire $\ell_t = 1$ és $\tilde{\ell}_\alpha = \partial_\alpha r$. Ezzel a lapse

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + 2H}}, \quad (4.3.9)$$

a shift

$$N_\alpha = 2H\partial_\alpha r, \quad (4.3.10)$$

az indukált metrika

$$h_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta} + 2H\partial_\alpha r\partial_\beta r \quad (4.3.11)$$

és a külső görbület

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{2M}{r^2\sqrt{1+2H}}(d_{\alpha\beta} - [2+H]\partial_\alpha r\partial_\beta r) \quad (4.3.12)$$

komponensekkel bírnak. A Σ felületet $r = \text{const.}$ felületekkel fóliázzuk. Ekkor a másodlagos lapse és shift

$$\hat{N} = \sqrt{1+2H}, \quad (4.3.13)$$

$$\hat{N}^\alpha = 0, \quad (4.3.14)$$

az egységnormális

$$\hat{n}_\alpha = \sqrt{1+2H}\partial_\alpha r \quad (4.3.15)$$

és az indukált metrika

$$\hat{\gamma}_{\alpha\beta} = r^2 q_{\alpha\beta}. \quad (4.3.16)$$

A külső görbület vetületeire

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{2M(1+H)}{r^2(1+2H)^{3/2}}, \quad (4.3.17)$$

$$\mathbf{k} = 0, \quad (4.3.18)$$

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta} = -\frac{2M}{r^2\sqrt{1+2H}}\hat{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad (4.3.19)$$

$$\mathbf{K} = -\frac{4M}{r^2\sqrt{1+2H}}, \quad (4.3.20)$$

$$\mathring{\mathbf{K}}_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.3.21)$$

A másodlagos külső görbület komponensei:

$$\hat{K}_{\alpha\beta} = \frac{1}{r\sqrt{1+2H}}\hat{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad (4.3.22)$$

aminek a nyoma és nyomtalan része

$$\hat{K} = \frac{2}{r\sqrt{1+2H}} \quad (4.3.23)$$

és $\mathring{\hat{K}} = 0$.

A 4.2. táblázatban összegyűjtöttük a Schwarzschild-kezdőadathoz tartozó nem azonosan eltűnő alapváltozókat.

változó	érték	változó	érték
a	r^2	\hat{K}^*	$\frac{2}{r}$
d	r^4	\hat{K}	$\frac{2}{r\sqrt{1+2M/r}}$
\hat{N}	$\sqrt{1+2M/r}$	\hat{R}	$\frac{2}{r^2}$
K	$-\frac{4M}{r^2\sqrt{1+2M/r}}$	R	2
κ	$\frac{2M(1+M/r)}{r^2(1+2M/r)^{3/2}}$	(^3R)	$\frac{8M^2}{r^4(1+2M/r)^2}$

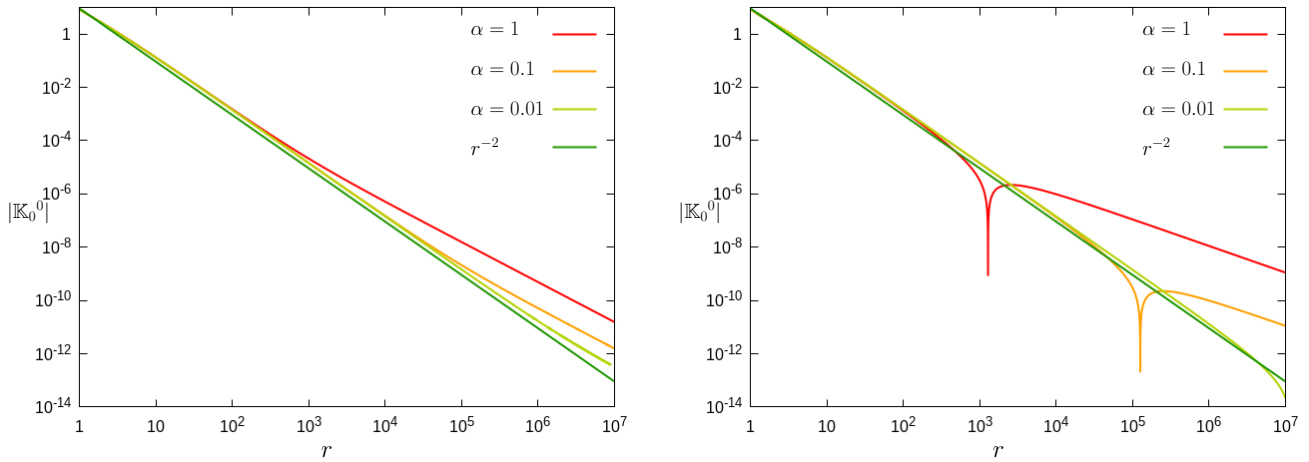
4.2. táblázat. A nem azonosan eltűnő alapvető változó értéke a 4-dimenziós Schwarzschild megoldás egy $t_{KS} = const$ Kerr–Schild szeletéből számolva.

A továbbiakban szigorúan vett közel-Schwarzschild kezdőadatnak nevezzük azokat az $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \hat{N}, \mathbf{N}; \kappa, \mathbf{k}, \mathbf{K}, \hat{\mathbf{K}})$ megoldásokat, amikre a szabadon választható függvények a fenti táblázatban szereplő értékeket veszik fel. Ezzel szemben tágabb értelemben vett közel-Schwarzschild megoldások esetén a szabadon választható függvények némelyikét szintén megváltoztatjuk azzal a feltétellel, hogy az aszimptotikus síksággal összeegyeztethető a függvénymenetük.

4.4. Nemlineáris perturbatív módszer

Sok esetben felmerülhet az igény, hogy az evolúció során gerjesztett módusokat a háttértől elkülönülten tudjuk vizsgálni. Ezt támasztják alá a 4.1a és 4.1b ábrák. Ezeken az látható, hogy a \mathbf{K} változó $\mathbf{K}_0^0 = \langle \mathbf{K}|_0 Y_0^0 \rangle$ módusa esetén a háttér mellett sokáig nem megfigyelhető a perturbációk hatása. Ebből kitűnik, hogy ha külön tudjuk választani a perturbációk fejlődését a Schwarzschild háttértől, tisztább képet kaphatunk a kisebb és lassabban lecsengő perturbációkról, hiszen ekkor már nem fogja őket kitakarni a jelentősen nagyobb amplitúdóval rendelkező háttér.

Az itt felvázolt eljárást a parabolikus-hiperbolikus rendszerben Kerr–Schild típusú feketelyuk kezdőadatok előállítására [106]-ban alkalmazták. Az eljárást az algebrai-hiperbolikus rendszerre adaptáltuk és mindkét esetben alkalmaztuk az aszimptotikus viselkedés vizsgálatára. Ebben a fejezetben áttekintjük az eljárás lényegét és a függelékben bemutatjuk mind az algebrai-hiperbolikus, mind a parabolikus-hiperbolikus rendszer esetén a nemlineáris perturbatív alakjait az egyenleteknek.



(a) A \mathbf{K} mező \mathbf{K}_0^0 komponensének r függése, ahogy azt az algebrai-hiperbolikus rendszer meghatározza. (b) A \mathbf{K} mező \mathbf{K}_0^0 komponensének r függése, ahogy azt a parabolikus-hiperbolikus rendszer meghatározza.

4.1. ábra. A $\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = \mathbf{K}_{\text{Schw}}|_{\mathcal{S}_{r_0}} - \alpha \cdot {}_0Y_1^0$ típusú gerjesztés által meghatározott \mathbf{K} mező monopólusának, \mathbf{K}_0^0 -nak az r függése $\alpha = 1, 0.1, 0.01$ esetén. Bal oldalon az algebrai-hiperbolikus, jobb oldalon a parabolikus-hiperbolikus rendszer megoldása látható. A \mathbf{k} -ra vonatkozó kezdőadat $\mathbf{k}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = \mathbf{k}_{\text{Schw}} = 0$ mindkét esetben, míg a parabolikus-hiperbolikus esetben \widehat{N} kezdőértéke $\widehat{N}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = \widehat{N}_{\text{Schw}}|_{\mathcal{S}_{r_0}}$. Minél kisebb α értéke, a gerjesztés hatása annál később vehető észre \mathbf{K} monopólusában. $\alpha = 0.01$ esetén a kívánatos lecsengéstől való eltérés mindkét esetben rejtve marad egészen magas r értékekig.

Kezdésként megjegyezzük, hogy az eljárás tetszőleges háttér esetén alkalmazható, habár mi itt $t_{KS} = \text{const}$ Kerr–Schild időszakokon vett Schwarzschild háttér esetén alkalmazzuk. Az evolúciós formában mindkét esetben sematikus módon az alábbi formában írhatjuk az egyenleteket:

$$\partial_r \mathbf{f}_{(i)} = \mathcal{R}_{(i)} \left(\partial_A \partial_B \mathbf{f}_{(j)}, \partial_A \mathbf{f}_{(j)}, \mathbf{f}_{(j)} \right), \quad (4.4.1)$$

ahol ∂_A a szögek szerinti deriváltakat, $\mathbf{f}_{(i)}$ pedig a függő változókat jelöli, i 1-től 3-ig megy a parabolikus-hiperbolikus esetben és az 1, 2 értékeket veszi fel az algebrai-hiperbolikus esetben. Az $\mathcal{R}_{(i)}$ konkrét függését a változóktól és koordinátáktól most elhagyjuk. Azt reméljük, hogy ez az egyszerűsített jelölés nem vonja el az olvasó figyelmet a lényeges pontokról. Cseréljük a függő változókat az ${}^{(0)}\mathbf{f}_{(i)} + {}^{(\Delta)}\mathbf{f}_{(i)}$ összegekre, ahol ${}^{(0)}\mathbf{f}_{(i)}$ a háttér változókat jelölik, ${}^{(\Delta)}\mathbf{f}_{(i)}$ az ettől való eltéréseket, tehát ${}^{(\Delta)}\mathbf{f}_{(i)} = \mathbf{f}_{(i)} - {}^{(0)}\mathbf{f}_{(i)}$ és

$$\begin{aligned} \partial_r {}^{(\Delta)}\mathbf{f}_{(i)} &= \mathcal{R}_{(i)} \left(\partial_A ({}^{(0)}\mathbf{f}_{(j)} + {}^{(\Delta)}\mathbf{f}_{(j)}), {}^{(0)}\mathbf{f}_{(j)} + {}^{(\Delta)}\mathbf{f}_{(j)} \right) - \partial_r {}^{(0)}\mathbf{f}_{(i)} \\ &= \mathcal{R}_{(i)} \left(\partial_A ({}^{(0)}\mathbf{f}_{(j)} + {}^{(\Delta)}\mathbf{f}_{(j)}), {}^{(0)}\mathbf{f}_{(j)} + {}^{(\Delta)}\mathbf{f}_{(j)} \right) - \mathcal{R}_{(i)} \left(\partial_A {}^{(0)}\mathbf{f}_{(j)}, {}^{(0)}\mathbf{f}_{(j)} \right), \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

ahol az utolsó lépésben feltettük, hogy a háttér változók kielégítenek valami (4.4.1)-hez hasonló

$$\partial_r {}^{(0)}\mathbf{f}_{(i)} = \mathcal{R}_{(i)} \left(\partial_A {}^{(0)}\mathbf{f}_{(j)}, {}^{(0)}\mathbf{f}_{(j)} \right). \quad (4.4.3)$$

egyenletrendszer. Amennyiben a ${}^{(0)}\mathbf{f}_{(i)}$ háttér változói szintén kielégítik a (4.4.1) kényszeregyenleteket, akkor a (4.4.3) egyenlet jobb oldalán álló $\mathcal{R}_{(i)}$ kifejezés függvényalakja ugyanaz, mint a (4.4.1) egyenletben szereplő $\mathcal{R}_{(i)}$.

Megjegyezzük, hogy a parabolikus-hiperbolikus esetben a változókat

$$\widehat{N} = {}^{(0)}\widehat{N} + {}^{(\Delta)}\widehat{N}, \quad \mathbf{K} = {}^{(0)}\mathbf{K} + {}^{(\Delta)}\mathbf{K}, \quad \mathbf{k} = {}^{(0)}\mathbf{k} + {}^{(\Delta)}\mathbf{k} \quad (4.4.4)$$

míg az algebrai-hiperbolikus esetben a

$$\boldsymbol{\kappa} = {}^{(0)}\boldsymbol{\kappa} + {}^{(\Delta)}\boldsymbol{\kappa}, \quad \mathbf{K} = {}^{(0)}\mathbf{K} + {}^{(\Delta)}\mathbf{K}, \quad \mathbf{k} = {}^{(0)}\mathbf{k} + {}^{(\Delta)}\mathbf{k}. \quad (4.4.5)$$

szabály szerint bontjuk fel.

Az érdeklődő olvasó az egyenletek konkrét nemlineáris perturbatív alakját a D.1 és D.2 függelékben találhatja meg.

4.5. Numerikus módszerek

Ez a fejezet az alkalmazott numerikus séma rövid bemutatására szolgál.

4.5.1. Multipólus sorfejtés

Az alkalmazott numerikus módszer alapja, hogy a 3. fejezetben bemutatottakhoz hasonlóan a mennyiségeket kifejtjük spinsúlyozott gömbfüggvényeken. Mivel (4.1.53)–(4.1.59) és (4.1.60)–(4.1.65) egyenletekben a szögek szerinti deriváltakat ismét $\bar{\partial}$ és $\bar{\bar{\partial}}$ segítségével fejeztük ki, ezáltal ezeket a deriváltakat kiértékelhetjük analitikusan, míg a kifejtési együtthatók evolúcióját a radiális irányban megoldhatjuk egy negyedrendű numerikus integrátorral.

Ennek megfelelően az alapvető változókat spinsúlyozott gömbi harmonikusokkal fejezzük ki. Például a ${}^{(s)}\mathbf{P}$ s spinsúlyú változót az egyenletekben a

$${}^{(s)}\mathbf{P}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=|s|}^{\ell_{max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathbf{P}_{\ell}^m(r) \cdot {}_s Y_{\ell}^m(\vartheta, \varphi), \quad (4.5.1)$$

sorral helyettesítjük, ahol ${}_s Y_{\ell}^m$ egy s spinsúlyú spinsúlyozott gömbfüggvény. Ezzel a módszerrel az evolúciós formában felírt kényszeregyenleteket átírjuk a kifejtési együtthatókra— ${}^{(s)}\mathbf{P}$ esetén $\mathbf{P}_{\ell}^m(r)$ -re—vonatkozó csatolt közönséges differenciálegyenletek rendszerére, ahol a szögek szerinti deriváltakat kiértékeljük az $\bar{\partial}$ és $\bar{\bar{\partial}}$ operátorok ${}_s Y_{\ell}^m$ gömbfüggvényeken jól ismert hatása segítségével (a vonatkozó összefüggésekért visszautalunk a 2. fejezet tartalmára).

Ahogy (4.5.1) mutatja, az összegzés ℓ -ben $\ell = |s|$ -től (végtelen helyett) $\ell = \ell_{max}$ -ig megy. A gyakorlatban, a közel Schwarzschild vizsgálatok során az $\ell_{max} = 5$ választás már elegendően kicsi levágási hibát biztosított.

A csatolt közönséges differenciálegyenletek rendszerét numerikusan integráltuk a negyedrendű adaptív Runge–Kutta–Fehlberg (RKF) integrátorral. Minden lépést kiértékelünk egy negyedrendűen pontos és egy ötödrendűen pontos Runge–Kutta közelítéssel. Az RKF módszer olyan módon határozza meg a Runge–Kutta közelítések együtthatóit, hogy a lehető legkevesebb műveletet kelljen ehhez elvégezni. Az adott lépés hibáját a két közelítés különbségével közelítve úgy módosítottuk a lépéshosszt, hogy a lehető legnagyobb lépjünk úgy, hogy minden változó hibája egy előre meghatározott értéknél kisebb legyen. A bevált eljárás szerint ez általában az adott komponens $\epsilon = 10^{-5}$ -szerese, kivéve zérushelyek közelében, ahol a komponens differenciáljának ϵ -szorosa. A gyakorlatban alkalmaztunk egy megengedett legkisebb lépéshosszt (10^{-5}) és egy legnagyobb lépéshosszt (10^5) is.

4.5.2. Konvergencia

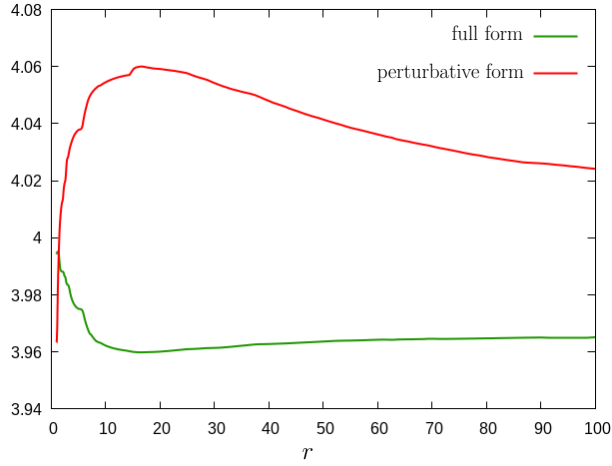
Ebben az alfejezetben megmutatjuk, hogy—függetlenül attól, hogy a teljes vagy a nemlineáris perturbatív formájában és attól, hogy az algebrai-hiperbolikus vagy parabolikus-hiperbolikus rendszert oldjuk meg—az adaptív numerikus integrátorunk mindig biztosítja az elvárt negyedrendű konvergenciát. Pontosabban fogalmazva, a (4.2a) és (4.2b) ábrákon a \mathbf{K} és ${}^{(\Delta)}\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_{Schw}$ változók monopól ($\ell = m = 0$) részének a lokális konvergenciarátája látható a teljes és nemlineáris perturbatív formájában felírt algebrai-hiperbolikus és parabolikus-hiperbolikus rendszerekre. Mind a négy esetben \mathbf{K} kezdőértékét $\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = \mathbf{K}_{Schw}|_{\mathcal{S}_{r_0}} - \alpha \cdot {}_0Y_1^0$ alakban határoztuk meg, vagyis ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -\alpha \cdot {}_0Y_1^0$, ahol $r_0 = 1$ mellett $\alpha = 0.1$, míg a többi függő változó az adott \mathcal{S}_{r_0} helyhez tartozó Schwarzschild-értékeket vette fel. Elviekben az alkalmazott numerikus módszer által biztosított konvergenciarátát megfigyelhetjük, ha csupán ϵ értékét változtatva előállítunk három adatsort: \mathcal{N}_{ϵ_0} , $\mathcal{N}_{\epsilon_0/2}$, $\mathcal{N}_{\epsilon_0/4}$. Ekkor a lépéshosszaknak szintén feleződniük, illetve negyedelődniük kell. A lokális konvergenciarátát

$$-\log_2 \frac{|\mathcal{N}_{\epsilon_0/4} - \mathcal{N}_{\epsilon_0/2}|}{|\mathcal{N}_{\epsilon_0/2} - \mathcal{N}_{\epsilon_0}|} \quad (4.5.2)$$

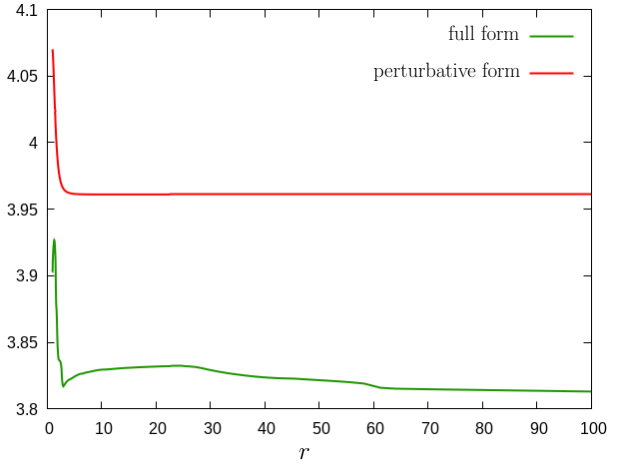
módon kapjuk.

A gyakorlatban azonban a megengedett minimális és maximális lépéshosszak meggátolják, hogy ilyen közvetlen módon végezzük a vizsgálatot. Ebből kifolyólag a konvergenciarátát a következő módon állapítottuk meg: a legdurvább rácshoz tartozó \mathcal{N}_1 értékeket csupán a beépített hibatűrés határozta meg. Ezek alapján meghatároztuk az \mathcal{N}_2 és \mathcal{N}_3 adatsorokat úgy, hogy ezeknél a rácspontok \mathcal{N}_2 esetén \mathcal{N}_1 felezőpontjaival egészülnek ki és \mathcal{N}_3 esetén \mathcal{N}_2 felezőpontjaival. Ebből kifolyólag egyik adatsor esetén sem használunk állandó lépésközöket. A 4.2 ábrán látható görbéket ezek után a

$$-\log_2 \frac{|\mathcal{N}_3 - \mathcal{N}_2|}{|\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1|} \quad (4.5.3)$$



(a) Az algebrai-hiperbolikus rendszer.



(b) A parabolikus-hiperbolikus rendszer.

4.2. ábra. A bal oldali ábrán a \mathbf{K} és ${}^{\Delta}\mathbf{K} = \mathbf{K} - \mathbf{K}_{Schw}$ változók monopól ($\ell = m = 0$) részének lokális konvergenciarátlója látható az algebrai-hiperbolikus rendszer teljes és a nemlineáris perturbatív formája esetén. A jobb oldali ábrán ugyanezen változók láthatóak a parabolikus-hiperbolikus rendszer teljes és a nemlineáris perturbatív formája esetén. A megoldásokat a szigorú értelemben vett közel-Schwarzschild keretben állítottuk elő $\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = \mathbf{K}_{Schw}|_{\mathcal{S}_{r_0}} - \alpha \cdot {}_0Y_1^0$ formájú kezdeti gerjesztéssel és $\mathbf{k}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = \mathbf{k}_{Schw} = 0$ mellett a teljes algebrai-hiperbolikus rendszer esetében és ${}^{\Delta}\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -\alpha \cdot {}_0Y_1^0$, ${}^{\Delta}\mathbf{k}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = 0$ a nemlineáris perturbatív algebrai-hiperbolikus rendszer esetében. A parabolikus-hiperbolikus rendszer esetében ezt még kiegészítettük $\widehat{N}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = \widehat{N}_{Schw}|_{\mathcal{S}_{r_0}}$ és ${}^{\Delta}\widehat{N}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = 0$ választással a teljes és a nemlineáris perturbatív formában. Minden esetben az $\alpha = 0.1$ választással éltünk. Az elvárásoknak megfelelően a nemlineáris perturbatív formában kapott megoldások kicsivel gyorsabban konvergálnak.

formula kiértékelésével kapjuk az \mathcal{N}_1 adatsor által meghatározott pontokban.

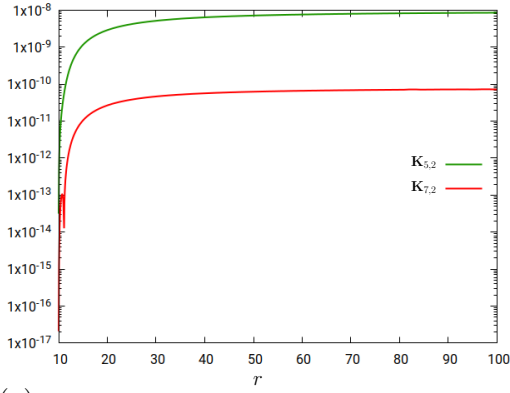
A 3.7.2. alfejezetben ismertetetthez hasonlóan itt is ellenőriztük a megoldások konvergenciáját különböző ℓ_{max} esetén. A 4.3. ábra paneljein a parabolikus-hiperbolikus rendszer 4.8.1. alfejezetben ismertetett alakjának integrálásával kapott megoldások hibáinak konvergenciáját mutatjuk. A \mathbf{K} , \mathbf{k} és \widehat{N} változók mindegyikének az

$$\mathbf{F}_{\ell_{max}} = \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \sum_{m=-\ell}^{\ell} F_{\ell}^m \overline{F_{\ell}^m} \quad (4.5.4)$$

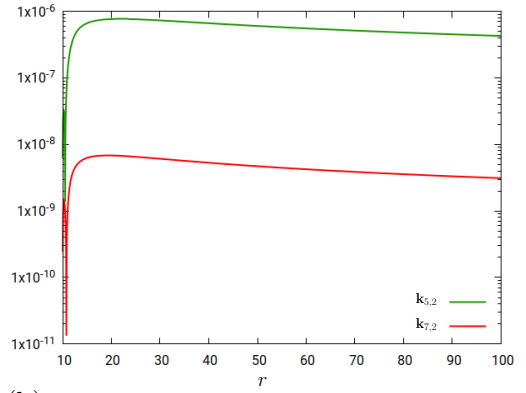
normájára meghatároztuk a 3.7.2 kifejezéssel analóg

$$\mathbf{K}_{\ell_{max}, \delta\ell} = \frac{\mathbf{K}_{\ell_{max}} - \mathbf{K}_{\ell_{max} + \delta\ell}}{\mathbf{K}_{\ell_{max} + \delta\ell}} \quad (4.5.5)$$

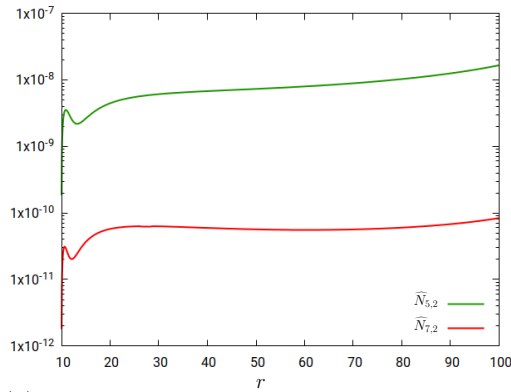
hányadost. A 4.3. ábra tanulságai összhangban vannak az elvárt exponenciális konvergenciával.



(a) A \mathbf{K} változó becslt hibájának konvergenciája.



(b) A \mathbf{k} változó becslt hibájának konvergenciája.



(c) A \hat{N} változó becslt hibájának konvergenciája.

4.3. ábra. A parabolikus-hiperbolikus rendszer 4.8.1. alfejezetben ismertetett alakjának integrálásával kapott \mathbf{K} , \mathbf{k} és \hat{N} megoldásokból számolt $\mathbf{K}_{\ell_{max},\delta\ell}$, $\mathbf{k}_{\ell_{max},\delta\ell}$ és $\hat{N}_{\ell_{max},\delta\ell}$ becslt hibák $\ell_{max} = 5$, $\delta\ell = 2$ és $\ell_{max} = 7$, $\delta\ell = 2$ mellett.

