Apollonioksen ongelma

Ville Vaheri

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty	Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma

Opintosuunta – Studieinrikting – Study track
Matematiikan opintosuunta

Tekijä – Författare – Author
Ville Oskari Vaheri

Työn nimi – Arbetets titel – Title
Apollonioksen ongelma

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Pro gradu tutkielma	16.12.2021	37

Tiivistelmä – Referat – Abstract
Tässä tutkielmassa käsitellään Apollonioksen ongelmaa, joka on nimetty antiikin ajan matematiikko Apollonios Pergalaisen mukaan. Apollonios oli yksi antiikin ajan tunnetuimmista matematiikoista heti Arkhimedeen ja Eukleideksen jälkeen. Tutkielman ensimmäisessä luvussa eli johdannossa lukijalle kerrotaan lyhyesti, mitä tutkielma sisältää.

Toisessa luvussa esitellään lyhyesti, mistä Apollonioksen ongelmassa on kyse. Tavoitteena on löytää ympyrä, joka sivuaa kolmea muuta tason geometrista muotoa tasan yhdessä pisteessä. Annetut kolme muotoa voivat olla pisteitä, suoria tai ympyröitä, joten erilaisia tilanteita on kymmenen. Kolmannessa luvussa esitellään Apollonioksen ongelman historiaa ja tunnettuja matematiikkoja, jotka ovat työskennelleet ongelman parissa.

Neljännessä luvussa esitetään ratkaisu Apollonioksen ongelman kymmeneen eri tilanteeseen. Ratkaisut esitellään GeoGebralla piirrettyjen kuvien avulla. Tilanteista vaikeimpaan eli kolmen ympyrän tilanteeseen esitetään neljä erilaista ratkaisua. Ratkaisuista kolme ovat geometrisiä ja yksi on algebrallinen. Kolmen ympyrän tilanne voidaan ratkaista pienentämällä yhden ympyrän säde nollaksi, jolloin saadaan ratkaistavaksi tilanne, jossa on piste ja kaksi ympyrää. Ratkaisu saadaan myös hyperbelien leikkauspisteiden avulla.

Viidennessä luvussa käydään läpi joitakin Apollonioksen ongelman käytännön sovelluksia. Ongelmaa hyödynnetään esimerkiksi GPS-paikannuksessa ja lääketieteessä.

Tutkielman viimeisessä luvussa kirjoittaja pohtii, miten Apollonioksen ongelman voisi ottaa osaksi lukio-opetusta. Lukion opetussuunnitelman perusteita lukiessa huomataan, että aihe sopii oikein hyvin lyhyen ja pitkän matematiikan geometrian kursseille. Oppilaat saavat paljon harjoitusta GeoGebran käytöstä, mikä on lukio-opiskelijoille tärkeää. Luvussa pohditaan, millaisen tehtävänannon opettaja voisi oppilaille antaa. Joka tapauksessa kyseessä olisi oppilaille ongelmatehtävä.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
Apollonioksen ongelma

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Helsingin yliopiston digitaalinen arkisto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällys

1 Johdanto **2**

2 Apollonioksen ongelman esittely **3**

3 Historia **4**

4 Apollonioksen ongelman ratkaiseminen **5**

4.1 Piste, piste, piste 5
4.2 Suora, suora, suora 7
4.3 Piste, piste, suora 9
4.4 Piste, suora, suora 11
4.5 Piste, piste, ympyrä 13
4.6 Piste, suora, ympyrä 15
4.7 Piste, ympyrä, ympyrä 17
4.8 Suora, suora, ympyrä 19
4.9 Suora, ympyrä, ympyrä 21
4.10 Ympyrä, ympyrä, ympyrä 23
4.10.1 Vieten ratkaisu 24
4.10.2 Gergonnen ratkaisu 26
4.10.3 Ratkaisu hyperbelien avulla 30
4.10.4 Algebrallinen ratkaisu 32

5 Apollonioksen ongelman käytännön sovellukset **34**

6 Apollonioksen ongelman mahdollisuudet lukio-opetuksessa **35**

1 Johdanto

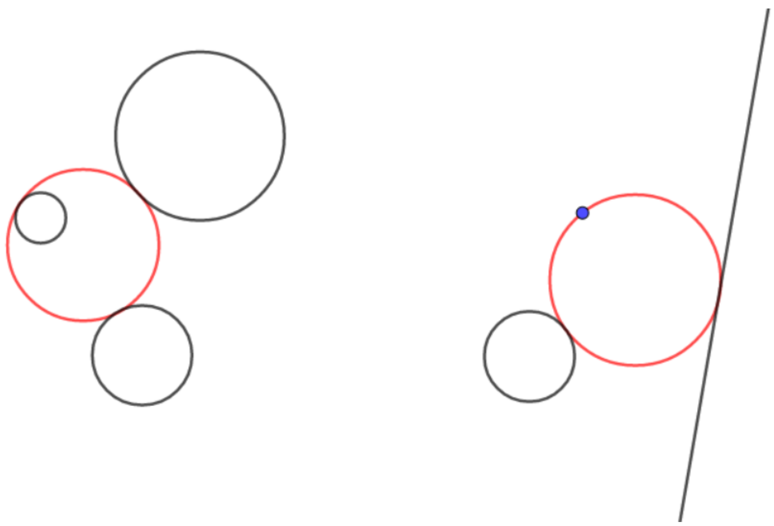
Tässä tutkielmassa käsitellään Apollonioksen ongelmaa, joka on kuuluisa antiikin ajan geometrinen ongelma. Tutkielman alkupuolella lukija saa käsityksen, mistä Apollonioksen ongelmassa on kyse. Apollonioksen ongelman tavoitteena on löytää ympyrä, joka on tangentti kolmelle tason geometriselle muodolle, jotka voivat olla pisteitä, suoria tai ympyröitä. Erilaisia mahdollisia tilanteita on kymmenen. Tutkielman toisessa luvussa esitellään lyhyesti Apollonioksen ongelma. Tutkielman kolmannessa luvussa käydään läpi ongelman historiaa ja esitellään keskeisiä matemaatikkoja, jotka ovat työskennelleet ongelman parissa.

Neljännessä luvussa esitetään ratkaisu kaikkiin kymmeneen eri tilanteeseen. Vaikeimpaan eli kolmen ympyrän tilanteeseen esitetään neljä erilaista ratkaisua. Ratkaisujen lukumäärä riippuu ympyröiden säteestä ja sijainnista toisiinsa nähden. Ratkaisuja kuhunkin tilanteeseen havainnollistetaan GeoGebralla piirrettyjen kuvien avulla. GeoGebra on ilmainen sovellus, jota voidaan käyttää monipuolisesti eri matematiikan osa-alueilla. Ratkaisuympyrät on merkitty kuviin punaisella värillä, jotta ne erottuvat paremmin. GeoGebran etuna verrattuna kynään ja paperiin on se, että geogebralla on mahdollista piilottaa piirretyt objektit, jolloin lopputuloksesta saadaan selkeämmän näköinen. GeoGebralla on myös mahdollista luoda sovelma, jossa annettuja objekteja muokkaamalla myös ratkaisuympyrä muokkautuu.

Tutkielman loppupuolella pohditaan Apollonioksen ongelman merkitystä nykypäivänä. Viidennessä luvussa esitellään muutamia käytännön sovelluksia. Ongelmaa hyödynnetään muun muassa GPS-paikannuksessa, lääketieteessä ja pakkausongelmissa. Viimeisessä luvussa kirjoittaja pohtii, voisiko Apollonioksen ongelman ottaa osaksi lukio-opetusta tietyillä kursseilla.

2 Apollonioksen ongelman esittely

Apollonioksen ongelma on nimetty antiikin ajan matemaatikko Apollonios Pergalaisen mukaan. Apollonioksen ongelmassa pyritään löytämään kaikki ympyrät, jotka ovat tangentteja kolmelle muulle tason geometriselle muodolle. Ratkaisuympyrän tulee sivuta kaikkia annettuja muotoja tasan yhdessä pisteessä. Muodot voivat olla pisteitä, suoria tai ympyröitä, joten erilaisia mahdollisia tilanteita on kymmenen. Jos yksikin annetuista objekteista on ympyrä, tulee huomioida, että annettu ympyrä voi jäädä ratkaisuympyrän sisä- tai ulkopuolelle. Kuuluisin ja vaikein näistä kymmenestä tilanteesta on kolmen ympyrän tilanne. Kuvassa 1 on kaksi esimerkkiä Apollonioksen ongelmasta ja molempiin tilanteisiin yksi ratkaisu.



Kuva 1:

3 Historia

Apollonius Pergalainen on yksi kuuluisimmista antiikin ajan matemaatikoista Eukleideksen ja Arkhimedeen jälkeen. Hänen elämänsä ajoittui arviolta 260eaa-170eaa väliseen aikaan.[5] Apolloniusta kutsuttiin antiikin Kreikassa lempinimellä ”Great Geometer”. Apollonioksen kirjoittama alkuperäinen tutkielma, joka sisälsi ratkaisun Apollonioksen ongelmaan oli nimeltään *De Tactionibus*. Valitettavasti alkuperäinen versio ei ole säilynyt nykyaikaan asti. Ranskalainen matemaatikko Francois Viete entisöi Apollonioksen tutkielman ja julkaisi sen nimellä Apollonius Gallus vuonna 1600.[4] Apollonioksen ongelmasta on todettu, että se on geometrisistä ongelmista tunnetuin.[2]

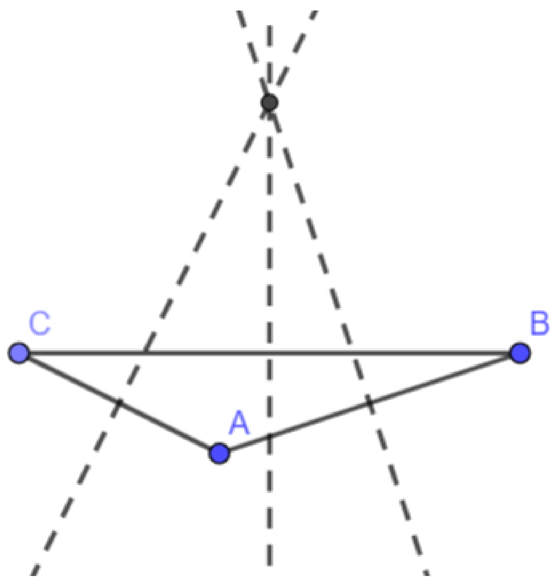
Monet kuuluisat matemaatikot ovat vuosien varrella tutkineet kyseistä geometristä ongelmaa ja siihen on esitetty useita geometrisiä ja algebrallisia ratkaisuja. Viete ratkaisi myös kolmen ympyrän tapauksen, jota Apollonioksen alkuperäisessä tutkielmassa ei ollut. Viete lähestyi kolmen ympyrän tapausta usealla yksinkertaisemmalla tilanteella, joissa yksi tai useampi ympyrä korvattiin pisteellä tai suoralla. Hän käytti näitä helpotettuja tapauksia ratkaistakseen alkuperäisen kolmen ympyrän tilanteen. Myös belgialainen matemaatikko Adrian van Roomen kehitti ratkaisun Apollonioksen ongelmaan. Hänen ratkaisunsa perustuu kahden hyperbelin leikkauspisteeseen, joka on samalla kolmea ympyrää sivuavan ympyrän keskipiste.

