A THURSTONE-MÓDSZER ÁLTALÁNOSÍTÁSA ELŐNYÖK FIGYELEMBE VÉTELÉRE[1]

MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA – MIHÁLYKÓ CSABA
Pannon Egyetem

Cikkünk egy páros összehasonlítási módszerrel foglalkozik, amelyben figyelembe vesszük az összehasonlítandó objektumok valamelyikének az előnyös helyzetét. A módszer Thurstone modelljén alapul, azonban azt a látens valószínűségi változók eloszlása tekintetében általánosítja, és beépíti abba az előny lehetőségét. Cikkünkben bevezetünk egy három döntési opciót biztosító modellt. A modell paramétereit maximum likelihood (ML) becsléssel becsüljük. Megadjuk az ML becslés egyértelmű létezését biztosító feltételeket nemteljes összehasonlítás esetén. Módszerünket illusztrálandó azt egy sakkcsapat-versenyre alkalmazzuk, és a kapott eredményeket összehasonlítjuk más kiértékelési módszerek eredményeivel.

Kulcsszavak: páros összehasonlítás, Thurstone-módszer, előny figyelembe vétele, maximum likelihood becslés. *JEL kód:* C02, C44

1 Bevezetés

Páros összehasonlításokat gyakran alkalmaznak olyan területeken, ahol az összehasonlítandó objektumokat szubjektív szempontok szerint értékelik. Példaként említhetjük a pszichológiát, a politikát, a marketinget, de még a sport területén is található alkalmazás, hiszen az egyes játékosok (csapatok) közti meccsek eredményei is tekinthetők páros összehasonlítások eredményeinek. Gyakran előfordul ilyen probléma döntéselőkészítés során is, amikor szükség van bizonyos termékek népszerűségének, egyes tulajdonságok fontosságának vizsgálatára. Ilyen esetekben nehezen értelmezhető, gyakran esetleges egy-egy mérőszám értéke, mert mást érthet rajta az egyik vagy a másik véleményező. Gondoljunk csak arra, hogy mit jelent az az értékelés, amikor azt mondjuk, hogy az egyik fajta termék kétszer annyira tetszik, mint a másik. Ha azonban az összehasonlítás eredményeként csak annyit mondunk, hogy inkább tetszik (jobb), illetve kevésbé tetszik (rosszabb), akkor az értékelésnek ez az eredménye már megalapozottabbnak tekinthető. A kapott ,,verbális" meghatározások aztán különböző módszerekkel kiértékelhetők, van amelyikkel csak az értékelendő objektumok sorrendje állapítható meg, van amelyikkel a jóságuk is számszerűsíthető, sőt egyes módszerek esetén még egyéb információk is nyerhetők, például hipotézisvizsgálat végezhető az objektumok közötti szignifikáns eltérések kimutatására.

[1]Beérkezett 2019. október 8. E-mail: `orbane@almos.uni-pannon.hu`.

A módszerek más szempontok szerint is csoportosíthatók. Például aszerint is, hogy az összehasonlítás eredménye hányféle lehet. Klasszikus a két opció (jobb, rosszabb) alkalmazása ([15]), de van amikor szükséges ezek mellett egy harmadik, az „egyforma” opció ([13]), vagy akár háromnál több opció használata is ([16], [3]). Például a nagyon népszerű Analytic Hierarchy Process (AHP) módszer esetében általában 9 opció szerepel ([14]).

Nagy számú objektum esetében a gyakorlat kikényszeríti, hogy olyan módszert használjunk, ami akkor is működik, ha nincs teljes összehasonlítás, azaz nincs minden lehetséges pár összevetve. Egyes módszerek alkalmazhatók bizonyos feltételek megléte mellett a nemteljes összehasonlítások esetére is, például a nemteljes logaritmikus legkisebb négyzetek módszere ([2]), vagy a Thurstone-módszer kiterjesztett és általánosított változata ([10],[11],[12]).

Szintén a mindennapi élet példái (termékeket hirdető reklámakciók, politikusokat lejárató cikkek hatása, a hazai pálya előnye futballban vagy a kezdésből származó előny sakk esetén stb.) vetik fel azt a kérdést, hogy hogyan lehet figyelembe venni az objektumok összehasonlításakor előforduló előnyt, illetve hátrányt. Több cikk is foglalkozott ezzel a kérdéssel ([8],[1]) és már születtek megoldási javaslatok is bizonyos feltételek mellett, többnyire kétopciós döntések esetében ([9], [6], [7]).

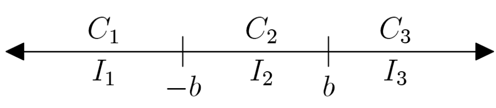
Cikkünkben mi egy ezektől eltérő módszert, a háromopciós Thurstone-módszer egy olyan általánosítását mutatjuk be, ami alkalmas az előny kimutatására, annak számszerűsítésére is, amellett, hogy az alapfeladatot, az objektumok rangsorolását is elvégzi. A publikáció újdonsága az előny beépítése. Az előny figyelembe vételére a [10], [11], [12]-ben bemutatott általánosított Thurstone modellek nem alkalmasak. Ezen publikációk mindegyike azzal a feltevéssel él, hogy az értékelések, s velük együtt a definiált intervallumok szimmetrikusak nullára. Az előny megléte azonban elrontja ezt a szimmetriát. [11]-ben az általában használt kétopciós modell általánosítása található meg több opcióra, ahol egyforma hosszúságú, nullára szimmetrikus intervallumokat és normális eloszlású látens valószínűségi változókat alkalmazva feltételt adtunk a becslés egyértelmű létezésére nemteljes összehasonlítások esetén, ami biztosítja a kiértékelés egyértelműségét. [12]-ben a [11]-ben bizonyított állítást normális eloszlásnál általánosabb, szigorúan logkonkáv sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségeloszlások esetére igazoltuk, valamint foglalkoztunk a módszer axiomatikus tulajdonságaival. [10] feltételt tartalmaz a becslés egyértelműségére nem egyforma hosszúságú, de továbbra is nullára szimmetrikus intervallumok esetén, és példákat mutat a módszer alkalmazására. Jelen cikkünk háromopciós modellt vizsgál, általános eloszlás esetén mond ki állítást, és nem követeli meg az intervallumok szimmetriáját.