4.6. Analitikus megoldások gömbszimmetria mellett

Mielőtt rátérünk az általános esetre érdemes egy pillantást vetnünk a kényszeregyenletek gömbszimmetrikus megoldásaira. A következő alfejezetekben gömbszimmetrikus közel-Schwarzschild kezdőadatokat fogunk vizsgálni. Mind az algebrai-hiperbolikus, mind a parabolikus-hiperbolikus esetben először a szigorú értelemben vett közel-Schwarzschild megoldásokról lesz szó, majd megmutatjuk, hogy néhány szabadon választható mennyiség megváltoztatásával előállíthatunk akár erősen aszimptotikusan sík megoldásokat is.

4.6.1. Parabolikus-hiperbolikus rendszer

Mivel bármely sima vektormező eltűnik valahol a topológiai gömbön, a gömbszimmetria megköveteli, hogy a külső görbület vektoriális vetülete, \mathbf{k}_a vagy \mathbf{k} , azonosan zérus legyen Σ -án. Ekkor

(4.1.53) és (4.1.55) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\frac{d\hat{N}}{dr} = \frac{1}{2r} \hat{N} - \frac{4\kappa \mathbf{K} r^2 + \mathbf{K}^2 r^2 + 4}{8r} \hat{N}^3 \quad (4.6.1)$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{dr} = \left(\kappa - \frac{1}{2}\mathbf{K} \right) \frac{2}{r}. \quad (4.6.2)$$

Szigorúan közel-Schwarzschild

Vegyük észre, hogy (4.6.1) és (4.6.2) szétcsatolódnak és—feltéve, hogy szigorú értelemben vett közel-Schwarzschild megoldásokat keresünk, tehát $\kappa = \kappa_{\text{Schw}} = \frac{2M(1+M/r)}{r^2(1+2M/r)^{3/2}}$ —a (4.6.2) egyenlet általános megoldásai a

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{Schw}} + \frac{C_{\mathbf{K}}}{r}, \quad (4.6.3)$$

alakot öltik, ahol $\mathbf{K}_{\text{Schw}} = -\frac{4M}{r^2\sqrt{1+\frac{2M}{r}}}$ a Schwarzschild megoldás, ahogy a 4.2 táblázatban is található és $C_{\mathbf{K}}$ integrálási állandó. Ez azt jelenti, hogy a szigorúan közel-Schwarzschild kezdőadatok esetén a (4.6.3) egyenlet fenti megoldásai nem teljesítik a 4.1 táblázatban megfogalmazott követelményeket, hacsak $C_{\mathbf{K}} = 0$ nem teljesül.

$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{Schw}}$ -t helyettesítve (4.6.1) egyenletbe, majd megoldva az egyenletet \hat{N} -re azt kapjuk, hogy

$$\hat{N} = \frac{\sqrt{r(2M+r)}}{\sqrt{2M(C_{\hat{N}}+r) + r(C_{\hat{N}}+r) + 4M^2}}, \quad (4.6.4)$$

ahol $C_{\hat{N}}$ egy újabb integrálási állandó. Ennek a megoldásnak az aszimptotikus viselkedése

$$\hat{N} = 1 - \frac{C_{\hat{N}}}{2r} + \frac{3C_{\hat{N}}^2 - 2M^2}{8r^2} + \mathcal{O}(r^{-9/4}). \quad (4.6.5)$$

Megjegyezzük, hogy (4.6.4) értelmében \hat{N} általában különbözik a $\hat{N}_{\text{Schw}} = \sqrt{1+2M/r}$ Schwarzschild alaktól, amit a $C_{\hat{N}} = -2M$ választással kaphatunk meg.

Úgy összegezhethetjük észrevételeinket, hogy amikor a szigorúan közel-Schwarzschild kezdőadatokat vizsgáljuk, még (4.1.53) és (4.1.55) gömbszimmetrikus megoldásai sem adnak aszimptotikusan sík kezdőadatot, hacsak \mathbf{K} -t úgy nem választjuk, hogy $\mathbf{K}_{\text{Schw}} = -\frac{4M}{r^2\sqrt{1+\frac{2M}{r}}}$.

Gyengén közel-Schwarzschild

Ahogy [116]-ben a szerzők megmutatták, gyengítve a [109, 108]-ben alkalmazott kiválasztási szabályokon akár erősen aszimptotikusan sík közel-Schwarzschild megoldásokat is találhatunk a (4.6.1) és (4.6.2) egyenletekhez. Mivel κ szabadon választható, a szerzők [116]-ben úgy választották meg κ -t, hogy arányos legyen a \mathbf{K} függő változóval, vagyis

$$\kappa = \mathcal{R} \cdot \mathbf{K}, \quad (4.6.6)$$

ahol az \mathcal{R} arányossági tényező sima függvény, ami $-\frac{1}{2}$ értékhez tart ahogy r -rel közelítünk a végtelenhez. Kezdetnek válasszuk az

$$\mathcal{R} = \frac{\kappa_{Schw}}{\mathbf{K}_{Schw}} = -\frac{M+r}{2(2M+r)}. \quad (4.6.7)$$

alakot. Ekkor (4.6.2) általános megoldása

$$\mathbf{K} = \frac{C_{\mathbf{K}}}{r^{3/2}\sqrt{2M+r}}, \quad (4.6.8)$$

ahol $C_{\mathbf{K}}$ integrálási állandó. Könnyen belátható, hogy ez a megoldás $C_{\mathbf{K}} = -4M$ mellett visszaadja a \mathbf{K}_{Schw} Schwarzschild megoldást, de $C_{\mathbf{K}}$ bármely értéke mellett r^{-2} -es lecsengést kapunk. Mivel a (4.6.6) alakot feltételeztük és $\mathcal{R} -\frac{1}{2}$ -hez tart a végtelenben, κ éppen \mathbf{K} -val azonos ütemben cseng le. A (4.6.1) egyenlet ehhez tartozó megoldása

$$\widehat{N} = \frac{\sqrt{2Mr+r^2}}{\sqrt{(2M+r)(2M+C_{\widehat{N}}+r) + \frac{1}{4}C_{\mathbf{K}}^2}}, \quad (4.6.9)$$

ahol $C_{\widehat{N}}$ integrálási állandó. Ez a megoldás $C_{\mathbf{K}} = C_{\widehat{N}} = -4M$ esetén adja vissza a $\widehat{N}_{Schw} = \sqrt{1+2M/r}$ Schwarzschild megoldást. A (4.6.9) általános megoldás

$$\widehat{N} = 1 - \frac{2M+C_{\widehat{N}}}{2r} + \frac{12M^2 - C_{\mathbf{K}}^2 + 12MC_{\widehat{N}} + 3C_{\widehat{N}}^2}{8r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (4.6.10)$$

módon viselkedik a végtelenhez közelítve. Megjegyezzük, hogy az $M_{ADM} = -M - C_{\widehat{N}}/2$ formulával meghatározott ADM tömeg függ a $C_{\widehat{N}}$ integrálási állandó megválasztásától és pozitív, ha $C_{\widehat{N}} < -2M$. Ennél lényegesebb, hogy $C_{\widehat{N}} < -2M$ esetén a kezdőadat nem triviális része, amit \widehat{N} , κ , \mathbf{K} képviselnek, mind a 4.1 táblázatban feltüntetett, erősen aszimptotikusan sík kezdőadatnak megfelelő módon viselkednek, vagyis a (4.6.1) és (4.6.2) egyenletek által meghatározott rendszer gömbszimmetrikus megoldásai erősen aszimptotikusan sík kezdőadatok.

4.6.2. Algebrai-hiperbolikus rendszer

Az előző alfejezethez hasonlóan, a gömbszimmetria megköveteli, hogy a külső görbület vektoriális vetülete, \mathbf{k}_a vagy \mathbf{k} , eltűnjön Σ -n. Ekkor (4.1.60) és (4.1.62) a következő alakra egyszerűsödik:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dr} = \left(\kappa - \frac{1}{2}\mathbf{K} \right) \frac{2}{r}, \quad (4.6.11)$$

$$\kappa = -\frac{\mathbf{K}}{4} - \frac{\kappa_0}{2\mathbf{K}}. \quad (4.6.12)$$

Szigorúan közel-Schwarzschild

Szigorú értelemben vett közel-Schwarzschild kezdőadat esetén élhetünk a

$$\kappa_0 = {}^{(3)}R = \frac{8M^2}{r^4 \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^2} \quad (4.6.13)$$

helyettesítéssel (4.6.11)-ben és megkapjuk az általános megoldást (lásd még [109]) a

$$\mathbf{K} = -\frac{\sqrt{C_{\mathbf{K}}(2M+r) + 16M^2}}{r^2 \sqrt{1 + 2M/r}}, \quad (4.6.14)$$

alakban, ahol $C_{\mathbf{K}}$ integrálási állandó. A fenti \mathbf{K} és az (4.6.12) egyenlet által meghatározott κ megoldások aszimptotikus viselkedése

$$\mathbf{K} = -\sqrt{C_{\mathbf{K}}} r^{-3/2} - \frac{8M^2}{\sqrt{C_{\mathbf{K}}}} r^{-5/2} + \mathcal{O}(r^{-7/2}), \quad (4.6.15)$$

$$\kappa = \frac{1}{4}\sqrt{C_{\mathbf{K}}} r^{-3/2} + \frac{6M^2}{\sqrt{C_{\mathbf{K}}}} r^{-5/2} + \mathcal{O}(r^{-7/2}). \quad (4.6.16)$$

Valahányszor $C_{\mathbf{K}} \neq 0$ mind \mathbf{K} , mind κ a gyenge aszimptotikus síkság határán állnak. Azonban ha $C_{\mathbf{K}} = 0$, \mathbf{K} és κ is a $\mathbf{K}_{\text{Schw}} = -\frac{4M}{r^2 \sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}$ és $\kappa_{\text{Schw}} = \frac{2M(1+M/r)}{r^2(1+2M/r)^{3/2}}$ Schwarzschild értékeket veszik fel, így eleget tesznek az erős aszimptotikus síkság feltételeinek.

Ezek az eredmények azt jelzik, hogy amikor a szigorúan vett közel-Schwarzschild kezdőadatok halmazán értelemezük a problémát, még a (4.1.60)–(4.1.62) egyenletek gömbszimmetrikus megoldásai sem tartalmaznak aszimptotikusan sík megoldásokat leszámítva a $\mathbf{K}_{\text{Schw}} = -\frac{4M}{r^2 \sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}$ Schwarzschild megoldást.

Gyengén közel-Schwarzschild

A [116]-ban javasolt ansatz a 4.6.1 fejezetben nagyon erősnek bizonyult, ennél fogva természetes lehet egy hasonló trükk alkalmazása az algebrai-hiperbolikus esetben. Azonban meg kell jegyeznünk, hogy ebben az esetben nagyon korlátolt lehetőségeink vannak κ és \mathbf{K} közötti kapcsolat megváltoztatását illetően. Ennek oka, hogy κ -t a (4.6.12) Hamilton-kényszer algebrai egyenlete határozza meg, ami előírja, hogyan függhet \mathbf{K} -tól. Ezek ellenére még mindig van lehetőségünk arra, hogy hatással lehessünk a κ és \mathbf{K} közti függvénykapcsolatra. Például kihasználhatjuk a szabadságot $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ij}$ megválasztásában, amiről tudjuk, hogy a Schwarzschild-téridő gömbszimmetriát tiszteletben tartó szeletein eltűnik. Fel kell idéznünk, hogy a (4.1.63) egyenletben szereplő κ_0 mennyiség meghatározása tartalmazza a Schwarzschild esetben eltűnő $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{K}}^{ij}$ kontrakciót. A

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ij}\overset{\circ}{\mathbf{K}}^{ij} = \left(\frac{1}{2} + 2\mathcal{R}\right)\mathbf{K}^2 + {}^{(3)}R \quad (4.6.17)$$

egyenlőség teljesülését megkövetelve azt kapjuk, hogy

$$\kappa = \mathcal{R} \cdot \mathbf{K}. \quad (4.6.18)$$

Itt \mathcal{R} egy sima függvény, ami egy konstans $-\gamma$ értékhez tart miközben $r \rightarrow \infty$ és a γ paraméter értékkészlete $1/4 < \gamma \leq 1/2$. Egyelőre csupán feltételezzük, hogy ilyen $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ij}$ mezők léteznek. A 4.8.2 fejezetben látni fogjuk, hogy megfelelő körülmények között ezek a feltételek teljesíthetőek. Például a

$$\mathcal{R} = -\gamma + \frac{\gamma M}{r + 2M}, \quad (4.6.19)$$

választással a (4.6.11) egyenlet általános megoldása

$$\mathbf{K} = \frac{C_{\mathbf{K}}}{r^{(1+2\gamma)} (1 + 2M/r)^\gamma}, \quad (4.6.20)$$

ahol $C_{\mathbf{K}}$ integrálási állandó. Könnyen ellenőrizhető, hogy $C_{\mathbf{K}} = -4M$ és $\gamma = 1/2$ esetén \mathbf{K} visszaadja a \mathbf{K}_{Schw} Schwarzschild megoldást és bármely nem eltűnő $C_{\mathbf{K}}$ választás esetén a megoldás $r^{-(1+2\gamma)}$ módon tart a végtelenbe. Mivel \mathcal{R} mindenhol negatív, a $\kappa = \mathcal{R} \cdot \mathbf{K}$ összefüggésnek köszönhetően az algebrai $\kappa \mathbf{K} < 0$ feltétel automatikusan teljesül—garantálva, hogy az algebrai-hiperbolikus rendszer szimmetrizálható hiperbolikus rendszert alkot [105]. Ezen felül, mivel \mathcal{R} a $-\gamma$ értékhez tart, ami nem eltűnő, κ garantáltan olyan gyorsan cseng le, mint \mathbf{K} .

A (4.6.20) egyenlet \mathbf{K} megoldása a hozzá tartozó κ -val és a szabadon választható változókkal— $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ij}$ -val együtt—gyengén aszimptotikusan sík kezdőadatot alkotnak ha γ értékei a $1/4 < \gamma < 1/2$ intervallumból kerülnek ki. Azt is megjegyezzük, hogy a $\gamma = 1/2$ választáshoz tartozó gömbszimmetrikus megoldások erősen aszimptotikusan síkok.

Végül megjegyezzük, hogy a nem eltűnő $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ij}$ sérti a gömbszimmetriát, amit a kapott egyenlet megoldása során feltételeztünk. Ennek az ellentmondásnak a feloldása, hogy a 4.4. alfejezetben foglaltaknak megfelelően a háttér mennyiségeknek nem feltétlenül kell ugyanazokat az egyenleteket kielégíteniük, mint a teljes megoldásoknak. A későbbi alkalmazások során a függő változók magasabb módusait olyan módon csatoljuk $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ij}$ -hez, hogy a monopól rész az ebben az alfejezetben tárgyalt egyenletnek tegyen eleget. Ekkor az itt tárgyaltak alapján tudjuk, hogy a háttér megválasztása összhangban van az aszimptotikus síkság feltételeivel.

4.7. Szigorúan közel-Schwarzschild numerikus eredmények

Ebben a fejezetben a kényszerek nemlineáris perturbatív formájának használatával előállított szigorú értelemben közel-Schwarzschild megoldásokat tárgyaljuk. Az eredmények alátámasztják, hogy gerjesztett módusokat leválasztva a Schwarzschild háttérről sokkal tisztább képet kaphatunk a mezők viselkedéséről és könnyebben azonosíthatjuk az aszimptotikus viselkedés szempontjából kulcsfontosságú folyamatokat.

4.7.1. Parabolikus-hiperbolikus rendszer

Ebben az alfejezetben a kényszerek parabolikus-hiperbolikus megfogalmazásának nemlineáris perturbatív alakjával képzett megoldások különböző módusainak r függését vizsgáljuk. A kezdőadat az $r_0 = 1$ -hez tartozó \mathcal{S}_{r_0} -n úgy lett meghatározva, hogy ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -\alpha \cdot {}_0Y_{\ell'}^0$ —ahol $\alpha = 0.1$ és $\ell' = 1, 2, 3$ —, ${}^{(\Delta)}\mathbf{k}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = 0$ és ${}^{(\Delta)}\widehat{N}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = 0$. Minden vizsgált módus esetén ábrázoljuk a három $\ell' = 1, 2, 3$ kezdőadathoz tartozó megoldásokat.⁴ ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}$, ${}^{(\Delta)}\mathbf{k}$ és ${}^{(\Delta)}\widehat{N}$ különböző ℓ módusainak lecsengését a 4.4, 4.5 és 4.6 ábrákon láthatjuk.

Ezeken rögtön látható, hogy a módusok már viszonylag kis r értékeknél felveszik az aszimptotikus viselkedésüket jellemző lecsengést. Ez igazolja, hogy a nemlineáris perturbatív módszer a háttér leválasztása által jelentősen tisztább képet ad a megoldások aszimptotikus viselkedéséről, mint a teljes egyenletek megoldásainak vizsgálata. Az is észrevehető, hogy néhány módus sokkal lassabban cseng le, mint a jelentősen nagyobb amplitúdóval bíró háttér. Akármennyire is kicsi azonban a perturbáció, kellően nagy r mellett dominálni fogja a teljes mező viselkedését. Van egy másik fontos üzenete is a 4.4, 4.5 és 4.6 ábrák paneljeinek. Vegyük észre, hogy ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}$ $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}_{\ell}^0$ módusai r^{-2} szerint tartanak végtelenhez, valamint ${}^{(\Delta)}\mathbf{k}$ és ${}^{(\Delta)}\widehat{N}$ $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó ${}^{(\Delta)}\mathbf{k}_{\ell}^0$ és ${}^{(\Delta)}\widehat{N}_{\ell}^0$ módusai r^{-1} módon tartanak végtelenhez, tehát 4.1 táblázatnak megfelelően ezek a módusok még az erős aszimptotikus síkság feltételeit is teljesítik. ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}$ monopólusa, ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}_0^0$, azonban csak r^{-1} szerint cseng le a szigorúan közel-Schwarzschild konfigurációban, így végül még a gyenge aszimptotikus síkságtól is távol kerülünk.

A 4.6.1 fejezetben tárgyalt gömbszimmetrikus konfigurációk alapján (4.6.3) egyenlet megoldását $C_{\mathbf{K}} \neq 0$ mellett behelyettesítve (4.6.1)-be az \widehat{N} megoldás nem lesz olyan egyszerű, mint (4.6.4), de az aszimptotikus viselkedését

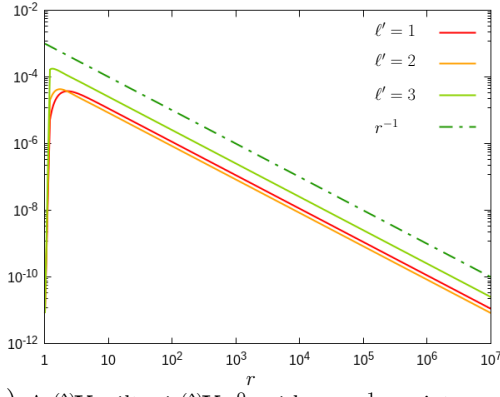
$$\widehat{N}_{C_{\mathbf{K}}} = \frac{2}{\sqrt{C_{\mathbf{K}}^2 + 4}} + \frac{8 C_{\mathbf{K}} M - 4 C_{\widehat{N}}}{(C_{\mathbf{K}}^2 + 4)^{3/2} r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \quad (4.7.1)$$

írja le. A 4.4 ábra (a) paneljén látható ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}_0^0$ r^{-1} szerinti lecsengése $C_{\mathbf{K}}$ nem eltűnő voltára utal. Vegyük észre, hogy \widehat{N} sem tart 1-hez a végtelenben. (4.7.1)-nek megfelelően az 4.6 ábra (a) paneljén látható ${}^{(\Delta)}\widehat{N}_0^0$ monopólus $r \approx 10^6$ körül a konstans $1/\sqrt{1 + C_{\mathbf{K}}/4} - 1$ értékhez tart, ahol (4.6.3) értelmében $C_{\mathbf{K}}$ közelítő értéke megállapítható ha ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}_0^0$ értékét extrapoláljuk $r_0 = 1$ -hez.

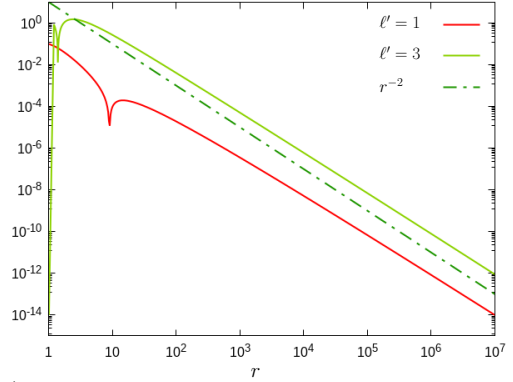
4.7.2. Algebrai-hiperbolikus rendszer

${}^{(\Delta)}\mathbf{K}$ és ${}^{(\Delta)}\mathbf{k}$ különböző ℓ módusainak lecsengését a 4.7 és 4.8 ábrákon láthatjuk. Ebben az esetben a kényszerek algebrai-hiperbolikus megfogalmazásának nemlineáris perturbatív alakjával képzett

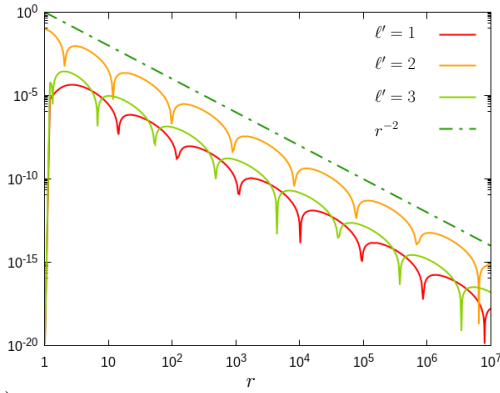
⁴Ezentúl a gerjesztő módusok ℓ indexeit vesszővel különböztetjük meg a gerjesztett módusok indexeitől, tehát a gerjesztett módus indexe ℓ' .



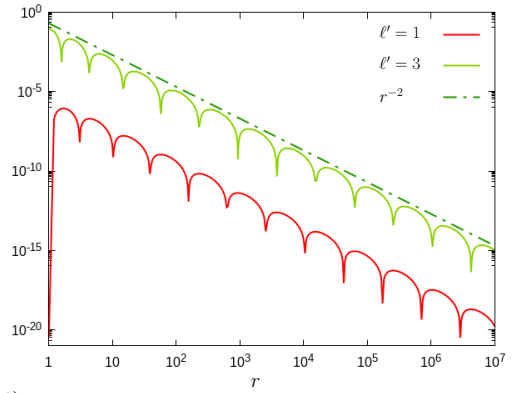
(a) A $(\Delta)\mathbf{K}$ változó $(\Delta)\mathbf{K}_0^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.



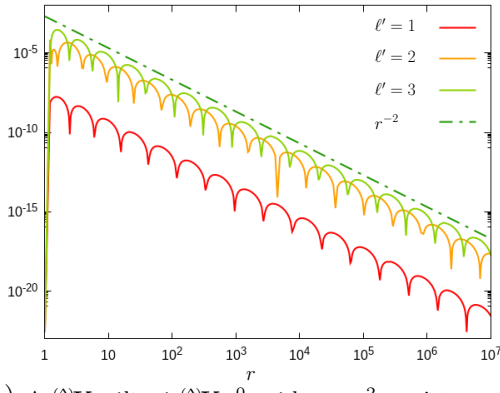
(b) A $(\Delta)\mathbf{K}$ változó $(\Delta)\mathbf{K}_1^0$ módusa r^{-2} szerint cseng le.



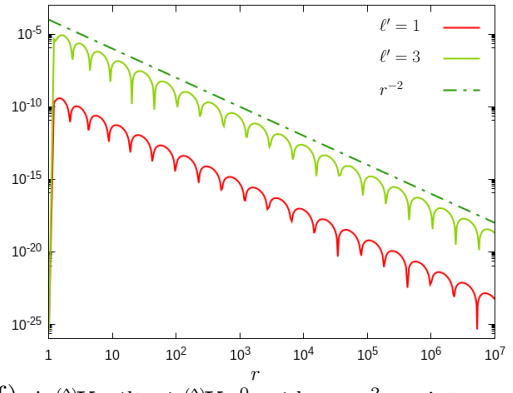
(c) A $(\Delta)\mathbf{K}$ változó $(\Delta)\mathbf{K}_2^0$ módusa r^{-2} szerint cseng le.



(d) A $(\Delta)\mathbf{K}$ változó $(\Delta)\mathbf{K}_3^0$ módusa r^{-2} szerint cseng le.



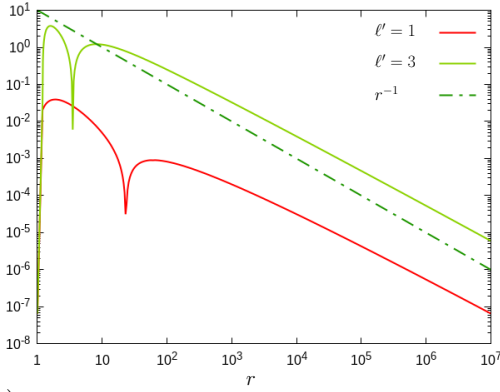
(e) A $(\Delta)\mathbf{K}$ változó $(\Delta)\mathbf{K}_4^0$ módusa r^{-2} szerint cseng le.



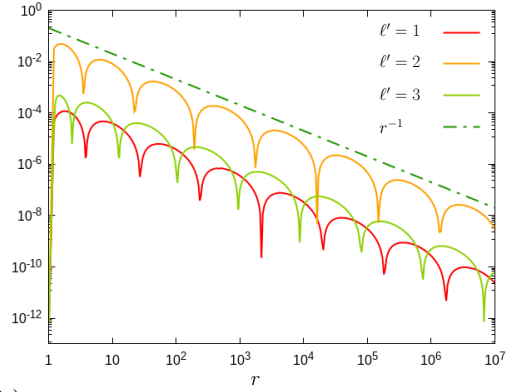
(f) A $(\Delta)\mathbf{K}$ változó $(\Delta)\mathbf{K}_5^0$ módusa r^{-2} szerint cseng le.

4.4. ábra. Numerikusan integráltuk a parabolikus-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív formáját $(\Delta)\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -10^{-1} \cdot {}_0Y_{\ell'}^0$ alakú kezdeti perturbációkkal, ahol $\ell' = 1, 2, 3$. $(\Delta)\mathbf{K}$ $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó $(\Delta)\mathbf{K}_\ell^0$ módusai r^{-2} módon tartanak végtelenhez, de a $(\Delta)\mathbf{K}_0^0$ monopólus csak r^{-1} szerint cseng le.