Rene Descartes pyrki ratkaisemaan Apollonioksen ongelman analyyttisen geometrian menetelmillä. Hän kehitti kaksi erilaista ratkaisua, mutta ne olivat vaikeita toteuttaa. Apollonioksen ongelman parissa työskentelivät myös Leonard Euler ja Nicolass Fuss. Gaspard Monge tutki useamman ympyrän välisiä ominaisuuksia ja hän kehitti uusia matemaattisia käsitteitä, joiden avulla Apollonioksen ongelmaan saatiin ratkaisu. Mongen kehittämiä käsitteitä ovat muun muassa radikaaliakseli, samankaltaisuuspisteet ja samankaltaisuusakseli. Mongen käsitteitä hyväksikäyttäen, J. D. Gergonne julkaisi oman ratkaisunsa Apollonioksen ongelmaan. J. V. Poncelet julkaisi toisen merkittävän geometrisen ratkaisun muutama vuosi Gergonnen julkaisun jälkeen.[4]

4 Apollonioksen ongelman ratkaiseminen

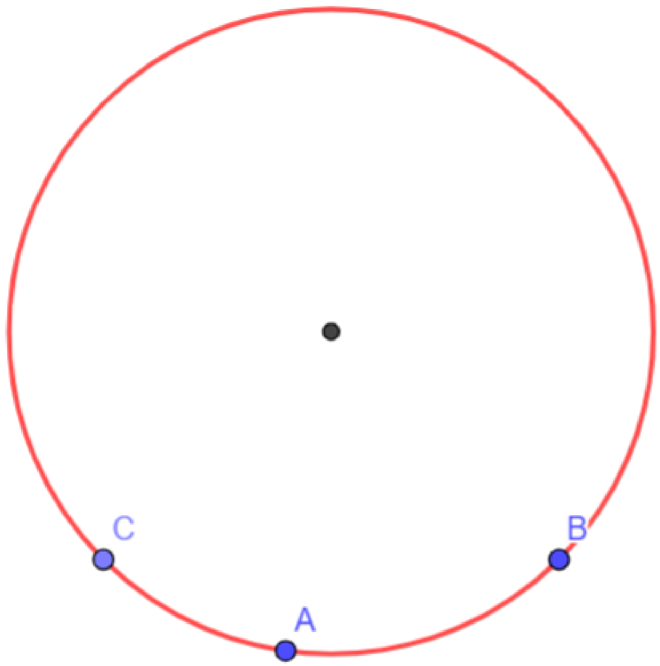
4.1 Piste, piste, piste

Yksinkertaisin tilanne on kolmen pisteen tilanne. Piirretään pisteiden välille jana, jolloin muodostuu kolmio. Tämän jälkeen muodostetaan vähintään kahdelta janalta keskinormaalit kuvan 2 mukaisesti. Keskinormaalien leikkauspiste on ratkaisuympyrän keskipiste.



Kuva 2: kolme pistettä

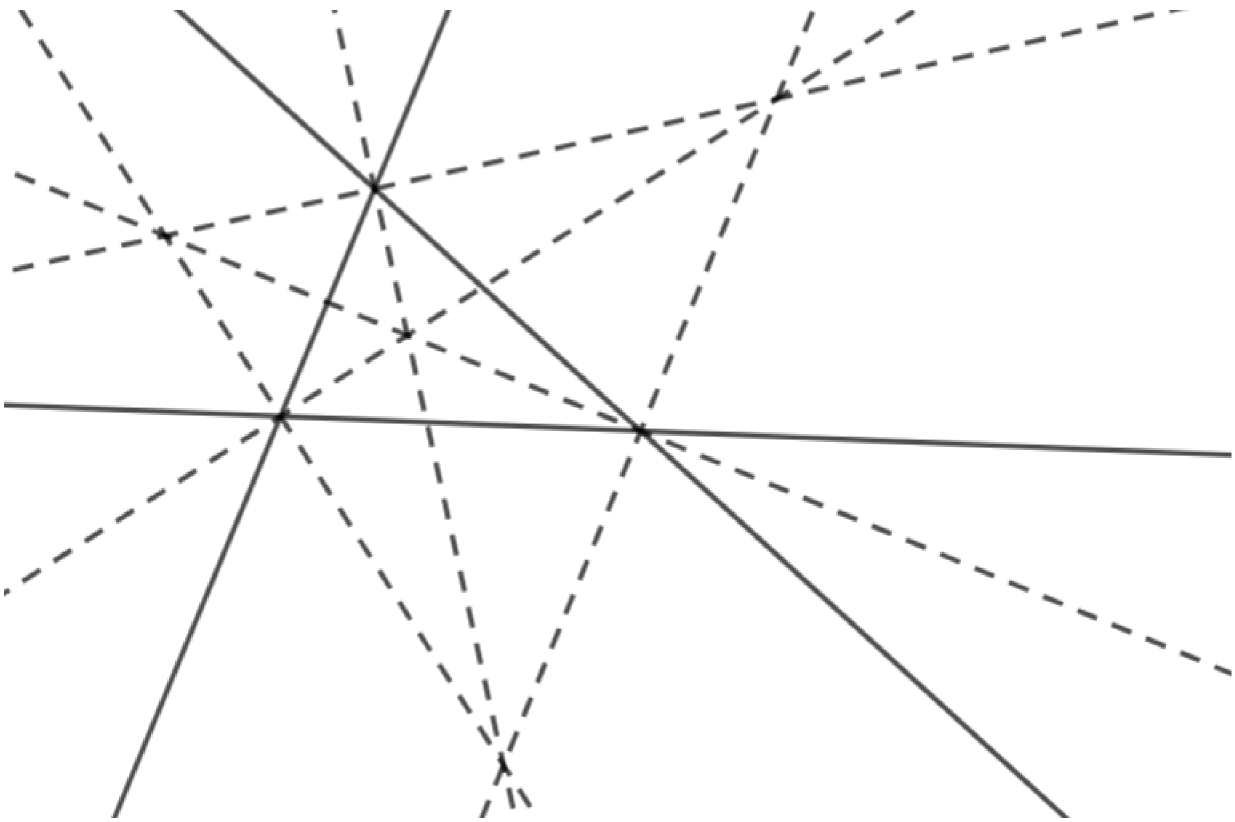
Ympyrä voidaan piirtää koska tiedetään keskipiste ja säteeksi voidaan valita etäisyys johonkin pisteeseen A,B tai C. Tässä tapauksessa ratkaisuja on ainoastaan yksi, joka on esitetty kuvassa 3.



Kuva 3: Ratkaisu kolmen pisteen tilanteeseen

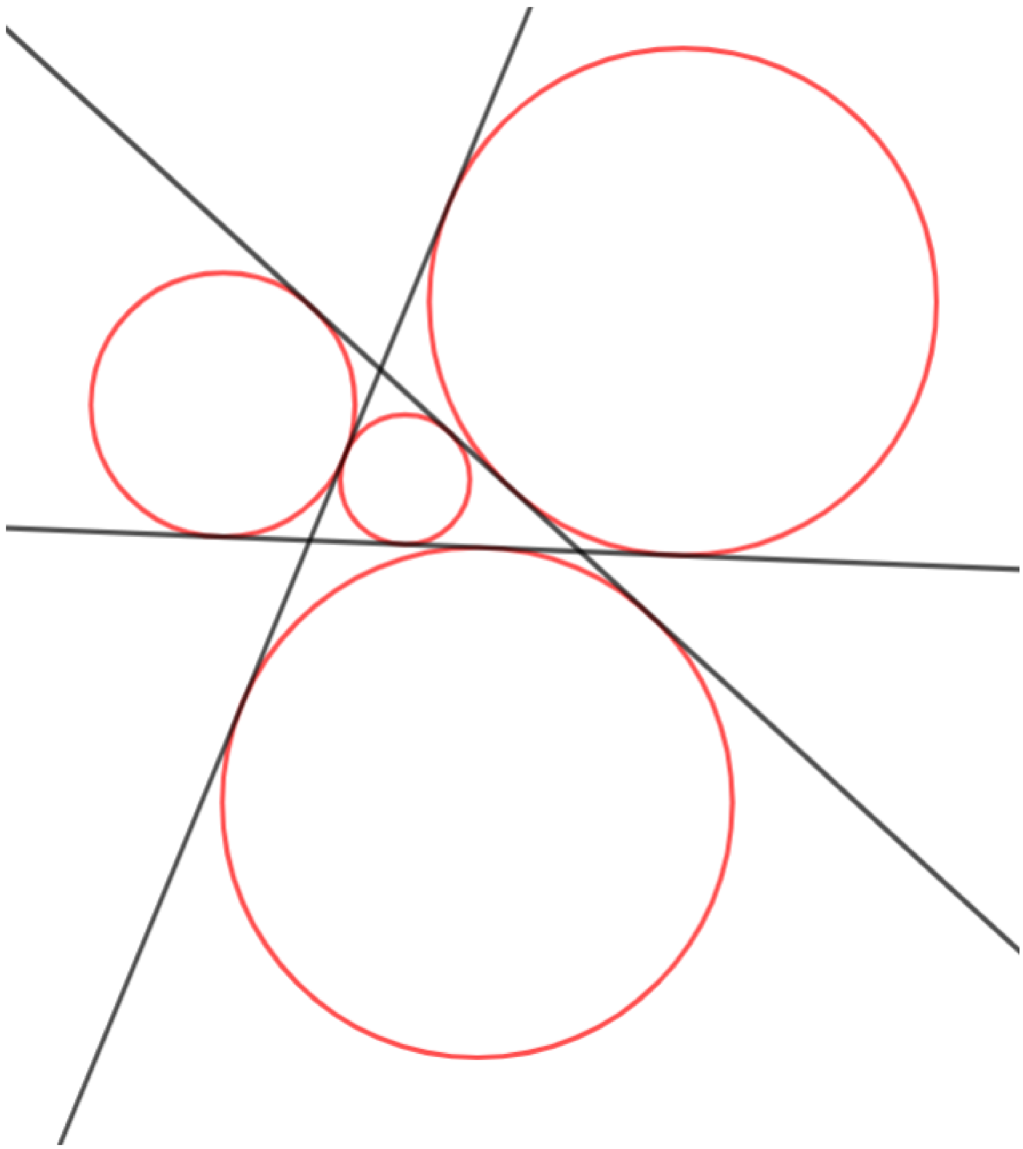
4.2 Suora, suora, suora

Seuraavaksi esitetetään ratkaisu kolmen suoran tilanteeseen. Annetut suorat on merkitty kuvaan 4 mustilla viivoilla. Oletetaan, että suorat eivät ole samansuuntaisia, jotta tähän tilanteeseen saadaan ratkaisu. Tämän tilanteen ratkaisussa hyödynnetään kulmanpuolittajia. Tiedetään, että kulmanpuolittajalta on yhtä suuri etäisyys molemmille sivuille, joten kahden kulmanpuolittajan leikkauspisteestä on yhtä suuri etäisyys kaikille kolmelle sivulle. Kulmanpuolittajat on piirretty katkoviivoilla kuvaan 4. Huomataan, että neljässä pisteessä kolme kulmanpuolittajaa leikkaa keskenään. Nämä leikkauspisteet ovat etsittyjen ympyröiden keskipisteitä.



Kuva 4: Kulmanpuolittajien leikkauspisteet

Kun ympyröiden keskipisteet on saatu selville. tarvitaan vielä säteen pituus. Säteen pituus saadaan, kun piirretään joltakin suoralta normaali ympyrän keskipisteen kautta. Kaikki neljä ratkaisuympyrää on esitetty kuvassa 5.[1]



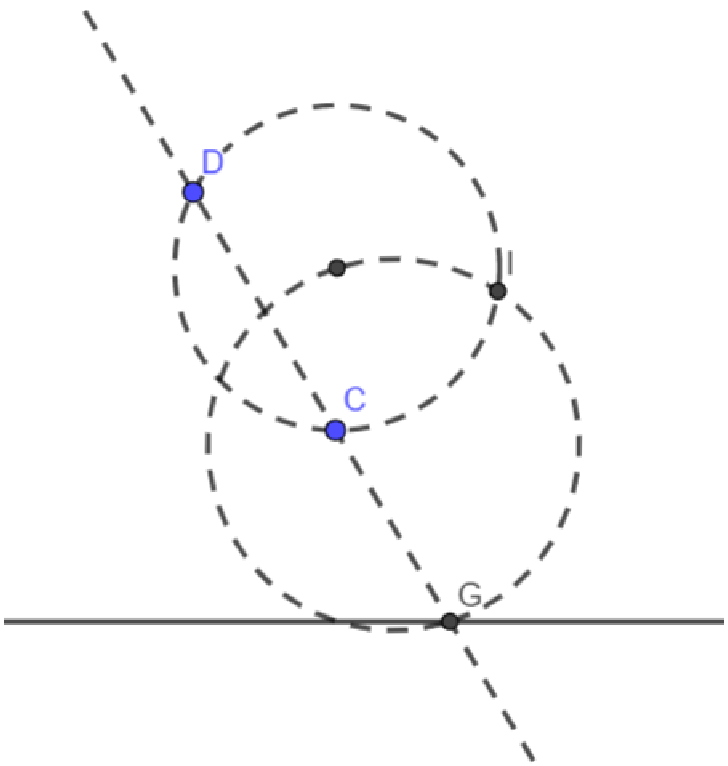
Kuva 5: Ratkaisu kolmen suoran tilanteeseen

4.3 Piste, piste, suora

Kahden pisteen ja suoran tilanteeseen ei ole olemassa yhtäkään ratkaisua, jos pisteet ovat suoran eri puolilla, joten oletetaan, että pisteet ovat samalla puolella suoraa. Oletetaan myös, että pisteet eivät ole suoralla.

