Zur Geschichte der Finiten Differenzen *

Rita Meyer-Spasche,
Max Planck Institut für Plasmaphysik, Boltzmannstr. 2
85748 Garching, Germany; meyer-spasche@ipp-garching.mpg.de

Abstract

On the history of finite differences Since the time of the Romans finite differences were used to simplify computations in many ways; after the 17th century for instance for localizing zeroes of functions, approximating definite integrals or producing numerical tables. Up to 1900 they were used very rarely for solving differential equations numerically. After 1900, when the importance of differential equations grew dramatically, finite differences became one of the main tools for solving them. This article focusses on the state of knowledge and skills about the theory of finite differences on the eve of this change. It relies strongly on the article by D. Seliwanoff in the encyclopaedia because this article provides the needed overview.

Zusammenfassung: Finite Differenzen haben in sehr unterschiedlichen Zusammenhängen in der Mathematik eine Rolle gespielt. Als noch alle wichtigen Rechnungen "mit der Hand" durchgeführt werden mussten, hat die Theorie der Differenzen viele Rechnungen sehr vereinfacht: Differenzen wurden z.B. benutzt zur Lokalisierung von Nullstellen, zur Interpolation von Funktionswerten in Tafelwerken, zur Herstellung numerischer Tafeln und zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale. Die Differenzenrechnung lieferte ein methodisches Verfahren in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und spielte eine wichtige Rolle bei der Ausgleichung und Interpolation in der Lebensversicherungsmathematik.

Im Zentrum dieses Artikels hier steht der mathematische Wissensstand bezüglich Differenzenrechnung um das Jahr 1900. Da bietet es sich an, Artikel in Teil I der *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* zu Rate zu ziehen, der im Jahre 1904 erschien. Ein Übersichtsartikel von Seliwanoff beschreibt die damals verfügbare Theorie und erläutert einige Anwendungen, erwähnt aber nicht die numerische Behandlung von Differentialgleichungen mit Differenzenverfahren, die es vor 1901 vereinzelt gab, die dann aber binnen kurzer Zeit zu einem der Hauptanwendungsgebiete der vorher entwickelten Theorie wurde.

*slightly revised version of pp. 292-304 In: H. Fischer, T. Sauer, Y. Weiss (eds.): *Exkursionen in die Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichts* Münster: WTM Verlag 2021; https://doi.org/10.37626/GA9783959871860.0.24;
For this version here see https://pure.mpg.de/cone/persons/resource/persons109958

keywords: calculus of finite differences; state of knowledge around 1900; Demetrius Seliwanoff; encyclopaedia of the mathematical sciences and their applications, vol. 1 (1904);

1 Einleitung

Während der Arbeit an dem Artikel *Some remarks on the impact of computers on mathematics and physics* [1] wurde klar: für die Numerische Mathematik begann diese Darstellung mitten in einer stürmischen Entwicklung. Die großen Veränderungen in der Numerik begannen viel eher, etwa zu der Zeit, als Industrialisierung und Mathematisierung von Naturwissenschaften und Technik die massenhafte Produktion von mechanischen Rechenmaschinen ermöglichten.

Während der Arbeit an den Artikeln *On the impact of mechanical desktop calculators on the development of numerical mathematics* und *Über den Einfluß von mechanischen Rechenmaschinen auf die Entwicklung der Numerischen Mathematik* [2] wurde klar, daß die Benützung von Differenzen und Differenzengleichungen sehr viel älter sind, aber daß andere Anwendungen von ihnen vor 1900 sehr viel wichtiger waren als die numerische Lösung von Differentialgleichungen. Obwohl es einige wenige frühere Arbeiten zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen mit Differenzenverfahren gegeben hat[3], begann die stürmische Entwicklung dieser Methoden tatsächlich *um das Jahr 1900*, wie schon in der Arbeit von 2017 gezeigt wurde.[4]