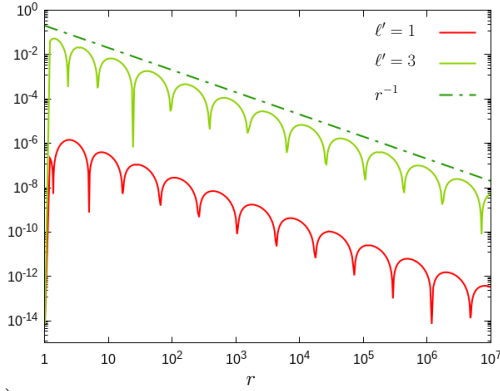
megoldások különböző módusainak r függését vizsgáljuk. Az $r_0 = 1$ -hez tartozó \mathcal{S}_{r_0} felületen a kezdő perturbációt az előző alfejezethez hasonlóan a $(\Delta)\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -\alpha \cdot {}_0Y_{\ell'}^0$ alakban írtuk fel,



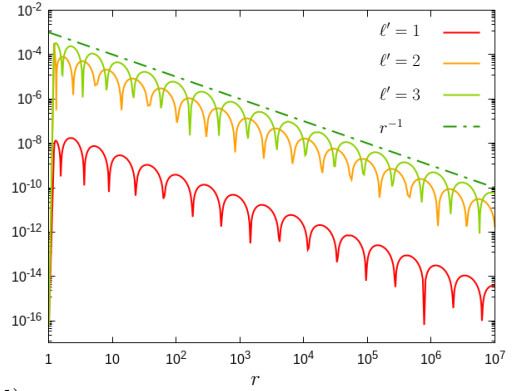
(a) A $(\Delta)\mathbf{k}$ változó $(\Delta)\mathbf{k}_1^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.



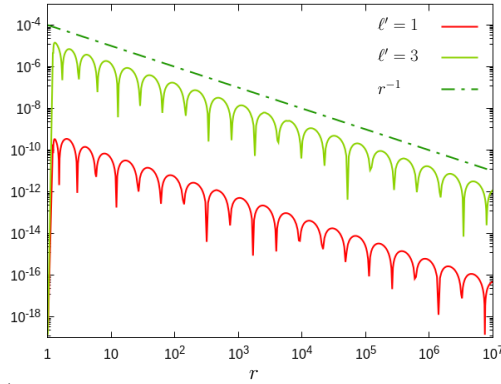
(b) A $(\Delta)\mathbf{k}$ változó $(\Delta)\mathbf{k}_2^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.



(c) A $(\Delta)\mathbf{k}$ változó $(\Delta)\mathbf{k}_3^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.



(d) A $(\Delta)\mathbf{k}$ változó $(\Delta)\mathbf{k}_4^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.

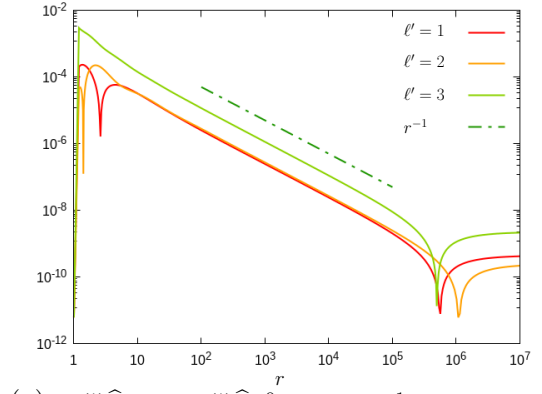


(e) A $(\Delta)\mathbf{k}$ változó $(\Delta)\mathbf{k}_5^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.

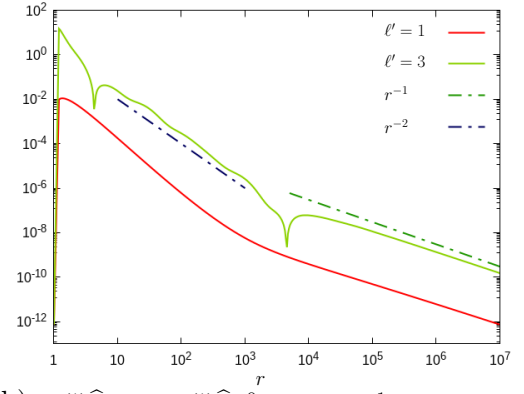
4.5. ábra. Numerikusan integráltuk a parabolikus-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív formáját $(\Delta)\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -10^{-1} \cdot {}_0Y_{\ell'}^0$ alakú kezdeti perturbációkkal, ahol $\ell' = 1, 2, 3$. $(\Delta)\mathbf{k}$ egyik $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$, $m = 0$ -hoz tartozó $(\Delta)\mathbf{k}_\ell^0$ módusa sem cseng le r^{-1} -nél lassabban, azonban $(\Delta)\mathbf{k}_1^0$ valamivel lassabb, mint a többi.

ahol $\alpha = 0.1$, $\ell' = 1, 2, 3$, és $(\Delta)\mathbf{k}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = 0$. A $(\Delta)\mathbf{K}$ és $(\Delta)\mathbf{k}$ változók $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ -höz, illetve $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó módusait ábrázolja 4.7 és 4.8 az $\ell' = 1, 2, 3$ indexekkel jellemezhető gerjesztés mellett.

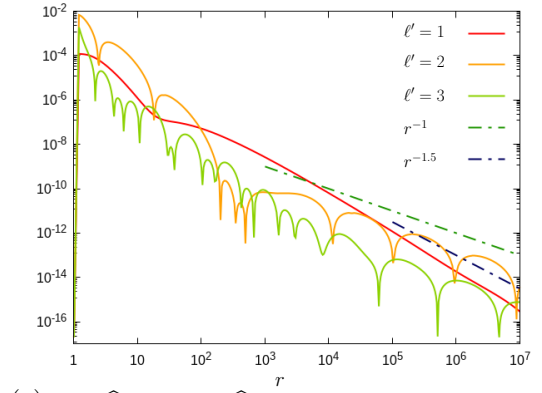
Ahogy a parabolikus-hiperbolikus esetben, 4.7 és 4.8 ábrákon is láthatjuk, hogy az egyes módus-



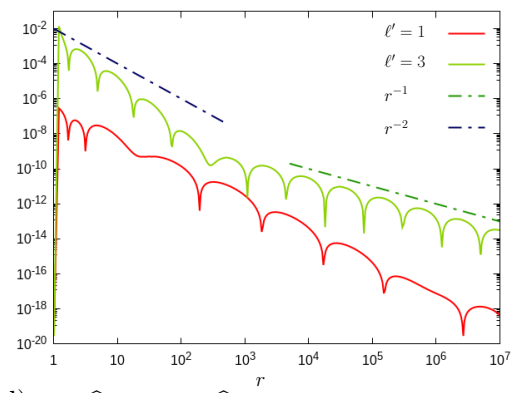
(a) A $(\Delta)\widehat{N}$ változó $(\Delta)\widehat{N}_0^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.



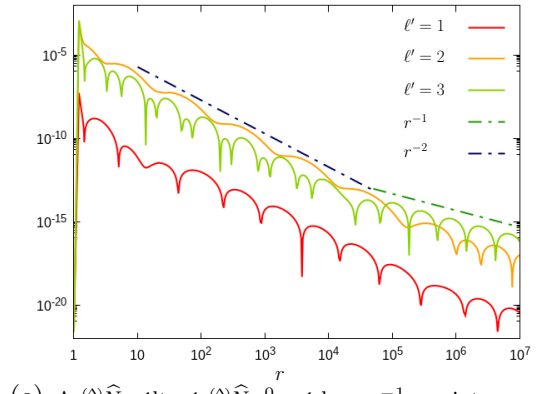
(b) A $(\Delta)\widehat{N}$ változó $(\Delta)\widehat{N}_1^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.



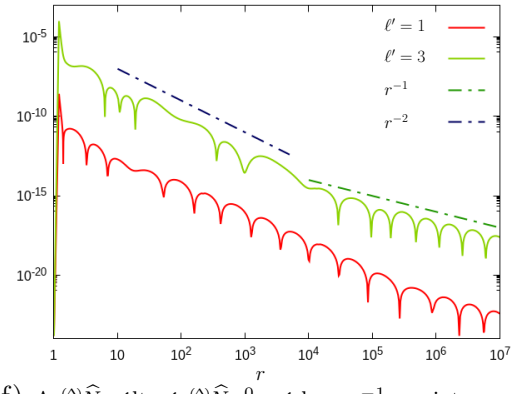
(c) A $(\Delta)\widehat{N}$ változó $(\Delta)\widehat{N}_2^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.



(d) A $(\Delta)\widehat{N}$ változó $(\Delta)\widehat{N}_3^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.



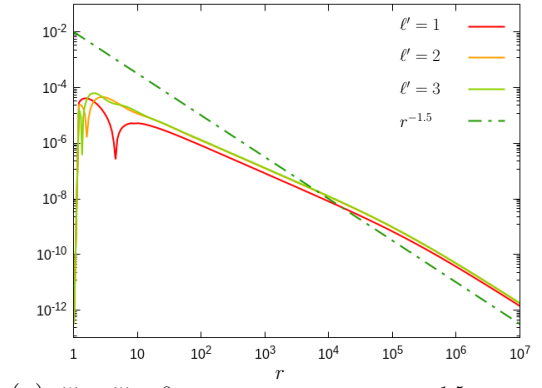
(e) A $(\Delta)\widehat{N}$ változó $(\Delta)\widehat{N}_4^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.



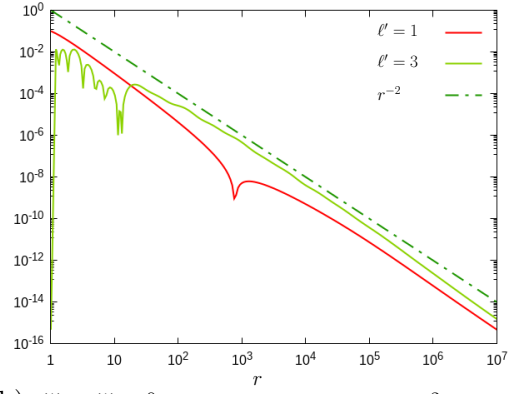
(f) A $(\Delta)\widehat{N}$ változó $(\Delta)\widehat{N}_5^0$ módusa r^{-1} szerint cseng le.

4.6. ábra. Numerikusan integráltuk a parabolikus-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív formáját $(\Delta)\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -10^{-1} \cdot {}_0Y_{\ell'}^0$ alakú kezdeti perturbációkkal, ahol $\ell' = 1, 2, 3$. $(\Delta)\widehat{N}$ minden $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$, $m = 0$ -hoz tartozó $(\Delta)\widehat{N}_\ell^0$ módusa r^{-1} szerint tart végtelenhez. A $(\Delta)\widehat{N}_0^0$ módus szintén r^{-1} szerinti lecsengéssel indul, de a végén nem 0-hoz, hanem egy konstanshoz áll be.

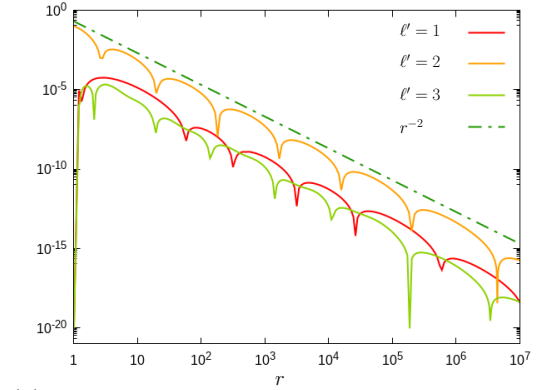
ok szinte rögtön beállnak az aszimptotikus lecsengési rátához. Ez ismét igazolja, hogy a gerjesztések és a háttér elválasztása egymástól jelentősen tisztább képet biztosít az elvégezni kívánt vizsgálata-



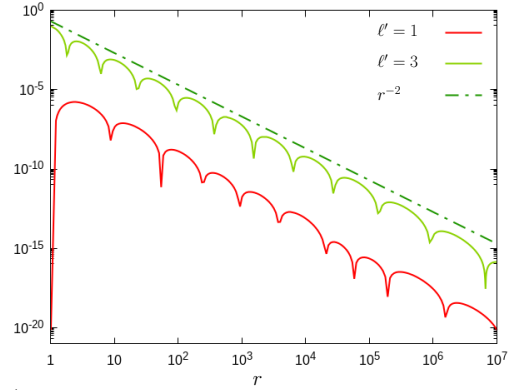
(a) $\Delta\mathbf{K} \Delta\mathbf{K}_0^0$ módusának lecsengése $r^{-1.5}$ szerint megy.



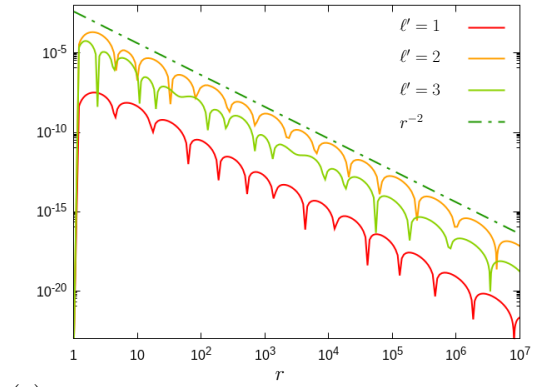
(b) $\Delta\mathbf{K} \Delta\mathbf{K}_1^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



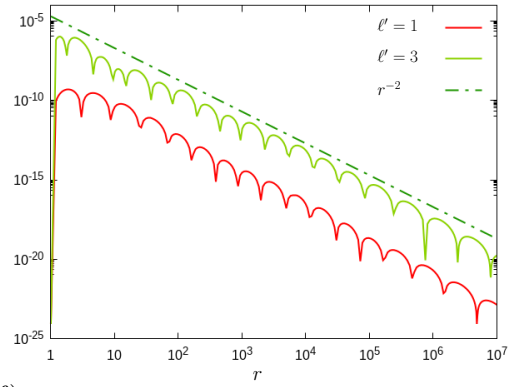
(c) $\Delta\mathbf{K} \Delta\mathbf{K}_2^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



(d) $\Delta\mathbf{K} \Delta\mathbf{K}_3^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



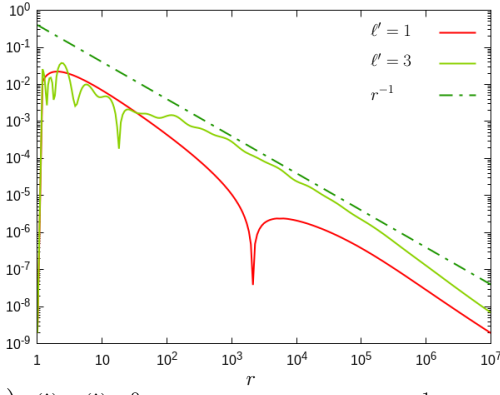
(e) $\Delta\mathbf{K} \Delta\mathbf{K}_4^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



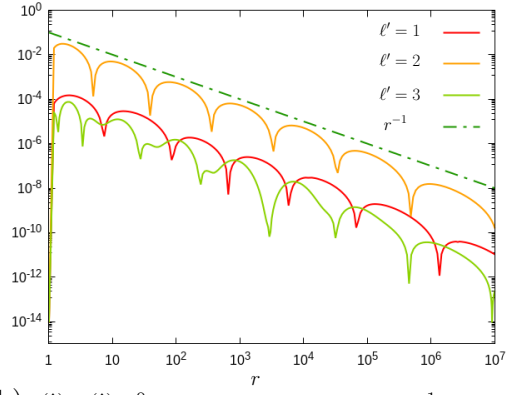
(f) $\Delta\mathbf{K} \Delta\mathbf{K}_5^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.

4.7. ábra. Numerikusan integráltuk az algebrai-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív formáját $\Delta\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -10^{-1} \cdot {}_0Y_{\ell'}^0$ alakú kezdeti perturbációkkal, ahol $\ell' = 1, 2, 3$. $\Delta\mathbf{K} \ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó $\Delta\mathbf{K} \ell^0$ módusai r^{-2} módon tartanak végtelenhez, míg a $\Delta\mathbf{K} \ell^0$ monopólus $r^{-3/2}$ -nél kicsit lassabban cseng le.

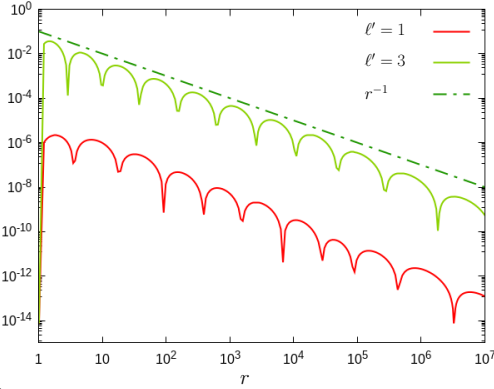
inkhoz. Itt ismét egy fontos üzenetet közvetít a 4.7 és 4.8 ábra. Láthatóan az $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó $\Delta\mathbf{K} \ell^0$ módusok r^{-2} szerint csökkennek, az $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó $\Delta\mathbf{k} \ell^0$ módusok pedig



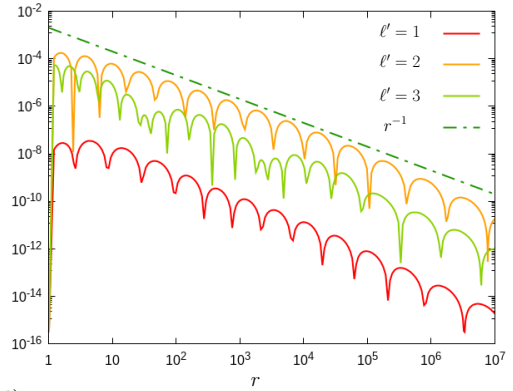
(a) $(\Delta)\mathbf{k} (\Delta)\mathbf{k}_1^0$ módusának lecsengése r^{-1} szerint megy.



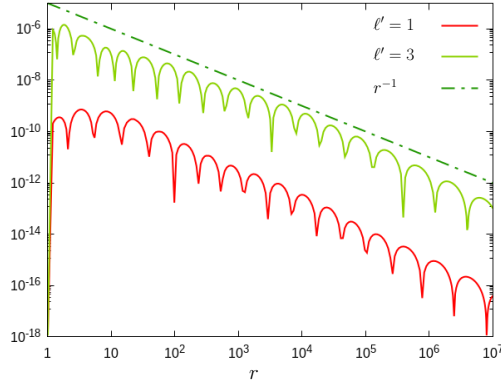
(b) $(\Delta)\mathbf{k} (\Delta)\mathbf{k}_2^0$ módusának lecsengése r^{-1} szerint megy.



(c) $(\Delta)\mathbf{k} (\Delta)\mathbf{k}_3^0$ módusának lecsengése r^{-1} szerint megy.



(d) $(\Delta)\mathbf{k} (\Delta)\mathbf{k}_4^0$ módusának lecsengése r^{-1} szerint megy.



(e) $(\Delta)\mathbf{k} (\Delta)\mathbf{k}_5^0$ módusának lecsengése r^{-1} szerint megy.

4.8. ábra. Numerikusan integráltuk az algebrai-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív formáját $(\Delta)\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -10^{-1} \cdot {}_0Y_{\ell'}^0$ alakú kezdeti perturbációkkal, ahol $\ell' = 1, 2, 3$. $(\Delta)\mathbf{k}$ minden $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó $(\Delta)\mathbf{k}_\ell^0$ módusa legalább r^{-1} módon tartanak végtelenhez.

r^{-1} szerint, a 4.1 táblázatban feltüntetett erős aszimptotikus síkság követelményeinek megfelelően. Ezzel szemben a $(\Delta)\mathbf{K}_0^0$ monopólus $r^{-3/2}$ -nél valamivel lassabban tűnik el, vagyis a szigorú értelemben vett közel-Schwarzschild konfigurációk túl lassan csökkennek még ahhoz is, hogy a gyengén

aszimptotikusan sík feltételeket teljesítsék.

4.8. Gyengén közel-Schwarzschild numerikus eredmények

Az előző alfejezetek egyik legérdekesebb tanulsága, hogy a ${}^{\Delta}\mathbf{K}_0^0$ monopólus minden esetben túl lassan tűnik el a végtelenhez tartva ahhoz, hogy akár csak gyengén aszimptotikusan sík kezdőadatot eredményezzen. Akár azt is mondhatnánk ezen a ponton, hogy az elliptikus módszer egyszerűen jobb, abból a szempontból, hogy az evolúciós formalizmus képtelen megfelelő lecsengést biztosítani a megoldások számára. Akármennyire is csábító azonban egy ilyen állítás, nem szabad elfelejtenünk hogy elliptikus és mindkét evolúciós módszer megoldásai egyértelműen megfeleltethetőek egymásnak. Ezek alapján megfelelőbb lehet a szabadon választható mezők [108, 109]-ben és a korábbi fejezetekben alkalmazott megválasztását—a szigorú értelemben vett közel-Schwarzschild megoldások fogalmát—megkérdőjelezni. Szemügyre véve a 4.3 fejezetben ismertetett meghatározását a szigorúan közel-Schwarzschild problémának, nyilvánvaló hogy hatalmas felfedezésre váró szabadságunk van.

Ennek érdekében először is idézzük fel, hogy az evolúciós módszernek van egyfajta rugalmassága, amire az elliptikus módszer képtelen. Az elliptikus módszer esetén ugyanis az egyenletek megoldása előtt rögzítenünk kell a szabadon választható változókat globálisan, a teljes Σ 3-dimenziós kezdőfelületen, míg az evolúciós módszerek megengedik, hogy a szabadon választható változók értékét az integrálás közben rögzítsük, vagyis lépésről lépésre változtathatjuk az értékeiket úgy, ahogy a függő változók megkövetelik.

Ezt a szabadságot aknáztuk ki a 4.6.1 és 4.6.2 fejezetekben és a következő két alfejezetben is ezt fogjuk kihasználni, hogy megmutassuk akármelyik evolúciós módszerrel lehetséges aszimptotikusan sík kezdőadat konfigurációkat előállítani. Megjegyezzük azonban, hogy itt a célunk—ahelyett, hogy túlzottan is ambíciózusak lennénk—csupán annyi, hogy megmutassuk, hogy a megfelelő módon tágítva a közel-Schwarzschildnak tekintett megoldások halmazát valóban lehetséges a kívánt aszimptotikusan sík megoldások előállítása.

4.8.1. Parabolikus-hiperbolikus rendszer

A fent felvázolt gondolat egy alkalmazásaként ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy—a parabolikus-hiperbolikus rendszer [105]-ben megadott alakját változtatás nélkül használva—egyszerűen a [116]-ban adott

$$\kappa = \mathcal{R} \cdot \mathbf{K}, \quad (4.8.1)$$

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{2} + \frac{M}{4(M+r)}, \quad (4.8.2)$$

anzatz alkalmazásával és lépésről lépésre frissítve κ értékét (4.1.53), (4.1.55) és (4.1.54) egyenletekben valóban aszimptotikusan sík kezdőadat konfigurációkat kapunk.

Mielőtt rátérnénk az eredmények bemutatására megjegyezzük, hogy a parabolikus-hiperbolikus rendszert a nemlineáris perturbatív alakjában integráltuk, ami igazoltan pontosabb, mint a teljes rendszer. Ez lehetővé teszi számunkra, hogy [116]-tal ellentétben, ahol a teljes parabolikus-hiperbolikus rendszer megoldásainak normáit határozták meg, az egyes gerjesztett módusok r függését külön-külön vizsgáljuk. Azt is hozzátesszük, hogy az intágrálás intervalluma jóval nagyobb, mint az [116]-ban látható és a kezdeti perturbációk is nagyobbak a [116]-ban használtaknál.

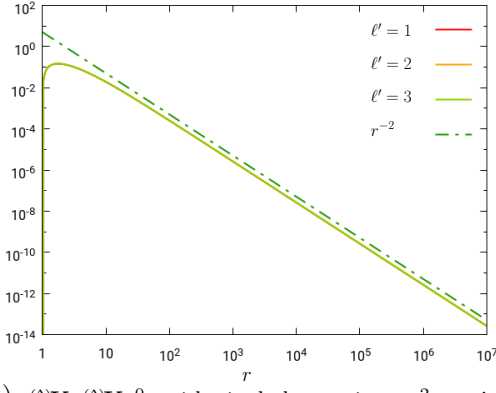
A kezdőadatok alakja is különbözik a [116]-ban használtaktól. Az összehasonlíthatóság érdekében ugyanazokat a kezdőadatokat alkalmazzuk, mint amit a 4.4, 4.5, 4.6 ábrán látható adatok előállításához is használtunk. Ennek megfelelően a $r_0 = 1$ -hez tartozó \mathcal{S}_{r_0} felületen a ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -10^{-1} \cdot {}_0Y_{\ell'}^0$ választással éltünk $\ell' = 1, 2, 3$ értékek mellett, valamint ${}^{(\Delta)}\mathbf{k}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = 0$ és ${}^{(\Delta)}\widehat{N}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = 0$. Az ábrákon látható három megoldás a három különböző $\ell' = 1, 2, 3$ -hoz tartozó kezdőadatokkal előállított megoldás. A ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}$, ${}^{(\Delta)}\mathbf{k}$ és ${}^{(\Delta)}\widehat{N}$ különböző ℓ módusainak r függése és lecsengésük látható a 4.9, 4.10 és 4.11 ábrákon.

Ahogy 4.9 ábrán láthatjuk ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}_{\ell}^0$ összes $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ módusa—még a ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}_0^0$ monopólus is—legalább r^{-2} szerint tart végtelenhez. Ez a 4.1 táblázat értelmében azt jelenti, hogy \mathbf{K} az erősen aszimptotikusan sík kezdőadat konfigurációknak megfelelő ütemben csökken. 4.10 üzenete szintén az, hogy ${}^{(\Delta)}\mathbf{k}_{\ell}^0$ minden $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ módusa r^{-2} szerint csökken, ami sokkal gyorsabb a 4.1 táblázatban feltüntetett r^{-1} rátánál. A 4.11. ábra paneljei ismét megerősítik az eddigi következtetéseinket. Az $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó ${}^{(\Delta)}\widehat{N}_{\ell}^0$ módusok r^{-2} szerint csökkennek, ami ismét sokkal gyorsabb 4.1. táblázatban feltüntetett kritériumnál. A ${}^{(\Delta)}\widehat{N}_0^0$ monopólus szintén r^{-2} szerint kezd csökkenni, de $r = 10^3$ körül egy lassabb r^{-1} -s ütemre vált. Ez arra utal, hogy a (4.8.1) anzatz kissé megváltoztatja a rendszer ADM-tömegét a háttérhez képest.

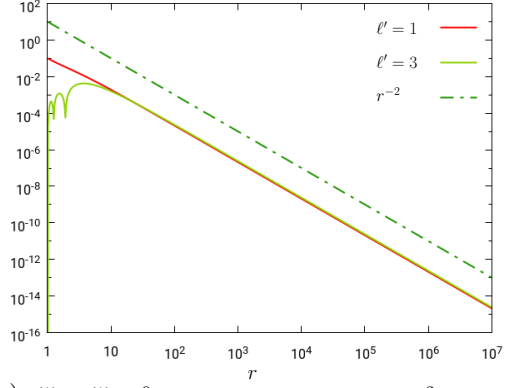
Mindent egybevetve 4.9, 4.10 és 4.11 ábrákon szereplő mezők teljesítik az erős aszimptotikus síkság 4.2 fejezetben tárgyalt és a 4.1 táblázatban összefoglalt feltételeit, vagyis a kényszeregyenletek parabolikus-hiperbolikus rendszerének integrálása κ (4.8.1) anzatznak való megfeleltetése a (4.8.2) összefüggés felhasználásával valóban erősen aszimptotikusan sík kezdőadatot eredményez.