A dolgozat hátralévő részének felépítése a következő. A 2. fejezetben bemutatjuk a háromopciós Thurstone-módszert, majd annak az általánosítását, amelybe beépítjük az előny/hátrány lehetőségét. A 3. fejezetben megadjuk mindkét esetben a rangsorolás elvégzését lehetővé tevő ML becslés egyértelmű létezését biztosító feltételeket. Ez az állítás sem közvetlen következménye a korábban publikált állításoknak. A 4. fejezetben módszerünket alkalmazzuk egy sportból vett példára, és megmutatjuk, hogy bár a vizsgált sakkcsapatok sorrendjét tekintve a többi módszerhez hasonló sorrendhez jutottunk, mégis több információt sikerült az adatokból kihozni, hiszen eredményeink számszerűsítve visszaadják azt a tapasztalatot, hogy a világos nagyobb eséllyel nyer. Végezetül az ötödik fejezetben röviden összefoglaljuk eredményeinket.

2 A vizsgált modell

2.1 Három döntési opciót megengedő modell előny figyelembe vétele nélkül

Jelölje n azon összehasonlítandó objektumok számát, amelyeket szeretnénk sorba rendezni valamely tulajdonságuk alapján (például melyik a jobb, a finomabb, a hitelesebb stb.) és az objektumok adott tulajdonság szempontjából vett erősségét is szeretnénk számszerűsíteni. Modellünkben most három opciót engedünk meg, rosszabb, egyforma illetve jobb opciókat, ezeket jelöljük rendre C_1, C_2, C_3-mal. Mivel az objektumok megítélése nem mindig egyforma, ezért feltételezzük, hogy mindegyik objektum mögött egy látens valószínűségi változó húzódik meg. Jelöljük ezen valószínűségi változókat ξ_i-vel, $i = 1, 2, \ldots, n$, várható értéküket pedig m_i-vel. A várható értékek sorrendje egyben megadja az objektumok rangsorolását is. Amikor az i-edik objektumot összehasonlítjuk a j-edik objektummal, akkor a $\xi_i - \xi_j$ valószínűségi változó értéke szerint döntünk. A számegyenest három diszjunkt részre bontjuk: ha a különbség az I_1 részhalmazba esik, akkor az i-edik objektum rosszabb, mint a j-edik, ha az I_2-be, akkor egyformák, ha az I_3-ba, akkor pedig az i-dik objektum jobb a j-ediknél. Az I_1, I_2, I_3 halmazokat meghatározzák határoló pontjaik is, amelyek a döntések szimmetriája miatt (ha az i-dik objektum rosszabb, mint a j-edik, akkor a j-dik objektum jobb, mint az i-edik) egymás ellentettjei. A döntési opcióknak megfelelő intervallumokat az *1. ábrán* láthatjuk.



1. ábra. A rosszabb/egyforma/jobb opciókhoz tartozó intervallumok

A $\xi_i - \xi_j$ valószínűségi változókat írjuk $m_i - m_j + \eta_{i,j}$ alakba, ahol az $\eta_{i,j}$ $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = i+1, \ldots, n$ valószínűségi változókról feltételezzük, hogy független, folytonos, azonos eloszlású, 0 várható értékű valószínűségi változók $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Thurstone standard normális eloszlásfüggvényt alkalmazott, a Bradly-Terry modellben logisztikus eloszlást feltételeznek. Belátható, hogy elegendő az, hogy az eloszlásfüggvény minden értéke szigorúan 0 és 1 között helyezkedjen el, valamint a sűrűségfüggvénye szigorúan logkonkáv legyen.

Könnyű látni, hogy

$$p_{i,j,1} = P(\xi_i - \xi_j \in I_1) = P(\xi_i - \xi_j < -b) = \\ = F(-b - (m_i - m_j)), \tag{1}$$

$$p_{i,j,2} = P(\xi_i - \xi_j \in I_2) = P(-b \leq \xi_i - \xi_j \leq b) = \\ = F(b - (m_i - m_j)) - F(-b - (m_i - m_j)), \tag{2}$$

$$p_{i,j,3} = P(\xi_i - \xi_j \in I_3) = P(b < \xi_i - \xi_j) = \\ = 1 - F(b - (m_i - m_j)). \tag{3}$$

Legyen $A_{i,j,k}$ azon döntések száma, amelynél az i-edik és a j-edik objektum összehasonlításának eredménye a C_k lett. Nyilván önmagához nem hasonlítjuk az objektumot, valamint $\mathrm{A}_{i,j,k} = A_{j,i,4-k}$ teljesül, így elegendő az $i < j$ indexpároknál számontartani az eredményt.