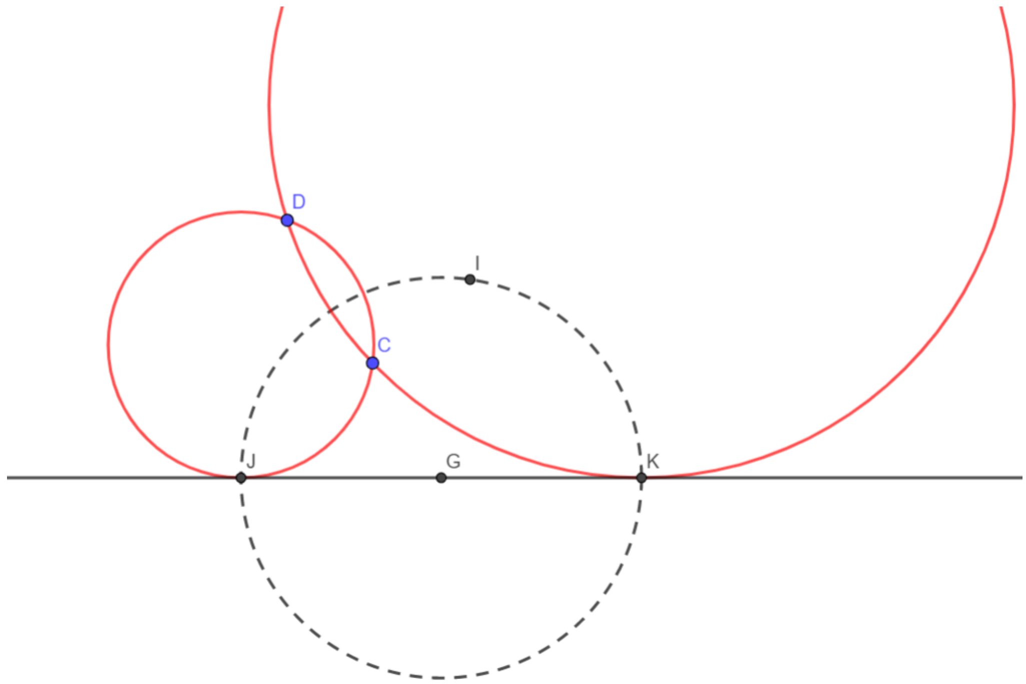
Määritelmä 4.3.1 Pisteen P kautta piirretylle ympyrän sekantille pätee, että kyseisen pisteen potenssi on vakio riippumatta sekantin suunnasta.[13]

Piirretään aluksi jokin ympyrä, joka kulkee kahden annetun pisteen kautta. Olkoon G piste, jossa annettujen pisteiden kautta kulkeva suora leikkaa annetun suoran. Suoralta tulee löytää piste, jossa annettujen pisteiden kautta kukeva ympyrä sivuaa suoraa. Näin ollen pisteen potenssin perusteella pätee, että $DG \cdot CG = JG^2$. Oletetaan, että I on ensin piirretyn ympyrän piste ja jana IG on ympyrän tangentti. Tällöin pätee, että $DG \cdot CG = IG^2$. Piirretään ympyrä joka kulkee leikkauspisteen G ja alussa valitun ympyrän keskipisteen kautta. Näin saadaan selvitettyä piste I. Kuvassa 6 havainnollistetaan edellä esitettyjä vaiheita.



Kuva 6: Välivaiheita kahden pisteen ja suoran tilanteen ratkaisussa

Seuraavaksi piirretään ympyrä, jonka keskipiste on G ja kehän piste I. Tämä ympyrä leikkaa annetun suoran kahdessa pisteessä, joiden kautta voidaan piirtää ratkaisuympyrät samaan tapaan kuin kolmen pisteen tilanteessa.[1]



Kuva 7: Ratkaisu kahden pisteen ja suoran tilanteeseen

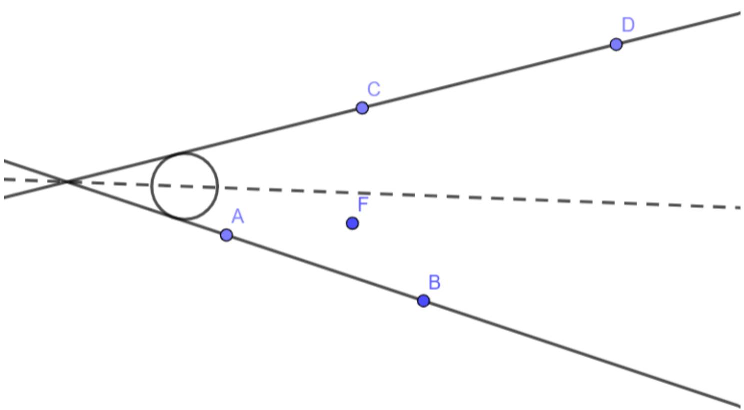
4.4 Piste, suora, suora

Seuraavassa tilanteessa on kaksi suoraa AB ja CD sekä piste F. Oletetaan, että suorat leikkaavat keskenään jossakin pisteessä. Jos suorat ovat samansuuntaiset ja piste ei ole niiden välissä, ongelmaan ei ole olemassa ratkaisua.

Määritelmä 4.4.1 Olkoon O kiinteä tason piste, P tason piste ja $k \in R$. Määritetään pisteille kuvaus, joka toteuttaa ehdot:
1. Jos $P = O$, niin $f(P) = P$.
2. Jos $P \neq O$, niin $f(P)$ on se puolisuoran piste, jolle pätee

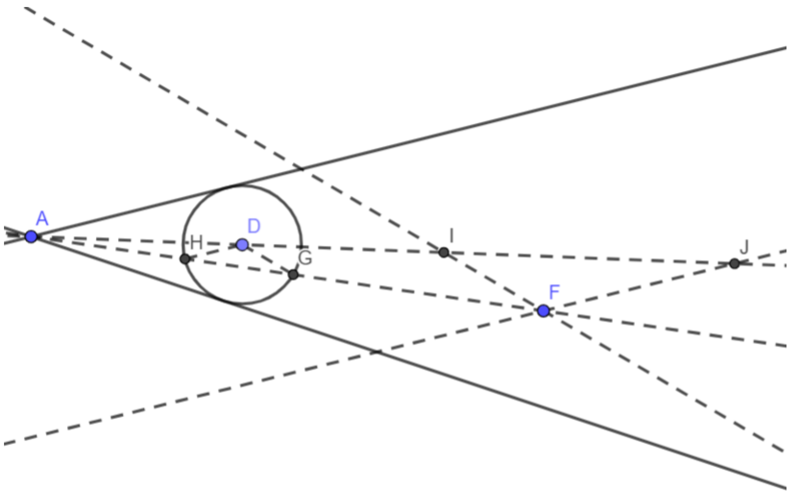
$$\frac{Of(P)}{OP} = k.$$

Käytetään hyväksi homotetiaa, eli ympyrä kuvautuu ympyräksi jonkin kertoimen mukaisesti. Piirretään aluksi jokin ympyrä, jonka keskipiste on kulmanpuolittajalla ja joka sivuaa molempia suoria kuvan 8 mukaisesti.[6]



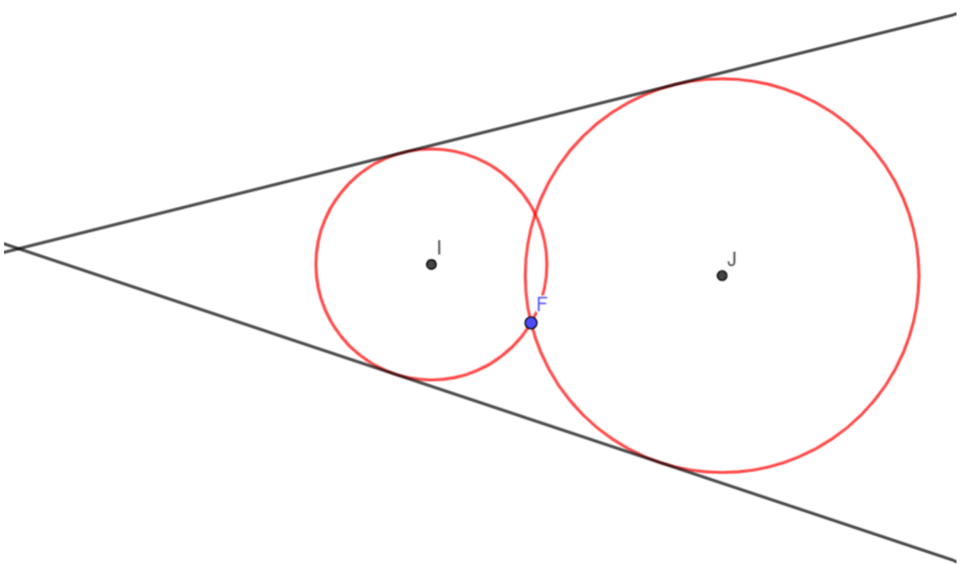
Kuva 8: Annetut suorat ja piste sekä jokin suoria sivuava ympyrä

Piste F kuvautuu joksikin pisteeksi äsken valitulle ympyrälle ja nämä pisteet löytyvät ympyrän ja suoran AF leikkauspisteistä. Kyseiset pisteet ovat G ja H. Jana DG kuvautuu janaksi IF ja jana DH janaksi JF. Tätä havainnollistetaan kuvassa 9.



Kuva 9: Annetun pisteen kuvautuminen ympyrälle

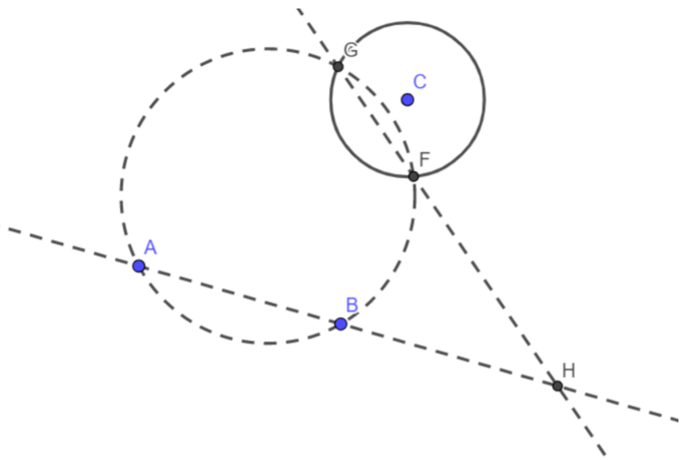
Pisteet J ja F ovat etsittyjen ympyröiden keskipisteet ja säteeksi valitaan etäisyys pisteeseen F, jolloin saadaan kaksi ratkaisua, jotka on esitetty kuvassa 10.[1]



Kuva 10: Ratkaisu pisteen ja kahden suoran tilanteeseen

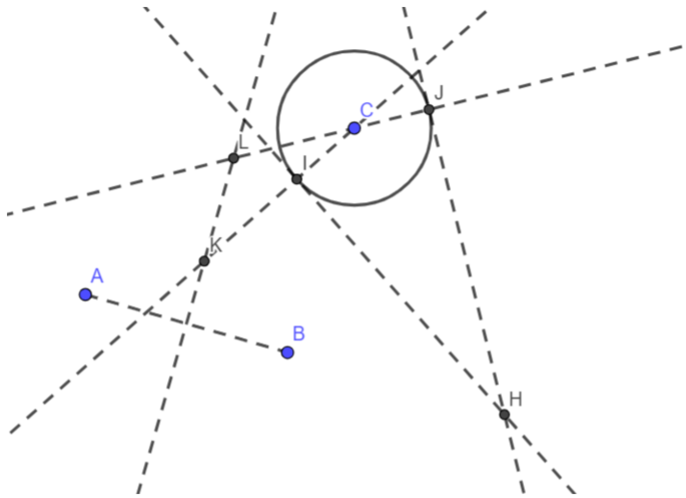
4.5 Piste, piste, ympyrä

Oletetaan, että pisteet ovat ympyrän ulkopuolella. Kuvassa 11 on kaksi annettua pistettä A ja B sekä mustalla viivalla piirretty annettu ympyrä. Piirretään katkoviivalla ympyrä, joka sivuaa molempia annettuja pisteitä ja leikkaa annetun ympyrän kahdesti. Merkitään edellä mainittuja leikkauspisteitä kirjaimilla F ja G. Piirretään kaksi suoraa, jotka kulkevat pisteiden A ja B, sekä G ja F kautta. Suorat leikkaavat pisteessä H.