4.8.2. Algebrai-hiperbolikus rendszer

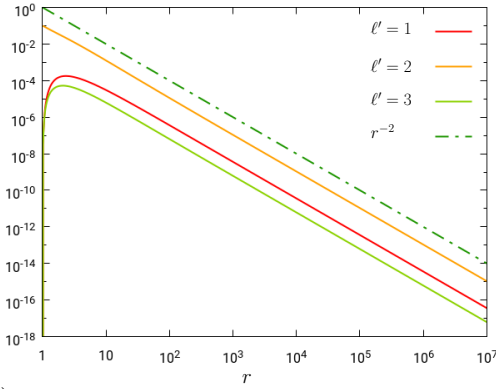
Ebben a fejezetben azt mutatjuk meg, hogy akkor is nagy szabadságunk van ${}^{(\Delta)}\mathbf{K}_0^0$ aszimptotikus viselkedésének szabályozásában—az előző fejezetben bemutatotthoz hasonló módokon—ha az algebrai-hiperbolikus rendszert szeretnénk megoldani. A (4.1.60)–(4.1.63) egyenletek megtekintése után arra a következtetésre juthatunk, hogy a legkisebb változtatást a szigorúan közel-Schwarzschild konfigurációk kiválasztási szabályaiban azzal érhetjük el, ha a $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}$ vagy ezzel ek-



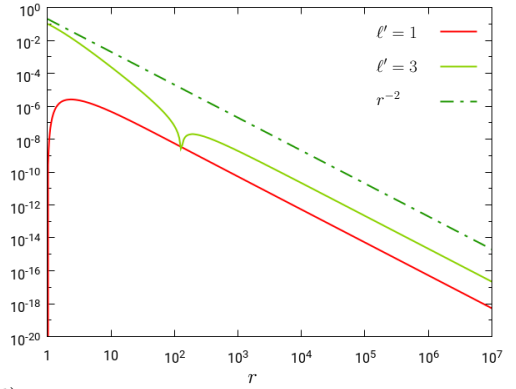
(a) $(\Delta)\mathbf{K} (\Delta)\mathbf{K}_0^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



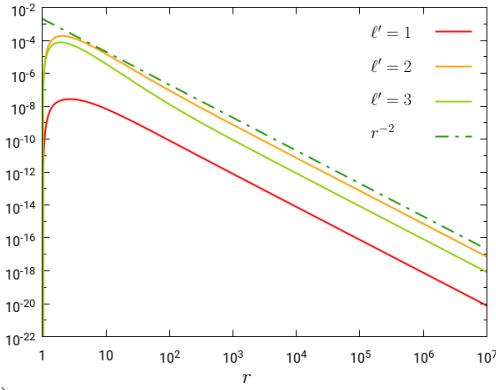
(b) $(\Delta)\mathbf{K} (\Delta)\mathbf{K}_1^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



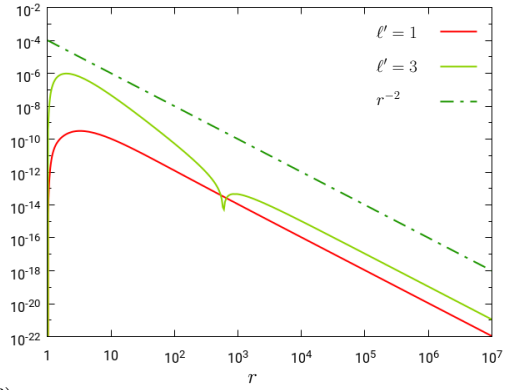
(c) $(\Delta)\mathbf{K} (\Delta)\mathbf{K}_2^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



(d) $(\Delta)\mathbf{K} (\Delta)\mathbf{K}_3^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



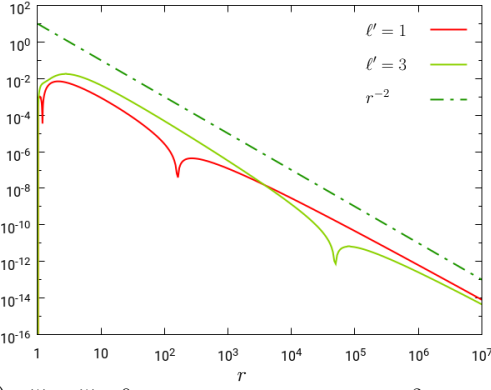
(e) $(\Delta)\mathbf{K} (\Delta)\mathbf{K}_4^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



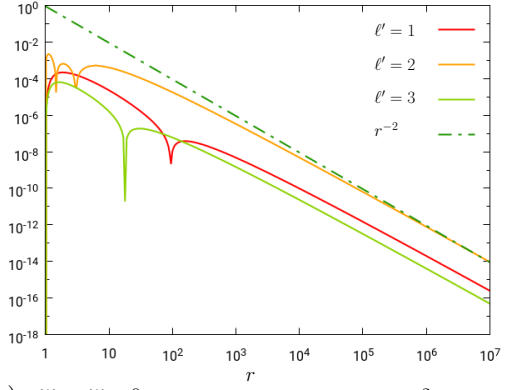
(f) $(\Delta)\mathbf{K} (\Delta)\mathbf{K}_5^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.

4.9. ábra. Numerikusan integráltuk a parabolikus-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív alakját úgy, hogy κ -t minden lépésben frissítettük a (4.8.1) módon felírt anatznak megfelelően. A kezdeti perturbáció alakja $(\Delta)\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -10^{-1} \cdot {}_0Y_{\ell'}^0$ volt $\ell' = 1, 2, 3$ választások mellett. Az összes $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó $(\Delta)\mathbf{K}_\ell^0$ módus, még a $(\Delta)\mathbf{K}_0^0$ is legalább r^{-2} módon cseng le, tehát a kapott megoldások erősen aszimptotikusan sík kezdőadatok.

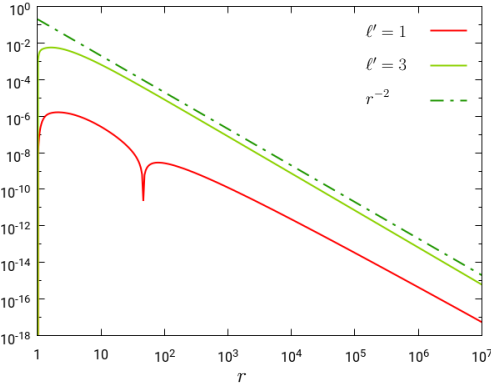
vivalens $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{qq} = \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}q^a q^b$ szabadon választott változót—ami eltűnik szigorúan közel-Schwarzschild konfigurációk esetében—megfelelő módon változtatjuk.



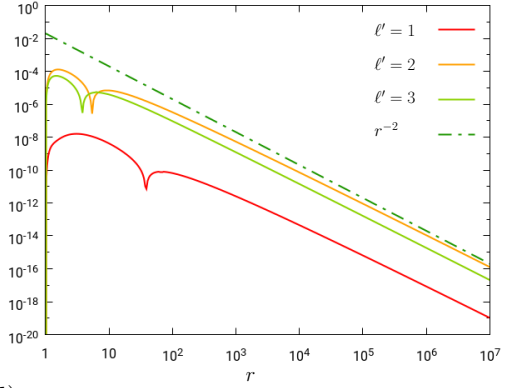
(a) $(\Delta)_{\mathbf{k}} (\Delta)_{\mathbf{k}_1}{}^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



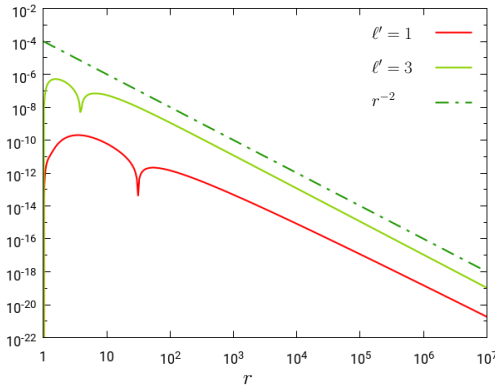
(b) $(\Delta)_{\mathbf{k}} (\Delta)_{\mathbf{k}_2}{}^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



(c) $(\Delta)_{\mathbf{k}} (\Delta)_{\mathbf{k}_3}{}^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.

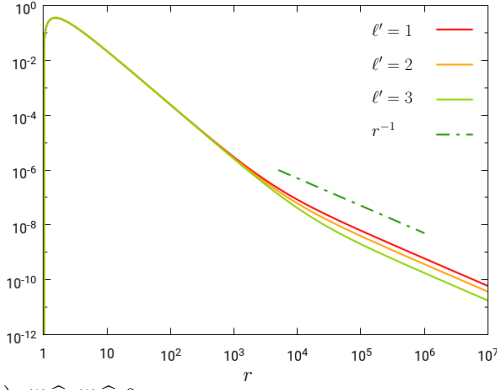


(d) $(\Delta)_{\mathbf{k}} (\Delta)_{\mathbf{k}_4}{}^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.

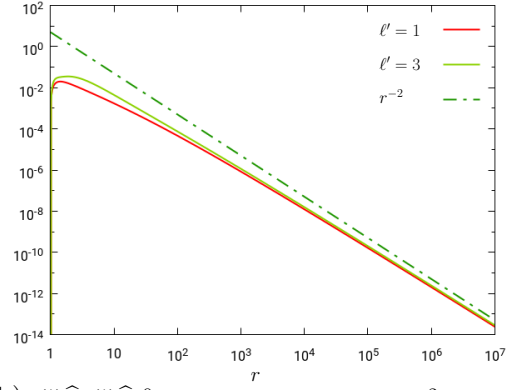


(e) $(\Delta)_{\mathbf{k}} (\Delta)_{\mathbf{k}_5}{}^0$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.

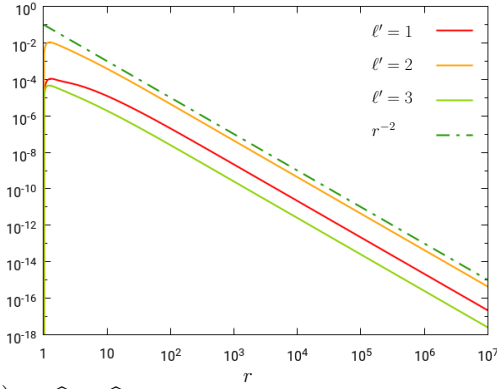
4.10. ábra. Numerikusan integráltuk a parabolikus-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív alakját úgy, hogy κ -t minden lépésben frissítettük a (4.8.1) módon felírt anatznak megfelelően. A kezdeti perturbáció alakja $(\Delta)_{\mathbf{K}}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -10^{-1} \cdot {}_0Y_{\ell'}{}^0$ volt $\ell' = 1, 2, 3$ választások mellett. Ha az összes $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó $(\Delta)_{\mathbf{k}}{}^0$ módus csak r^{-1} módon csökkenne már az elegendő lenne ahhoz, hogy az erős aszimptotikus síkság feltételeinek eleget tegyenek. Rendkívüli módon, valószínűleg a (4.8.1) anatz hatására az összes módus még ennél is sokkal gyorsabban, r^{-2} körüli módon cseng le.



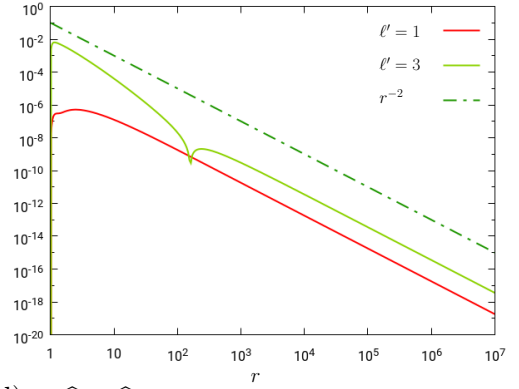
(a) $(\Delta)\hat{N}^0$ módusának lecsengése az időfejlődés kései szakaszában r^{-1} szerint megy.



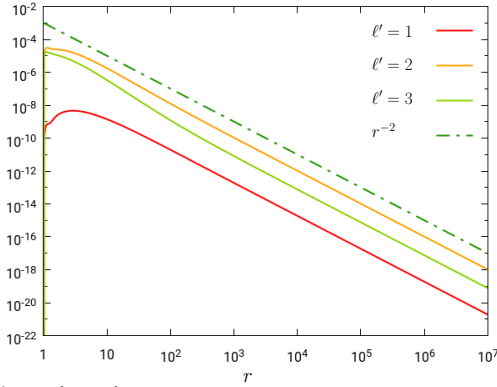
(b) $(\Delta)\hat{N}^1$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



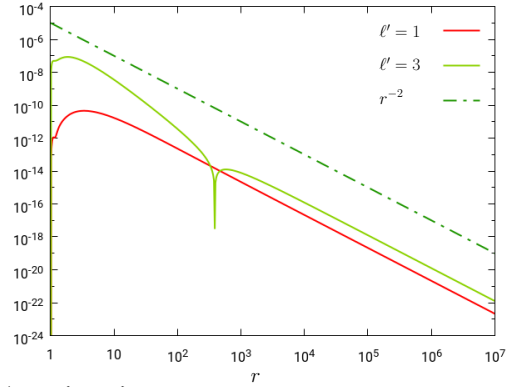
(c) $(\Delta)\hat{N}^2$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



(d) $(\Delta)\hat{N}^3$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



(e) $(\Delta)\hat{N}^4$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.



(f) $(\Delta)\hat{N}^5$ módusának lecsengése r^{-2} szerint megy.

4.11. ábra. Numerikusan integráltuk a parabolikus-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív alakját úgy, hogy κ -t minden lépésben frissítettük a (4.8.1) módon felírt anatznak megfelelően. A kezdeti perturbáció alakja $(\Delta)\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = -10^{-1} \cdot {}_0Y_{\ell'}^0$ volt $\ell' = 1, 2, 3$ választások mellett. Az összes $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$ -höz tartozó $(\Delta)\hat{N}_\ell^0$ módus r^{-2} szerint kezd csökkenni, ami a $(\Delta)\mathbf{k}_\ell^0$ módusokhoz hasonlóan sokkal gyorsabb, mint ami $(\Delta)\hat{N}$ erős aszimptotikus síkságához szükséges. Még a $(\Delta)\hat{N}_0^0$ monopólus is r^{-2} szerint indul, de $r = 10^3$ körül a lassabb r^{-1} ütemű csökkenésre áll át, ahogyan az várható, ha a rendszer ADM-tömege különbözik a háttér ADM-tömegétől.

Először is vegyük észre, hogy a Hamilton-kényszer algebrai alakja, ami a (4.1.62) és (4.1.63) egyenletekből áll, a következő alakot ölti:

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{2}\mathbf{K}^{-1}\left[\mathbf{d}^{-1}(2\mathbf{a}\mathbf{k}\bar{\mathbf{k}} - \mathbf{b}\bar{\mathbf{k}}^2 - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{k}^2) - \frac{1}{2}\mathbf{K}^2 - (\textcircled{3}R - \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}\overset{\circ}{\mathbf{K}}^{ab})\right]. \quad (4.8.3)$$

A 4.6.2. fejezetben láttuk, hogy amennyiben a monopólusokra teljesül a $\boldsymbol{\kappa}_0^0 = \mathcal{R}(r)\mathbf{K}_0^0$ összefüggés úgy, hogy nagy r értékek esetén a sima $\mathcal{R}(r)$ függvény konstans $-1/2$ -hez tart, \mathbf{K}_0^0 teljesíti az erős aszimptotikus síkság feltételeit. Most kibővítjük a megengedett függvénykapcsolatok terét valamely sima negatív $\mathcal{R} = \mathcal{R}(r)$ és $\mathcal{S} = \mathcal{S}(r)$ függvényekkel

$$\boldsymbol{\kappa}_0^0 = \mathcal{R} \cdot \mathbf{K}_0^0 + \mathcal{S} \quad (4.8.4)$$

módon úgy, hogy nagy r értékek esetén \mathcal{R} és \mathcal{S} konstans $-1/2$ és 0 értékekhez tartanak. A szimulációinkban \mathcal{R} és \mathcal{S} függvényeket

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{2}\frac{r+M}{r+2M}, \quad \mathcal{S} = -\frac{\delta \cdot M^\rho}{(r+2M)^\rho}, \quad (4.8.5)$$

módon rögzítettük, ahol $\delta > 0$ és ρ a $3/2 < \rho \leq 2$ intervallumból vesz fel értékeket. Megjegyezzük, hogy (4.8.3) egyenletben a $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}\overset{\circ}{\mathbf{K}}^{ab}$ kontrakció \mathbf{b} eltűnése miatt a

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}\overset{\circ}{\mathbf{K}}^{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^{-2}\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{qq}\overline{\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{qq}}, \quad (4.8.6)$$

módon írható, ahol $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{qq} = \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}q^aq^b$. Azt is vegyük észre, hogy a (4.1.61)-ben szereplő $q^a\hat{n}^b\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ba}$ és $q^a\hat{D}^b\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ba}$ forrástagok—amiket az általános esetben [48] (5.8) és (5.9) egyenletei adnak meg—jelentősen egyszerűsödnek. Például [48] (A.12) értelmében $q^b\hat{n}^a\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}$ eltűnik, mivel \hat{N} csak az r radiális koordinátától függ, míg [48] (A.13) formulája

$$q^a\hat{D}^b\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^{-1}\overline{\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{qq}}. \quad (4.8.7)$$

alakra egyszerűsödik.

Az egyszerűség kedvéért továbbá feltesszük, hogy a szabadon választható $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{qq}$ -nek egyetlen módusa van és konkrétan az alábbi alakot ölti

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{qq} = (\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{qq})_2^0 \cdot {}_2Y_2^0. \quad (4.8.8)$$

Mivel a fent felvázolt eljárásnak van egy reguláris gömbszimmetrikus megoldása $\mathcal{R} = -\frac{1}{2}\frac{r+M}{r+2M}$, $\mathcal{S} = 0$ és $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{qq} = 0$ esetén, ezt a megoldást alkalmazhatjuk, mint háttér a nemlineáris perturbatív megközelítésben.

Rátérve a konkrét numerikus vizsgálatokra először megjegyezzük, hogy a nem eltűnő $\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ab}$ változónak igen erős hatása van a \mathbf{K} és \mathbf{k} függő változók ℓ módusaira. Nagyban egyszerűsíti a helyzetet,

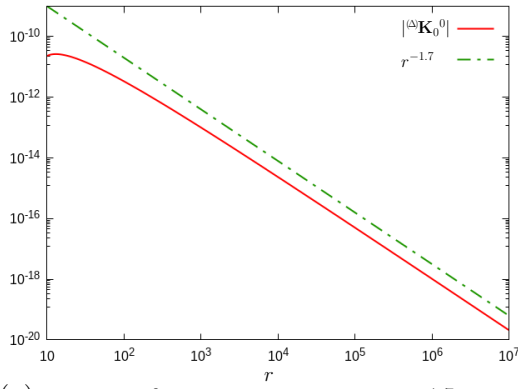
ha csupán \mathbf{K} és \mathbf{k} páros módusait gerjesztjük. Ezeken felül azt is el kell ismernünk, hogy nem várt numerikus instabilitás miatt (4.1.60) és (4.1.61) egyenleteket csak akkor tudjuk kellően hosszú intervallumon integrálni numerikusan, ha csak \mathbf{K} monopól és kvadrupól részén alkalmazunk nagyon kicsi perturbációkat.

Mindezen technikai részletek után vegyünk szemügyre a 4.12 és 4.13 ábrákon látható numerikus eredményeket. Az ábráknak megfelelő megoldások előállításakor a (4.8.5)-ben szereplő δ és ρ paraméterek értékeit $\delta = 10^{-9}$ -nek és $\rho = 1.7$ -nek választottuk. Ezen felül az apró ${}^{\omega}\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = 6.5 \cdot 10^{-12} \cdot Y_0^0 + 10^{-15} \cdot Y_2^0$ perturbációt adtuk meg kezdőadatnak. 4.12. ábra bal oldali paneljein azt látjuk, hogy a ${}^{\omega}\mathbf{K}_0^0$ monopólus (4.8.4)-nek megfelelően $r^{-1.7}$ módon csökken, míg ${}^{\omega}\mathbf{K}$ magasabb rendű $\ell = 2, 4$ módusai $r^{-3/2}$ -nél kicsit gyorsabban csengenek le. Hasonló módon 4.12. ábra jobb oldali paneljein az látszik, hogy ${}^{\omega}\mathbf{k}$ gerjesztett $\ell = 2, 4$ módusai $r^{-1/2}$ -nél valamivel gyorsabban tartanak nullához. Azt is megjegyezzük, hogy a 4.13. ábra első három paneljén látható módon κ $\ell = 0, 2, 4$ módusai kicsit gyorsabban csökkennek, mint ${}^{\omega}\mathbf{K}$ vonatkozó ℓ módusai. Végül 4.13. ábra utolsó 4.13d panelje igazolja, hogy $\mathring{\mathbf{K}}_{qq}$ lassabban nő, mint $r^{1/2}$, ami megfelel a gyenge aszimptotikus síkságnak. Ennek megfelelően a 4.1 táblázat a megfigyelt lecsengési rátákkal együtt szavatolja, hogy az így kapott kezdőadat gyengén aszimptotikusan sík.

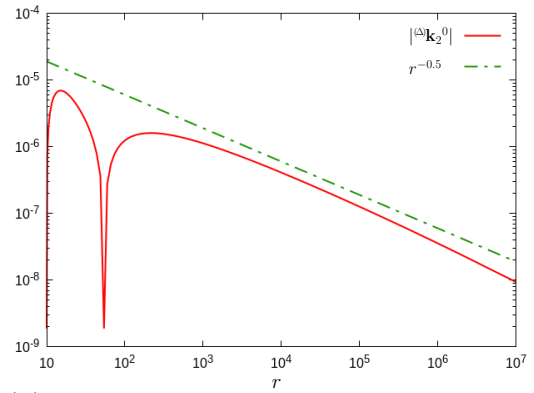
Mindent egybe vetve 4.12 és 4.13 ábrák igazolják, hogy a szabadon választható $\mathring{\mathbf{K}}_{ab}$ mező és a fejezet elején bemutatott analitikus eljárásom keresztül $\mathring{\mathbf{K}}_{ab}$ -t lépésről lépésre összekapcsolva a függő változókkal a kapott kezdőadat kielégíti a 4.2 fejezetben foglalt és a 4.1 táblázatban összegyűjtött gyenge aszimptotikus síkságra vonatkozó feltételeket. Ennek megfelelően a fenti példa azt mutatja, hogy a szabadon választható $\mathring{\mathbf{K}}_{ab}$ változó megfelelő megválasztásával az algebrai-hiperbolikus rendszer integrálása is eredményezhet aszimptotikusan sík kezdőadat konfigurációkat.

4.9. Összegzés: Schwarzschild-kezdőadat nemlineáris perturbációi

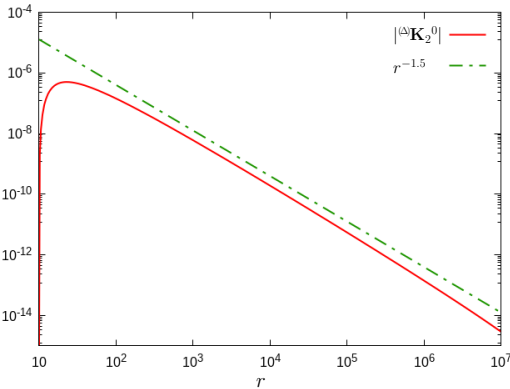
A 2. fejezet formuláit ezúttal a gravitációs kezdőérték-probléma kényszeregyenleteinek megoldásánál alkalmaztam. A kényszeregyenletek alulhatározott parciális differenciálegyenlet-rendszerként értelmezhetőek. A hagyományos megközelítésben a közvetlen fizikai jelentőséggel bíró h_{ab} és K_{ab} változók helyett ezek konformis átskálázásával kapott \tilde{h}_{ab} és \tilde{K}_{ab} változók komponenseire oldják meg az egyenletrendszert. Ezekben az eljárásokban közös, hogy elliptikus parciális differenciálegyenletek rendszereire vezetnek. A gravitációshullám-detektorok érzékenységének folyamatos javulása arra ösztönzi a terület kutatóit, hogy új, pontosabb eljárásokat dolgozzanak ki kezdőadatok előállítására. Ezen irányú törekvések közül kiemelkedik Rácz [105] megközelítése, mivel nem csupán a Lichnerowicz–York-féle konformis módszernél pontosabb eljárást tesz lehetővé, hanem egy elvileg



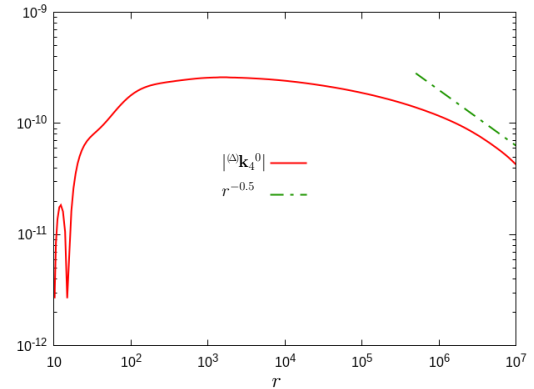
(a) $(\Delta)\mathbf{K}$ $(\Delta)\mathbf{K}_0^0$ módusának lecsengése $r^{-1.7}$ szerint megy.



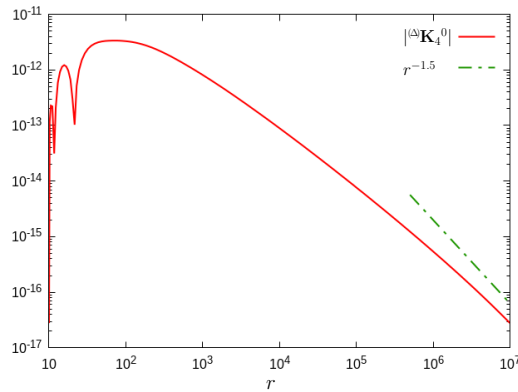
(b) $(\Delta)\mathbf{k}$ $(\Delta)\mathbf{k}_2^0$ módusának lecsengése végig jobb $r^{-1/2}$ -nél.



(c) $(\Delta)\mathbf{K}$ $(\Delta)\mathbf{K}_2^0$ módusának lecsengése jobb, mint $r^{-3/2}$.