Független mintát feltételezve annak a valószínűsége, hogy az

$$A = (A_{i,j,k})_{i=1,2,\ldots,n-1, j=i+1,\ldots,n, k=1,2,3}$$

mintát kapjuk, a következővel egyenlő:

$$L(A \mid m_1, m_2, \ldots, m_n, b) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} p_{i,j,1}^{A_{i,j,1}} \cdot p_{i,j,2}^{A_{i,j,2}} \cdot p_{i,j,3}^{A_{i,j,3}}. \tag{4}$$

Az $(m_1, m_2, \ldots, m_n, b)$ paramétervektor ML becslésén azt az $(\widehat{m}_1, \widehat{m}_2, \ldots, \widehat{m}_n, \widehat{b})$ vektort értjük, amely maximalizálja a (4) függvényt a $0 < b$ feltétel mellett, azaz

$$(\widehat{m}_1, \widehat{m}_2, \ldots, \widehat{m}_n, \widehat{b}) = \operatorname*{arg\,max}_{(m_1,\ldots,m_n,b),\ 0<b} L(A \mid m_1, \ldots, m_n, b). \tag{5}$$

Gyakran a (4) függvény helyett annak logaritmusát, azaz a

$$\log L(A \mid m_1, m_2, \ldots, m_n, b) = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j,k} \cdot \log p_{i,j,k} \tag{6}$$

úgynevezett log-likelihoood függvényt használják. Mivel a logaritmus függvény szigorúan monoton, ezért (4) és (6) maximumhelye, ha létezik, megegyezik.

(1), (2) és (3) alapján látható, hogy a likelihood függvény csak a várható érték paraméterek különbségétől függ, maguktól a paraméterektől nem, így egy paraméter (például m_1) rögzíthető. A (6) függvény maximumhelyének létezése és egyértelműsége kulcsfontosságú a módszer szempontjából, hiszen ha több helyen is felvenné a függvény a maximumát, akkor felmerülhetne a kérdés, hogy melyik eredményt tartsuk érvényesnek. Ezért a likelihood függvény maximumának létezését és egyértelműségét mindenképpen vizsgálni kell.

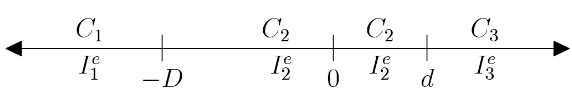
Az objektumok sorrendjét a becsült várható érték paraméterek sorrendje adja. A kapott paraméterekből egyre normált súlyokat nyerhetünk a

$$(\widehat{w}_1, \widehat{w}_2, \ldots, \widehat{w}_n) = \frac{(\exp(\widehat{m}_1), \exp(\widehat{m}_2), \ldots, \exp(\widehat{m}_n))}{\sum_{i=1}^{n} \exp(\widehat{m}_i)} \tag{7}$$

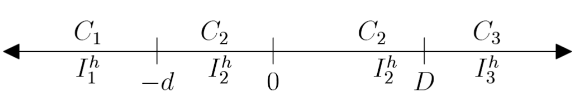
szigorúan monoton transzformációval.

2.2 Három döntési opciót megengedő modell előny figyelembe vétele esetén

Vannak olyan esetek, amikor az egyik objektum valamilyen okból előnyben van a másikkal szemben. Ez abban fejeződik ki, hogy ilyenkor kisebb különbség esetén is jobb lesz, mint a másik, ahhoz képest, amikor nincs előnye. Rosszabbnak viszont csak nagyobb különbség esetén bizonyul, ahhoz képest, amikor nincs előnye. Ez azt jelenti, hogy az I_1, I_2, I_3 intervallumok módosulnak, megszűnik a szimmetrikus jellegük. Az ,,egyforma" döntéshez tartozó intervallum nullára nem szimmetrikussá válik. Előny esetén a ,,rosszabb" döntésnek a $I_1^e = (-\infty, -D)$, az ,,egyforma" döntésnek a $I_2^e = [-D, d]$, a ,,jobb" döntésnek a $I_3^e = (d, \infty)$ intervallum felel meg a *2. ábra* szerint mutatott módon. Mivel minden előnyben levő objektumra vonatkozó ,,jobb" vélemény az egyben a hátrányban levő objektumra vonatkozó ,,rosszabb" vélemény is, ezért a két felosztás intervallumai nullára való tükrözéssel egymásba vihetők. Így hátrány esetén a *3. ábra* szerint alakulnak az egyes döntéseknek megfelelő intervallumok.



2. ábra. A rosszabb/egyforma/jobb opciókhoz tartozó intervallumok előny esetén



3. ábra. A rosszabb/egyforma/jobb opciókhoz tartozó intervallumok hátrány esetén

Nyilván $d \leq D$. Megjegyezzük, hogy a $d = D$ a 2.1 alfejezetben bemutatott modellt adja vissza, vagyis a mostani általánosítása az előzőnek. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy az előny mértéke nem függ az összehasonlítandó objektumoktól (például feltételezzük, hogy sakkozók esetén a kezdés lehetősége mindenkinek ugyanolyan mértékű előnyt biztosít, a sötét színnel játszás pedig ugyanolyan mértékű hátrányt jelent).