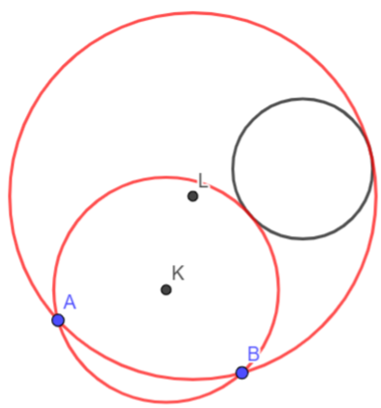
Kuva 11: Tilanne, jossa on kaksi pistettä ja ympyrä

Seuraavaksi piirretään annetulle ympyrälle tangentit pisteen H kautta. Merkitään sivuamispisteitä kirjaimilla I ja J. Piirretään sivuamispisteiden kautta tangentille normaalit. Normaalit leikkaavat janalle AB piirretyn keskinormaalin kanssa pisteissä L ja K. Tätä vaihetta havainnollistetaan kuvassa 12.



Kuva 12: Ratkaisuympyröiden keskipisteiden selvittäminen

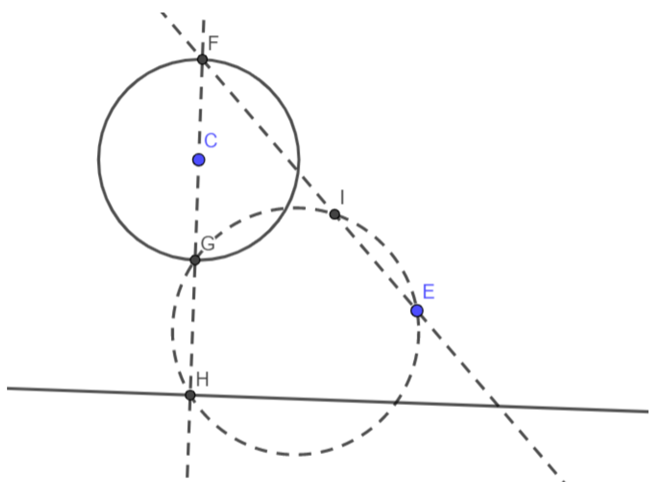
Pisteet L ja K ovat etsittyjen ympyröiden keskipisteet. Ongelmaan saatiin kaksi ratkaisua, jotka on esitetty kuvassa 13.[1]



Kuva 13: Ratkaisu kahden pisteen ja ympyrän tilanteeseen

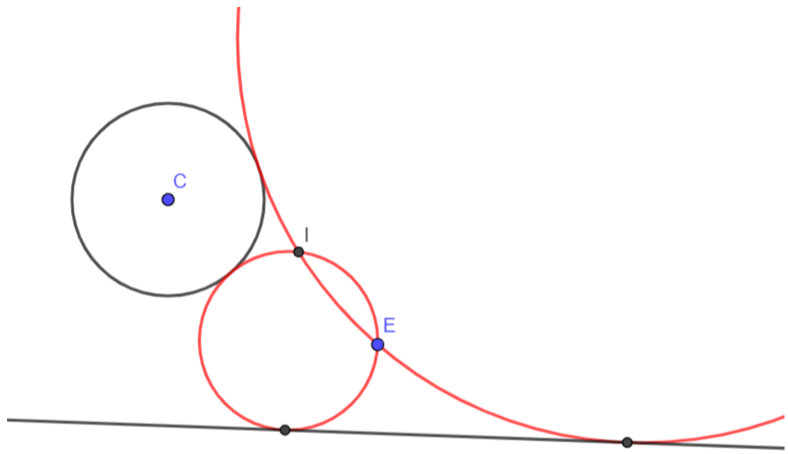
4.6 Piste, suora, ympyrä

Oletetaan, että piste ja ympyrä ovat samalla puolella suoraa. Oletetaan, etteivät suora ja ympyrä leikkaa, eikä piste ole suoralla tai ympyrällä. Pisteen, suoran ja ympyrän tilanteen ratkaiseminen aloitetaan piirtämällä annetun suoran suhteen normaali, joka kulkee annetun ympyrän keskipisteen kautta. Merkitään alkuperäisen suoran ja normaalin leikkauspistettä kirjaimella H. Normaali leikkaa ympyrän kahdessa pisteessä, jotka ovat F ja G. Piirretään suora, joka kulkee pisteen F ja alkuperäisen pisteen kautta. Muodostetaan ympyrä, joka kulkee annetun pisteen ja pisteiden G ja H kautta. Ympyrä ja suora leikkaavat pisteessä I. Kuvassa 14 havainnollistetaan tätä ratkaisun vaihetta.



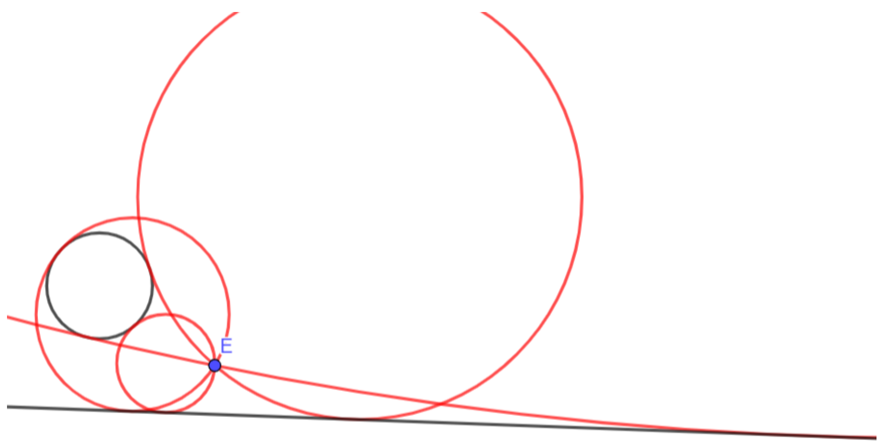
Kuva 14: Ratkaisuympyrän keskipisteen selvittäminen

Kaksi ratkaisuympyrää kulkee pisteen I kautta. Saatiin muodostettua tilanne, jossa on kaksi pistettä ja suora. Ratkaisua jatketaan luvussa 4.3 esitellyllä tavalla. Jolloin saadaan kaksi ratkaisua pisteen, suoran ja ympyrän tilanteeseen. Kaksi ratkaisua on esitetty kuvassa 15.



Kuva 15: Kaksi ratkaisua pisteen, suoran ja ympyrän tilanteeseen

Jäljellä olevat kaksi ratkaisua saadaan, kun pisteiden F ja G kanssa toimitaan toisinpäin. Eli muodostetaan suora, joka kulkee pisteiden G ja E kautta ja ympyrä, joka kulkee pisteiden H, F ja E kautta. Kaikki ratkaisut on esitetty kuvassa 16.[1]



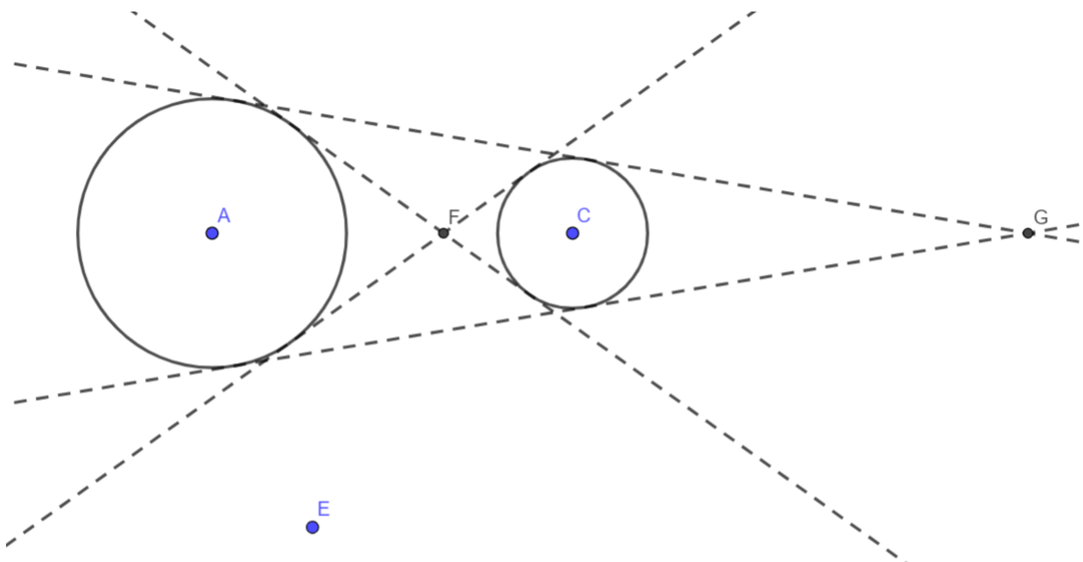
Kuva 16: Kaikki ratkaisut pisteen, suoran ja ympyrän tilanteeseen

4.7 Piste, ympyrä, ympyrä

Oletetaan, että ympyrät ovat erillään ja oletetaan, että piste on ympyröiden ulkopuolella. Oletetaan myös, että piste ei ole ympyröiden keskipisteiden kanssa samalla suoralla. Aloitetaan pisteen ja kahden ympyrän tilanteen ratkaiseminen määrittelemällä risteyspiste.

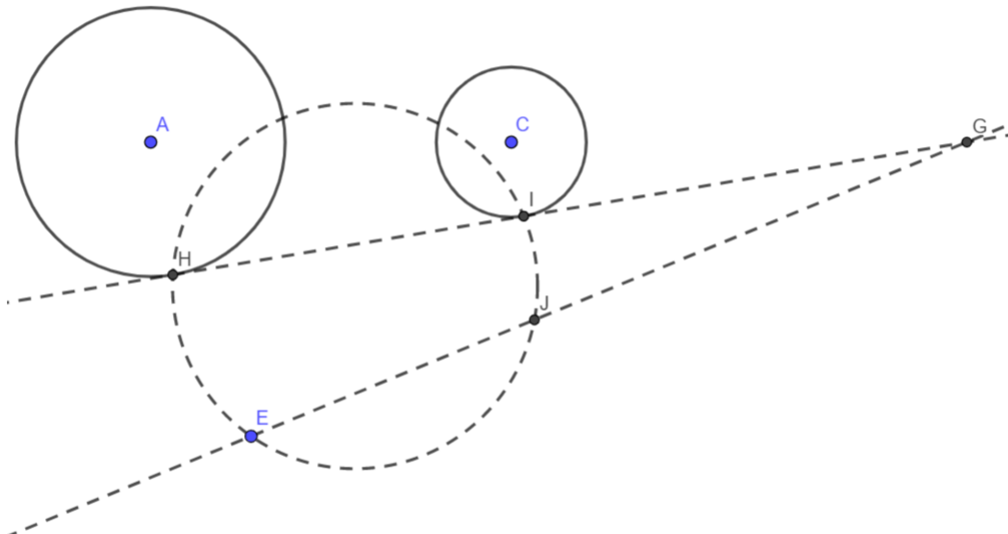
Määritelmä 4.7.1 Risteyspisteet ovat pisteitä, jotka sijaitsevat kahdelle ympyrälle piirrettyjen tangenttien leikkauspisteissä.

Piirretään tangentit molemmille ympyröille, jotta saadaan risteyspisteet selvitettyä. Kahdella ympyrällä on kaksi risteyspistettä, jotka on merkitty kuvaan 17 kirjaimilla F ja G.



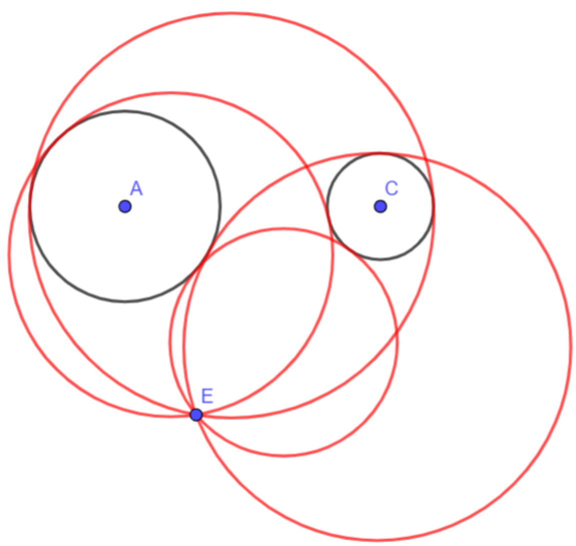
Kuva 17: Kahden ympyrän risteyspisteet

Piirretään ympyrä, joka kulkee tangentin sivuamispisteiden ja annetun pisteen kautta. Valitaan toinen risteyspiste ja piirretään suora, joka kulkee risteyspisteen ja annetun pisteen kautta. Ympyrä ja suora leikkaavat pisteessä J.