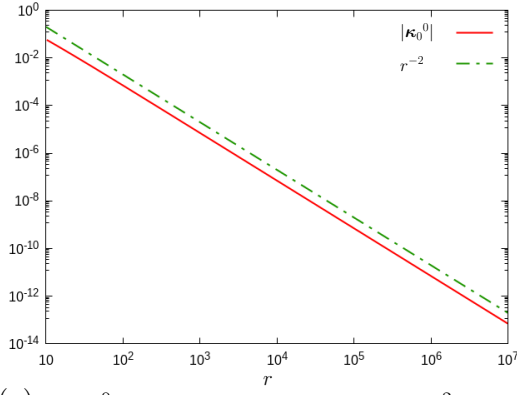
(d) $(\Delta)\mathbf{k}$ $(\Delta)\mathbf{k}_4^0$ módusának lecsengése jobb, mint $r^{-1/2}$.



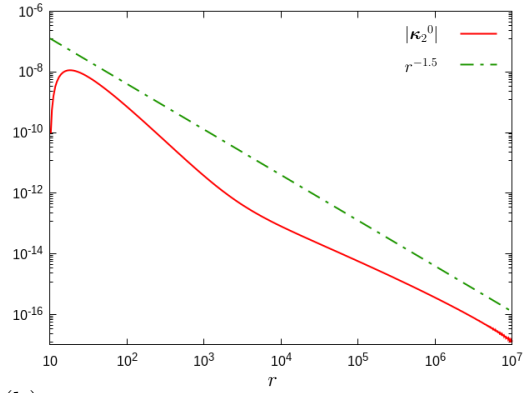
(e) $(\Delta)\mathbf{K}$ $(\Delta)\mathbf{K}_4^0$ módusának lecsengése.

4.12. ábra. Az algebrai-hyperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív alakját integráltuk numerikusan a $(\Delta)\mathbf{K}|_{\mathcal{S}_{r_0}} = 6.5 \cdot 10^{-12} \cdot Y_0^0 + 10^{-15} \cdot Y_2^0$ kezdeti perturbációval. Ahogy a bal oldali paneleken látható $(\Delta)\mathbf{K}$ monopólusa $r^{-1.7}$ szerint csökken, míg a $\ell = 2, 4$ módusai $r^{-3/2}$ -nél kicsit gyorsabban tartanak nullához. A jobb oldali paneleken $(\Delta)\mathbf{k}$ $\ell = 2, 4$ módusai láthatóak. Ezek jóval lassabban csökkennek, de mindkettő gyorsabb kicsit, mint $r^{-1/2}$. Ezek alapján $(\Delta)\mathbf{K}$ és $(\Delta)\mathbf{k}$ viselkedése lehetővé teszi, hogy a kapott kezdőadat gyengén aszimptotikusan sík legyen.

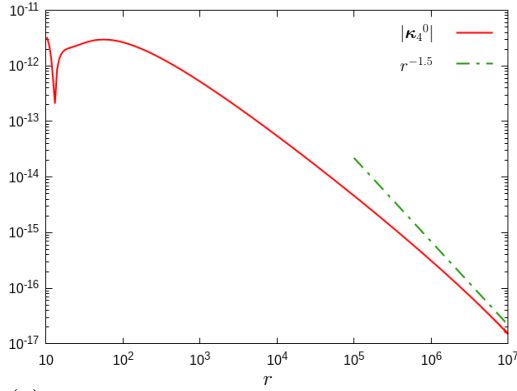
is egészen új eljárást kínál. Ennek a megközelítésnek egy érdekes vonása, hogy a h_{ab} és K_{ab} válto-



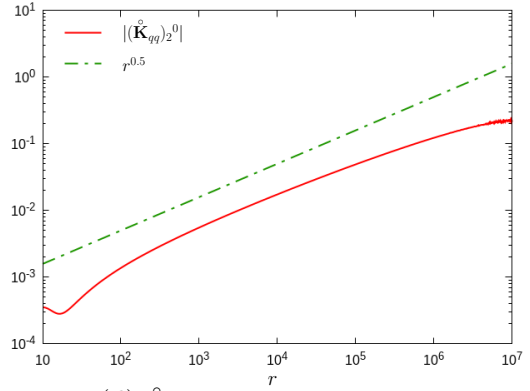
(a) $\kappa \kappa_0^0$ módusának lecsengése közel r^{-2} szerint megy.



(b) $\kappa \kappa_2^0$ módusának lecsengése mindenütt jobb, mint $r^{-3/2}$.



(c) $\kappa \kappa_4^0$ módusának lecsengése jobb, mint $r^{-3/2}$.



(d) $\mathring{\mathbf{K}}_{qq}$ lassabban nő, mint $r^{1/2}$.

4.13. ábra. Az algebrai-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív alakját integráltuk numerikusan a $({}^\Delta\mathbf{K})|_{\mathcal{S}_{r_0}} = 6.5 \cdot 10^{-12} \cdot Y_0^0 + 10^{-15} \cdot Y_2^0$ kezdeti perturbációval. Látható, hogy κ mindhárom $\ell = 0, 2, 4$ módusa határozottan gyorsabban csökken, mint $r^{-3/2}$. Az is tisztán látható, hogy $\mathring{\mathbf{K}}_{qq} = \mathring{\mathbf{K}}_{ab} q^a q^b$ egyetlen nem eltűnő $s = 2, \ell = 2, m = 0$ módusa lassabban nő, mint $r^{1/2}$. Ezek alapján κ és $\mathring{\mathbf{K}}_{qq}$ aszimptotikus viselkedése lehetővé teszi, hogy a megfelelő kezdőadat gyengén aszimptotikusan sík legyen.

zók komponenseire felírt kényszeregyenleteket—attól függően, hogy melyik komponensekre kívánjuk megoldani—egy algebrai-hiperbolikus egyenletrendszerként vagy egy parabolikus-hiperbolikus egyenletrendszerként értelmezhetjük. A változóinkat spinsúlyozott harmonikus gömbfüggvényeken kifejtve és az egyenletekbe behelyettesítve közönséges differenciálegyenletek rendszerét kapjuk a kifejtési együtthatókra. Ezt a rendszert az adaptív Runge–Kutta–Fehlberg-integrátorral oldottam meg.

A kényszeregyenletek esetében nem hagyatkozhattam megmaradó áramokra, így csupán a szokásos konvergencia vizsgálatokat tudtam elvégezni. A lokális konvergencia vizsgálat elvárásainkkal összhangban megállapította, hogy az RKF-integrátor közel negyedrendben konvergál rögzített ℓ_{max} levágás mellett, míg az elvárt exponenciális konvergenciát mutatja az ℓ_{max} értékének változtatása esetén. Ezek az eredmények igazolják a numerikus eljárás helyes implementációját, de az egyenle-

tek hibátlan megjelenítését csak ismert analitikus megoldások reprodukálásával tudtam ellenőrizni.

Vizsgálataink az analitikusan meghatározott Schwarzschild-kezdőadattól kissé eltérő megoldások aszimptotikus viselkedését célozták. Mivel evolúciós problémaként értelmezve a kényszereket elveszítjük a közvetlen befolyásunkat a megoldások végtelenben tanúsított viselkedése felett, szükséges felderíteni, hogy milyen szabadságunk van a kezdőadatok meghatározásában, ha aszimptotikusan sík kezdőadatot szeretnénk kapni. A vizsgált megoldásokat két csoportba soroltuk. Szigorúan közel-Schwarzschildnak neveztünk egy megoldást, ha az összes szabadon megadható mennyiséget az ismert Schwarzschild-kezdőadat szerint rögzítettük és csak a kényszereknek alávetett változóiban engedtünk meg eltérést. A gyengén közel-Schwarzschild megoldások esetén ezzel szemben a szabadon megválasztható változók némelyikét is módosítottuk a kívánt aszimptotikus síkság elérése érdekében. Mindkét esetben felmerül azonban, hogy a háttérként viselkedő Schwarzschild-kezdőadat rendkívül sokáig el tudja nyomni az általában nem aszimptotikusan sík eltérések hatását. [106] nyomán ezért meghatároztam az algebrai-hiperbolikus rendszer esetén is az egyenletek nemlineáris perturbatív alakját és a vizsgálatainkat a nemlineáris perturbatív egyenletekkel végeztük, az eltéréseket leválasztva a háttérről. Ezen eljárás segítségével azonnal nyilvánvalóvá válik az eltérések lecsengésének üteme, így sokkal tisztább képet kapunk a teljes megoldás aszimptotikus viselkedéséről.

Első megállapításunk, hogy a szigorú értelemben közel-Schwarzschild megoldások terében egyedül csak a Schwarzschild-kezdőadat aszimptotikusan sík. Már a gömbszimmetrikus analitikus megoldások is mutatják, hogy \mathbf{K} csak akkor tart nullához elég gyorsan, ha az integrálási állandó a Schwarzschild-kezdőadathoz megfelelő értéket veszi fel. Nem gömbszimmetrikus megoldások esetén a magasabb módusok olyan módon gerjesztik \mathbf{K} monopólusát, hogy az ne tudjon r^{-2} módon csökkenni. \mathbf{K} monopólusát leszámítva azonban az összes változó összes módusa az erős aszimptotikus síkságnak megfelelően cseng le. A gyengén közel-Schwarzschild megoldások meghatározása során ennek fényében a \mathbf{K} monopólusára vonatkozó egyenlet megfelelő módosítására törekedtünk.

A parabolikus-hiperbolikus rendszer esetén Beyer és társai által [116]-ban felvetett, κ -ra vonatkozó módosítását vizsgáltuk részletesen. A javasolt módosítással a parabolikus-hiperbolikus rendszer erősen aszimptotikusan sík megoldásainak egy családja áll elő. Ennek az eljárásnak nincs kézen fekvő analógiája az algebrai-hiperbolikus rendszerre. Ebben az esetben $\mathring{\mathbf{K}}_{qq}$ értékének módosításával sikerült egy csupán gyengén aszimptotikusan sík és kis perturbációkra működő megoldást találnunk. Ugyan egy általánosabb megoldás még várat magára, sikerült megmutatni, hogy az eljárás alkalmas aszimptotikusan sík deformált feketelyuk kezdőadatok előállítására. Eredményeinket [113]-ban tettük közzé, mely a Classical and Quantum Gravity folyóiratban jelent meg.

A kényszereket evolúciós formájukban megoldó, általam C++-ban fejlesztett alkalmazás—amely jóval általánosabb keretek között működik, mint a 3. fejezetben tárgyalt problémák megoldására írt alkalmazások—bejelentkezett felhasználó számára a KFKI GitLab szerverén a [117]

címen található.

5. fejezet

Összefoglalás

A doktori képzésem alatt végzett munkám a GridRipper programcsomag által alkalmazott spektrális módszerek továbbfejlesztésére és alkalmazására irányult. Az elvégzett fejlesztéseknek köszönhetően vizsgálhattuk rögzített feketelyuk háttéren terjedő perturbációk viselkedését és megtettük az első lépést a metrika dinamikáját is kezelni képes alkalmazás kidolgozása felé a gravitációs kényszeregyenletek megoldása által.

Az ismertett eredményeket a spinsúlyozott gömbharmonikusokon való kifejtésre építő numerikus eljárások alkalmazása köti össze. Éppen ezért a 2. fejezetet ennek a közös alapnak az ismertetésére szántam. A topológiai gömbökkel fóliázott sokaságokon az ezekhez képest érintő irányú deriváltakat ki tudtam fejezni az ∂ , $\bar{\partial}$ és ∂_φ operátorokkal, így a szögek szerinti deriválásokat minden alkalommal elvégezhettem analitikusan. Ezzel a parciális differenciálegyenleteket kettővel kevesebb változójú függvényekre, a kifejtési együtthatókra vonatkozó differenciálegyenletekre vezettem vissza. Az így kapott egyenletek jobb oldalán esetleg megjelenő nemlinearitásokat teljesen spektrálisan kezeltük. A kifejtési együtthatókkal adott függvények szorzatának kifejtési együtthatóit megadhatjuk a Gaunt-együtthatók alkalmazásával. Miután tetszőleges szorzatot képesek vagyunk így kiértékelni, a sehol nem eltűnő függvénnyel való osztás műveletét az inverz operátorra vonatkozó Neumann-sor alkalmazásával hibahatáron belül vissza tudjuk vezetni egy polinomiális kifejezésre. Minden alkalmazás esetén ellenőriztem, hogy az erre épülő eljárások a spektrális módszerekre jellemző exponenciális konvergenciát mutatják ahogy növeljük a gömharmonikus kifejtés során megtartott tagok számát.

Az alkalmazások első, a 3. fejezetben tárgyalt, csoportját a rögzített Kerr-téridő feletti, sugárzásokat megjelenítő lineáris perturbációkat leíró Teukolsky egyenlet megoldásainak vizsgálata képezi. Teukolsky mesteregyenlete az s paraméter értékétől függően képes leírni a skalármező ($s = 0$), az elektromágneses hullámok ($s = \pm 1$) és a gravitációs hullámok ($s = \pm 2$) fejlődését is. Az egyenlet megoldásai több, a forgó feketelyukak modellezése szempontjából releváns jelenség vizsgálata szempontjából érdekesek. Ezek közül a Kerr-megoldás teljes lineáris stabilitásának bizonyítása

miatt fontos hosszú távú viselkedésüket—mely egyben demonstrálta a kódunk stabilitását—és a szuperradiáns szórás jelenségét tanulmányoztam. Ezekben az esetekben a szokásos konvergencia-teszteken kívül rendelkezésemre állt két kanonikusan megmaradó komplex áram. Ezek az áramok igazolták az egyenletek implementációjának helyességét és egyúttal jellemezték is a vizsgált fizikai folyamatokat.

Az általam használt konformis kompaktifikációnak és a hiperboloidális kezdőértékprobléma alkalmazásának köszönhetően a numerikus rács lefedi az eseményhorizonttól egészen a fényszerű végtelenig tartó térrészt, így közelítések nélkül ki tudtam értékelni a megfelelő mennyiségeket az eseményhorizonton és a (jövő fényszerű) végtelenben is. Az alkalmazott numerikus módszerek robusztusságának és pontosságának köszönhetően elegendően hosszú ideig szimulálhattam a különböző perturbációk fejlődését, hogy képes legyek leolvasni az aszimptotikus viselkedésüket jellemző lecsengési együtthatókat. Ennek, valamint a spektrális megközelítés gyorsaságának köszönhetően módszeresen vizsgálhattam nagy mennyiségű nem tengelyszimmetrikus konfigurációt. Az eredményeink, meglepetésünkre, változatlan alakjában kiterjesztették a stacionárius kezdőadatokhoz tartozó lecsengési együtthatókra vonatkozó empirikusan felállított összefüggések érvényességi határát és a teljesen dinamikus kezdőadatokra vonatkozó összefüggéseknél mutattak rá egy alesetre, ahol a jelenlegi analitikus leírás nem elég pontos.

Szuperradiáns szórás esetén a megfelelően megkonstruált bemenő hullámcsomag úgy hat kölcsön az eseményhorizont körüli ergoszférával, hogy onnan visszatérve—elviekben a feketelyuk forgási energiájának csökkenése révén—több energiával rendelkezik, mint amennyivel a szórás előtt rendelkezett. Vizsgálataim során kompakt tartójú kezdőadatokat alkalmaztam, amelyeket elhelyezkedésük alapján három csoportba soroltam. Az ergoszféráról élesen elválasztott tartóval rendelkező kezdőadatok esetén alig tapasztaltam szuperradianciát. A második csoportot képező, az ergoszférából indított hullámcsomagok esetén valamivel nagyobb effektust sikerült kimutatnom, de a legmarkánsabb hatást a $T = 0$ felületen az eseményhorizonttól az ergoszféra határán át a külső kommunikációs tartományba is átnyúló $s = +2$ gravitációs perturbációk mutatták. Az intenzitás jelentős növekedése kiemeli, hogy a szuperradiáns kezdőadat meghatározása során nem csupán a kívánt frekvenciatartomány figyelembe vétele, hanem kompakt tartó esetén az ergoszférához viszonyított elhelyezkedése is nagyon fontos. Bizonyos esetekben az energiában nem tapasztaltunk szuperradianciát, de az impulzusmomentumban jelentős növekedést láttunk. Rámutattunk, hogy ez a jelenség az úgynevezett „frame dragginghez”, vagyis a vonatkoztatási rendszereknek a feketelyuk forgása által indukált sodródásához köthető.

A 4. fejezetben ismertettem a gravitációs kényszeregyenletek evolúciós alakjához tartozó megoldások aszimptotikus viselkedésére vonatkozó vizsgálataimat. A kezdőfelületet topológiai gömbökkel fóliázva a változókat ebben az esetben is kifejtethetjük gömbi harmonikusokon. A gömbfüggvénykifejtés eredményeként elsőrendő közönséges differenciálegyenletek csatolt rendszerét kaptam,

amelyet az adaptív Runge–Kutta–Fehlberg-integrátorral oldottam meg. Vizsgálataim során célravezetőnek bizonyult a megoldást egy analitikusan adott megoldás és az attól való eltérésként értelmezni, majd az eltérésre vonatkozó nemlineáris perturbatív egyenleteket megoldani. Az eredményeink rámutattak, hogy szigorú értelemben közel-Schwarzschild kezdőadatok—amikor minden szabadon megadható változót a Schwarzschild-kezdőadatnak megfelelően rögzítettünk—közül egyedül a Schwarzschild-kezdőadat aszimptotikusan sík, egyébként a \mathbf{K} változó monopólus része túl lassan cseng le. A gyengén közel-Schwarzschild megoldások esetén a szabadon választható változók némelyikét úgy módosítottuk, hogy ezáltal a megváltozott egyenletek \mathbf{K} monopólusának kedvezőbb lecsengést biztosítsanak. A parabolikus-hiperbolikus rendszer esetén erősen aszimptotikusan sík megoldások egy családját tárgyaltuk, az algebrai-hiperbolikus rendszer esetén egy gyengén aszimptotikusan sík megoldást mutattunk be, ezzel demonstrálva, hogy az eljárás alkalmas aszimptotikusan sík deformált feketelyuk kezdőadatok előállítására.

A dolgozatban bemutatott eredményeimet a következő tézispontokban foglalom össze:

1. PhD munkám során kifejlesztettem egy új, a spinsúlyozott harmonikus gömbfüggvényeken alapuló teljesen spektrális módszert. Az eljárás alapjául szolgáló összefüggéseket kivonatolt formában [52] függelékében ismertettük.

A módszert eddig két, elméleti háttérben jelentősen eltérő alkalmazás fejlesztésében alkalmaztam. A gyakorlatban bebizonyosodott, hogy ez az eljárás rendkívül pontos és hatékony numerikus eljárást eredményez.

2. Részletesen vizsgáltam a Kerr-téridő feletti elektromágneses és gravitációs perturbációk hosszútávú időfejlődését, illetve azok aszimptotikus viselkedését. A konformis kompaktifikáció, valamint a hiperboloidális kezdőértékprobléma alkalmazása lehetővé tette, hogy a perturbációk lecsengésének ütemét közvetlenül az eseményhorizonton, a jövő fényszerű végtelenben és a jövő időszerű végtelent közelítendő, köztes helyeken az evolúció kései szakaszaiban meghatározzam. Az ilyen természetű vizsgálatok sorában megkülönbözteti munkámat a nem tengelyszimmetrikus konfigurációknak szentelt kitüntetett figyelem. Megmutattam, hogy ezekben az esetekben létezik a konfigurációknak egy halmaza, amelynek a viselkedését korábbi analitikus vizsgálatok nem írják le megfelelő módon. Érdemes kiemelni, hogy a numerikus eljárásaim helyességét alátámasztandó, valamint az alapegyenletek megfelelő implementációjának ellenőrzésére elsőként alkalmaztam az adott kontextusban újszerűnek számító megmaradó áramokat. A vonatkozó eredményeimet egy PRD közlemény foglalja össze [52].
3. Ugyanezen kereteken belül részletesen tanulmányoztam bozonikus perturbációk szuperradiáns szórását. Meghatároztam azokat a differenciáloperátorokat, amelyek a TME adott spinsúlyú megoldásait ellentett spinsúlyú megoldásokba képezi. Ezzel kiegészítve az elő-

zó pontban is hivatkozott megmaradó áramokat azok alkalmassá váltak egyetlen megoldás szuperradiáns amplifikációjának jellemzésére. A vizsgált megoldásokat három csoportba soroltam aszerint, hogy a kezdőadat milyen arányban fed át az ergoszférával. Eredményeim azt sugallják, hogy jelentős szuperradianciára akkor számíthatunk, amikor a kezdőadat nem elhanyagolható része tartózkodik az ergoszférában. A témában írt tanulmányt publikációra elfogadta a PRD [92].

4. Vizsgáltam a kényszeregyenletek perturbált Schwarzschild megoldásait. A kényszeregyenletek evolúciós egyenletekként történő értelmezése során nem magától értetődő, hogyan kontrollálhatnánk a megoldások aszimptotikus viselkedését. Megmutattam, hogy a szakirodalomban ezidáig használt közel-Schwarzschild megoldáscsalád meghatározása túlságosan merev, az adott igen szűk osztályban nincs aszimptotikusan sík megoldás a gömbszimmetrikus Schwarzschild-kezdőadatot leszámítva. Minden más esetben a magasabb rendű módusok bekapcsolnak egy visszacsatolást, ami miatt a kezdőadat külső görbülete tenzoriális vetületének a nyomának a monopól része nem képes kellően gyorsan lecsengeni. Ezt követően megmutattam, hogy a közel-Schwarzschild megoldáscsalád meghatározásának kereteit lazítva, azaz a vizsgált megoldáshalmaz megfelelő bővítésével, a kritikus módus lecsengése jelentősen javítható. Konkrétan, igazoltam, hogy a kényszeregyenletek mindkét evolúciós alakjára vonatkozóan – azaz, akár a parabolikus-hiperbolikus, akár pedig az algebrai-hiperbolikus egyenletek választása esetén – végtelen sok olyan közel-Schwarzschild-kezdőadat található, amely egyben aszimptotikusan sík is. A témában írt tanulmány a CQG-ben jelent meg [113].

A Teukolsky-egyenlet megoldásainak vizsgálata lehetővé tette, hogy egy egyszerűbb rögzített háttér mellett szerezzek tapasztalatot a spektrális módszer, a konformis kompaktifikáció és hiperbolikus kezdőérték probléma együttes alkalmazásában, miközben a tanulmányozott problémák önmagukban is érdekesek, hiszen a feketelyuk-fizika legalapvetőbb elvi kérdéseit érintik. Az elsajátított ismeretek átültetése a jóval bonyolultabb, dinamikusan változó háttér esetére folyamatban van. Már a kényszeregyenletekhez kapcsolódó eddigi vizsgálataink révén is sokat haladtunk abba az irányba, hogy minél általánosabb nemlineáris kifejezéseket tudjunk kiértékelni. A célunk az Einstein-egyenlet teljes kezdőérték problémájának megoldására is alkalmas programcsomag létrehozása. A teljesen spektrális módszerünk eddig tanúsított kiemelkedő hatékonysága azzal kecsget, hogy az időfejlődés minden lépésében megoldva a kényszereket egy teljesen megszorított evolúciót megvalósító alkalmazást fejlesszünk ki.


Köszönetnyilvánítás

Mindenek előtt hálával tartozom témavezetőmnek, Rácz Istvánnak a szakmai útmutatásért, hogy végig mellettem állt. Az általános relativitáselmélet területére az ő kurzusa vezetett be és azóta is folyamatosan segít eligazodnom a legújabb eredmények között.

Köszönet illeti Lévai Pétert, intézetünk igazgatóját, hogy ebben a szakmai közegben végezhettem a munkámat.

Külön köszönet jár László Andrásnak és Tóth Gábor Zsoltnak, a türelemért, amivel az általuk végzett vizsgálatok legapróbb részleteit is megosztották velem, különös tekintettel az általuk írt kódokra. A munkájuk számtalan helyen inspirált más problémák megoldása során is.

Családom áldozatvállalása nélkül mindez nem valósulhatott volna meg. Köszönöm, hogy támogattak, amikor nem a könnyű utat választottam.

A dolgozatomban ismertetett kutatások egy részét az NKFIH K-115434-es számú pályázata, a Rácz István által vezetett „POLONEZ programme of the National Science Centre of Poland (under the project No. 2016/23/P/ST1/04195) which has received funding from the European Unions Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No. 665778”  nevű pályázat, valamint a CA16104-es azonsítójú, „Gravitational waves, black holes and fundamental physics” COST projekt támogatta.