A $p_{i,j,1}$ valószínűség most az alábbi módon számolható, amennyiben az i-edik objektum előnyben van a j-edikkel szemben,

$$\begin{aligned} p^e_{i,j,1} &= P(\xi_i - \xi_j \in I^e_1) = P(\xi_i - \xi_j < -D) = \\ &= F(-D - (m_i - m_j)), \end{aligned} \tag{8}$$

míg ha hátrányban, akkor

$$\begin{aligned} p^h_{i,j,1} &= P(\xi_i - \xi_j \in I^h_1) = P(\xi_i - \xi_j < -d) = \\ &= F(-d - (m_i - m_j)). \end{aligned} \tag{9}$$

Hasonlóképpen $p_{i,j,2}$-re az alábbiak igazak i előnye, illetve hátránya esetén:

$$\begin{aligned} p^e_{i,j,2} &= P(\xi_i - \xi_j \in I^e_2) = P(-D \le \xi_i - \xi_j \le d) = \\ &= F(d - (m_i - m_j)) - F(-D - (m_i - m_j)), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} p^h_{i,j,2} &= P(\xi_i - \xi_j \in I^h_2) = P(-d \le \xi_i - \xi_j \le D) = \\ &= F(D - (m_i - m_j)) - F(-d - (m_i - m_j)). \end{aligned} \tag{11}$$

Végezetül $p_{i,j,3}$ előny, illetve hátrány esetén az alábbiak szerint módosul:

$$\begin{aligned} p^e_{i,j,3} &= P(\xi_i - \xi_j \in I^e_3) = P(d < \xi_i - \xi_j) = \\ &= 1 - F(d - (m_i - m_j)), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} p^h_{i,j,3} &= P(\xi_i - \xi_j \in I^h_3) = P(D < \xi_i - \xi_j) = \\ &= 1 - F(D - (m_i - m_j)). \end{aligned} \tag{13}$$

Ha $A^e_{i,j,k}$ jelöli a k-adik opció előfordulási számát az i-edik és a j-edik objektum összehasonlítása során, amennyiben i előnyben van, és $A^h_{i,j,k}$, amennyiben i hátrányban van, akkor a likelihood függvény az alábbiak szerint alakul:

$$L^e((A^e, A^h) \mid m_1, m_2, \ldots, m_n, d, D) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} \prod_{k=1}^{3} \left(p^e_{i,j,k}\right)^{A^e_{i,j,k}} \cdot \left(p^h_{i,j,k}\right)^{A^h_{i,j,k}}, \tag{14}$$

és a paraméterek ML becslése

$$(\widehat{m}_1, \widehat{m}_2, \ldots, \widehat{m}_n, \widehat{d}, \widehat{D}) = \mathop{\arg\max}_{\substack{(m_1, \ldots, m_n, d, D), \\ 0 \le d \le D, \\ (d, D) \ne (0,0)}} L^e((A^e, A^h) \mid m_1, \ldots, m_n, d, D). \tag{15}$$

Megjegyezzük, hogy (14) most is csak a várható értékek különbségétől függ, vagyis az egyik várható értéket tetszőlegesen rögzíthetjük, a függvény értéke nem változik. (15) létezése és egyértelműsége most is kulcskérdés a módszer alkalmazhatósága szempontjából. Ennek vizsgálatával a következő fejezetben foglalkozunk.

3 A likelihood függvény maximumának létezése és a maximumhely egyértelműsége

Az előnyt nem figyelembe vevő modell esetén a likelihood függvény maximumának létezése és a maximumhely egyértelműsége bizonyításához szükség van a következő definícióra.

Definiáljunk egy gráfot a következőképpen: legyenek a GR gráf csúcsai az értékelendő objektumok, valamint az i-edik és a j-edik ($i < j$) csúcs akkor legyen összekötve, ha

$$0 < A_{i,j,2} \tag{16}$$

vagy

$$0 < A_{i,j,1} \quad \text{és} \quad 0 < A_{i,j,3}. \tag{17}$$

Ezek után kimondható a következő tétel (ld. normális eloszlás esetén [11], általános eloszlás esetén [12]):

1. Tétel. *Legyen F olyan eloszlásfüggvény, amelyre $0 < F(x) < 1$ teljesül, háromszor folytonosan differenciálható $\mathbb{R}$-en, valamint sűrűségfüggvénye 0-ra szimmetrikus és logaritmusa szigorúan konkáv. Tegyük fel, hogy van olyan $i_1 < j_1$ pár, amelyre $0 < A_{i_1,j_1,2}$, valamint van olyan $i_2 < j_2$ pár, amelyre $0 < A_{i_2,j_2,1}$ és $0 < A_{i_2,j_2,3}$ teljesül. Rögzítsük m_1 értékét 0-nak. Ha a GR gráf összefüggő, akkor a (4) függvény, mint $(m_2, \ldots, m_n, b)$ függvénye a $0 < b$ feltétel mellett felveszi a maximumát, és a maximumhely egyértelmű.*

Az 1. Tétel alapfeltétele, hogy létezik ,,egyforma" vélemény, valamint van olyan pár, amelynél egyszerre van ,,jobb" és ,,rosszabb" eredmény is. A gráf élei akkor vannak behúzva két csúcs között, ha van összehasonlítás köztük, és nem egyirányúak (nem csak ,,jobb" vagy nem csak ,,rosszabb") az összehasonlítások eredménye. Ekkor ezen gráf összefüggősége (a két plusz feltétel megléte mellett) biztosítja az objektumok egyértelmű sorbarendezhetőségét, sőt még az objektumok jóságának számszerűsítését is. A módszer lehetővé teszi azt is, hogy megbecsüljük annak a valószínűségét, hogy az i-edik és a j-edik objektum összehasonlításakor a C_k döntés születik $k = 1, 2, 3$:

$$\widehat{p}_{i,j,1} = F(-\widehat{b} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)), \tag{18}$$

$$\widehat{p}_{i,j,2} = F(\widehat{b} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)) - F(-\widehat{b} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)), \tag{19}$$

$$\widehat{p}_{i,j,3} = 1 - F(\widehat{b} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)). \tag{20}$$