Kuva 18: Tilanne muutettu kahden pisteen ja ympyrän tilanteeksi

Nyt voidaan ratkaista tilanne samalla tavalla kuin kahden pisteen ja ympyrän tapauksessa luvussa 4.5 esitellyllä tavalla. Loput ratkaisut saadaan, kun muodostetaan suora toisen risteyspisteen kautta ja toistetaan edellä esitetyt vaiheet. Kuvaan 19 on piirretty kaikki neljä ratkaisua.[1]

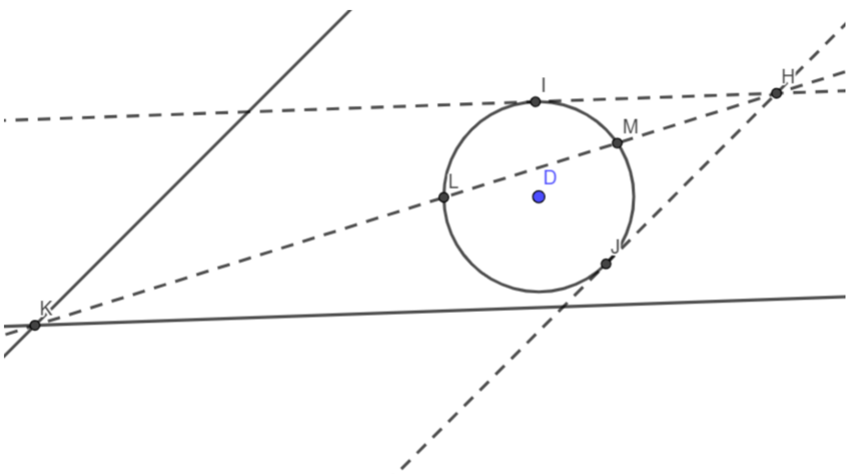


Kuva 19: Ratkaisu pisteen ja kahden ympyrän tilanteeseen

4.8 Suora, suora, ympyrä

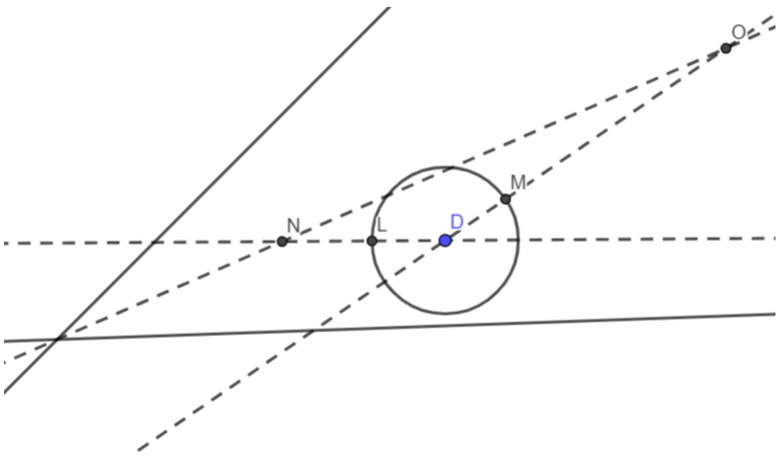
Oletetaan, että suorat eivät leikkaa ympyrää ja oletetaan, että suorat eivät ole samansuuntaisia. Jos molemmat suorat leikkaavat ympyrän kahdessa pisteessä, tilanteeseen on kahdeksan ratkaisua. Piirretään aluksi ympyrällä tangentit, jotka ovat samansuuntaisia annettujen suorien kanssa. Ympyrälle voidaan myös piirtää suorien suuntaiset tangentit toisin päin, jolloin saadaan myös toinen tangenttien leikkauspiste.

Piirretään suora, joka kulkee suorien leikkauspisteen ja tangenttien leikkauspisteen kautta. Suora leikkaa ympyrän pisteissä L ja M, jotka ovat pisteitä, missä ratkaisuympyrä sivuaa annettua ympyrää. Tätä vaihetta havainnollistetaan kuvassa 20.



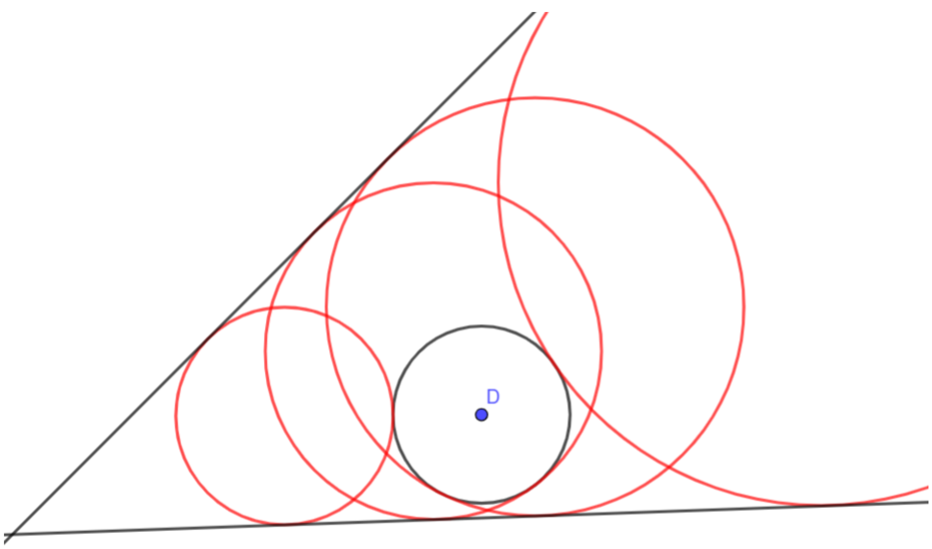
Kuva 20: Ratkaisuympyröiden ja annetun ympyrän sivuamispisteet

Piirretään suorien välille kulmanpuolittaja ja piirretään kaksi suoraa DL ja DM. Molemmat suorat leikkaavat kulmanpuolittajan kuvan 21 mukaisesti. Leikkauspisteet ovat ratkaisuympyröiden keskipisteitä.



Kuva 21: Ratkaisuympyröiden keskipisteet

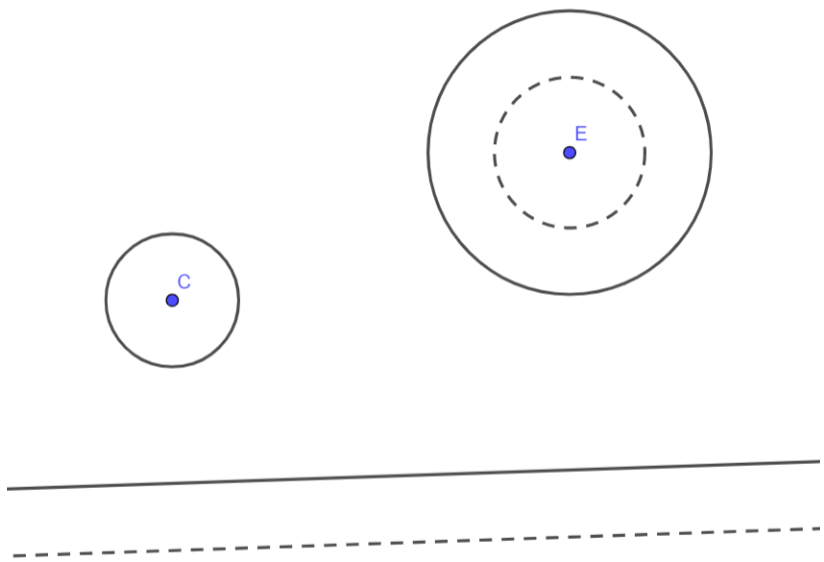
Ympyröiden säteiksi valitaan OM ja NL. Näin saatiin kaksi ratkaisuympyrää kahden suoran ja ympyrän tilanteeseen. On olemassa vielä kaksi muuta ratkaisua, jotka saadaan, kun alussa otetaan toinen tangenttien leikkauspiste ja toistetaan edellä esitetyt vaiheet.[1]



Kuva 22: Ratkaisu kahden suoran ja ympyrän tilanteeseen

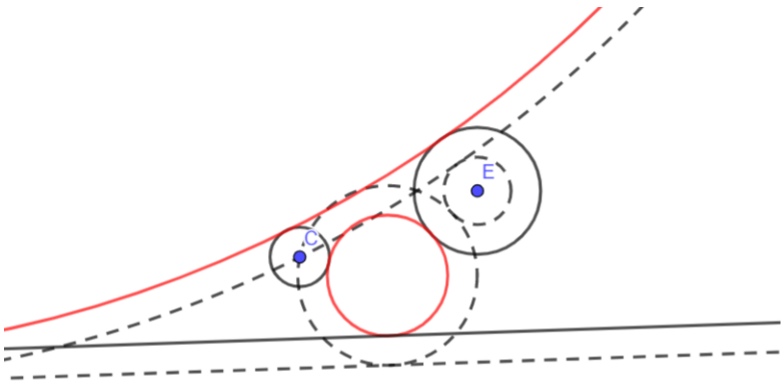
4.9 Suora, ympyrä, ympyrä

Oletetaan, että molemmat ympyrät ovat suoran samalla puolella ja oletetaan, että ympyrät ja suora eivät leikkaa keskenään. Pienennetään pienemmän ympyrän säde nollaan, jolloin sitä voidaan käsitellä pisteenä. Pienennetään suuremman ympyrän sädettä pienemmän ympyrän säteen verran. Lisäksi siirretään suoraa pienemmän ympyrän säteen verran. Edellä mainittuja toimenpiteitä havainnollistetaan kuvass 23. Nyt voidaan ratkaista pisteen, suoran ja ympyrän tilanne luvussa 4.6 esitetyllä tavalla.



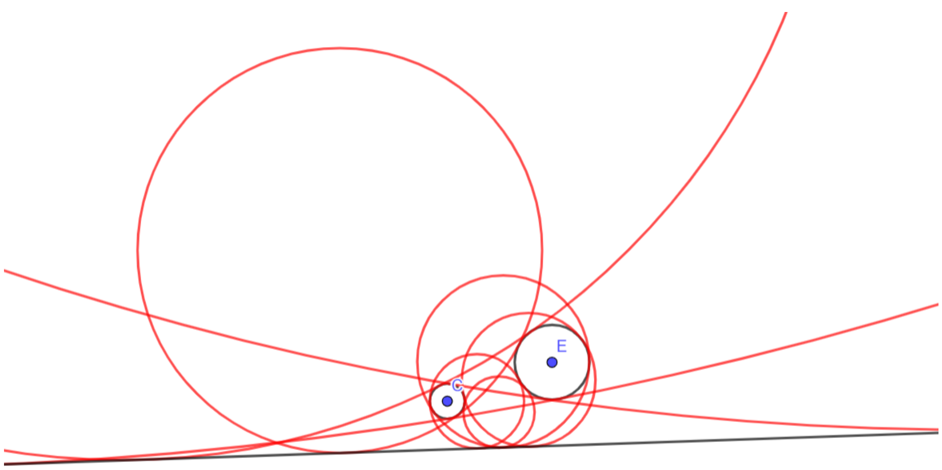
Kuva 23: Ympyröiden pienennys ja suoran siirto

Kuvassa 24 on merkittynä katkoviivalla ympyrät, jotka ovat ratkaisuja pisteen, suoran ja ympyrän tilanteeseen. Pienentämällä näiden ympyröiden säteitä pienemmän annetun ympyrän säteen verran saadaan kaksi ympyrää, jotka sivuavat molempia annettuja ympyröitä ja suoraa.