Finite Differenzen haben schon sehr lange und in sehr unterschiedlichen Zusammenhängen beim Rechnen und in der Mathematik eine Rolle gespielt. Als noch alle wichtigen Rechnungen mit Stift und Papier und einfachen Hilfsgeräten durchgeführt werden mussten, hat die Benutzung von Differenzen viele Rechnungen sehr vereinfacht: So haben z.B. schon die Römer und wohl auch die Griechen gelegentlich das Multiplizieren und häufiger das Dividieren großer Zahlen durch sogenannte *komplementäre* Multiplikation bzw. Division unter Benutzung von Differenzen vereinfacht. Im Mittelalter war die *komplementäre Division* sehr verbreitet. Im 19. Jahrhundert gab es Überlegungen, ob diese Methode in verbesserter Form wiederbelebt werden könnte.[5]

Das Anliegen der hier vorgelegten Arbeit ist es nicht*, die Geschichte der finiten Differenzen von der Zeit der Römer bis zum Jahr 1900 nachzuzeichnen,* sondern *das mathematische Wissen über Differenzen und Differenzengleichungen* um das Jahr 1900 *zu beschreiben, als Differenzenverfahren ein übliches und weit verbreitetes Verfahren zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen wurden.* Entsprechend der Absicht der Herausgeber der *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* [6] ist die Enzyklopädie die ideale Quelle, um den Stand

[1] Meyer-Spasche 2016, [14]

[2] Meyer-Spasche 2017, [13]; Meyer-Spasche 2018, [12]

[3] Clairaut 1759, Euler 1768, Adams-Bashforth 1883, ...: siehe Cantor 1880 [3]; Hofmann, Wieleitner, Mahnke 1931 [7]; Tournès 1998 [20] und die Zitierungen dort

[4] Runge 1895, Heun 1900, Kutta 1901 ...: siehe Meyer-Spasche 2017 [13]

[5] Mehmke 1902, p. 943 [10]

[6] W.F. Meyer 1904 [11]

der Forschung bzgl. Differenzen und Differenzengleichungen um das Jahr 1900 zu erfahren.

Die Idee zu einem mathematischen Wörterbuch bzw. einer Enzyklopädie wurde ab 1892/93 von *Wilhelm Franz (W.F.) Meyer (1856-1934)*, *Felix Klein (1849-1925)* und *Heinrich Martin Weber (1842-1913)* entwickelt und mit Kollegen diskutiert und weiterentwickelt. 1895 wurde das Projekt offiziell begonnen, mit Unterstützung mehrerer deutscher Akademien.[7] Das Grundkonzept in der Formulierung von 1895 wurde von *Walther (von) Dyck (1856-1934)* in seinem Vortrag auf dem 4. Internationalen Mathematikerkongress 1908 in Rom zitiert:

> Aufgabe der Enzyklopädie soll es sein, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten *Resultaten* zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturangaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen *Methoden* seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie soll sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik beschränken, sondern auch die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete mit berücksichtigen und dadurch ein Gesamtbild der Stellung geben, die die Mathematik innerhalb der heutigen Kultur einnimmt.[8]

Ursprünglich sollte dieser Vortrag über die Enzyklopädie von Felix Klein gehalten werden. Klein war der führende Kopf der ganzen Unternehmung. Er reiste auch zu vielen international führenden Kollegen, um sie zum Schreiben von Übersichtsartikeln über ihr Spezialgebiet zu bewegen.