Az előny figyelembe vétele esetén a modell bonyolultabbá válik, és újabb paraméterrel bővül a tér. Az előző tétel bizonyításában használt technikák azonban felhasználhatók, s a szigorúan logkonkáv mértékek elméletére alapozva bizonyos feltételek teljesülése esetén bizonyítható az egyértelmű létezésre vonatkozó tétel.

Ehhez definiáljunk egy GR^e gráfot az alábbi módon. A gráf csúcsai az értékelendő objektumok. Az i-edik és a j-edik ($i < j$) csúcs akkor legyen összekötve, ha van köztük összehasonlítás mind i előnyös, mind i hátrányos helyzete esetén, valamint vagy

$$0 < A^e_{i,j,2} + A^h_{i,j,2} \tag{21}$$

vagy

$$0 < A^e_{i,j,1} + A^h_{i,j,1} \quad \text{és} \quad 0 < A^e_{i,j,3} + A^h_{i,j,3} \tag{22}$$

teljesül. Megjegyezzük, hogy (21) azt fejezi ki, hogy van ,,egyforma" döntés, (22) pedig azt, hogy az összehasonlítások eredményeként születik ,,jobb" és ,,rosszabb" döntés is. A kettő együtt a nem egyoldalú eredményekhez köti az élek behúzását. Ekkor az alábbi tételt bizonyítottuk:

2. Tétel. *Legyen F olyan eloszlásfüggvény, amelyre $0 < F(x) < 1$ teljesül, háromszor folytonosan differenciálható $\mathbb{R}$-en, valamint sűrűségfüggvénye 0-ra szimmetrikus és logaritmusa szigorúan konkáv. Tegyük fel, hogy van olyan $i_1 < j_1$ pár, amelyre $0 < A^e_{i_1,j_1,2} + A^h_{i_1,j_1,2}$, valamint van olyan $i_2 < j_2$ pár, amelyre $0 < A^e_{i_2,j_2,1}$ és $0 < A^h_{i_2,j_2,3}$ teljesül. Rögzítsük az m_1 értékét nullának. Amennyiben az előzőekben definiált GR^e gráf összefüggő, a (14) függvény a $0 \leq d \leq D, (d, D) \neq (0, 0)$ feltételek mellett felveszi a maximumát, és a maximumhely egyértelmű.*

A tételben szereplő párokra vonatkozó két feltétel azt mondja ki, hogy legalább egy alkalommal van ,,egyforma" döntés, valamint van olyan pár, amelynél előnyben ,,rosszabb" és hátrányban ,,jobb" döntés születik. A gráf összefüggősége (a két plusz feltétel megléte mellett) most is biztosítja az objektumok egyértelmű sorbarendezhetőségét és a különbségek számszerűsítését. Látható, hogy ha nem figyeljük az előny/hátrány meglétét, akkor a feltételek az 1. Tétel feltételeire egyszerűsödnek és a 2. Tétel állítása az 1. Tétel állításával megegyezik.

Ha i előnyben van, akkor a C_k $k = 1, 2, 3$ opciók kialakulásának becsült valószínűségei

$$\widehat{p}^e_{i,j,1} = F(-\widehat{D} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)), \tag{23}$$

$$\widehat{p}^e_{i,j,2} = F(\widehat{d} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)) - F(-\widehat{D} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)), \tag{24}$$

$$\widehat{p}^e_{i,j,3} = 1 - F(\widehat{D} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)), \tag{25}$$

míg ha i hátrányban van, akkor a C_k $k = 1, 2, 3$ opciók kialakulásának becsült valószínűségei

$$\widehat{p}^h_{i,j,1} = F(-\widehat{d} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)), \tag{26}$$

$$\widehat{p}^h_{i,j,2} = F(\widehat{D} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)) - F(-\widehat{d} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)), \tag{27}$$

$$\widehat{p}^h_{i,j,3} = 1 - F(\widehat{d} - (\widehat{m}_i - \widehat{m}_j)). \tag{28}$$

Végezetül annak a valószínűsége, hogy az előnyben levő bizonyul jobbnak

$$P(\text{az előnyben levő jobb}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\widehat{p}^{e}_{i,j,3} + \widehat{p}^{h}_{i,j,1}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \binom{n}{2}}, \tag{29}$$

az "egyforma" valószínűsége

$$P(\text{két objektum "egyforma"}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\widehat{p}^{e}_{i,j,2} + \widehat{p}^{h}_{i,j,2}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \binom{n}{2}}, \tag{30}$$

és annak a valószínűsége, hogy a hátrányban levő bizonyul jobbnak

$$P(\text{a hátrányban levő jobb}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\widehat{p}^{h}_{i,j,3} + \widehat{p}^{e}_{i,j,1}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \binom{n}{2}}. \tag{31}$$