Kuva 24: Ratkaisu helpotettuun ja alkuperäiseen tilanteeseen

Pisteen, suoran ja ympyrän tapauksessa on olemassa neljä ratkaisua. Loput ratkaisut saadaan, kun siirretään annettua suoraa toiseen suuntaan ja suurennetaan ympyrää pienemmän ympyrän säteen verran. Kaikki ratkaisut, jotka toteuttavat tilanteen piste, suora ja ympyrä, eivät kuitenkaan ole ratkaisuja alkuperäiselle ongelmalle.[1]

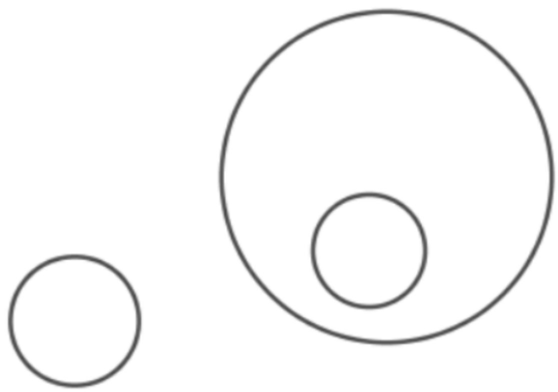


Kuva 25: Ratkaisu suoran ja kahden ympyrän tilanteeseen

4.10 Ympyrä, ympyrä, ympyrä

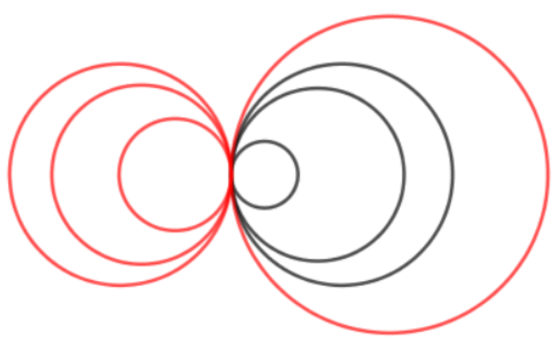
Kolmelle ympyrälle erilaisia tilanteita on useita, koska ympyrät voivat olla toistensa sisällä tai leikata keskenään. Kolmelle erillään olevalle ympyrälle erilaisia mahdollisia ratkaisuja on kahdeksan, koska annettu ympyrä voi olla tangenttina ollen etsityn ympyrän sisä- tai ulkopuolella.

Jos yksikin ympyrä on toisen ympyrän sisällä, ja ympyrät eivät leikkaa, Apollonioksen ongelmaan ei ole ratkaisua.



Kuva 26: Ei ratkaisua

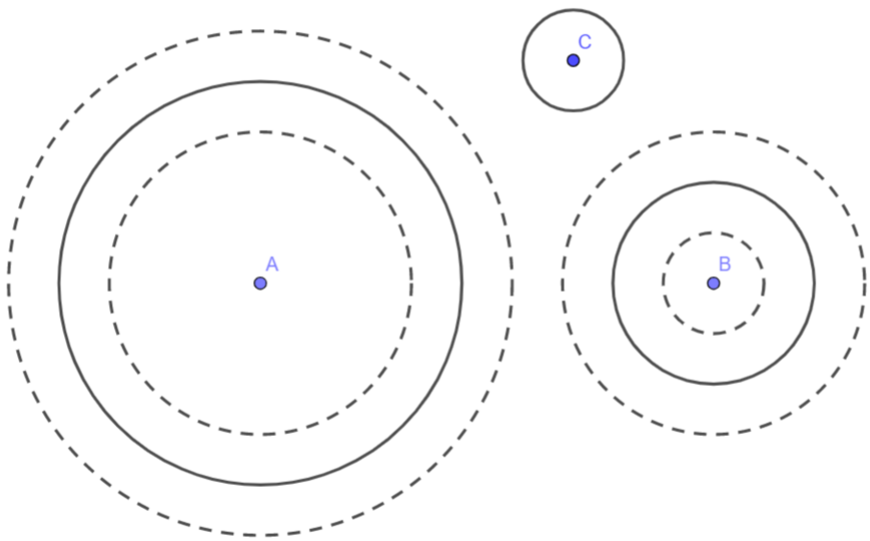
Jos kaikki kolme ympyrää leikkaavat keskenään tasan yhdessä pisteessä, ongelmaan on olemassa äärettömän monta ratkaisua.



Kuva 27: Äärettömän monta ratkaisua

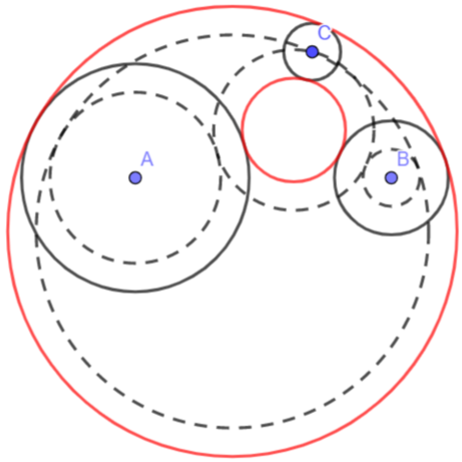
4.10.1 Vieten ratkaisu

Ratkaistaan kolmen ympyrän tilanne pienentämällä pienimmän ympyrän säden nollaksi. Pienennetään ja kasvatetaan muiden ympyröiden säteitä pienimmän ympyrän säteellä, jolloin saadaan neljä uutta ympyrää. Nyt voidaan ratkaista tilanne, jossa on kaksi ympyrää ja piste. Kuvaan 26 on piirretty alkuperäiset ympyrät mustalla viivalla ja pienennetyt ja suurennetut ympyrät katkoviivoilla.



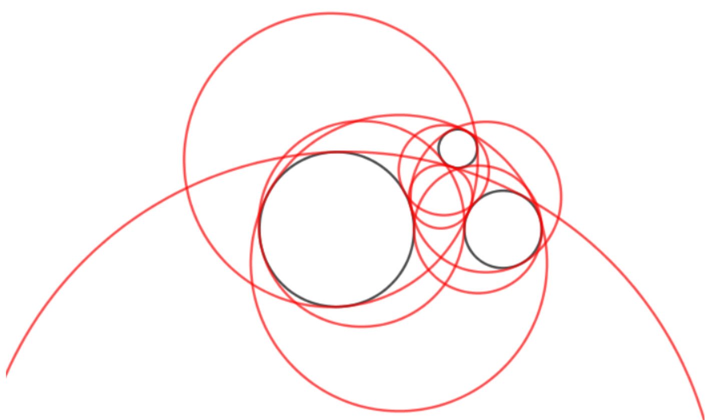
Kuva 28: Ympyrät, joiden sädettä on suurennettu ja pienennetty

Ratkaisut suurennetuille ja pienennetyille ympyröille eivät ole ratkaisuja alkuperäiseen tilanteeseen, joten näiden ympyröiden sädettä joudutaan suurentamaan ja pienentämään, jotta saadaan alkuperäiseen tilanteeseen ratkaisu. Kuvassa 29 havainnollistetaan, että pienennetyille ympyröille löydetyt ratkaisut eivät ole ratkaisuja alkuperäiseen tilanteeseen.



Kuva 29: Kaksi ratkaisua helpotettuun ja alkuperäiseen tilanteeseen

Toistetaan edellä mainitut vaiheet myös muiden ympyräparien suhteen, jolloin saadaan kaikki kahdeksan ratkaisua, jotka on piirretty kuvaan 30.[1]



Kuva 30: Ratkaisu kolmen ympyrän tilanteeseen

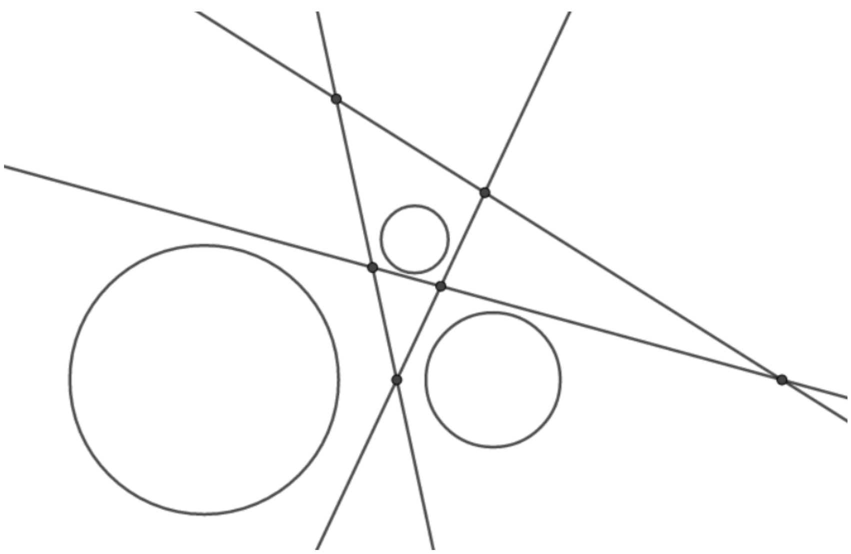
4.10.2 Gergonnen ratkaisu

Gergonnen ratkaisu perustuu kahden pisteen etsimiseen, jotka ovat napa (pole) ja potenssikeskus (power center). Potenssikeskus on kaikille kolmelle annetulle ympyrälle yhteinen, mutta napa täytyy etsiä kullekin ympyrälle erikseen. Muodostetaan suora, joka kulkee näiden kahden pisteen kautta. Suora leikkaa jokaisen ympyrän kahdessa pisteessä. Kyseiset leikkauspisteet ovat annetun ympyrän ja etsityn ympyrän sivuamispisteet.

Selvitetään ensin risteyspisteet. Kolmella ympyrällä on yhteensä kuusi risteyspistettä.

Määritelmä 4.2. Samankaltaisuusakseli on kolmen risteyspisteen välille piirretty suora.

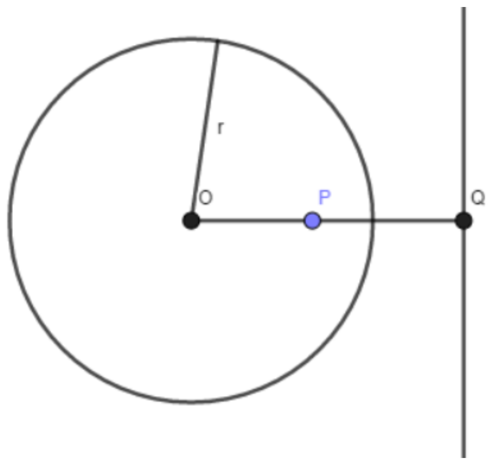
Kolmella ympyrällä on yhteensä neljä samankaltaisuusakselia (similarity axis). Samankaltaisuusakselia muodostettaessa tarvitaan jokaiselta ympyrä parilta yksi risteyspiste. Keskipisteiden ulkopuolella olevien risteyspisteiden kautta kulkee yksi samankaltaisuusakseli. Jäljellä olevat akselit saadaan, kun muodostetaan suora, joka kulkee kahden keskipisteiden sisäpuolella olevan ja yhden ulkopuolella olevan risteyspisteen kautta kuvan 31 mukaisesti.



Kuva 31: kolmen ympyrän samankaltaisuusakselit

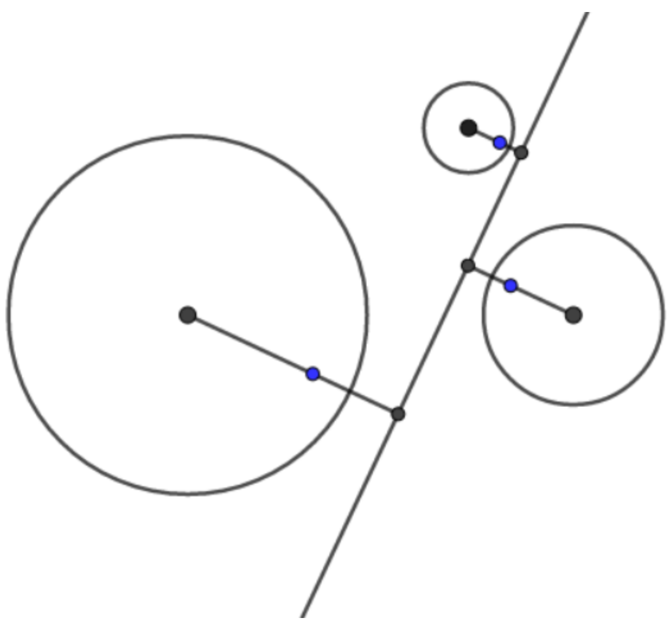
Määritelmä 4.3. Olkoon O ympyrän keskipiste ja r ympyrän säde. Olkoon l samankaltaisuusakseli ja Q piste samankaltaisuusakselilla l. Lisäksi l ja jana OQ leikkaavat kohtisuorasti. Napa P on piste janalla OQ, jolle pätee $r^2 = OP \cdot OQ$

Kaikilta kolmen ympyrän keskipisteiltä piirretään kohtisuorasti jana samankaltaisuusakselille, minkä jälkeen ratkaistaan navat. Kuvassa 32 havainnollis-



Kuva 32: napa

tetaan navan määritelmää. Kuvassa 33 ratkaistaan navat yhden samankaltaisuusakselin suhteen.