Am Anfang waren vier Ausgaben geplant, auf Deutsch, Englisch, Französisch und Italienisch. Es gab dann nur eine deutsche und eine französische Ausgabe, aber einzelne englische und italienische Kollegen konnten als Autoren gewonnen werden. Die deutsche und die französische Ausgaben entstanden in enger Kooperation: der Artikel wurde in einer Sprache geschrieben und in die andere übersetzt, manchmal auch vom Übersetzer bearbeitet.[9] So wurde z.B. der Artikel von *Demetrius Seliwanoff (1855-1932)* über Differenzenrechnung vom Übersetzer, dem französischen Astronomen und Mathematiker *M.-Henri Andoyer (1862-1929)* mit dem Artikel von dem Astronomen *Julius Bauschinger (1860-1934)* über Interpolation zu einem einzigen Text zusammengefaßt.[10]

Daß die Enzyklopädie von vielen Kollegen begrüßt und die damit verbundene Vereinheitlichung für notwendig gehalten wurde, weil die *mathematischen Wissenschaften* zu zersplittern und zu unübersichtlich zu werden drohten, sieht man vor allem an zwei Fakten: ein Großteil der führenden Wissenschaftler war bereit, die von den Organisatoren gewünschten Übersichtsartikel zu schreiben, und von den anfangs beim Verlag in Auftrag gegebenen 1000 Exemplaren der deutschen Ausgabe waren nach zwei Jahren

[7] Tobies 2019, insbes. Abschnitt 7.4: 'Das Encyklopädie-Project', und Zitierungen dort [19]; Einleitender Bericht über das Encyklopädieunternehmen, Meyer 1904 [11]

[8] Walther von Dyck 1908, [21]

[9] Tobies 2019 [19], von Dyck 1908, [21]

[10] Seliwanoff 1901 [18], Bauschinger 1901 [1], Selivanov, Bauschinger, Andoyer 1906 [16]

90% abonniert, also 900 Exemplare. Artikel, die vor Erscheinen eines Bandes fertig waren, wurden als Einzelhefte verteilt.[11]

Durchsuchen von Band I der Enzyklopädie [12] liefert die folgenden fünf Artikel, die wichtige Aussagen bzgl Differenzen machen:

I E Differenzenrechnung, D. Seliwanoff, St Petersburg

I D 1 Wahrscheinlichkeitsrechnung, E. Czuber, Wien

I D 3 Interpolation, J. Bauschinger, Berlin

I D 4b Lebensversicherungs-Mathematik, G. Bohlmann, Göttingen

I F Numerisches Rechnen, R. Mehmke, Stuttgart [13]

Der Beitrag in Band II

II C 2 Numerische und graphische Quadratur und Integration gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen von C. Runge und Fr.A. Willers

wird bewußt außer Acht gelassen, weil er aus dem Jahre 1915 stammt. Die allererste Arbeit zur numerischen Behandlung von einer partiellen Differentialgleichung mit Differenzenverfahren stammt aus dem Jahr 1908.[14]

Die *Theorie* der Differenzenrechnung wird in dem Artikel von Seliwanoff behandelt, mit Schwerpunkt auf der Entwicklung im 19. Jahrhundert. Die anderen vier Arbeiten verweisen bzgl der Theorie auf Seliwanoff und das Buch von Markoff [15] und bringen wichtige Beispiele für die *Anwendungen* der Theorie. Nur Czuber gibt zusätzlich auch wichtige Erläuterungen dazu, wie *Lagrange (1736-1813)* und *Laplace (1749-1827)* im 18. Jahrhundert die Theorie der Differenzenrechnung weiterentwickelt haben, insbesondere werden auch *partielle Differenzengleichungen* besprochen, die von Seliwanoff nur in einer kurzen Fußnote erwähnt werden. Einen sehr viel ausführlicheren Artikel dazu hat Czuber schon vorher geschrieben.[16]

2 Seliwanoff: Differenzenrechnung

2.1 Vorbemerkungen

Im Mai 1895 hielt der Markoff-Schüler *Theophil Friesendorff (1871-1913)* im Klein'schen Seminar in Göttingen zwei Vorträge über Differenzenrechnung. Dazu benutzte er das