4 Alkalmazás

A sakk világában ismert jelenség, hogy a világos bábukkal játszó versenyző előnyben van a sötét bábukkal játszó versenyzővel szemben. Az is közismert, hogy a sakkozók egyéni sorrendjét az Élő-pontok alapján határozzák meg, amely számolásakor figyelembe veszik az ellenfelek erősségét is. Élő Árpád, a pontszámítás megalkotója, a játékosok erősségét egy-egy valószínűségi változóval jellemezte, mégpedig normális eloszlásúval [5]. Tekintettel arra, hogy az ellenfelek erőssége a mi módszerünkben is szerepet játszik a kiértékeléskor, ezért illusztrálásként modellünket sakkverseny résztvevőinek rangsorolására alkalmaztuk, oly módon, hogy az $F(x)$ eloszlásfüggvényt standard normális eloszlásfüggvénynek választottuk. Mivel Csató cikkében [4] több módszerrel kiértékelte a 2011-ben tartott 18. (nyílt) sakkcsapat Európa-bajnokság eredményeit, ezért mi is ezt a versenyt választottuk példának. Eredményeinket összehasonlítjuk a [4]-ben legjobbnak talált módszer (az LS (R^{MB})-vel jelzett módszer) eredményeivel.

A versenyen 38 ország vett részt. A 38 csapat svájci rendszerben 9 fordulót játszott, ezáltal nemteljes összehasonlításról van szó. Minden fordulóban 4 táblán játszottak egymás ellen a csapatok. Ez azt jelenti, hogy az egymással játszó csapatok között 4 „döntés" született, a rosszabb jelenti a vereséget, a jobb a győzelmet, az egyforma pedig a döntetlent. Minden fordulóban mindegyik csapat kétszer világossal és kétszer sötéttel játszott. Az összesen lejátszott partik száma 684. A lejátszott mérkőzések eredményeit a http://chess-results.com/tnr57856.aspx honlapról töltöttük le.

Kétféle kiértékelést alkalmaztunk, egyrészt az előnyt figyelembe vevő módszerrel (I.), másrészt az előnyt nem figyelembe vévő módszerrel (II.) rangsoroltuk a versenyen részt vevő csapatokat.

A 2. Tétel feltételeit ellenőrizendő megállapíthatjuk, hogy Horvátország Svájcot egyszer sötéttel megverte, egyszer világossal kikapott tőle, valamint két döntetlen született közöttük. A GR^e gráf összefüggőségét ellenőriztük.

A kiértékelés eredményeként a hivatalos sorrend szerinti első 15 helyezettnél az alábbi eredményeket kaptuk *(1. táblázat).*

Ország	Hivatalos	I.		II.		LS (R^{MB})
		$s^{(I)}$	$\widehat{m}_i^{(I)}$	$s^{(II)}$	$\widehat{m}_i^{(II)}$	
Németország	1	2	0,116	2	0,117	2
Azerbajdzsán	2	1	0,264	1	0,257	1
Magyarország	3	5	-0,143	5	-0,134	6
Örményország	4	4	0	4	0	5
Oroszország	5	3	0,020	3	0,021	3
Hollandia	6	13	-0,434	12	-0,416	8
Bulgária	7	7	-0,196	7	-0,187	4
Lengyelország	8	9	-0,334	9	-0,321	13
Románia	9	12	-0,404	11	-0,394	12
Spanyolország	10	6	-0,210	6	-0,206	7
Olaszország	11	16	-0,489	16	-0,481	10
Szerbia	12	17	-0,524	17	-0,505	21
Grúzia	13	22	-0,835	22	-0,813	25
Izrael	14	12	-0,409	11	-0,392	15
Ukrajna	15	10	-0,381	10	-0,371	11

1. táblázat. A kiértékelések szerinti sorrendek és a becsült paraméterek

A becsült távolságparaméterek az I. módszer esetében $\widehat{d} = 0{,}528$ és $\widehat{D} = 0{,}973$-nak adódtak. Ha nem vizsgáljuk az előny meglétét (II. módszer), akkor $\widehat{b}$ =0,732 lett. Az Örményországhoz tartozó 0 érték az angol abc-beli sorrendben való első helyének köszönhető (Armenia). Az 1. táblázat alapján látható, hogy a kiértékelés során kapott sorrend lényegesen különbözik a hivatalos sorrendtől, viszont jóval kevésbé tér el a [4]-ben legjobbnak értékelt sorrendtől. A hivatalos sorrend azért is ad más eredményt, mint a többi, mert a hivatalos sorrend számításakor egy csapat 4:0-as győzelme a másik ellen ugyanannyit ér, mint a 2.5:1.5 arányú győzelme, míg ez az egyéb módszereknél nem így van. A bemutatott kiértékelési módszerek esetén a 4:0-as győzelem 4 győzelmet takar, a 2.5:1.5 pedig vagy 1 győzelmet és 3 döntetlent, vagy 2 győzelmet, 1 döntetlent és 1 vereséget.