A. függelék

A homogén TME

Ahogy a 3.3. fejezetben említettük, regularizáció után Teukolsky mesteregyenlete a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \partial_{TT}\Phi^{(s)} = & \frac{1}{\mathcal{A} + \mathcal{B} \cdot Y_2^0} \left[c_{RR} \cdot \partial_{RR}\Phi^{(s)} + c_{TR} \cdot \partial_{TR}\Phi^{(s)} + c_{T\varphi} \cdot \partial_{T\varphi}\Phi^{(s)} + c_{R\varphi} \cdot \partial_{R\varphi}\Phi^{(s)} \right. \\ & \left. + c_{\vartheta\vartheta} \cdot \bar{\partial}\partial\Phi^{(s)} + c_T \cdot \partial_T\Phi^{(s)} + i c_{Ty} Y_1^0 \cdot \partial_T\Phi^{(s)} + c_R \cdot \partial_R\Phi^{(s)} + c_\varphi \cdot \partial_\varphi\Phi^{(s)} + c_0 \cdot \Phi^{(s)} \right]. \end{aligned}$$

Alább felsoroljuk az összes itt megjelenő R -től függő együtthatót. Többek között az \mathcal{A} -ra és \mathcal{B} -re vonatkozó formulák:

$$\mathcal{A} = \mathbf{a} + \mathbf{b}/3 \quad \text{és} \quad \mathcal{B} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \mathbf{b}, \quad \text{ahol} \quad (\text{A.0.1})$$

$$\mathbf{a} = -4R \left(A_0 + A_1R + A_2R^2 + A_3R^3 + A_4R^4 + A_5R^5 + A_6R^6 \right), \quad (\text{A.0.2})$$

$$A_0 = -M, \quad (\text{A.0.3})$$

$$A_1 = a^2 - 1 + 4a^2M - 5M + 4a^2M^2 - 8M^2, \quad (\text{A.0.4})$$

$$A_2 = a^2 - 1 + 4a^2M - 11M + 4a^2M^2 - 24M^2 - 16M^3, \quad (\text{A.0.5})$$

$$A_3 = -4a^2M + M - 8a^2M^2 - 8M^2 - 16M^3, \quad (\text{A.0.6})$$

$$A_4 = -4a^2M - 8a^2M^2 + 8M^2 + 16M^3, \quad (\text{A.0.7})$$

$$A_5 = 4a^2M^2 + 16M^3, \quad (\text{A.0.8})$$

$$A_6 = 4a^2M^2, \quad (\text{A.0.9})$$

$$\mathbf{b} = a^2(1 + R)(R^2 + 1)^2. \quad (\text{A.0.10})$$

A maradék együtthatók:

$$c_{RR} = \frac{1}{4}(1+R)(R^2-1)^2(c_{RR0} + c_{RR1}R + c_{RR2}R^2 + c_{RR3}R^3 + c_{RR4}R^4), \quad (\text{A.0.11})$$

$$c_{RR0} = a^2, \quad (\text{A.0.12})$$

$$c_{RR1} = -4M, \quad (\text{A.0.13})$$

$$c_{RR2} = -2(a^2 - 2), \quad (\text{A.0.14})$$

$$c_{RR3} = 4M, \quad (\text{A.0.15})$$

$$c_{RR4} = a^2, \quad (\text{A.0.16})$$

$$c_{TR} = 2R(1+R) \left[c_{TR0} + c_{TR1}R + c_{TR2}R^2 + c_{TR3}R^3 + c_{TR4}R^4 + c_{TR5}R^5 + c_{TR6}R^6 \right], \quad (\text{A.0.17})$$

$$c_{TR0} = -a^2 - 2a^2M + 2M, \quad (\text{A.0.18})$$

$$c_{TR1} = 4M(1+2M), \quad (\text{A.0.19})$$

$$c_{TR2} = 2(a^2 - 2 + 3a^2M - 4M), \quad (\text{A.0.20})$$

$$c_{TR3} = -4M(1+4M), \quad (\text{A.0.21})$$

$$c_{TR4} = -a^2 - 6a^2M + 6M, \quad (\text{A.0.22})$$

$$c_{TR5} = 8M^2, \quad (\text{A.0.23})$$

$$c_{TR6} = 2a^2M, \quad (\text{A.0.24})$$

$$c_{T\varphi} = 4aR(1+R)(1+R^2)(-1-2M+2MR^2), \quad (\text{A.0.25})$$

$$c_{R\varphi} = a(1+R^2)(R-1)^2(R+1)^3, \quad (\text{A.0.26})$$

$$c_{\vartheta\vartheta} = (1+R)(R^2+1)^2, \quad (\text{A.0.27})$$

$$c_T = \frac{1}{1+R^2} \left(c_{T0} + c_{T1}R + c_{T2}R^2 + c_{T3}R^3 + c_{T4}R^4 + c_{T5}R^5 + c_{T6}R^6 + c_{T7}R^7 + c_{T8}R^8 + c_{T9}R^9 \right), \quad (\text{A.0.28})$$

$$c_{T0} = a^2 + 2a^2M - 2M - 2Ms, \quad (\text{A.0.29})$$

$$c_{T1} = a^2 + 2a^2M - 2M - 4s - 6Ms - 8M^2s, \quad (\text{A.0.30})$$

$$c_{T2} = 5a^2 - 4 + 12a^2M - 14M + 4s + 6Ms - 8M^2s, \quad (\text{A.0.31})$$

$$c_{T3} = 5a^2 - 4 + 12a^2M - 30M - 48M^2 - 8s + 2Ms - 8M^2s, \quad (\text{A.0.32})$$

$$c_{T4} = -5a^2 + 4 - 24a^2M + 10M - 48M^2 + 8s + 18Ms - 8M^2s, \quad (\text{A.0.33})$$

$$c_{T5} = -5a^2 + 4 - 24a^2M + 26M + 32M^2 - 4s + 22Ms + 8M^2s, \quad (\text{A.0.34})$$

$$c_{T6} = -a^2 + 4a^2M + 6M + 32M^2 + 4s + 10Ms + 8M^2s, \quad (\text{A.0.35})$$

$$c_{T7} = -a^2 + 4a^2M + 6M + 16M^2 + 14Ms + 8M^2s, \quad (\text{A.0.36})$$

$$c_{T8} = 2M(3a^2 + 8M + 4Ms), \quad (\text{A.0.37})$$

$$c_{T9} = 6a^2M, \quad (\text{A.0.38})$$

$$c_{Ty} = -4a(1+R)(R^2+1)^2s\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \quad (\text{A.0.39})$$

$$c_R = \frac{1}{2R(1+R^2)} (R-1)(R+1)^2 \left(c_{R0} + c_{R1}R + c_{R2}R^2 + c_{R3}R^3 + c_{R4}R^4 + c_{R5}R^5 + c_{R6}R^6 + c_{R7}R^7 + c_{R8}R^8 \right), \quad (\text{A.0.40})$$

$$c_{R0} = a^2, \quad (\text{A.0.41})$$

$$c_{R1} = -2M(1+s), \quad (\text{A.0.42})$$

$$c_{R2} = 3a^2 + 4s, \quad (\text{A.0.43})$$

$$c_{R3} = -2M(7+s), \quad (\text{A.0.44})$$

$$c_{R4} = -7a^2 + 12 + 8s, \quad (\text{A.0.45})$$

$$c_{R5} = 2M(5+s), \quad (\text{A.0.46})$$

$$c_{R6} = a^2 + 4 + 4s, \quad (\text{A.0.47})$$

$$c_{R7} = 2M(3+s), \quad (\text{A.0.48})$$

$$c_{R8} = 2a^2, \quad (\text{A.0.49})$$

$$c_\varphi = \frac{1}{R}a(R-1)(R^2+1)^2(R+1)^2, \quad (\text{A.0.50})$$

$$c_0 = \frac{1}{2R^2}(R-1)(R^2+1)^2(R+1)^2(-a^2 + 2MR + a^2R^2 + 2MRs). \quad (\text{A.0.51})$$

B. függelék

A megmaradó áramok

Az energiára és impulzusmomentumra vonatkozó mérlegegyenletek kiértékeléséhez szükségünk van a $\sqrt{|h_T|} n_a^{(T)} E^a$, $\sqrt{|h_R|} n_a^{(R)} E^a$, $\sqrt{|h_T|} n_a^{(T)} J^a$ és $\sqrt{|h_R|} n_a^{(R)} J^a$ mennyiségek explicit alakjára. A következő alfejezetek az implementált kifejezések explicit alakját adják meg.

B.1. Energiasűrűség

$$\begin{aligned}
\sqrt{|h_T|} n_a^{(T)} E^a &= (c_{TT} + c_{TTy} Y_2^0) \partial_T \Phi^{(s)} \partial_T \Phi^{(-s)} + c_{\partial\vartheta} (\Phi^{(s)} \bar{\partial} \bar{\partial} \Phi^{(-s)} + \Phi^{(-s)} \bar{\partial} \bar{\partial} \Phi^{(s)}) \\
&+ c_{R\varphi} (\partial_R \Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} + \partial_\varphi \Phi^{(s)} \partial_R \Phi^{(-s)}) + c_{RR} \partial_R \Phi^{(s)} \partial_R \Phi^{(-s)} \\
&+ (c_R + s c_{Rs}) \Phi^{(s)} \partial_R \Phi^{(-s)} + (c_R - s c_{Rs}) \Phi^{(-s)} \partial_R \Phi^{(s)} \\
&+ c_\varphi (\Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} + \Phi^{(-s)} \partial_\varphi \Phi^{(s)}) + c_0 \Phi^{(s)} \Phi^{(-s)}, \tag{B.1.1}
\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}
c_{TT} &= \frac{1}{6(1+R)R^2(1+R^2)} \left(a^2(1+R)[-1 + 2(5 + 24M + 24M^2)R^2 \right. \\
&\quad - (1 + 48M + 96M^2)R^4 + 48M^2R^6] + 12R[-(R(1+R)) \\
&\quad + M(-1 - 5R - 11R^2 + R^3) + 8M^2R(-1 - 3R - R^2 + R^3) \\
&\quad \left. + 16M^3(-1+R)R^2(R+1)^2 \right), \tag{B.1.2}
\end{aligned}$$

$$c_{TTy} = - \frac{2a^2(1+R^2)}{3R^2} \sqrt{\frac{\pi}{5}}, \tag{B.1.3}$$

$$c_{\partial\vartheta} = \frac{1+R^2}{4R^2}, \tag{B.1.4}$$

$$c_{R\varphi} = - \frac{a(R^2-1)^2}{4R^2}, \tag{B.1.5}$$

$$c_{RR} = - \frac{(R^2 - 1)^2(4R(R + M(R^2 - 1)) + a^2(R^2 - 1)^2)}{8R^2(1 + R^2)}, \quad (\text{B.1.6})$$

$$c_R = - \frac{(R^2 - 1)(a^2(R^2 - 1)^2 + 2R(2R + 2M(R^2 - 1)))}{8R^3}, \quad (\text{B.1.7})$$

$$c_{Rs} = - \frac{(R^2 - 1)(4R^2 - 2MR + 2MR^3)}{8R^3}, \quad (\text{B.1.8})$$

$$c_\varphi = - \frac{a(-1 + R^4)}{4R^3}, \quad (\text{B.1.9})$$

$$c_0 = - \frac{(1 + R^2)(4R(R + M(R^2 - 1)) + a^2(R^2 - 1)^2)}{8R^4}. \quad (\text{B.1.10})$$

B.2. Energiaáram

$$\begin{aligned} \sqrt{|h_R|} n_a^{(R)} E^a &= c_{TT} \partial_T \Phi^{(s)} \partial_T \Phi^{(-s)} + c_{TR} (\partial_T \Phi^{(s)} \partial_R \Phi^{(-s)} + \partial_T \Phi^{(-s)} \partial_R \Phi^{(s)}) \\ &\quad + c_{T\varphi} (\partial_T \Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} + \partial_\varphi \Phi^{(s)} \partial_T \Phi^{(-s)}) \\ &\quad + (c_T + s c_{Ts}) \Phi^{(s)} \partial_T \Phi^{(-s)} + (c_T - s c_{Ts}) \Phi^{(-s)} \partial_T \Phi^{(s)}, \end{aligned} \quad (\text{B.2.1})$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{TT} &= \frac{1}{R + R^3} (a^2(-1 + 2M(R^2 - 1))(R^2 - 1)^2 \\ &\quad + 2(-2R^2 + 4M^2R(R^2 - 1)^2 + M(1 + 4R + 3R^2)(R - 1)^2)), \end{aligned} \quad (\text{B.2.2})$$

$$c_{TR} = \frac{(R^2 - 1)^2(4R(R + M(R^2 - 1)) + a^2(R^2 - 1)^2)}{8R^2(1 + R^2)}, \quad (\text{B.2.3})$$

$$c_{T\varphi} = \frac{a(R^2 - 1)^2}{4R^2}, \quad (\text{B.2.4})$$

$$c_T = \frac{(R^2 - 1)(a^2(R^2 - 1)^2 + 2R(2R + 2M(R^2 - 1)))}{8R^3}, \quad (\text{B.2.5})$$

$$c_{Ts} = \frac{(R^2 - 1)(4R^2 - 2MR + 2MR^3)}{8R^3}. \quad (\text{B.2.6})$$

B.3. Impulzusmomentum-sűrűség

$$\begin{aligned} \sqrt{|h_T|} n_a^{(T)} J^a &= (c_{T\varphi} + c_{T\varphi y} Y_2^0) (\partial_T \Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} + \partial_\varphi \Phi^{(s)} \partial_T \Phi^{(-s)}) \\ &\quad + c_{R\varphi} (\partial_R \Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} + \partial_\varphi \Phi^{(-s)} \partial_R \Phi^{(s)}) + c_{\varphi\varphi} \partial_\varphi \Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} \\ &\quad + (c_\varphi + s(c_{\varphi s} + c_{\varphi y} iY_1^0)) \Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} \\ &\quad + (c_\varphi - s(c_{\varphi s} + c_{\varphi y} iY_1^0)) \Phi^{(-s)} \partial_\varphi \Phi^{(s)}, \end{aligned} \quad (\text{B.3.1})$$

ahol

$$c_{R\varphi} = \frac{1}{2(R+R^3)} \left(a^2(-1+2M(R^2-1))(R^2-1)^2 + 2(-2R^2+4M^2R(R^2-1)^2+M(1+4R+3R^2)(R-1)^2) \right), \quad (\text{B.3.2})$$

$$c_{T\varphi} = \frac{1}{6(1+R)R^2(1+R^2)} \left(a^2(1+R)(-1+2(5+24M+24M^2)R^2 - (1+48M+96M^2)R^4+48M^2R^6) + 12R[-R(1+R) + M(-1-5R-11R^2+R^3) + 8M^2R(-1-3R-R^2+R^3) + 16M^3(-1+R)R^2(R+1)^2] \right), \quad (\text{B.3.3})$$

$$c_{T\varphi y} = -\frac{2a^2(1+R^2)}{3R^2} \sqrt{\frac{\pi}{5}}, \quad (\text{B.3.4})$$

$$c_{\varphi\varphi} = \frac{2a(-1+2M(R^2-1))}{R} \quad (\text{B.3.5})$$

$$c_{\varphi} = \frac{1}{2R^2(R^2-1)} \left(a^2(R^2-1)^2(2M(R^2-1)-1) + 2(4M^2R(R^2-1)^2-2R^2+M(R-1)^2(1+4R+3R^2)) \right), \quad (\text{B.3.6})$$

$$c_{\varphi s} = \frac{(4M^2(R-1)R(R+1)^2+M(7R^3+5R^2-3R-1)+2(R-1)R)}{2R^2(R+1)}, \quad (\text{B.3.7})$$

$$c_{\varphi y} = -\frac{a(R^2+1)}{R^2} \sqrt{\frac{\pi}{3}}. \quad (\text{B.3.8})$$

B.4. Impulzusmomentum-áram

$$\begin{aligned} \sqrt{|h_R|} n_a^{(R)} J^a &= c_{R\varphi} (\partial_R \Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} + \partial_R \Phi^{(-s)} \partial_\varphi \Phi^{(s)}) + c_{\varphi\varphi} \partial_\varphi \Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} \\ &\quad + c_{T\varphi} (\partial_T \Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} + \partial_\varphi \Phi^{(s)} \partial_T \Phi^{(-s)}) \\ &\quad + (c_\varphi + s c_{\varphi s}) \Phi^{(s)} \partial_\varphi \Phi^{(-s)} + (c_\varphi - s c_{\varphi s}) \Phi^{(-s)} \partial_\varphi \Phi^{(s)}, \end{aligned} \quad (\text{B.4.1})$$

ahol

$$c_{R\varphi} = \frac{(R^2-1)^2(4R(R+M(R^2-1))+a^2(R^2-1)^2)}{8R^2(1+R^2)}, \quad (\text{B.4.2})$$

$$c_{T\varphi} = \frac{1}{2(R+R^3)} \left(a^2(-1+2M(R^2-1))(R^2-1)^2 + 2(-2R^2+4M^2R(R^2-1)^2 + M(1+4R+3R^2)(R-1)^2) \right), \quad (\text{B.4.3})$$

$$c_{\varphi\varphi} = \frac{a(R^2 - 1)^2}{2R^2}, \quad (\text{B.4.4})$$

$$c_{\varphi} = \frac{(R^2 - 1) \left(a^2 (R^2 - 1)^2 + 2R(2M(R^2 - 1) + 2R) \right)}{8R^3}, \quad (\text{B.4.5})$$

$$c_{\varphi s} = \frac{(R^2 - 1)(2MR^3 - 2MR + 4R^2)}{8R^3}. \quad (\text{B.4.6})$$

C. függelék

Az adjungált megoldások

Ahogy a 3.4.2. fejezetben felidéztük [83]-ban Wald egy elegáns és általános módszert adott arra, hogy a TME s spinsúlyú $\psi^{(s)}$ megoldásából hogyan állíthatjuk elő a TME egy $-s$ spinsúlyú $\psi^{(-s)}$ megoldását. Ebben a függelékben alkalmazzuk az eljárást $s = -1$ és $s = 1$ spinsúlyú elektromágneses, valamint $s = -2$ és $s = 2$ spinsúlyú gravitációs perturbációk közötti kapcsolatot létesítő differenciáloperátorok meghatározására.

C.1. Elektromágneses perturbációk

A rögzített háttér feletti elektromágneses perturbációk dinamikáját leíró (3.4.8) lineáris egyenlet sematikusán a

$$\mathcal{E}_E(A_b) = 0 \quad (\text{C.1.1})$$

formában írható, ahol az A_a vektorpotenciál játssza a $(0, 1)$ típusú f tenzormező szerepét és

$$[\mathcal{E}_E(A_b)]_a = [g^b{}_a \square - g^{bc} \nabla_c \nabla_a] A_b \quad (\text{C.1.2})$$

a Maxwell-egyenlet ezen a háttéren. Könnyen belátható, hogy \mathcal{E}_E önadjungált.

Az $s = 1$ és $s = -1$ értékek esetére a ${}^{(s)}\mathcal{O}$, ${}^{(s)}\mathcal{T}$ és ${}^{(s)}\mathcal{S}$ operátorok meghatározása alább következik.

Először felidézzük, hogy a ϕ_0 és ϕ_1 Maxwell-skalárokat a

$$\phi_0 = \ell^a m^b F_{ab} = [m^a D - \ell^a \delta] A_a, \quad (\text{C.1.3})$$

$$\phi_2 = \bar{m}^a n^b F_{ab} = [n^a \bar{\delta} - \bar{m}^a \Delta] A_a \quad (\text{C.1.4})$$

kontrakciókkal értelmezzük. A TME függő változói

$$\psi^{(+1)} = \phi_0, \quad (\text{C.1.5})$$

$$\psi^{(-1)} = (\Psi_2)^{-2/3} \phi_2 \quad (\text{C.1.6})$$

módon írhatóak, ami alapján az A_a mezőt az extrémális spinsúlyú $\psi^{(\pm 1)}$ Teukolsky-változókba képező $(\pm 1)\mathcal{O}$ operátorok alakja a következő:

$$\begin{aligned}\psi^{(+1)} &= [^{(+1)}\mathcal{O}]^a A_a = [m^a D - \ell^a \delta] A_a \\ &= [(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - \bar{\varrho}) m^a - (\delta + \bar{\omega} - \beta - \bar{\alpha}) \ell^a] A_a,\end{aligned}\tag{C.1.7}$$

$$\begin{aligned}\psi^{(-1)} &= [^{(-1)}\mathcal{O}]^a A_a = (\Psi_2)^{-2/3} [n^a \bar{\delta} - \bar{m}^a \Delta] A_a \\ &= (\Psi_2)^{-2/3} [(\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau}) n^a - (\Delta + \bar{\mu} - \bar{\gamma} + \gamma) \bar{m}^a] A_a.\end{aligned}\tag{C.1.8}$$

A $(\pm 1)\mathcal{T}$ operátorok alakját közvetlenül leolvashatjuk a (3.2.42) és (3.2.43) egyenletekről:

$$\begin{aligned}^{(+1)}\mathcal{T} &= [(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\varrho - \bar{\varrho})(\Delta + \mu - 2\gamma) \\ &\quad - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\omega})(\bar{\delta} + \varpi - 2\alpha)],\end{aligned}\tag{C.1.9}$$

$$\begin{aligned}^{(-1)}\mathcal{T} &= [(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + \bar{\mu})(D + \varrho + 2\epsilon) \\ &\quad - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})(\delta + \tau + 2\beta)].\end{aligned}\tag{C.1.10}$$

A NP-deriváltakra vonatkozó (3.4.14-3.4.16) egyenletek segítségével igazolható, hogy

$$^{(+1)}\mathcal{T} = [^{(-1)}\mathcal{T}]^\dagger,\tag{C.1.11}$$

$$^{(-1)}\mathcal{T} = [^{(+1)}\mathcal{T}]^\dagger.\tag{C.1.12}$$

Az $(\pm 1)\mathcal{S}$ operátorokat legegyszerűbben a (3.2.23) és (3.2.24) egyenletek jobb oldalán olvashatjuk le:

$$^{(+1)}\mathcal{S}^a = (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\omega}) \ell^a - (D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\varrho - \bar{\varrho}) m^a,\tag{C.1.13}$$

$$^{(-1)}\mathcal{S}^a = (\Psi_2)^{-2/3} [(\Delta + \varrho - \bar{\varrho} + 2\mu + \bar{\mu}) \bar{m}^a - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\varpi - \bar{\tau}) n^a],\tag{C.1.14}$$

míg az adjungáltak

$$[^{(+1)}\mathcal{S}^\dagger]^a = [m^a (D + 2\epsilon + \varrho) - \ell^a (\delta + 2\beta + \tau)],\tag{C.1.15}$$

$$[^{(-1)}\mathcal{S}^\dagger]^a = [n^a (\bar{\delta} - 2\alpha - \varpi) - \bar{m}^a (\Delta - 2\gamma - \mu)] (\Psi_2)^{-2/3}.\tag{C.1.16}$$

C.1.1. Wald első tétele elektromágneses perturbációkra

Ezeket a $(\pm 1)\mathcal{S}^\dagger$ adjungált operátorokat alkalmazva a Teukolsky-egyenlet $\psi^{(+1)}$ és $\psi^{(-1)}$ megoldásaira előállíthatjuk a (C.1.1) egyenlet $^{(+1)}\widehat{A}_a$ és $^{(-1)}\widehat{A}_a$ megoldásait

$$\begin{aligned}^{(-1)}\widehat{A}_a &= \Re \mathfrak{e} [^{(-1)}\mathcal{S}^\dagger \psi^{(-1)}] \\ &= \frac{1}{2} [m_a (D + 2\epsilon + \varrho) \psi^{(-1)} - \ell_a (\delta + 2\beta + \tau) \psi^{(-1)} \\ &\quad + \bar{m}_a (D + 2\bar{\epsilon} + \bar{\varrho}) \overline{\psi^{(-1)}} - \ell_a (\bar{\delta} + 2\bar{\beta} + \bar{\tau}) \overline{\psi^{(-1)}}]\end{aligned}\tag{C.1.17}$$

és

$$\begin{aligned}
^{(+1)}\widehat{A}_a &= \Re \left[^{(+1)}\mathcal{S}^\dagger \psi^{(+1)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[n_a (\bar{\delta} - 2\alpha - \varpi) (\Psi_2)^{-2/3} \psi^{(+1)} - \bar{m}_a (\Delta - 2\gamma - \mu) (\Psi_2)^{-2/3} \psi^{(+1)} \right. \\
&\quad \left. + n_a (\delta - 2\bar{\alpha} - \bar{\varpi}) \overline{(\Psi_2)^{-2/3} \psi^{(+1)}} - m_a (\Delta - 2\bar{\gamma} - \bar{\mu}) \overline{(\Psi_2)^{-2/3} \psi^{(+1)}} \right], \quad (\text{C.1.18})
\end{aligned}$$

ahol \Re az adott komplex mennyiség valós részének képzését jelöli. Megjegyezzük, hogy sem $^{(+1)}\widehat{A}_a$ -nek, sem $^{(-1)}\widehat{A}_a$ -nek nincs közvetlen kapcsolata azzal a A_a vektorpotenciállal, amiből $\psi^{(\pm 1)} = [^{(\pm 1)}\mathcal{O}]^a A_a$ módon az eredeti $\psi^{(+1)}$ és $\psi^{(-1)}$ mezőket képeztük.

C.1.2. Wald második tétele elektromágneses perturbációkra

A 3.4.2-ben elmondottaknak megfelelően, ha az előbb kapott $^{(\pm 1)}\widehat{A}_a$ vektorpotenciálokra alkalmazzuk a $^{(\pm 1)}\mathcal{O}$ operátorokat, akkor a $\psi^{(\mp 1)}$ változókból előállíthatjuk a Teukolsky-egyenlet új $\widehat{\psi}^{(\pm 1)}$ megoldásait:

$$\widehat{\psi}^{(+1)} = \frac{1}{2} (D - \epsilon + \bar{\epsilon} - \bar{\varrho}) (D + 2\bar{\epsilon} + \bar{\varrho}) \overline{\psi^{(-1)}}, \quad (\text{C.1.19})$$

$$\widehat{\psi}^{(-1)} = \frac{1}{2} (\Psi_2)^{-2/3} (\Delta + \bar{\mu} - \bar{\gamma} + \gamma) (\Delta - 2\bar{\gamma} - \bar{\mu}) [(\overline{\Psi_2})^{-2/3} \overline{\psi^{(+1)}}]. \quad (\text{C.1.20})$$

Kinnersley-tetrádot alkalmazva $\epsilon = 0$ és a D-típusú vákuum téridőkben érvényes $D\varrho = \varrho^2$ összefüggés segítségével (C.1.19) az

$$\widehat{\psi}^{(+1)} = \frac{1}{2} DD \overline{\psi^{(-1)}} \quad (\text{C.1.21})$$

alakra egyszerűsödik.

C.2. Gravitációs perturbációk

A linearizált Einstein-egyenlet

$$\mathcal{E}_G(h_{ef}) = 0 \quad (\text{C.2.1})$$

alakban írható, ahol a $h_{ab} (= g_{ab} - \eta_{ab})$ metrikus perturbáció játssza a $(0, 2)$ típusú f tenzormező szerepét, \mathcal{E}_G pedig

$$\begin{aligned}
[\mathcal{E}_G(h_{ef})]_{ab} &= \frac{1}{2} \left[g^f{}_a g^{eg} \nabla_g \nabla_b + g^f{}_b g^{eg} \nabla_g \nabla_a \right. \\
&\quad \left. - g^e{}_a g^f{}_b \square - g^{ef} \nabla_a \nabla_b - g_{ab} g^{eg} g^{fh} \nabla_g \nabla_h + g_{ab} g^{ef} \square \right] h_{ef} \quad (\text{C.2.2})
\end{aligned}$$

módon hat a h_{ab} perturbációkon. Belátható, hogy \mathcal{E}_G önadjungált.

Az $s = 2$ és $s = -2$ értékek esetére a ${}^{(s)}\mathcal{O}$, ${}^{(s)}\mathcal{T}$ és ${}^{(s)}\mathcal{S}$ operátorok meghatározása alább következik.