[11] Tobies 2019 [19], von Dyck 1908 [21]
[12] W.F. Meyer 1904 [11]
[13] Seliwanoff 1901 [18], Mehmke 1902 [10], Bauschinger 1901 [1], Bohlmann 1901 [2], Czuber 1900 [4]
[14] Meyer-Spasche 2017 [13]
[15] Markoff 1896 [9]
[16] Czuber 1899 [5]

damals in Rußland sehr bekannte und verbreitete Buch von Markoff [17]. Klein war beeindruckt, weil es keinen vergleichbaren Text auf Deutsch gab. Er regte an, daß Friesendorff das Markoff'sche Buch ins Deutsche übersetzen sollte, mit Koautor Erich Prümm für einwandfreies Deutsch. Das fertige Manuskript wurde von Mehmke durchgesehen, der im Vorwort schrieb: er hatte vergeblich versucht, das Markoff'sche Buch in Buchläden und in russischen Antiquariaten zu kaufen. Jetzt, wo er das russische Exemplar von Friesendorff mit der vorliegenden Übersetzung vergleichen konnte, bescheinigt er den Übersetzern, daß sie hervorragende Arbeit geleistet haben: sie haben sehr passend übersetzt und im Literaturverzeichnis vielfach auch noch fehlende Jahreszahlen hinzugefügt.[18]

So ist es nicht überraschend, daß der Petersburger Mathematiker und Markoff-Schüler *Demetrius Seliwanoff (1855-1932)*[19] gebeten wurde, den Enzyklopädie-Artikel zur Differenzenrechnung zu schreiben. Da die Enzyklopädie so ein großer Erfolg war, lud Teubner, der damalige Verlag der Enzyklopädie, Seliwanoff ein, eine ausführlichere Version seines Artikels als Buch zu veröffentlichen. Im Vorwort dieses Buches schreibt Seliwanoff, daß er sich bei der Stoffauswahl an dem Markoff-Buch orientiert hat, in der Darstellung aber eigene Wege gegangen ist: er hat Beweise vereinfacht, den Stoff systematischer angeordnet und sich auf das Wesentliche beschränkt, also auf elementare Fragen; speziellere Probleme hat er der Übersichtlichkeit und raschen Orientierung wegen weggelassen, wie es dem Konzept der Enzyklopädie entsprach.[20]

Noch im Jahr 1904 erschien eine Besprechung des Buches im *American Mathematical Monthly*. Der Referent Epsteen vergleicht zunächst den Umfang der beiden Texte (20 zu 92 Seiten):

> The gain in perspicuity over the encyclopaedia article is therefore considerable and indeed, although the author omits certain questions which might well be taken up, the subjects which he treats are presented in a delightfully clear and simple manner.
> The books of Boole and Markoff are more complete, but this work of Seliwanoff should be regarded not as a handbook for one who is familiar with the subject, but as a text book for the beginner who desires to learn the *technique* of computation, such as the methods of interpolation, construction of tables, estimation of unavoidable errors. [...]
> Many of the questions of interest from the theoretical standpoint as well as in the higher applications, are not touched upon. We are indepted to the author for an excellent elementary text book on a fascinating and important subject.[21]

[17] Markoff 1891 [8]
[18] Tobies 2019 [19]; Vorwort von R. Mehmke in Markoff 1896 [9]
[19] Rothe 1934, Nachruf auf Seliwanoff [15]
[20] Seliwanoff 1904 [17]
[21] Epsteen 1904, [6]

2.2 Finite Differenzen

Nachdem wir diskutiert haben, wie der Seliwanoff-Artikel einzuschätzen ist, wird jetzt sein Inhalt referiert, stark gekürzt.