Látható az is, hogy az előnyt figyelembe vevő sorrend mutat némi eltérést az előnyt figyelembe nem vevőtől, de ez szintén érthető, hiszen az I. módszer több információt használ fel. Az egyes sorrendek között kialakuló Spearman-féle rangkorrelációs együtthatókat a 38 ország eredményei alapján számolva kaptuk a *2. táblázatot.*

	Hivatalos	$s^{(I)}$	$s^{(II)}$	LS (R^{MB})
Hivatalos	1	0,949	0,948	0,936
$s^{(I)}$	0,949	1	0,998	0,980
$s^{(II)}$	0,948	0,998	1	0,980
LS (R^{MB})	0,936	0,980	0,980	1

2. táblázat. A rangkorrelációs együtthatók

Láthatjuk, hogy az egyes kiértékelési sorrendek egymástól nagyon kicsit térnek csak el. Ez alátámasztja Csató azon hipotézisét, hogy mivel bármely két ország közötti mérkőzésen a partik színeloszlása egyforma volt az országok között, így a sorrend megállapításakor elhagyhatjuk a „ki a világos/ ki a sötét" információt. Ha azonban mégis figyelembe vesszük, akkor modellünk ki tudja mutatni azt a jelenséget, hogy a világos bábukkal nagyobb, a sötét bábukkal kisebb a nyerési esély. Ha az I. módszer esetén érvényes (29), (30), (31) formulák alapján kiszámoljuk a világos győz/döntetlen/sötét győz események esélyeit, akkor láthatjuk, hogy a világos győz eseménynek jóval nagyobb esélye van, mint a sötét győz eseménynek. Ez természetesen nem jelentkezik, ha nem vesszük figyelembe azt, hogy ki kezd. A *3. táblázat* alapján látható, hogy a becsült értékek és a relatív gyakoriság közti legnagyobb eltérés az I. módszer esetén a döntetlenkor adódik, értéke 0,053. Ha 0,99 megbízhatóságú konfidenciaintervallumot szerkesztünk a valószínűségre, akkor annak pontossága 0,05, vagyis a becsült érték éppen hogy kívül esik a konfidenciaintervallumon. A másik két (sötét győz, illetve világos győz) esetben pedig a relatív gyakoriság szerint megadott 0,99 szintű konfidenciaintervallumba esik. Ezek alapján modellünk az adott példán a valósággal egybeesően írja le az előny/hátrány jelenségét. Itt megjegyezzük, hogy mivel a II. módszer esetében nem tudunk a világos illetve sötét győz eseményekre külön valószínűségeket számolni, azokat így nem adtuk meg. Mivel Csató módszerével valószínűségeket nem tudtunk számolni, így a módszert kihagytuk a táblázatból.

	Sötét győz	Döntetlen	Világos győz
Rel. gyak.	0,217	0,447	0,336
0,99 konf. int.	[0,176, 0,258]	[0,398, 0,496]	[0,290, 0,392]
I.	0,250	0,394	0,356
II.	–	0,393	–

3. táblázat. A győzelmi esélyek becsült értékei

5 Összefoglalás

Cikkünkben egy páros összehasonlításon alapuló rangsorolási módszert mutattunk be, amelyben figyelembe vettük a pár valamelyik tagjának előnyös helyzetét. A módszer nemteljes összehasonlítás esetén is alkalmazható. Az objektumok mögé képzelt látens valószínűségi változók segítségével felírtuk a kapott kiértékelési eredmények valószínűségét. A paramétereket maximum likelihood becsléssel becsültük. Megadtuk a becslés egyértelmű létezését biztosító feltételeket. A módszert alkalmaztuk sakkcsapat bajnokság eredményeinek kiértékelésére és megmutattuk, hogy módszerünk alkalmas az előnyből származó aszimmetria kimutatására.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetet mondanak az EFOP-3.6.1-16-2016-00015 számú projekt anyagi támogatásáért.

Irodalom

1. Acker, Jon C, (1997), Location variations in professional football, *Journal of Sport Behavior*, 20(3), 247–259.

2. Bozóki, Sándor and Fülöp, János and Rónyai, Lajos, (2010), On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices, *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1-2), 318–333
3. Cattelan, Manuela, (2012), Models for paired comparison data: A review with emphasis on dependent data, *Statistical Science*, 27(3), 412–433,
4. Csató, László, (2017), On the ranking of a Swiss system chess team tournament, *Annals of Operations Research*, 254(1-2), 17–36,
5. Elo, Arpad E, (1978), The rating of chessplayers, past and present, Arco Pub.
6. Glickman, Mark E and Stern, Hal S, (1998), A state-space model for National Football League scores, *Journal of the American Statistical Association*, 93(441), 25–35,
7. Glickman, Mark E and Stern, Hal S, (2017), Estimating team strength in the NFL, in *Handbook of Statistical Methods and Analyses in Sports*, Chapman and Hall/CRC, 129–152
8. Harville, David, (1980), Predictions for National Football League games via linear-model methodology, *Journal of the American Statistical Association*, 75(371), 516–524.
9. Henery, Robert J, (1992), An extension to the Thurstone-Mosteller model for chess, *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, 41(5), 559–567,
10. Mihálykóné Orbán, Éva and Mihálykó, Csaba and Kajtár, Patrik, (2019) Általánosított Thurstone-módszer alkalmazásokkal, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 36(2), 255–262.
11. Orbán-Mihálykó, Éva and Mihálykó, Csaba and Koltay, László, (2019), A generalization of the Thurstone method for multiple choice and incomplete paired comparisons, *Central European Journal of Operations Research*, 27(1), 133–159.
12. Orbán-Mihálykó, Éva and Mihálykó, Csaba and Koltay, László, (2019), Incomplete paired comparisons in case of multiple choice and general log-concave probability density functions, *Central European Journal of Operations Research*, 27(2), 515–532.
13. Rao, PV and Kupper, Lawrence L, (1967), Ties in paired-comparison experiments: A generalization of the Bradley-Terry model, *Journal of the American Statistical Association*, 62(317), 194–204.
14. Saaty, Thomas L, (1990), How to make a decision: the analytic hierarchy process, *European Journal of Operational Research*, 48(1), 9–26.
15. Thurstone, Louis L, (1927), A law of comparative judgment., *Psychological Review*, 34(4), 273–286.
16. Tutz, Gerhard, (1986), Bradley-Terry-Luce models with an ordered response, *Journal of Mathematical Psychology*, 30(3), 306–316.