Kuva 33: kolme napaa

Määritelmä 4.4. Olkoon C ympyrä, r ympyrän säde ja O ympyrän keskipiste. Olkoon P piste ja d jana OP, jolloin pisteen P potenssi ympyrän C suhteen on $P(C) = d^2 - r^2$.

Määritelmä 4.5. Olkoot C_1 ja C_2 ympyröitä. Radikaaliakseli on niiden pisteiden joukko, joille pätee $P(C_1) = P(C_2)$

Lause 4.6. *Kahden ympyrän välinen radikaaliakseli on suora, joka leikkaa ympyröiden keskipisteiden väliin piirretyn janan kohtisuorasti.*

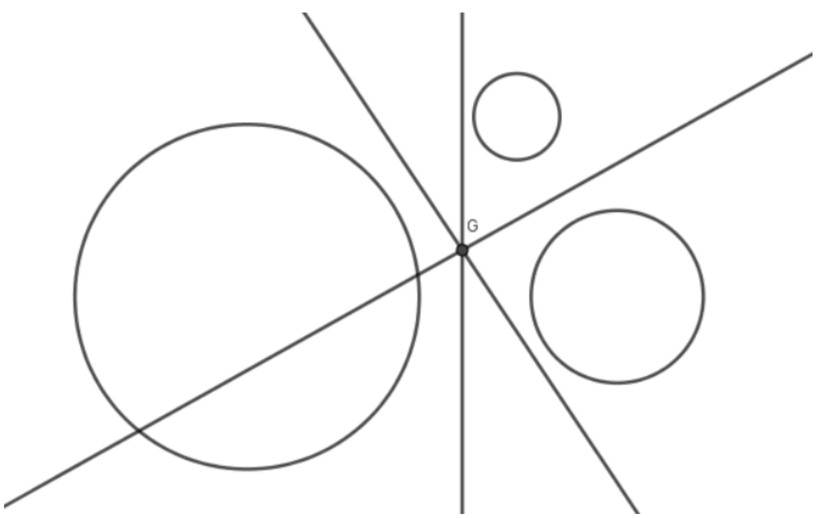
Todistus Olkoot C_1 ja C_2 ympyröitä, joiden keskipisteet olkoot O_1 ja O_2, lisäksi säteet olkoot r_1 ja r_2. Olkoon A piste janalla O_1O_2 ja A:lle pätee $A(C_1) = A(C_2)$. Olkoon l suora, joka leikkaa janan O_1O_2 kohtisuorasti pisteessä A. Olkoon P piste suoralla l.

$$\begin{aligned}
P(C_1) &= (O_1P)^2 - r_1^2 \\
&= (AP)^2 + (O_1A)^2 - r_1^2 \\
&= (AP)^2 + A(C_1) \\
&= (AP)^2 + A(C_2) \\
&= (AP)^2 + (O_2A)^2 - r_2^2 \\
&= (O_2P)^2 - r_2^2 \\
&= P(C_2).
\end{aligned}$$

Näin ollen on todistettu, että kaikille pisteillä suoralla l on yhtä suuri potenssi molempien ympyröiden suhteen.

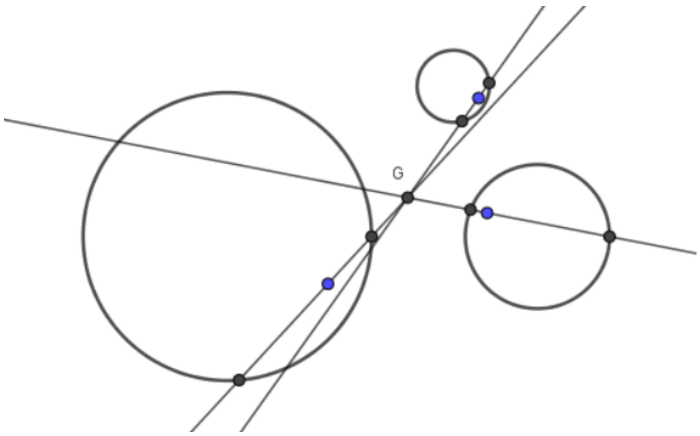
Määritelmä 4.7. Potenssikeskus on radikaaliakselien leikkauspiste.

Kuvaan 34 on piirretty kolmen ympyrän radikaaliakselit ja niiden leikkauspiste eli potenssikeskus.



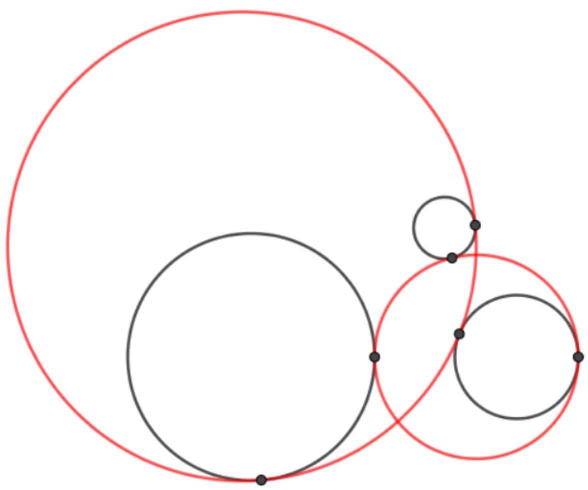
Kuva 34: Potenssikeskus

Kun napa ja potenssikeskus on ratkaistu, muodostetaan suora, joka kulkee näiden kahden pisteen kautta. Kyseisen suoran ja ympyrän leikkauspisteet ovat ympyrän ja ratkaisuympyrän sivuamispisteitä. Tätä on havainnollistettu kuvassa 35.



Kuva 35: sivuamispisteet

Kuvassa 36 on piirretty edellä mainittujen pisteiden kautta ratkaisuympyrät.

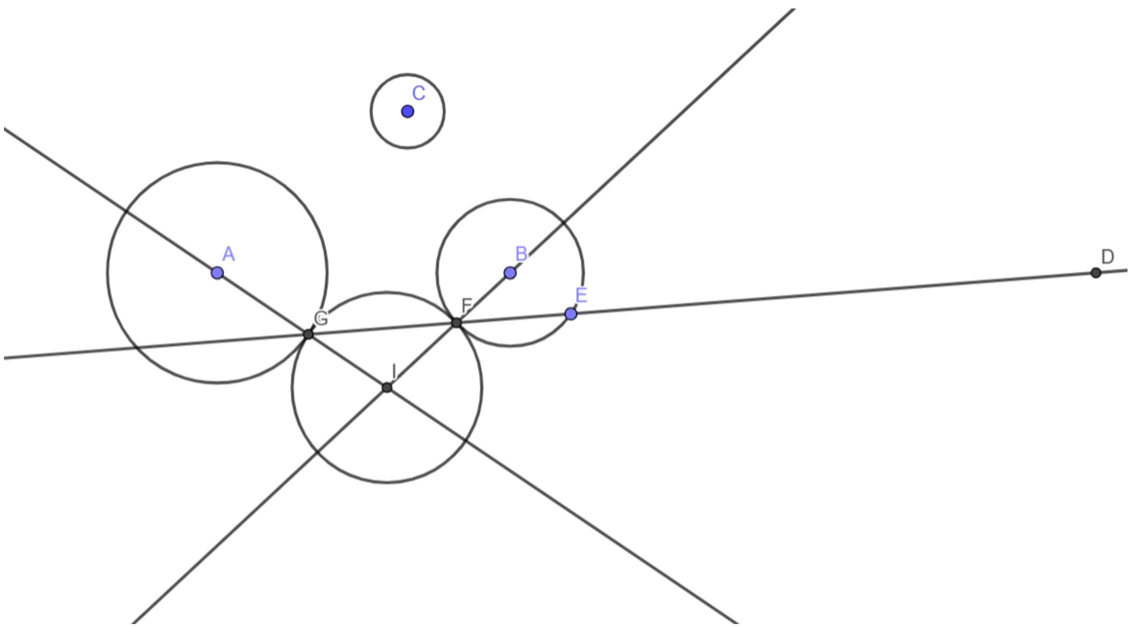


Kuva 36: kaksi ratkaisua

Tällä tavalla saadaan kaksi ratkaisua Apollonioksen ongelmaan. Loput ratkaisut saadaan, kun ratkaistaan navat jäljellä olevien samankaltaisuusakselien suhteen ja toistetaan edellä esitellyt vaiheet. Kaikki kahdeksan ratkaisua on piirretty kuvaan 30. [15] [16]

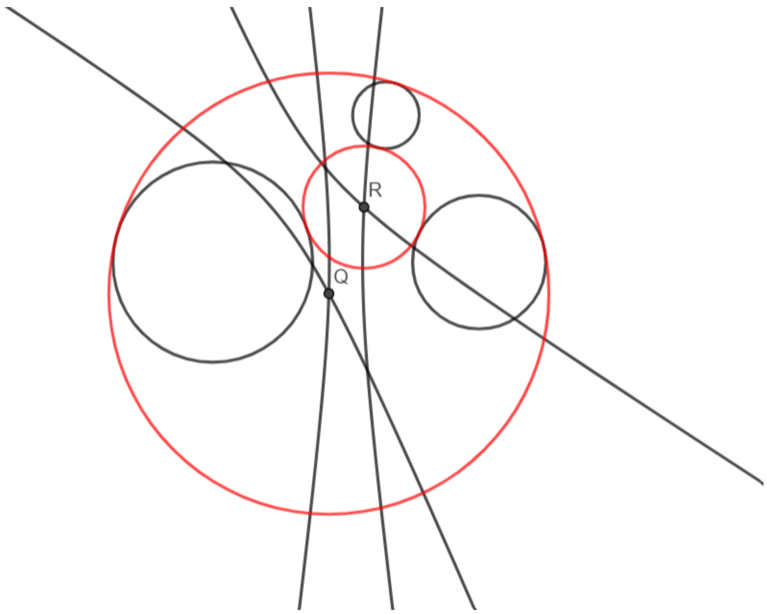
4.10.3 Ratkaisu hyperbelien avulla

Piirretään ensin kahden ympyrän väliset risteyspisteet. Valitaan toiselta ympyrältä jokin piste E. Seuraavaksi piirretään suora, joka kulkee pisteen E ja toisen risteyspisteen kautta eli tässä tapauksessa pisteen D kautta. Piste E pitää valita siten, että suora DE ei ole tangentti ympyrälle. Suora DE leikkaa molemmat ympyrät kahdessa pisteessä. Piirretään kaksi suoraa, jotka kulkevat ympyrän keskipisteen ja leikkauspisteen kautta kuvan 37 mukaisesti. Suorat leikkaavat pisteessä I. Piirretään seuraavaksi hyperbeli, jonka polttopisteet ovat A ja B ja käyrän piste I. Hyberbeliltä voidaan valita mikä tahansa piste ja tämä piste toimii ympyrän keskipisteenä, mikä sivuaa molempia ympyröitä. Tätä havainnollistetaan kuvaan 37 piirretyllä ympyrällä.



Kuva 37: kaksi ratkaisua

Toistetaan edellä esitellyt vaiheet myös toisen ympyrä parin suhteen, jolloin saadaan muodostettua toinen hyperbeli. Hyperbelit leikkaavat neljässä pisteessä ja näistä leikkauspisteistä kaksi ovat ratkaisuympyröiden keskipisteitä. Kuvassa 38 on näkyvissä hyperbelien leikkauspisteet ja ratkaisuympyröiden keskipisteet on merkitty kirjaimilla Q ja R.



Kuva 38: kaksi ratkaisua

Loput ratkaisut saadaan, kun toistetaan edellä esitellyt vaiheet ja valitaan kaikki eri risteyspisteiden kombinaatiot. Kaikki ratkaisut on esitetty kuvassa 30 [9].