Entsprechend dem Konzept der Enzyklopädie listet Seliwanoff einleitend nur die im 19. Jahrhundert zur Differenzenrechnung erschienenen Lehrbücher auf:
* S.F. Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral 3, Paris 1800, 1819
* J.F.W. Herschel, A collection of examples of the applications of the calculus of finite differences, Cambridge 1820
* O Schlömilch, Theorie der Differenzen und Summen, Halle 1848
* G. Boole, A treatise on the calculus of finite differences, Cambridge-London 1860, deutsch von C.H. Schmuse, Braunschw. 1867.
* A.A. Markoff, Differenzenrechnung, St Petersburg 1889-1891; deutsch von Th. Friesendorff und E. Prümm, Leipzig 1896
* Ernesto Pascal, Calcolo delle differenze finite, Milano 1897

Bezüglich der Geschichte siehe
* M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 3 Bände, Leipzig, Bd. 1, 2. Aufl. 1894; Bd. 2, 2. Aufl. 1900, Bd. 3, 1894-1898
* G. Eneström, Differenskalkylens historia (Upsala universitets Arsskrift 1879, p. 1-71).

2.2.1 Definition von Differenzen und Rechenregeln

Die Differenz einer Funktion $f(x)$ ist gleich $\varphi(x)$, wenn gilt:

$$\Delta f(x) := f(x+h) - f(x) = \varphi(x), \quad x \text{ beliebig}, \quad h = const. \tag{1}$$

Die *zweite/n-te Differenz*, auch *Differenz zweiter/n-ter Ordnung* genannt, erhält man durch Iteration:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x), \tag{2}$$
$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x). \tag{3}$$

Differenzen wie in Gl (1) heißen wegen dem Term $x+h$ *Vorwärtsdifferenzen*. Von Astronomen wurden bei Interpolationen je nach Lage der Interpolationspunkte auch *Rückwärtsdifferenzen* und *zentrale Differenzen* $\Delta f(x) = f\,(x + h/2) - f\,(x - h/2)$ mit Vorteil gebraucht[22]. Dies erwähnt Seliwanoff, geht aber nicht näher darauf ein. Ebenso erwähnt er, daß E. Pascal 1897 variables h diskutiert, 'es bietet aber wenig Vorteil.'

Die Rechnung mit Differenzen wurde von *Brook Taylor 1715* eingeführt. Einige Anfänge findet man aber schon bei *G.W. Leibniz 1673*. Seliwanoff folgt den Bezeichnungen von *L. Euler 1755*.[23]

Wie man leicht nachrechnet, gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\Delta c f(x) = c \Delta f(x), \qquad c = const \tag{4}$$
$$\Delta\left[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\mu(x)\right] = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x) + \cdots + \Delta f_\mu(x) \tag{5}$$

[22][1 D 3, Nr 7]: d.h. Bauschinger 1901, p 807f [1]
[23]Seliwanoff 1901, p 2 [18]; Cantor 1880 Band 3, p 72f, p 725 [3]; Hofmann et al 1931 [7]

$$\Delta\left[\varphi(x)\cdot\psi(x)\right] = \varphi(x)\Delta\psi(x)+\psi(x+h)\Delta\varphi(x) \quad (6)$$
$$\Delta m^x = m^x(m^h-1) \quad (7)$$
$$\Delta \sin u = 2\sin\frac{\Delta u}{2}\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right) \quad (8)$$

usw

Dabei ist u eine gegebene Funktion von x.
Die n-te Differenz einer ganzen Funktion n-ten Grades ist konstant:

$$f(x) = p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n \quad (9)$$
$$\Delta^n f(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot p_0\cdot h^n. \quad (10)$$

Daß $\Delta^3(x^3)$ konstant ist, hat schon Leibniz gewußt.[24]

2.2.2 Anwendungen

Wichtige Anwendungen der Differenzenrechnung bestanden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Lebensversicherungsmathematik[25] und besonders auch in der Vereinfachung des Zahlenrechnens per Hand beim Umgang mit komplizierten Funktionen wie z.B. Besselfunktionen, hypergeometrischen Funktionen, Logarithmen und Antilogarithmen. Wenn sich da Funktionswerte durch Manipulationen mit Differenzen berechnen ließen statt durch direkte Auswertung des Funktionsausdrucks, konnte das eine große Erleichterung sein. Besonders wichtig war die Benutzung von Differenzenrechnung bei Interpolation, der Herstellung numerischer Tafeln, der Aufsuchung zufälliger und der Abschätzung unvermeidlicher Fehler.[26]