A Ψ_0 és Ψ_4 Weyl-skalárokat a

$$\Psi_0 = -C_{abcd} l^a m^b l^c m^d, \quad (\text{C.2.3})$$

$$\Psi_4 = -C_{abcd} n^a \bar{m}^b n^c \bar{m}^d \quad (\text{C.2.4})$$

kontrakciókkal értelmezzük és a TME változóihoz

$$\psi^{(+2)} = \Psi_0 = [{}^{(+2)}\mathcal{O}]^{ab} h_{ab}, \quad (\text{C.2.5})$$

$$\psi^{(-2)} = (\Psi_2)^{-4/3} \cdot \Psi_4 = [{}^{(-2)}\mathcal{O}]^{ab} h_{ab}, \quad (\text{C.2.6})$$

módon köthetőek. A h_{ab} perturbációkat $\psi^{(\pm 2)}$ változókba képező ${}^{(\pm 2)}\mathcal{O}$ operátorok explicit alakját Chrzanowski munkájának [82] (B11) és (B12) egyenletei adják meg:

$$\begin{aligned} [{}^{(+2)}\mathcal{O}]^{ab} h_{ab} &= \Psi_0 = -\frac{1}{2} \{ (\delta + \bar{\omega} - 3\beta - \bar{\alpha})(\delta + \bar{\omega} - 2\beta - 2\bar{\alpha}) \ell^a \ell^b \\ &\quad + (D - \bar{\rho} - 3\epsilon + \bar{\epsilon})(D - \bar{\rho} - 2\epsilon + 2\bar{\epsilon}) m^a m^b \\ &\quad - [(D - \bar{\rho} - 3\epsilon + \bar{\epsilon})(\delta + 2\bar{\omega} - 2\beta) \\ &\quad + (\delta + \bar{\omega} - 3\beta - \bar{\rho})(D - 2\bar{\rho} - 2\epsilon)] n^{(a} \bar{m}^{b)} \} h_{ab}, \end{aligned} \quad (\text{C.2.7})$$

$$\begin{aligned} [{}^{(-2)}\mathcal{O}]^{ab} h_{ab} &= (\Psi_2)^{-4/3} \cdot \Psi_4 \\ &= -\frac{1}{2} (\Psi_2)^{-4/3} \{ (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 3\alpha + \bar{\beta})(\bar{\delta} - \bar{\tau} + 2\alpha + 2\bar{\beta}) n^a n^b \\ &\quad + (\Delta + \bar{\mu} + 3\varrho - \bar{\varrho})(\Delta + \bar{\mu} + 2\varrho - 2\bar{\varrho}) \bar{m}^a \bar{m}^b \\ &\quad - [(\Delta + \bar{\mu} + 3\varrho - \bar{\varrho})(\bar{\delta} - 2\bar{\tau} + 2\alpha) \\ &\quad + (\bar{\delta} - \bar{\tau} + 3\alpha + \bar{\beta})(\Delta + 2\bar{\mu} + 2\varrho)] n^{(a} \bar{m}^{b)} \} h_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.8})$$

A ${}^{(\pm 2)}\mathcal{T}$ operátorokat leolvashatjuk a (3.2.41) és (3.2.44) egyenletekről:

$$\begin{aligned} {}^{(+2)}\mathcal{T} &= [(D - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - 4\varrho - \bar{\varrho})(\Delta - 4\varrho + \mu) \\ &\quad - (\delta + \bar{\omega} - \bar{\alpha} - 3\beta - 4\tau)(\bar{\delta} - 4\alpha + \varpi) - 3\Psi_2], \end{aligned} \quad (\text{C.2.9})$$

$$\begin{aligned} {}^{(-2)}\mathcal{T} &= [(\Delta + 3\varrho - \bar{\varrho} + \bar{\mu})(D + 4\epsilon + 3\varrho) \\ &\quad - (\bar{\delta} - \bar{\tau} + \bar{\beta} + 3\alpha)(\delta + 4\beta + 3\tau) - 3\Psi_2]. \end{aligned} \quad (\text{C.2.10})$$

Egyszerű, de időigényes számolással belátható, hogy

$${}^{(+2)}\mathcal{T} = [{}^{(-2)}\mathcal{T}]^\dagger, \quad (\text{C.2.11})$$

$${}^{(-2)}\mathcal{T} = [{}^{(+2)}\mathcal{T}]^\dagger. \quad (\text{C.2.12})$$

Az $(\pm 2)\mathcal{S}$ operátorokat most is a forrástagokról olvashatjuk le. A (3.2.27) és (3.2.28) egyenletek alapján

$$\begin{aligned} & {}^{(+2)}\mathcal{S}^{ab} \\ &= (\delta + \overline{\omega} - \overline{\alpha} - 3\beta - 4\tau) [(D - 2\epsilon - 2\overline{\rho}) \ell^{(a} m^{b)} - (\delta + \overline{\omega} - 2\overline{\alpha} - 2\beta) \ell^a \ell^b] \\ & \quad + (D - 3\epsilon + \overline{\epsilon} - 4\varrho - \overline{\rho}) [(\delta + 2\overline{\omega} - 2\beta) \ell^{(a} m^{b)} - (D - 2\epsilon + 2\overline{\epsilon} - \overline{\rho}) m^a m^b], \end{aligned} \quad (\text{C.2.13})$$

$$\begin{aligned} & {}^{(-2)}\mathcal{S}^{ab} = (\Psi_2)^{-4/3} \\ & \cdot \left\{ (\Delta + 3\varrho - \overline{\rho} + 4\mu + \overline{\mu}) [(\overline{\delta} - 2\overline{\tau} + 2\alpha) n^{(a} \overline{m}^{b)} - (\Delta + 2\varrho - 2\overline{\rho} + \overline{\mu}) \overline{m}^a \overline{m}^b] \right. \\ & \quad \left. + (\overline{\delta} - \overline{\tau} + \overline{\beta} + 3\alpha + 4\varpi) [(\Delta + 2\varrho + 2\overline{\mu}) n^{(a} \overline{m}^{b)} - (\overline{\delta} - \overline{\tau} + 2\overline{\beta} + 2\alpha) n^a n^b] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.14})$$

Ezek alapján az $(\pm 2)\mathcal{S}$ operátorok adjungáltjai

$$\begin{aligned} & [{}^{(+2)}\mathcal{S}^\dagger]_{ab} \\ &= [\ell_{(a} m_{b)} (D + 3\epsilon + \overline{\epsilon} - \varrho + \overline{\rho}) - \ell_a \ell_b (\delta + 3\beta + \overline{\alpha} - \tau)] (\delta + 4\beta + 3\tau) \\ & \quad + [\ell_{(a} m_{b)} (\delta + 3\beta - \overline{\alpha} - \tau - \overline{\omega}) - m_a m_b (D + 3\epsilon - \overline{\epsilon} - \varrho)] (D + 4\epsilon + 3\varrho), \end{aligned} \quad (\text{C.2.15})$$

$$\begin{aligned} & [{}^{(-2)}\mathcal{S}^\dagger]_{ab} \\ &= \left\{ [n_{(a} \overline{m}_{b)} (\overline{\delta} - 3\alpha + \overline{\beta} + \varpi + \overline{\tau}) - \overline{m}_a \overline{m}_b (\Delta - 3\varrho + \overline{\rho} + \mu)] (\Delta - 4\varrho - 3\mu) \right. \\ & \quad \left. + [n_{(a} \overline{m}_{b)} (\Delta - 3\varrho - \overline{\rho} + \mu - \overline{\mu}) - n_a n_b (\overline{\delta} - 3\alpha - \overline{\beta} + \varpi)] (\overline{\delta} - 4\alpha - 3\varpi) \right\} \\ & \quad \cdot (\Psi_2)^{-4/3}. \end{aligned} \quad (\text{C.2.16})$$

C.2.1. Wald második tétele gravitációs perturbációkra

A 3.4.2-ben foglaltak alapján a $(\pm 2)\mathcal{S}^\dagger$ adjungált operátorokat alkalmazva a $\psi^{(+2)}$ és $\psi^{(-2)}$ megoldásokra megkaphatjuk a (C.2.1) egyenlet ${}^{(+2)}\widehat{h}_{ab}$ és ${}^{(-2)}\widehat{h}_{ab}$ megoldásait mint

$${}^{(+2)}\widehat{h}_{ab} = \Re \left[[{}^{(+2)}\mathcal{S}^\dagger]_{ab} \psi^{(+2)} \right] \quad (\text{C.2.17})$$

$${}^{(-2)}\widehat{h}_{ab} = \Re \left[[{}^{(-2)}\mathcal{S}^\dagger]_{ab} \psi^{(-2)} \right] \quad (\text{C.2.18})$$

Az elektromágneses perturbációk esetéhez hasonlóan sem ${}^{(+2)}\widehat{h}_{ab}$, sem ${}^{(-2)}\widehat{h}_{ab}$ nem kapcsolódik ahhoz a h_{ab} metrikus perturbációhoz, amiből a $\psi^{(\pm 2)} = [{}^{(\pm 1)}\mathcal{O}]^{ab} h_{ab}$ megoldásokat kapjuk.

A 3.4.2 tétel értelmében a ${}^{(+2)}\widehat{h}_{ab}$ és ${}^{(-2)}\widehat{h}_{ab}$ a perturbációkon alkalmazva a $(\pm 2)\mathcal{O}$ operátorokat az eredeti $\psi^{(\mp 2)}$ megoldásokból előállíthatjuk az új $\widehat{\psi}^{(\pm 2)}$ megoldásokat. A pontos formulák:

$$\widehat{\psi}^{(+2)} = \frac{1}{4} (D - \overline{\rho} - 3\epsilon + \overline{\epsilon}) (D - \overline{\rho} - 2\epsilon + 2\overline{\epsilon}) (D - 3\overline{\epsilon} + \epsilon - 4\overline{\rho} - \varrho) (D - 2\overline{\epsilon} + 2\epsilon - \varrho) \overline{\psi}^{(-2)}, \quad (\text{C.2.19})$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}^{(-2)} &= \frac{1}{4}(\Psi_2)^{-4/3} \\
&\cdot (\Delta + \bar{\mu} + 3\varrho - \bar{\varrho})(\Delta + \bar{\mu} + 2\varrho - 2\bar{\varrho})(\Delta - 3\bar{\varrho} + \varrho + \bar{\mu})(\Delta - 4\bar{\varrho} - 3\bar{\mu}) \\
&\cdot (\bar{\Psi}_2)^{-4/3} \overline{\psi^{(2)}}.
\end{aligned} \tag{C.2.20}$$

Az elektromágneses perturbációknál látottakhoz hasonlóan Kinnersley-tetrád alkalmazása mellett ($\epsilon = 0$) a D-típusú vákuum téridőkben érvényes $D\varrho = \varrho^2$ egyenlet felhasználásával a (C.2.19) egyenlet

$$\widehat{\psi}^{(2)} = \frac{1}{4} D D D D \overline{\psi^{(-2)}} \tag{C.2.21}$$

alakra egyszerűsödik.

D. függelék

A kényszerek nemlineáris perturbatív alakja

Ebben a függelékben mutatjuk be a gravitációs kényszeregyenletek nemlineáris perturbatív alakját. A **D.1.** fejezetben a parabolikus-hiperbolikus rendszerre vonatkozó, a **D.2.** fejezetben az algebrai-hiperbolikus rendszerre vonatkozó formulákat közöljük.

D.1. A parabolikus-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív alakja

$$\begin{aligned}
& \dot{K} \left[\partial_r {}^{(\omega)}\hat{N} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{N}}(\bar{\partial} {}^{(\omega)}\hat{N}) - \frac{1}{2} \overline{\tilde{\mathbf{N}}}(\partial {}^{(\omega)}\hat{N}) \right] \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{d}^{-1} \left\{ \left({}^{(\omega)}\hat{N}^2 + 2 {}^{(0)}\hat{N} {}^{(\omega)}\hat{N} \right) \left[\mathbf{a} \left(\bar{\partial} \bar{\partial} {}^{(\omega)}\hat{N} - \mathbf{B}(\bar{\partial} {}^{(\omega)}\hat{N}) \right) \right. \right. \\
& - \mathbf{b} \left(\bar{\partial}^2 {}^{(\omega)}\hat{N} - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{A}}(\bar{\partial} {}^{(\omega)}\hat{N}) - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{C}}(\partial {}^{(\omega)}\hat{N}) \right) + cc. \left. \right] \\
& + \left({}^{(\omega)}\hat{N}^2 + 2 {}^{(0)}\hat{N} {}^{(\omega)}\hat{N} \right) \left[\mathbf{a} \left(\bar{\partial} \bar{\partial} {}^{(0)}\hat{N} - \mathbf{B}(\bar{\partial} {}^{(0)}\hat{N}) \right) \right. \\
& - \mathbf{b} \left(\bar{\partial}^2 {}^{(0)}\hat{N} - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{A}}(\bar{\partial} {}^{(0)}\hat{N}) - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{C}}(\partial {}^{(0)}\hat{N}) \right) + cc. \left. \right] + {}^{(0)}\hat{N}^2 \left[\mathbf{a} \left(\bar{\partial} \bar{\partial} {}^{(\omega)}\hat{N} - \mathbf{B}(\bar{\partial} {}^{(\omega)}\hat{N}) \right) \right. \\
& - \mathbf{b} \left(\bar{\partial}^2 {}^{(\omega)}\hat{N} - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{A}}(\bar{\partial} {}^{(\omega)}\hat{N}) - \frac{1}{2} \overline{\mathbf{C}}(\partial {}^{(\omega)}\hat{N}) \right) + cc. \left. \right] \left. \right\} - {}^{(0)}\mathcal{A} {}^{(\omega)}\hat{N} \\
& - {}^{(0)}\hat{N}^3 {}^{(\omega)}\mathcal{B} - \left({}^{(\omega)}\hat{N}^3 + 3 {}^{(0)}\hat{N} {}^{(\omega)}\hat{N}^2 + 3 {}^{(0)}\hat{N}^2 {}^{(\omega)}\hat{N} \right) ({}^{(\omega)}\mathcal{B} + {}^{(0)}\mathcal{B}) = 0, \tag{D.1.1}
\end{aligned}$$

ahol

$$\mathcal{A} = {}^0\mathcal{A}, \quad (\text{D.1.2})$$

$$\begin{aligned} {}^\omega\mathcal{B} = \mathcal{B} - {}^0\mathcal{B} = & -\kappa {}^\omega\mathbf{K} - \frac{1}{4} ({}^\omega\mathbf{K}^2 + 2 {}^0\mathbf{K} {}^\omega\mathbf{K}) \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{d}^{-1} \left[2\mathbf{a} ({}^\omega\mathbf{k} \overline{{}^\omega\mathbf{k}} + {}^0\mathbf{k} \overline{{}^\omega\mathbf{k}} + {}^\omega\mathbf{k} \overline{{}^0\mathbf{k}}) \right. \\ & \left. - \mathbf{b} (\overline{{}^\omega\mathbf{k}}^2 + 2 \overline{{}^0\mathbf{k}} \overline{{}^\omega\mathbf{k}}) - \overline{\mathbf{b}} ({}^\omega\mathbf{k}^2 + 2 {}^0\mathbf{k} {}^\omega\mathbf{k}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.1.3})$$

$$\begin{aligned} \partial_r {}^\omega\mathbf{k} - \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{N}} (\overline{\partial} {}^\omega\mathbf{k}) - \frac{1}{2} \overline{\widetilde{\mathbf{N}}} (\partial {}^\omega\mathbf{k}) \\ - \frac{1}{2} \left[{}^\omega\widehat{\mathbf{N}} (\partial {}^\omega\mathbf{K}) + {}^0\widehat{\mathbf{N}} (\partial {}^\omega\mathbf{K}) + {}^\omega\widehat{\mathbf{N}} (\partial {}^0\mathbf{K}) \right] + {}^\omega\mathbf{f} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.1.4})$$

ahol

$$\begin{aligned} {}^\omega\mathbf{f} = \mathbf{f} - {}^0\mathbf{f} = & -\frac{1}{2} \left[{}^\omega\mathbf{k} (\partial \widetilde{\mathbf{N}}) + \overline{{}^\omega\mathbf{k}} (\partial \widetilde{\mathbf{N}}) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[{}^\omega\mathbf{K} (\partial {}^\omega\widehat{\mathbf{N}}) + {}^\omega\mathbf{K} (\partial {}^0\widehat{\mathbf{N}}) + {}^0\mathbf{K} (\partial {}^\omega\widehat{\mathbf{N}}) \right] - \kappa (\partial {}^\omega\widehat{\mathbf{N}}) - (\partial \kappa) {}^\omega\widehat{\mathbf{N}} + \overset{\star}{K} {}^\omega\mathbf{k} \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{d}^{-1} \left[[\mathbf{a} (\partial {}^\omega\widehat{\mathbf{N}}) - \mathbf{b} (\overline{\partial} {}^\omega\widehat{\mathbf{N}})] (\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ij} q^i q^j) + [\mathbf{a} (\overline{\partial} {}^\omega\widehat{\mathbf{N}}) - \overline{\mathbf{b}} (\partial {}^\omega\widehat{\mathbf{N}})] (\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{ij} q^i q^j) \right] \\ & + (q^i \widehat{D}^l \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{li}) {}^\omega\widehat{\mathbf{N}}. \end{aligned} \quad (\text{D.1.5})$$

Végül

$$\begin{aligned} \partial_r {}^\omega\mathbf{K} - \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{N}} (\overline{\partial} {}^\omega\mathbf{K}) - \frac{1}{2} \overline{\widetilde{\mathbf{N}}} (\partial {}^\omega\mathbf{K}) \\ - \frac{1}{2} \mathbf{d}^{-1} \left\{ {}^\omega\widehat{\mathbf{N}} \left[\mathbf{a} (\partial \overline{{}^\omega\mathbf{k}} + \overline{\partial} {}^\omega\mathbf{k}) - \mathbf{b} (\overline{\partial} \overline{{}^\omega\mathbf{k}}) - \overline{\mathbf{b}} (\partial {}^\omega\mathbf{k}) \right] \right. \\ + {}^0\widehat{\mathbf{N}} \left[\mathbf{a} (\partial \overline{{}^\omega\mathbf{k}} + \overline{\partial} {}^\omega\mathbf{k}) - \mathbf{b} (\overline{\partial} \overline{{}^\omega\mathbf{k}}) - \overline{\mathbf{b}} (\partial {}^\omega\mathbf{k}) \right] \\ \left. + {}^\omega\widehat{\mathbf{N}} \left[\mathbf{a} (\partial \overline{{}^0\mathbf{k}} + \overline{\partial} {}^0\mathbf{k}) - \mathbf{b} (\overline{\partial} \overline{{}^0\mathbf{k}}) - \overline{\mathbf{b}} (\partial {}^0\mathbf{k}) \right] \right\} + {}^\omega\mathbf{F} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.1.6})$$

ahol

$$\begin{aligned} {}^\omega\mathbf{F} = \mathbf{F} - {}^0\mathbf{F} = & \frac{1}{4} \mathbf{d}^{-1} \left\{ {}^\omega\widehat{\mathbf{N}} \left[2\mathbf{a} \mathbf{B} \overline{{}^\omega\mathbf{k}} - \mathbf{b} (\overline{\mathbf{C}} {}^\omega\mathbf{k} + \overline{\mathbf{A}} \overline{{}^\omega\mathbf{k}}) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\mathbf{a} \mathbf{B} \overline{{}^0\mathbf{k}} - \mathbf{b} (\overline{\mathbf{C}} {}^0\mathbf{k} + \overline{\mathbf{A}} \overline{{}^0\mathbf{k}}) + cc. \right] \right. \\ & \left. + {}^0\widehat{\mathbf{N}} \left[2\mathbf{a} \mathbf{B} \overline{{}^\omega\mathbf{k}} - \mathbf{b} (\overline{\mathbf{C}} {}^\omega\mathbf{k} + \overline{\mathbf{A}} \overline{{}^\omega\mathbf{k}}) + cc. \right] \right\} \\ & - \mathbf{d}^{-1} \left[(\mathbf{a} \overline{{}^\omega\mathbf{k}} - \overline{\mathbf{b}} {}^\omega\mathbf{k}) (\partial {}^\omega\widehat{\mathbf{N}} + \partial {}^0\widehat{\mathbf{N}}) \right. \\ & \left. + (\mathbf{a} \overline{{}^0\mathbf{k}} - \overline{\mathbf{b}} {}^0\mathbf{k}) \partial {}^\omega\widehat{\mathbf{N}} + cc. \right] + \frac{1}{2} \overset{\star}{K} {}^\omega\mathbf{K}. \end{aligned} \quad (\text{D.1.7})$$

D.2. Az algebrai-hiperbolikus rendszer nemlineáris perturbatív alakja

$$\begin{aligned} \partial_r {}^{(\Delta)}\mathbf{K} - \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{N}} \overline{\partial} {}^{(\Delta)}\mathbf{K} - \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{N}} \partial {}^{(\Delta)}\mathbf{K} \\ - \frac{1}{2} \widehat{N} \mathbf{d}^{-1} \left[\mathbf{a} (\partial \overline{\Delta \mathbf{k}} + \overline{\partial} {}^{(\Delta)}\mathbf{k}) - \mathbf{b} \overline{\partial} \overline{\Delta \mathbf{k}} - \overline{\mathbf{b}} \partial {}^{(\Delta)}\mathbf{k} \right] + {}^{(\Delta)}\mathbf{F} = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.2.1})$$

$$\begin{aligned} \partial_r {}^{(\Delta)}\mathbf{k} - \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{N}} \overline{\partial} {}^{(\Delta)}\mathbf{k} - \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{N}} \partial {}^{(\Delta)}\mathbf{k} \\ + \widehat{N} {}^{(0)}\mathbf{K}^{-1} \left\{ {}^{(\Delta)}\boldsymbol{\kappa} \partial {}^{(0)}\mathbf{K} - \mathbf{d}^{-1} \left[(\mathbf{a} {}^{(\Delta)}\mathbf{k} - \mathbf{b} \overline{\Delta \mathbf{k}}) \overline{\partial} \overline{\mathbf{k}} + (\mathbf{a} \overline{\Delta \mathbf{k}} - \overline{\mathbf{b}} {}^{(\Delta)}\mathbf{k}) \partial {}^{(0)}\mathbf{k} \right] \right. \\ \left. + \boldsymbol{\kappa} \partial {}^{(\Delta)}\mathbf{K} - \mathbf{d}^{-1} \left[(\mathbf{a} \mathbf{k} - \mathbf{b} \overline{\mathbf{k}}) \overline{\partial} \overline{\Delta \mathbf{k}} + (\mathbf{a} \overline{\mathbf{k}} - \overline{\mathbf{b}} \mathbf{k}) \partial {}^{(\Delta)}\mathbf{k} \right] \right\} \\ - \widehat{N} {}^{(\Delta)}\mathbf{K} (\mathbf{K} {}^{(0)}\mathbf{K})^{-1} \left\{ \boldsymbol{\kappa} \partial \mathbf{K} - \mathbf{d}^{-1} \left[(\mathbf{a} \mathbf{k} - \mathbf{b} \overline{\mathbf{k}}) \overline{\partial} \overline{\mathbf{k}} + (\mathbf{a} \overline{\mathbf{k}} - \overline{\mathbf{b}} \mathbf{k}) \partial \mathbf{k} \right] \right\} + {}^{(\Delta)}\mathbf{f} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.2.2})$$

ahol az alacsonyabb rendű források

$$\begin{aligned} {}^{(\Delta)}\mathbf{F} = \frac{1}{4} \widehat{N} \mathbf{d}^{-1} \left[2 \mathbf{a} \mathbf{B} \overline{\Delta \mathbf{k}} - \mathbf{b} (\overline{\mathbf{C}} {}^{(\Delta)}\mathbf{k} + \overline{\mathbf{A}} \overline{\Delta \mathbf{k}}) + cc. \right] \\ - \mathbf{d}^{-1} \left[(\mathbf{a} \overline{\Delta \mathbf{k}} - \overline{\mathbf{b}} {}^{(\Delta)}\mathbf{k}) \overline{\partial} \widehat{N} + cc. \right] - ({}^{(\Delta)}\boldsymbol{\kappa} - \frac{1}{2} {}^{(\Delta)}\mathbf{K}) \overset{\star}{K} \end{aligned} \quad (\text{D.2.3})$$

és

$$\begin{aligned} {}^{(\Delta)}\mathbf{f} = -\frac{1}{2} \left[{}^{(\Delta)}\mathbf{k} \overline{\partial} \widetilde{\mathbf{N}} + \overline{\Delta \mathbf{k}} \partial \widetilde{\mathbf{N}} \right] \\ + \frac{1}{2} \widehat{N} (\mathbf{d} {}^{(0)}\mathbf{K})^{-1} \left[(\mathbf{a} {}^{(\Delta)}\mathbf{k} - \mathbf{b} \overline{\Delta \mathbf{k}}) (\overline{\mathbf{B}} {}^{(0)}\mathbf{k} + \mathbf{B} \overline{\mathbf{k}}) + (\mathbf{a} \mathbf{k} - \mathbf{b} {}^{(\Delta)}\mathbf{k}) (\overline{\mathbf{B}} {}^{(\Delta)}\mathbf{k} + \mathbf{B} \overline{\Delta \mathbf{k}}) \right. \\ \left. + (\mathbf{a} \overline{\Delta \mathbf{k}} - \overline{\mathbf{b}} {}^{(\Delta)}\mathbf{k}) (\mathbf{C} \overline{\mathbf{k}} + \mathbf{A} {}^{(0)}\mathbf{k}) + (\mathbf{a} \overline{\mathbf{k}} - \overline{\mathbf{b}} \mathbf{k}) (\mathbf{C} \overline{\Delta \mathbf{k}} + \mathbf{A} {}^{(\Delta)}\mathbf{k}) \right] \\ - \frac{1}{2} \widehat{N} {}^{(\Delta)}\mathbf{K} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{K} {}^{(0)}\mathbf{K})^{-1} \left[(\mathbf{a} \mathbf{k} - \mathbf{b} \overline{\mathbf{k}}) (\overline{\mathbf{B}} \mathbf{k} + \mathbf{B} \overline{\mathbf{k}}) + (\mathbf{a} \overline{\mathbf{k}} - \overline{\mathbf{b}} \mathbf{k}) (\mathbf{C} \overline{\mathbf{k}} + \mathbf{A} \mathbf{k}) \right] \\ - ({}^{(\Delta)}\boldsymbol{\kappa} - \frac{1}{2} {}^{(\Delta)}\mathbf{K}) \partial \widehat{N} - \frac{1}{2} \widehat{N} {}^{(\Delta)}\mathbf{K} (\mathbf{K} {}^{(0)}\mathbf{K})^{-1} \partial \boldsymbol{\kappa}_0 + \overset{\star}{K} {}^{(\Delta)}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (\text{D.2.4})$$

Irodalomjegyzék

- [1] K. Schwarzschild, „On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory,” Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), vol. 1916, pp. 189–196, 1916.
- [2] K. Schwarzschild, „On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein’s theory,” Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.), vol. 1916, pp. 424–434, 1916.
- [3] A. Eddington, „A Comparison of Whitehead’s and Einstein’s Formulae,” Nature, vol. 113, no. 192, 1924.
- [4] G. Lemaitre, „The expanding universe,” Gen. Rel. Grav., vol. 29, pp. 641–680, 1997.
- [5] J. Synge, „The gravitational field of a particle,” Proc. Roy. Irish Acad. A, vol. 53, p. 83, 1950.
- [6] M. Kruskal, „Maximal extension of Schwarzschild metric,” Phys. Rev., vol. 119, pp. 1743–1745, 1960.
- [7] G. Szekeres, „On the singularities of a Riemannian manifold,” Publ. Math. Debrecen, vol. 7, pp. 285–301, 1960.
- [8] R. Penrose, „Gravitational collapse and space-time singularities,” Phys. Rev. Lett., vol. 14, pp. 57–59, 1965.
- [9] H. Goenner, J. Renn, J. Ritter, and T. Sauer, The Expanding Worlds of General Relativity. Basel: Birkhäuser, 1999.
- [10] R. P. Kerr, „Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics,” Phys. Rev. Lett., vol. 11, pp. 237–238, 1963.
- [11] M. Schmidt, „3C 273 : A Star-Like Object with Large Red-Shift,” Nature, vol. 197, no. 4872, p. 1040, 1963.
- [12] M. Hobson, G. Efstathiou, and A. Lasenby, General relativity: An introduction for physicists. Cambridge University Press, 2006.
- [13] R. P. Kerr, „Gravitational collapse and rotation,” in Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse, Proceedings of the 1st Texas Symposium on Relativistic Astrophysics (I. Robinson, A. Schild, and E. Schucking, eds.), p. 99, University of Chicago Press, 1965.
- [14] R. Penrose and R. Floyd, „Extraction of rotational energy from a black hole,” Nature, vol. 229, pp. 177–179, 1971.
- [15] R. Blandford and R. Znajek, „Electromagnetic extractions of energy from Kerr black holes,” Mon. Not. Roy. Astron. Soc., vol. 179, pp. 433–456, 1977.
- [16] H. Poincaré, „Sur la Dynamique de l’électron,” Comptes rendus de l’Académie des Sciences, vol. 140, pp. 1504–1508, 1905.
- [17] A. Einstein, „Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation,” Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, pp. 688–696, Jan. 1916.
- [18] H. Weyl, Space - Time - Matter. London: Methuen and Co., 1922.
- [19] A. S. Eddington, „The propagation of gravitational waves,” Proc. Roy. Soc. Lond. A, vol. 102, pp. 268–282, 1922.
- [20] F. Pirani, „On the Physical significance of the Riemann tensor,” Acta Phys. Polon., vol. 15, pp. 389–405, 1956.