4.10.4 Algebrallinen ratkaisu

Olkoot O_1, O_2 ja O_3 annettuja erillään olevia ympyröitä. Olkoot ympyröiden keskipisteiden koordinaatit (x_1, y_1), (x_2, y_2) ja (x_3, y_3) ja säteet r_1, r_2 ja r_3. Olkoon etsityn ympyrän keskipiste (x, y) ja säde r. Ratkaisuympyrän täytyy sivuta kaikkia kolmea ympyrää tasan yhdessä pisteessä. Jos etsitty ympyrä sivuaa annettua ympyrää sisäisesti, ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys on yhtäsuuri kuin säteiden erotus. Jos etsitty ympyrä sivuaa annettua ympyrää ulkoisesti, ympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys on yhtäsuuri kuin säteiden summa. Näiden tietojen perusteella voidaan muodostaa yhtälöryhmä.

$$\begin{aligned}
(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 &= 0 \\
(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 &= 0 \\
(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Lasketaan polynomien kertolasku, jolloin saadaan yhtälöryhmä muotoon:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_1 - 2yy_1 \pm 2rr_1 + x_1^2 + y_1^2 + r_1^2 &= 0 \\
x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_2 - 2yy_2 \pm 2rr_2 + x_2^2 + y_2^2 + r_2^2 &= 0 \\
x^2 + y^2 - r^2 - 2xx_3 - 2yy_3 \pm 2rr_3 + x_3^2 + y_3^2 + r_3^2 &= 0
\end{aligned}$$

Plus- ja miinusmerkki valitaan sen perusteella, sivuaako ratkaisuympyrä annettua ympyrää sisä- vai ulkopuolelta. Jos sivuaminen tapahtuu sisäisesti, valitaan miinusmerkki. Jos sivuaminen tapahtuu ulkoisesti, valitaan plusmerkki.

Ylläolevissa yhtälöissä on kolme muuttujaa ja huomataan, että kaikissa yhtälöissä toisen asteen termit ovat samoja.

Kun ensimmäisestä yhtälöstä vähennetään toinen yhtälö, saadaan uusi yhtälö

$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(r_2 - r_1)r = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + r_2^2 - r_1^2.$

Merkitään

$a = 2(x_2 - x_1)$, $b = 2(y_2 - y_1)$, $c = 2(r_2 - r_1)$ ja $d = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + r_2^2 - r_1^2$,

jotta yhtälö saadaan selkeämpään muotoon

$ax + by + cr = d.$

Vähennetään ensimmäisestä yhtälöstä kolmas yhtälö, jolloin saadaan toinen yhtälö

$a'x + b'y + c'r = d',$

jossa on merkitty

$a' = 2(x_3 - x_1)$, $b' = 2(y_3 - y_1)$, $c' = 2(r_3 - r_1)$ ja $d' = x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 + r_3^2 - r_1^2.$

Seuraavaksi voidaan ratkaista muokatuista yhtälöistä x ja y muuttujan r suhteen. Sijoitetaan x ja y ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan toisen asteen yhtälö, jossa muuttujana on ainoastaan r. Yhtälö voidaan ratkaista käyttämällä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. Ratkaisuksi saadaan kaksi arvoa, joista positiivinen ratkaisu valitaan säteen arvoksi. Tämän jälkeen voidaan ratkaista yhtälöryhmästä x ja y. Tällä tavalla saatiin yksi ratkaisu Apollonioksen ongelman kolmen ympyrän tapaukseen. Loput ratkaisut saadaan, kun valitaan plus- ja miinusmerkit eri tavalla ja toistetaan edellä esitetyt vaiheet [3].

5 Apollonioksen ongelman käytännön sovellukset

Mitä hyötyä Apollonioksen ongelmasta on nykypäivänä? Sitä on käytetty ja käytetään edelleen useilla tieteenaloilla. Apollonioksen ongelman avulla voidaan määrittää sijainti, mitä hyödynnetään GPS-paikannuksessa. Paikannus perustuu Apollonioksen ongelmasta laajennettuun kolmiulotteiseen tilanteeseen, jossa tulee löytää pallo, joka sivuaa ulkoisesti kolmea annettua palloa ja kulkee annetun pisteen kautta. Tilanne ratkaistaan muodostamalla kolme hyperboloidia ja selvittämällä niiden leikkauspiste. Jos kahdella pallolla on yhtä suuri säde, hyperboloidn sijaan muodostetaan ymyröiden keskipisteiden välille piirretylle janalle keskinormaalitaso . Ratkaisu tähän kolmiuletteiseen Apollonioksen ongelmaan on samalla ratkaisu paikannusongelmaan.[7]

Myös lääketieteessä Apollonioksen ongelmalle on käyttöä molekyylitason tutkimuksessa. Kolmiulotteisessa mallissa atomit ja molekyylit koostuvat palloista ja ellipsoideista. Apollonioksen ongelman avulla voidaan selvittää, minkä kokoinen atomi sopii tiettyyn kohtaan molekyyliä. Ja vastaavasti voidaan myös selvittää millaisen tilan jokin atomi tarvitsee kiinnittyäkseen molekyyliin. Täytyy kuitenkin huomioida, että molekyyliin kiinnittyneet atomit eivät ole täysin paikoillaan. Molekyyliin kiinnittyvälle atomille voidaan selvittää sopiva muoto, jolloin atomien välisistä sidoksista tulee vahvoja.[10]

Jo 1600-luvulla Newton selvitti taivaankappaleiden kiertoratoja Apollonioksen ongelman avulla. Lisäksi geometriaa käytettiin myös sotatarkoituksiin ensimmäisessä maailmansodassa. Vihollisten sijainti pyrittiin määrittämään kuuntelemalla tykin laukauksia kolmesta eri paikasta.[4]

Apollonioksen ongelmaa on sovellettu myös pakkausongelmissa.[14]

6 Apollonioksen ongelman mahdollisuudet lukio-opetuksessa

Ongelmatehtäväksi kutsutaan sellaista tehtävää, jota ratkaisija ei suoraan osaa ratkaista, vaan hän joutuu soveltamaan aiemmin opittua tietoa. Jos ratkaisija tietää heti ensisilmäyksellä, miten tehtävä ratkaistaan, on kyseessä rutiinitehtävä. Ongelmatehtävät voidaan jakaa avoimiin ja suljettuihin tehtäviin. Avoimessa tehtävänannossa alku- ja lopputilanteelle on olemassa erilaisia vaihtoehtoja. Suljetussa tehtävässä puolestaan alku- ja lopputilanne ovat ennalta määrättyjä.[8] Apollonioksen ongelmasta voidaan muodostaa sekä suljettu että avoin tehtävä. Opettaja voi esimerkiksi antaa pisteiden koordinaatit ja suorien sekä ympyröiden yhtälöt, jolloin kaikkilla oppilailla on samanlainen alkutilanne ja näin ollen myös samanlainen lopputilanne. Tällöin kyseessä on suljettu tehtävätyyppi. Avoimen tehtävän opettaja voi muodostaa antamalla pisteiden, suorien ja ympyröiden lukumäärän. Tällöin oppilailla on erilainen alkutilanne ja myös heidän ratkaisunsa ovat erilaisia. Opettaja voi myös antaa oppilaille tehtäväksi pohtia, miten alkutilanne vaikuttaa ratkaisuihin ja niiden lukumäärään.

Vastaavanlainen ongelmanratkaisutehtävä on toteutettu lukion matematiikan opettajille. Heidän tehtävänään oli ratkaista Apollonioksen ongelman eri tilanteita pareittain tai kolmen hengen ryhmässä. He onnistuivat ratkaisemaan eri tilanteita aina kolmen ympyrän tapaukseen asti. Opettajat eivät olleet pelkästään aiemman osaamisensa varassa, vaan tietoa sai hakea monipuolisesti eri lähteistä.[12] Lukion oppitunnilla opettaja voi korostaa, että tehtävä ei onnistu pelkkien kurssin tietojan avulla, vaan lisämateriaalia pitää etsiä internetistä. Toki täytyy huomioida, että lukion matematiikan opettajien matemaattinen osaaminen on paremmalla tasolla kuin lukion oppilaiden, joten lukion oppitunnilla opettajan täytyy olla valmiina tarjoamaan oppilaille apua.

Apolloniuksen ongelmaa olisi mahdollista käyttää osana lukion opetusta lyhyen ja pitkän matematiikan geometrian kursseilla. Lyhyen matematiikan geometrian kurssin tavoitteissa on mainittu, että "opiskelija osaa käyttää ohjelmistoja kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa sekä geometriaan liittyvien sovellusten yhteydessä". Pitkän matematiikan geometrian kurssin tavoitteissa on mainittu, että "opiskelija osaa käyttää ohjelmistoja tutkiessaan kuvioita ja kappaleita sekä niihin liittyvää geometriaa".[11] Apollonioksen ongelman eri tilanteiden ratkaiseminen auttaa oppilaita saavuttamaan kurssille asetetut valtakunnalliset tavoitteet.

Apollonioksen ongelman kymmenen eri tapausta tarjoavat haastetta kaikentasoisille oppilaille. Oppilaat voivat aloittaa helpoimmasta tilanteesta, joka on kolme pistettä. Näiden jälkeen he voivat valita omasta mielestään mielenkiintoisimmat tilanteet. Tilanteita voi ratkoa pareittain tai pienissä ryhmissä, jolloin oppilaat pääsevät myös harjoittelemaan vuorovaikutustaitoja. Matematiikasta keskusteleminen on myös tärkeää. Oppilaat voivat pohtia, mitkä aiemmin opitut matemaattiset käsitteet liittyvät ongelman ratkaisemiseen. Jos oikean ratkaisun löytäminen tuntuu liian hankalalta, he voivat myös hahmotella ratkaisuja ja pohtia, kuinka monta ratkaisua kuhunkin tilanteeseen on mahdollista löytää.

GeoGebra tarjoaa tähän ongelmaan hyviä työkaluja ja samalla oppilaat saavat harjoitusta GeoGebran käytössä. Oppilaat pääsevät piirtämään ja tutkimaan erilaisia tason kappaleita ja niihin liittyviä käsitteitä. Ratkaistakseen erilaisia tilanteita oppilaiden täytyy osata piirtää erilaisia kappaleita ja monet matemaattiset käsitteet tulevat tässä vaiheessa kurssia tutuiksi. Oppilaat saavat paljon harjoitusta GeoGebran käytössä sopivan tasoisia ongelmia ratkaistessaan, mikä hyödyttää heitä myös ylioppilaskokeessa. Lisäksi he pääsevät haastamaan omia taitojaan GeoGebran käytössä, kun he voivat laatia sovelmia, joissa annettuja kappaleita muokkaamalla myös ratkaisu muokkautuu.

Lähteet:

[1] Bogomolny, A. *The problem of Apollonius.* Haettu 30.11.2021 osoitteesta https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Apollonius.shtml

[2] Coolidge, J.L. (1916) *A treatise on the circle and the sphere.* (167-172). Oxford: Clarendon press.

[3] Courant, R. & Robbins H. (1943). *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods.* (125-127). London: Oxford University Press.

[4] Court, N.A. (1961) *The problem of Apollonius.* teoksessa National council of teachers of mathematics. The Mathematics Teacher. (444-452).

[5] Dörrie, H. (1965) *100 great problems of elementary mathematics.* (154-160). New York: Dover publications.

[6] Hannula, J. (2015). *Homotetia eli venytyskuvaus geometrisissä konstruktioissa.* Haettu 15.10 osoitteesta https://matematiikkalehtisolmu.fi/2015/3/homotetia.pdf

[7] Hoshen, J. (1996) *The gps equations and the problem of Apollonius.* IIEE transactions on aerospace and electronic systems. doi: 10.1109/7.532270

[8] Joutsenlahti, J., Silfverberg, H., & Räsänen, P. (2018). *Matematiikan opetus ja oppiminen.* (370). Niilo Mäki Instituutti.

[9] Kunkel, P. (2007). *The tangency problem of Apollonius: three looks.* Bulletin (British Society for the History of Mathematics), 22(1), 34–46. https://doi.org/10.1080/17498430601148911

[10] Lewis, R.H. & Bridgett, S. (2003). Conic tangency equations and Apollonius problems in biochemistry and pharmacology. *Teoksessa Mathematics. Computers in Simulation.* (103) doi: 10.1016/S0378-4754(02)00122-2

[11] Opetushallitus. (2021). *Lukion opetussuunnitelman perusteet.* Helsinki. Haettu 16.12.2021 osoitteesta https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/lukion-opetussuunnitelmien-perusteet

[12] Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2021). *Teachers' Use of Technology Affordances to Contextualize and Dynamically Enrich and Extend Mathematical Problem-Solving Strategies.* Mathematics (Basel), 9(793), 793–. https://doi.org/10.3390/math9080793

[13] Väisälä, K. (1958). *Geometria.* (117-118) (5. p.). WSOY.

[14] Weaire, D. & Aste, T. (2000). *The Pursuit of Perfect Packing.* (93-94). Boca Raton: CRC Press.

[15] Woltermann, M. *31. Monge's Problem.* Haettu 15.3.2020 osoitteesta http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/31.pdf

[16] Woltermann, M. *32. The Tangency Problem of Apollonius.* Haettu 15.3.2020 osoitteesta http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/32.pdf