Als erstes Beispiel führt Seliwanoff die Lokalisierung von Nullstellen vor, allerdings an einem so einfachen Beispiel, daß wir Heutigen nicht nachvollziehen können, daß das eine Erleichterung war:

Beispiel: Finde die Nullstellen von $f(x)=x^3+x^2-2x-1$
Für $h=1$ und jedes x gilt $\Delta^3 f(x)=6$.
$f(-1),\ f(0),\ f(1)$ direkt ausrechnen, daraus dann $\Delta f(-1),\ \Delta f(0),\ \Delta^2 f(-1)$.
$\Delta^n f(x)=\Delta^{n-1}f(x+h)-\Delta^{n-1}f(x)$ wiederholt anwenden,
$\Rightarrow \Delta^2 f(0),\ \Delta f(1),\ f(2)$ ausrechnen, dann $\Delta^2 f(-2),\ \Delta f(-2),\ f(-2),\ldots$

Zusammenfassung:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
-2	-1	2	-4	6
-1	1	-2	2	6
0	-1	0	8	
1	-1	8		
2	7			

Auf diese Weise kann die Tabelle nach oben und unten fortgesetzt werden. In diesem

[24] Cantor 3, p 73 [3]
[25] Czuber 1899 [5], Czuber 1900 [4], Bohlmann 1901 [2]
[26] Mehmke 1902 [10], Bauschinger 1901 [1]

Fall sieht man aber schon, daß f drei reelle Nullstellen hat, die in den Intervallen $(-2,-1)$, $(-1,0)$ und $(1,2)$ liegen.

2.2.3 Relationen zwischen sukzessiven Werten und Differenzen einer Funktion, Newton'sche Interpolationsformel

Gegeben sukzessive Werte einer Funktion $f(x)$ mit $f(a)=u_0,\ f(a+h)=u_1,\ \ldots,\ f(a+nh)=u_n$, so sind die Differenzen

$$\begin{aligned}\Delta u_0 &= u_1-u_0,\\ \Delta^2 u_0 &= u_2-2u_1+u_0,\\ \Delta^n u_0 &= u_n-nu_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u_{n-2}-\cdots+(-1)^n u_0.\end{aligned} \tag{11}$$

Kennt man andererseits $u_0, \Delta u_0, \Delta^2 u_0, \ldots, \Delta^n u_0$, so findet man

$$\begin{aligned}u_1 &= u_0+\Delta u_0,\\ u_2 &= u_0+2\Delta u_0+\Delta^2 u_0,\\ u_n &= u_0+n\Delta u_0+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 u_0+\cdots+\Delta^n u_0.\end{aligned} \tag{12}$$

Dann erwähnt Seliwanoff kurz erzeugende Funktionen (fonctions génératrices) und die Arbeiten von Lagrange 1795 und Laplace 1779 und verweist auf [I D 1, Nr 6][27].

Aus Gleichung (12) wird dann die Newton'sche Interpolationsformel hergeleitet und ihre Anwendung auf die Berechnung von Logarithmen und Antilogarithmen und auf die angenäherte Berechnung bestimmter Integrale gezeigt.

2.2.4 Definition: Summation von Funktionen

Gegeben eine Funktion $f(x)$, gesucht eine Funktion $\varphi(x)$ so daß

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=f(x). \tag{13}$$

Sind h, $x=a$, $\varphi(a)$ vorgegeben, so sind $\varphi(a+i\cdot h)$ dadurch bestimmt, $i=1,2,\ldots$ $\varphi(x)$ heißt *unbestimmte Summe von* $f(x)$,

$$\sum f(x)=\varphi(x)+C, \qquad C=const,\ \text{beliebig} \tag{14}$$

Rechenregeln:

$$\sum Af(x) = A\sum f(x), \qquad A=const, \tag{15}$$

$$\sum[f_1(x)+f_2(x)+\cdots f_\mu(x)] = \sum f_1(x)+\sum f_2(x)+\cdots\sum f_\mu(x), \tag{16}$$

$$\sum m^x = \frac{m^x}{m^h-1}+C \tag{17}$$

$$\sum \sin x = -\frac{\cos(x-h/2)}{2\sin h/2}+C \tag{18}$$

$$\sum \varphi(x)\cdot\Delta\psi(x) = \varphi(x)\psi(x)-\sum\psi(x+h)\Delta\varphi(x). \tag{19}$$