A GENERALIZATION OF THURSTONE METHOD FOR CONSIDERING ADVANTAGES OF CERTAIN PARTICIPANTS

In this paper we investigate a paired comparison method which takes into account the advantage of a member of the pair. We use the method of Thurstone on the

basis of latent random variables, we allow three options for the decisions. The parameters are estimated with maximum likelihood (ML) method. We present a statement which provides sufficient condition for the existence and uniqueness of the ML estimation in the case of incomplete comparisons. The method is applied to the results of the European Open Chess Team Championship (2011) and our results are compared with the results of other methods.

Paired comparisons are frequently used in cases where the compared objects are evaluated subjectively. We can mention psychology, politics, marketing, decision making and sports as well, because the results of matches can be interpreted as results of the comparison of the pairs. If the number of the objects to compare is large, then it is necessary to apply incomplete comparisons.

In real life we can realize that one member of the pair might have advantage during the comparison, such as the homeland team in football, or the kick off in chess. In this paper we modify the generalized Thurstone method ([11], [12]) in order to enable it to consider advantage, while keeping the possibility of ranking the objects and characterizing the differences between them numerically. It is done by not applying any more the assumption of symmetry of the intervals corresponding to the options. The structure of the paper is follows: Chapter 2 presents the Thurstone method with 3 options, and its generalization for the possibility of advantages and disadvantages. Chapter 3 contains sufficient conditions for the existence and uniqueness of the ML estimation. In Chapter 4 the method is applied for a special case in sports. We argue that although the rank is similar to the ranks of other methods, we could include into this model experience that white wins with larger probability, it is has an advantage over black. Finally Chapter 5 summarize the results.

Let n denote the number of objects to compare. In this model we allow for 3 options: worse, equal and better. We suppose that the "performance" of the object i can be characterized by the random variable denoted by ξ_i $i = 1, 2, \ldots, n$, and its expectation is m_i. The rank of the expectations provides the rank of the objects. Comparing object i and j we decide about the difference $\xi_i - \xi_j$. The set of real numbers is divided into 3 disjunct parts I_1, I_2 and I_3. If the difference $\xi_i - \xi_j$ is in I_1, then the result of the comparison is "worse", if the difference $\xi_i - \xi_j$ is in I_2, then the decision is "equal", if the difference is in I_3, then the decision is "better". If the advantage is not built in, then I_2 is symmetrical to zero. If we take into account the advantage, then, when in advantage, the decision "worse" corresponds to the interval $I_1^e = (-\infty, -D)$, decision "equal" corresponds to the interval $I_2^e = [-D, d]$, and decision "better" corresponds to the interval $I_3^e = (d, \infty)$ (see Figure 2). In case of disadvantage, the decision "worse", "equal" and "better" correspond to the opposite of the above intervals (see Figure 3). Obviously, $d \leq D$. This model allows for the case $d = D$, therefore this model is a generalization of the previous model. The probabilities of the decisions can be computed by (8)–(13). If we denote by $A^e_{i,j,k}$ the number of option k comparing objects i and j when i has advantage and by $A^h_{i,j,k}$ when i has disadvantage then the likelihood function can be expressed by (14), and the ML estimation of the parameters is (15). It can be seen that (14) depends only on the difference of the expectations, therefore one expectation can be fixed as zero. The existence and uniqueness of (15) is a key to apply the method. First let us define the graph GR^e as follows: the vertices are the objects and the vertices i and j $(i < j)$ are connected, if there exists comparison between them in case of advantage and disadvantage of i, moreover (21) or (22) hold. Then the following theorem can be proved (2. Tétel):

Theorem. Let F be a cumulative distribution function, such that $0 < F(x) < 1$, three times continuously differentiable in $\mathbb{R}$, its p.d.f. is symmetrical and the logarithm of the p.d.f. is strictly concave. Let us suppose that there exists such a pair $i_1 < j_1$ for which $0 < A^e_{i_1,j_1,2} + A^h_{i_1,j_1,2}$, there exists such a pair $i_2 < j_2$ for which $0 < A^e_{i_2,j_2,1}$ and $0 < A^h_{i_2,j_2,3}$ hold. Let us fix $m_1 = 0$. If the graph GR^e is

connected, then (14) subject to $0 \leq d \leq D, (d, D) \neq (0, 0)$ *takes its maximal value and the argument of the maximal value is unique.*

The probabilities of the options in case of advantage and disadvantage can be estimated by (23)–(28). The probability that the object in advantage is "better", "equal" or "worse" is expressed by (29), (30), (31), respectively. The above model was applied to the results of European Open Chess Team Championship (2011). The official results ("hivatalos"), the results of the evaluations with and without considering advantage (white) (I. and II.) and the results of [4] are contained in Table 1. The correlations of the different ranks are in Table 2. Based on (29), (30) and (31) we estimated the probabilities of winning, losing in advantage and tie. Table 3 contains the estimated probabilities and the confidence intervals belonging to reliability level 0.99, and the results are convincing.

Key words: paired comparison, Thurstone method, advantage, maximum likelihood estimation. *JEL code:* C02, C44.