- [21] J. L. Cervantes-Cota, S. Galindo-Uribarri, and G.-F. Smoot, „A Brief History of Gravitational Waves,” Universe, vol. 2, no. 3, p. 22, 2016.
- [22] J. Weber, „Detection and Generation of Gravitational Waves,” Phys. Rev., vol. 117, pp. 306–313, 1960.
- [23] J. Weber, „Observation of the Thermal Fluctuations of a Gravitational-Wave Detector,” Phys. Rev. Lett., vol. 17, pp. 1228–1230, 1966.
- [24] R. Hulse and J. Taylor, „Discovery of a pulsar in a binary system,” Astrophys. J. Lett., vol. 195, pp. L51–L53, 1975.
- [25] J. Taylor, L. Fowler, and P. McCulloch, „Measurements of general relativistic effects in the binary pulsar PSR 1913+16,” Nature, vol. 277, pp. 437–440, 1979.
- [26] F. Pretorius, „Numerical relativity using a generalized harmonic decomposition,” Class. Quant. Grav., vol. 22, pp. 425–452, 2005.
- [27] C. O. Lousto and Y. Zlochower, „Orbital Evolution of Extreme-Mass-Ratio Black-Hole Binaries with Numerical Relativity,” Phys. Rev. Lett., vol. 106, p. 041101, 2011.
- [28] U. Sperhake, V. Cardoso, C. D. Ott, E. Schnetter, and H. Witek, „Extreme black hole simulations: collisions of unequal mass black holes and the point particle limit,” Phys. Rev. D, vol. 84, p. 084038, 2011.
- [29] C. O. Lousto and J. Healy, „Exploring the Small Mass Ratio Binary Black Hole Merger via Zeno’s Dichotomy Approach,” Phys. Rev. Lett., vol. 125, no. 19, p. 191102, 2020.
- [30] G. Lovelace, M. Boyle, M. A. Scheel, and B. Szilágyi, „Accurate gravitational waveforms for binary-black-hole mergers with nearly extremal spins,” Class. Quant. Grav., vol. 29, p. 045003, 2012.
- [31] M. A. Scheel, M. Giesler, D. A. Hemberger, G. Lovelace, K. Kuper, M. Boyle, B. Szilágyi, and L. E. Kidder, „Improved methods for simulating nearly extremal binary black holes,” Class. Quant. Grav., vol. 32, no. 10, p. 105009, 2015.
- [32] C. O. Lousto and Y. Zlochower, „Exploring the Outer Limits of Numerical Relativity,” Phys. Rev. D, vol. 88, no. 2, p. 024001, 2013.
- [33] B. Szilágyi, J. Blackman, A. Buonanno, A. Taracchini, H. P. Pfeiffer, M. A. Scheel, T. Chu, L. E. Kidder, and Y. Pan, „Approaching the Post-Newtonian Regime with Numerical Relativity: A Compact-Object Binary Simulation Spanning 350 Gravitational-Wave Cycles,” Phys. Rev. Lett., vol. 115, no. 3, p. 031102, 2015.
- [34] G. B. Cook, „Initial data for numerical relativity,” Living Rev. Rel., vol. 3, p. 5, 2000.
- [35] T. Chu, „Including realistic tidal deformations in binary black-hole initial data,” Phys. Rev. D, vol. 89, no. 6, p. 064062, 2014.
- [36] S. Nissanke, „Post-Newtonian freely specifiable initial data for binary black holes in numerical relativity,” Phys. Rev. D, vol. 73, p. 124002, 2006.
- [37] B. J. Kelly, W. Tichy, M. Campanelli, and B. F. Whiting, „Black hole puncture initial data with realistic gravitational wave content,” Phys. Rev. D, vol. 76, p. 024008, 2007.
- [38] N. K. Johnson-McDaniel, N. Yunes, W. Tichy, and B. J. Owen, „Conformally curved binary black hole initial data including tidal deformations and outgoing radiation,” Phys. Rev. D, vol. 80, p. 124039, 2009.
- [39] L. Gallouin, H. Nakano, N. Yunes, and M. Campanelli, „Asymptotically Matched Spacetime Metric for Non-Precessing, Spinning Black Hole Binaries,” Class. Quant. Grav., vol. 29, p. 235013, 2012.
- [40] F. Beyer, B. Daszuta, J. Frauendiener, and B. Whale, „Numerical evolutions of fields on the 2-sphere using a spectral method based on spin-weighted spherical harmonics,” Class. Quant. Grav., vol. 31, no. 7, p. 075019, 2014.
- [41] Y. Zlochower, R. Gomez, S. Husa, L. Lehner, and J. Winicour, „Mode coupling in the nonlinear response of black holes,” Phys. Rev., vol. D68, p. 084014, 2003.

- [42] P. Csizmadia, A. László, and I. Rácz, „On the Use of Multipole Expansion in Time Evolution of Non-linear Dynamical Systems and Some Surprises Related to Superradiance,” Class. Quant. Grav., vol. 30, p. 015010, 2013.
- [43] K. Hufenberger and B. Wandelt, „Fast and Exact Spin- s Spherical Harmonic Transforms,” Astrophys. J. Suppl., vol. 189, pp. 255–260, 2010.
- [44] „GridRipper.” <http://www.rmki.kfki.hu/~gridripper/>. Accessed: 2020-06-30.
- [45] G. Arfken, H. Weber, and F. E. Harris, Mathematical Methods for Physicists. Elsevier, 2012.
- [46] R. Penrose and W. Rindler, Spinors and Space-Time. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1984.
- [47] J. Stewart, Advanced general relativity. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1994.
- [48] I. Rácz and J. Winicour, „Toward computing gravitational initial data without elliptic solvers,” Class. Quant. Grav., vol. 35, no. 13, p. 135002, 2018.
- [49] R. Gomez, L. Lehner, P. Papadopoulos, and J. Winicour, „The eth formalism in numerical relativity,” Class. Quant. Grav., vol. 14, pp. 977–990, 1997.
- [50] E. T. Newman and R. Penrose, „Note on the Bondi-Metzner-Sachs group,” J. Math. Phys., vol. 7, pp. 863–870, 1966.
- [51] I. Rácz and G. Z. Tóth, „Numerical investigation of the late-time Kerr tails,” Class. Quant. Grav., vol. 28, p. 195003, 2011.
- [52] K. Csukás, I. Rácz, and G. Z. Tóth, „Numerical investigation of the dynamics of linear spin s fields on a Kerr background: Late-time tails of spin $s = \pm 1, \pm 2$ fields,” Phys. Rev. D, vol. 100, no. 10, p. 104025, 2019.
- [53] R. M. Wald, General Relativity. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984.
- [54] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). Cambridge University Press, 1975.
- [55] J. Oppenheimer and H. Snyder, „On Continued gravitational contraction,” Phys. Rev., vol. 56, pp. 455–459, 1939.
- [56] C. Vishveshwara, „Stability of the schwarzschild metric,” Phys. Rev. D, vol. 1, pp. 2870–2879, 1970.
- [57] F. J. Zerilli, „Effective potential for even parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations,” Phys. Rev. Lett., vol. 24, pp. 737–738, 1970.
- [58] F. Zerilli, „Gravitational field of a particle falling in a schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics,” Phys. Rev. D, vol. 2, pp. 2141–2160, 1970.
- [59] B. S. Kay and R. M. Wald, „Linear Stability of Schwarzschild Under Perturbations Which Are Nonvanishing on the Bifurcation Two Sphere,” Class. Quant. Grav., vol. 4, pp. 893–898, 1987.
- [60] R. P. Kerr, „Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics,” Phys. Rev. Lett., vol. 11, pp. 237–238, Sep 1963.
- [61] B. F. Whiting, „Mode Stability of the Kerr Black Hole,” J. Math. Phys., vol. 30, p. 1301, 1989.
- [62] L. Andersson, T. Bäckdahl, P. Blue, and S. Ma, „Stability for linearized gravity on the Kerr spacetime,” 3 2019.
- [63] M. Dafermos, G. Holzegel, and I. Rodnianski, „Boundedness and decay for the Teukolsky equation on Kerr spacetimes I: the case $|a| \ll M$,” 11 2017.
- [64] J. York, James W., „Dynamical Origin of Black Hole Radiance,” Phys. Rev. D, vol. 28, p. 2929, 1983.

- [65] G. T. Horowitz and V. E. Hubeny, „Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium,” Phys. Rev. D, vol. 62, p. 024027, 2000.
- [66] B. O’Neill, The geometry of Kerr black holes. A K Peters, 1995.
- [67] S. A. Teukolsky, „Rotating black holes - separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations,” Phys. Rev. Lett., vol. 29, pp. 1114–1118, 1972.
- [68] S. A. Teukolsky, „Perturbations of a rotating black hole. 1. Fundamental equations for gravitational electromagnetic and neutrino field perturbations,” Astrophys. J., vol. 185, pp. 635–647, 1973.
- [69] E. T. Newman and R. Penrose, „An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients,” J. Math. Phys., vol. 3, pp. 566–768, 1962.
- [70] S. Chandrasekhar, The mathematical theory of black holes. 1985.
- [71] R. P. Geroch, A. Held, and R. Penrose, „A space-time calculus based on pairs of null directions,” J. Math. Phys., vol. 14, pp. 874–881, 1973.
- [72] P. Szekeres, „The Gravitational compass,” J. Math. Phys., vol. 6, pp. 1387–1391, 1965.
- [73] W. Kinnersley, „Type D Vacuum Metrics,” J. Math. Phys., vol. 10, pp. 1195–1203, 1969.
- [74] D. Bini, C. Cherubini, R. T. Jantzen, and R. J. Ruffini, „Teukolsky master equation: De Rham wave equation for the gravitational and electromagnetic fields in vacuum,” Prog. Theor. Phys., vol. 107, pp. 967–992, 2002.
- [75] S. Aksteiner and L. Andersson, „Linearized gravity and gauge conditions,” Class. Quant. Grav., vol. 28, p. 065001, 2011.
- [76] E. Harms, S. Bernuzzi, and B. Bruggmann, „Numerical solution of the 2+1 Teukolsky equation on a hyperboloidal and horizon penetrating foliation of Kerr and application to late-time decays,” Class. Quant. Grav., vol. 30, p. 115013, 2013.
- [77] B. Araneda, „Conformal invariance, complex structures and the Teukolsky connection,” Class. Quant. Grav., vol. 35, no. 17, p. 175001, 2018.
- [78] A. Zenginoglu, „Hyperboloidal foliations and scri-fixing,” Class. Quant. Grav., vol. 25, p. 145002, 2008.
- [79] Z. Perjés and Á. Lukács, „Canonical Quantization and Black Hole Perturbations,” in Fundamental Interactions and Twistor-Like Methods (J. Lukierski and D. Sorokin, eds.), vol. 767 of American Institute of Physics Conference Series, pp. 306–315, 2005.
- [80] G. Z. Tóth, „Noether currents for the Teukolsky master equation,” Class. Quant. Grav., vol. 35, no. 18, p. 185009, 2018.
- [81] J. Cohen and L. Kegeles, „Electromagnetic fields in curved spaces - a constructive procedure,” Phys. Rev. D, vol. 10, pp. 1070–1084, 1974.
- [82] P. Chrzanowski, „Vector Potential and Metric Perturbations of a Rotating Black Hole,” Phys. Rev. D, vol. 11, pp. 2042–2062, 1975.
- [83] R. M. Wald, „Construction of Solutions of Gravitational, Electromagnetic, Or Other Perturbation Equations from Solutions of Decoupled Equations,” Phys. Rev. Lett., vol. 41, pp. 203–206, 1978.
- [84] S. Hod, „Mode coupling in rotating gravitational collapse: Gravitational and electromagnetic perturbations,” Phys. Rev., vol. D61, p. 064018, 2000.
- [85] S. Hod, „Mode coupling in rotating gravitational collapse of a scalar field,” Phys. Rev., vol. D61, p. 024033, 2000.
- [86] M. Casals, C. Kavanagh, and A. C. Ottewill, „High-order late-time tail in a Kerr spacetime,” Phys. Rev., vol. D94, no. 12, p. 124053, 2016.

- [87] Gustafsson, B. and Kreiss, H.-O. and Olinger, J., Time-Dependent Problems and Difference Methods, Second Edition. 1995.
- [88] S. A. Teukolsky and W. H. Press, „Perturbations of a rotating black hole. III. Interaction of the hole with gravitational and electromagnetic radiation,” Astrophys. J., vol. 193, pp. 443–461, 1974.
- [89] R. Brito, V. Cardoso, and P. Pani, Superradiance: Energy Extraction, Black-Hole Bombs and Implications for Astrophysics and Particle Physics, vol. 906. Springer, 2015.
- [90] A. László and I. Rácz, „Superradiance or total reflection?,” Springer Proc. Phys., vol. 157, pp. 119–127, 2014.
- [91] G. Fodor and I. Racz, „Numerical investigation of highly excited magnetic monopoles in SU(2) Yang-Mills-Higgs theory,” Phys. Rev. D, vol. 77, p. 025019, 2008.
- [92] K. Z. Csukás and I. Rácz, „Numerical investigation of the dynamics of linear spin s fields on a Kerr background II: Superradiant scattering,” Phys. Rev. D, vol. 103, no. 8, p. 084035, 2021.
- [93] „TMESolver.” <ssh://git@gitlab.kfki.hu:2222/csukas.karoly/Teukolsky.git>.
- [94] K. Higginbotham, B. Khamesra, J. P. McInerney, K. Jani, D. M. Shoemaker, and P. Laguna, „Coping with spurious radiation in binary black hole simulations,” Phys. Rev. D, vol. 100, no. 8, p. 081501, 2019.
- [95] A. Lichnerowicz, „L’intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps,” J. Math. Pures Appl, vol. 23, no. 7, pp. 37–63, 1944.
- [96] J. York, James W., „Role of conformal three geometry in the dynamics of gravitation,” Phys. Rev. Lett., vol. 28, pp. 1082–1085, 1972.
- [97] J. York, James W., „Gravitational degrees of freedom and the initial-value problem,” Phys. Rev. Lett., vol. 26, pp. 1656–1658, 1971.
- [98] J. York, James W., „Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial value problem of general relativity,” J. Math. Phys., vol. 14, pp. 456–464, 1973.
- [99] J. York, James W., „Covariant decompositions of symmetric tensors in the theory of gravitation,” Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor., vol. 21, pp. 319–332, 1974.
- [100] J. M. Bowen and J. York, James W., „Time asymmetric initial data for black holes and black hole collisions,” Phys. Rev. D, vol. 21, pp. 2047–2056, 1980.
- [101] A. Garat and R. H. Price, „Nonexistence of conformally flat slices of the Kerr space-time,” Phys. Rev. D, vol. 61, p. 124011, 2000.
- [102] M. Hannam, S. Husa, B. Bruegmann, J. A. Gonzalez, and U. Sperhake, „Beyond the Bowen-York extrinsic curvature for spinning black holes,” Class. Quant. Grav., vol. 24, pp. S15–S24, 2007.
- [103] K. Slinker, C. R. Evans, and M. Hannam, „Trumpet Initial Data for Boosted Black Holes,” Phys. Rev. D, vol. 98, no. 4, p. 044014, 2018.
- [104] G. Lovelace, „Reducing spurious gravitational radiation in binary-black-hole simulations by using conformally curved initial data,” Class. Quant. Grav., vol. 26, p. 114002, 2009.
- [105] I. Rácz, „Constraints as evolutionary systems,” Class. Quant. Grav., vol. 33, no. 1, p. 015014, 2016.
- [106] A. Nakonieczna, Ł. Nakonieczny, and I. Rácz, „Black hole initial data by numerical integration of the parabolic-hyperbolic form of the constraints,” 2017.
- [107] G. Doulis, „Construction of high precision numerical single and binary black hole initial data,” Phys. Rev. D, vol. 100, no. 2, p. 024064, 2019.

- [108] F. Beyer, L. Escobar, J. Frauendiener, and J. Ritchie, „Numerical construction of initial data sets of binary black hole type using a parabolic-hyperbolic formulation of the vacuum constraint equations,” Class. Quant. Grav., vol. 36, p. 175005, 2019.
- [109] F. Beyer, L. Escobar, and J. Frauendiener, „Asymptotics of solutions of a hyperbolic formulation of the constraint equations,” Class. Quant. Grav., vol. 34, no. 20, p. 205014, 2017.
- [110] R. P. Geroch, „The domain of dependence,” J. Math. Phys., vol. 11, pp. 437–439, 1970.
- [111] A. N. Bernal and M. Sanchez, „Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic space-times,” Commun. Math. Phys., vol. 257, pp. 43–50, 2005.
- [112] I. RÁCZ, „Is the Bianchi identity always hyperbolic?,” Class. Quant. Grav., vol. 31, p. 155004, 2014.
- [113] K. Csukás and I. RÁCZ, „Numerical investigations of the asymptotics of solutions to the evolutionary form of the constraints,” Class. Quant. Grav., vol. 37, no. 15, p. 155006, 2020.
- [114] S. Dain and H. Friedrich, „Asymptotically flat initial data with prescribed regularity at infinity,” Commun. Math. Phys., vol. 222, pp. 569–609, 2001.
- [115] P. T. Chrusciel, „Boundary Conditions at Spatial Infinity: From a Hamiltonian Point of View,” NATO Sci. Ser. B, vol. 138, pp. 49–59, 1986.
- [116] F. Beyer, J. Frauendiener, and J. Ritchie, „Asymptotically flat vacuum initial data sets from a modified parabolic-hyperbolic formulation of the Einstein vacuum constraint equations,” Phys. Rev. D, vol. 101, no. 8, p. 084013, 2020.
- [117] „ConstraintSolver.” <ssh://git@gitlab.kfki.hu:2222/csukas.karoly/constraints.git>.

Lineáris perturbációk és a kényszeregyenletek megoldásainak numerikus vizsgálata az általános relativitáselméletben

Összefoglalás

Az általános relativitáselmélet egyenleteinek nemlinearitása miatt csupán analitikus módszerekkel nem tudjuk megérteni az elmélet minden jóslatát, szükséges ezeket numerikus vizsgálatokkal kiegészíteni. A dolgozatban ismertetett munkáim gerincét a GridRipper programcsomag által alkalmazott spektrális módszerek általánosítása adja olyan módon, hogy azok alkalmazhatóak legyenek spinsúlyozott harmonikus gömbfüggvények esetén is.

Az így kapott módszert először a forgó, stacionárius feketelyuk, mint háttér fölötti lineáris perturbációkat leíró Teukolsky-egyenlet vizsgálata során alkalmaztam. A kifejlesztett eljárás stabilitásának köszönhetően vizsgálhattam ezen perturbációk aszimptotikus viselkedését és a szórási folyamatok során fellépő szuperradianciát is.

Az alkalmazások másik csoportját a gravitációs kényszeregyenletek evolúciós alakjának megoldása adja. Az egyenletek ilyen módon való értelmezése olyannyira friss, hogy olyan alapvető kérdések is megválaszolásra várnak, mint hogy hogyan lehetséges ezt a módszert használva aszimptotikusan sík deformált feketelyuk kezdőadatot előállítani. Az általam fejlesztett numerikus eljárás segítségével hat nagyságrenden keresztül követtük a megoldások lecsengését és ismertettük aszimptotikusan sík megoldások egy-egy osztályát.

Az elért eredményeinket az alábbi pontokban foglalom össze

1. A kifejlesztett spektrális módszerek alapján két numerikus alkalmazás született. Az egyszerűbb, rögzített háttéren értelmezett problémákra optimalizált alkalmazáson kipróbálhattam a kidolgozott eljárásokat, majd azokat teljes általánosságukban alkalmaztam a kényszeregyenleteket megoldó szoftverben.
2. Rögzített Kerr-háttéren terjedő elektromágneses és gravitációs sugárzás kései időfejlődését vizsgáltam. Az alkalmazott eljárásoknak köszönhetően megállapítottam ezek lecsengési ütemét az eseményhorizonton, a jövő fényszerű végtelenben és egy a jövő időszerű végtelent közelítő helyen. Ezek az eredmények hozzájárulhatnak a Kerr-megoldás lineáris stabilitásának bizonyításához.
3. Tanulmányoztam az előző pontban leírt perturbációk szuperradiáns szórását. Az eredmények rámutattak, hogy az effektus előidézéséhez nem elegendő a hullámcsomag frekvenciáját megfelelően beállítani, hanem a kezdőadat tartóját is optimalizálni kell a szuperradiancia maximalizálása érdekében.
4. A kényszeregyenletek numerikus integrálásával rámutattam, hogy az irodalomban alkalmazott eljárások nem képesek aszimptotikusan sík közel-Schwarzschild kezdőadatot előállítani. Miután a problémás módust azonosítottam, olyan módosításokat hajtottunk végre, melyekkel aszimptotikusan sík közel-Schwarzschild kezdőadatok két családját azonosítottuk.

A fent összefoglalt eredmények a [52, 92, 113] referált közleményekben jelentek meg.

Numerical investigation of linear perturbations and solutions to constraint equations in general relativity

Summary

Because of the nonlinearity of the equations of general relativity analytic methods alone are not sufficient to understand every aspect of the theory, we have to supplement them with numerical investigations. My work presented in this thesis is based on the generalization of the spectral methods used by the GridRipper application in a way that enables us to apply them also for spin-weighted spherical harmonics.

First I applied this method for studying the Teukolsky equation which describes linear perturbations over a rotating stationary background black hole. Due to the stability of the developed method I was able to investigate the asymptotic behaviour of these perturbations as well as superradiance in their scattering process.

The other application is related to solving the constraint equations of gravity in their evolutionary form. This interpretation of the equations is so new that we still have to answer such fundamental questions like how to produce asymptotically flat deformed black hole initial data with this new method. With the use of a new numerical application developed by me it was possible to follow the decay of the solution through six orders of magnitude and we presented two families of asymptotically flat solutions to the problem.

My main results are summarized as follows:

1. Based on the developed spectral method two numerical applications were produced. On the simpler one optimized for problems on fixed background I was able to test the pertinent methods then I applied them in their full generality in the software solving the constraint equations.
2. I inspected the late time evolution of electromagnetic and gravitational radiation over a fixed Kerr background. Due to the applied methods I was able to read off their decay rate on the event horizon, on future null infinity and on a third location approximating future timelike infinity. These results might add interesting details to the effort in proving the linear stability of the rotating Kerr black hole solution.
3. I studied the superradiant scattering of the perturbations described above as well. The results indicated that in maximizing the effect of superradiance it is not enough to fine tune the frequency alone, one also has to consider the position of the initial data's support.
4. By integrating the constraints numerically I showed that the methods used in the literature are too strict to produce asymptotically flat near-Schwarzschild initial data. After I identified the obstructing mode we introduced modifications such that they yielded asymptotically flat near-Schwarzschild initial data for both of the know evolutionary systems, respectively.

The above summarized results are covered by my refereed publications in [\[52, 92, 113\]](#).

ADATLAP

a doktori értekezés nyilvánosságra hozatalához*

I. A doktori értekezés adatai

A szerző neve: Csukás Károly Zoltán.....

MTMT-azonosító: 10066553.....

A doktori értekezés címe és alcíme: Lineáris perturbációk és a kényszeregyenletek megoldásainak numerikus vizsgálata az általános relativitáselméletben.....

DOI-azonosító⁴⁶: 10.15476/ELTE.2021.059.....

A doktori iskola neve: Fizika Doktori Iskola.....

A doktori iskolán belüli doktori program neve: Részecskefizika és Csillagászat.....

A témavezető neve és tudományos fokozata: Dr. Rácz István, az MTA doktora.....

A témavezető munkahelye: Wigner Fizikai Kutatóközpont, Részecske és Magfizikai Intézet

II. Nyilatkozatok

1. A doktori értekezés szerzőjeként

a) hozzájárok, hogy a doktori fokozat megszerzését követően a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban. Felhatalmazom a Természettudományi kar Dékáni Hivatal Doktori, Habilitációs és Nemzetközi Ügyek Csoportjának ügyintézőjét, hogy az értekezést és a téziseket feltöltse az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba, és ennek során kitöltse a feltöltéshez szükséges nyilatkozatokat.

b) kérem, hogy a mellékelt kérelemben részletezett szabadalmi, illetőleg oltalmi bejelentés közzétételéig a doktori értekezést ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;

c) kérem, hogy a nemzetbiztonsági okból minősített adatot tartalmazó doktori értekezést a minősítés (datum)-ig tartó időtartama alatt ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;

d) kérem, hogy a mű kiadására vonatkozó mellékelt kiadó szerződésre tekintettel a doktori értekezést a könyv megjelenéséig ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban, és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban csak a könyv bibliográfiai adatait tegyék közzé. Ha a könyv a fokozatszerzést követően egy évig nem jelenik meg, hozzájárulok, hogy a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban.

2. A doktori értekezés szerzőjeként kijelentem, hogy

a) az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba feltöltendő doktori értekezés és a tézisek saját eredeti, önálló szellemi munkám és legjobb tudomásom szerint nem sértem vele senki szerzői jogait;

b) a doktori értekezés és a tézisek nyomtatott változatai és az elektronikus adathordozón benyújtott tartalmak (szöveg és ábrák) mindenben megegyeznek.

3. A doktori értekezés szerzőjeként hozzájárulok a doktori értekezés és a tézisek szövegének plágiumkereső adatbázisba helyezéséhez és plágiumellenőrző vizsgálatok lefuttatásához.

Kelt: Budapest, 2021. 04. 21.

xxvi

.....

.....
a doktori értekezés szerzőjének aláírása