[27] Czuber 1900, p 742ff, [4]

2.2.5 Bestimmte Summen und Anwendungen

Die unbestimmte Konstante fällt weg bei Differenz von Summen:

$$\sum_{a+mh}^{a+nh} f(x) = \varphi(a+nh) - \varphi(a+mh) \tag{20}$$

Daraus folgt:

$$f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(n-1)h) = \varphi(a+nh) - \varphi(a). \tag{21}$$

Daraus erhält man die Formeln für *arithmetische und geometrische Reihen* und viele andere Formeln. Weitere Anwendungen der Summation von Funktionen:
* die *Jacob Bernoulli*'sche Funktion, *Bernoulli*'sche Zahlen;
* *Euler*'sche Summationsformel mit Anwendungen: Reihen für $(e^x - 1)^{-1}$, $\cot x$, *Stirling*'sche Formel, usw.

2.2.6 Differenzengleichungen

Eine Gleichung

$$\Phi(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \Delta^3 y_x, \ldots, \Delta^m y_x) = 0 \tag{22}$$

heißt *Differenzengleichung*. Eine Funktion y_x, die Gl. (22) genügt, heißt *Lösung*.

Die Differenzen von y_x lassen sich gemäß (11) durch die sukzessiven Werte $y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots$ ausdrücken. Dann erhält Gleichung (22) die Form

$$\Psi(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+m}) = 0. \tag{23}$$

Enthält Gl (23) sowohl y_x als auch y_{x+m}, so heißt sie *m-ter Ordnung*.

Seliwanoff betrachtet dann speziell gewöhnliche lineare Differenzengleichungen und deren allgemeine Lösungstheorie, inklusive der Methode der Variation der Konstanten. Partielle Differenzengleichungen betrachtet er nicht, gibt aber in Fußnote 29 Literatur dafür an.

Als Anwendungen für Differenzengleichungen nennt er
* die Bestimmungen von Koeffizienten in Entwicklungen

Beispiel: die Koeffizienten $A_x, B_x, \ldots, K_x$ in

$$(1+t)^x = 1 + A_x t + B_x t^2 + \cdots + K_x t^x \tag{24}$$

genügen den Differenzengleichungen

$$A_{x+1} - A_x = 1, \qquad A_1 = 1; \tag{25}$$
$$B_{x+1} - B_x = A_x, \qquad B_2 = 1; \tag{26}$$
$$C_{x+1} - C_x = B_x, \qquad C_3 = 1; \tag{27}$$
$$usw$$

und
* Bestimmung der maximalen Anzahl von sukzessiven Divisionen zur Bestimmung des

größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen a und b. Diese Aufgabe stammt aus einer Vorlesung von Tschebyscheff.
Weitere Anwendungen finden sich in den Artikeln von Czuber.[28]

Dank Die Autorin dankt allen, die diese Arbeit durch Kritik, Fragen und Kommentare verbessert haben. Ihr besonderer Dank gilt den Herren Fischer, Gropp, Probst und Schlote für wertvolle Literaturhinweise.

References

[1] Bauschinger, Julius (1901): Interpolation, Artikel I D 3, abgeschlossen Jan 1901, pp. 799-820 in: *Encyklopädie* 1904 [11]

[2] Bohlmann, G (1901): Lebensversicherungs-Mathematik, Artikel I D 4b, abgeschlossen April 1901, pp 852-917 in: *Encyklopädie* 1904 [11]

[3] Cantor, Moritz (1880): *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, von der ältesten Zeit bis 1799*, 3 Bände, Leipzig, mehrere Auflagen, 1880-1908

[4] Czuber, E. (1900): Wahrscheinlichkeitsrechnung, Artikel I D 1, abgeschlossen Aug 1900, pp 733-768 in: *Encyklopädie* 1904 [11]

[5] Czuber, E. (1899): *Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen,* Jahresbericht der DMV, Band 7 (1899), pp 1-279

[6] Epsteen, Saul (1904): Lehrbuch der Differenzenrechnung by D. Seliwanoff. 92 pp.; The American Mathematical Monthly, vol 11 (Nov. 1904), pp. 215-216

[7] Hofmann, Jos.E., Wieleitner H., Mahnke, D. (1931): *Die Differenzenrechnung bei Leibniz,* Verl. d. Akad. d. Wiss., Berlin

[8] Markoff, Andrej A. (1891): *Differenzenrechnung (russisch)*, St. Petersburg 1891;

[9] Markoff, Andrej A. (1896): *Differenzenrechnung,* deutsch von Theophil Friesendorff und Erich Prümm, Leipzig 1896

[10] Mehmke, R. (1902): Numerisches Rechnen, Artikel I F., abgeschlossen 1902; pp. 938-1079 in: *Encyklopädie* 1904 [11]

[11] Meyer, W.F. (ed.), *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Band I*, Leipzig: B.G. Teubner, 1904; siehe auch `https://link.springer.com`: Springer Fachmedien Wiesbaden 1904, last visit on 2019-10-14

[28] Czuber 1899, 1900 [5, 4]

[12] Meyer-Spasche, R. (2018). Über den Einfluß von mechanischen Rechenmaschinen auf die Entwicklung der Numerischen Mathematik. (pp. 1239-1242) In: Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Ed.), Münster: WTM-Verlag. `http://hdl.handle.net/21.11116/0000-0002-8250-0`

[13] Meyer-Spasche, R. (2017): On the impact of mechanical desktop calculators on the development of numerical mathematics, In: Richter, K., (ed.): *Zur Geschichte der Mathematik seit der frühen Neuzeit*, Tagungsbericht Wittenberg, 24.-27.05.2017, im Druck,

[14] Meyer-Spasche, R. (2016): Some remarks on the impact of computers on mathematics and physics, pp. 322-347 In: Wolfschmidt, G.(ed.): *Vom Abakus zum Computer - Geschichte der Rechentechnik.* Nuncius Hamburgensis, Band 21, Hamburg: tredition, 2019 `http://hdl.handle.net/21.11116/0000-0003-36F4-D`

[15] Rothe, R. (1934): D.F. Seliwanoff, Jahresbericht DMV Bd.44, S.210-214 (Nachruf, mit Photo und Publikationsliste)

[16] Selivanov, D.; Bauschinger, J.; Andoyer, Marie Henri (1906). "Le calcul des différences et interpolation". In: *Encyclopedia des sciences mathématiques pures et appliquées.* tome 1, no. 4. pp. 47-160.

[17] Seliwanoff, Demetrius (1904): *Lehrbuch der Differenzenrechnung,* B. G. Teubner, Leipzig 1904 (auch in russischer und tschechischer Sprache erschienen)

[18] Seliwanoff, Demetrius (1901): Differenzenrechnung, Artikel I E., abgeschlossen 1901; pp. 918-937 in: *Encyklopädie* 1904 [11]

[19] Tobies, Renate (2019): *Felix Klein - Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*, Springer Spektrum, Berlin

[20] Tournès, Dominique (1998): L'origine des méthodes multipas pour l'intégration numérique des équations différentielles ordinaires, Revue d'histoire des mathématiques **4** (1998), p 5-72

[21] von Dyck, Walther (1908): Die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Jahresbericht der DMV 1908, pp. 213-227